Ejercicio 1

a) Calculamos la FdT del sistema realimentado

$$\frac{KG(s)}{1+KG(s)} = \frac{K\,\frac{s^2-6s+18}{s^2+6s-7}}{1+K\,\frac{s^2-6s+18}{s^2+6s-7}} = K\,\frac{s^2-6s+18}{(1+K)s^2+(6-6K)s+18K-7}$$

Calculamos la tabla de Routh del polinomio del denominador

s^2	$1+K$	$18K-7$
s^1	$6-6K$	$\varnothing$
s^0	$18K-7$	$\varnothing$

Aplicamos la condición de estabilidad a la 1ª columna

$$1+K>0 \Rightarrow K>-1$$
$$6-6K>0 \Rightarrow K<1$$
$$18K-7>0 \Rightarrow K>\frac{7}{18}$$

Nos quedamos con las condiciones más restrictivas

$$\frac{7}{18} < K < 1 \Rightarrow \boxed{K \in \left(\frac{7}{18}, 1\right)}$$

b) Tenemos que dibujar el LdIR de G(s) usando las reglas conocidas

* El LdIR tiene 2 ramas (tantas como polos en bucle ab)
* Parten de los polos en b.abierto

$$s^2+6s-7=0 \Rightarrow s=\frac{-6\pm\sqrt{36+28}}{2} = \begin{cases} -1 \\ 7 \end{cases}$$

Terminan en los ceros en b.abierto

$$s^2-6s+18=0 \Rightarrow s=\frac{6\pm\sqrt{36-72}}{2} = \begin{cases} 3+3j \\ 3-3j \end{cases}$$

* El intervalo $(-7, 1) \in$ LdIR porque tiene 3 singularidades a su derecha (1 polo y 2 ceros)

* Es simétrico respecto al eje real

* Los puntos de ruptura son los valores de s que anulan la derivada de K con respecto a s

$$\frac{\partial K}{\partial s} = -\frac{\partial \frac{1}{G(s)}}{\partial s} = -\frac{(2s+6)(s^2-6s+18)-(s^2+6s-7)(2s-6)}{(s^2-6s+18)^2}$$

igualando a cero y simplificando:

$$12s^2 - 50s - 66 = 0$$

$$s = \frac{25 \pm \sqrt{625+792}}{24} = \begin{cases} 5'21 & \notin LdlR \Rightarrow \text{no es punto de ruptura} \\ -1'05 & \in LdlR \Rightarrow \text{sí es punto de ruptura} \end{cases}$$

* Los puntos de corte con el eje imaginario son los valores de s que anulan el denominador de la FdT del sistema realimentado sustituyendo K por los valores límite de estabilidad

$$K = 1 \Rightarrow \quad 2s^2 + 11 = 0 \Rightarrow s = \sqrt{-5'5} = \pm 2'3j$$

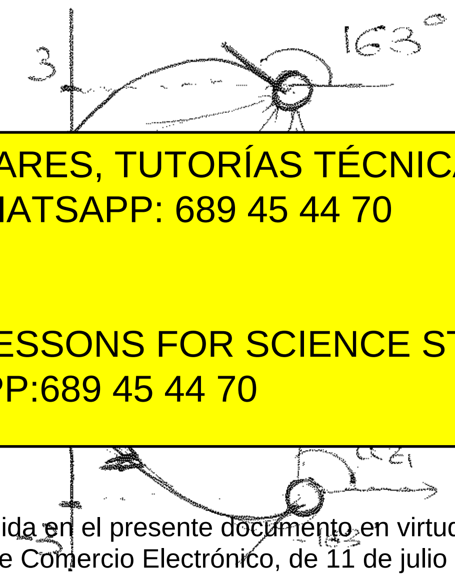
* Ángulos de entrada a los ceros

$$\angle_{z_1} = 180 - a_{z_1} + a_{p_1} + a_{p_2} = 180 - 90 + 56'3 + 16'7 = 163°$$

$$a_{z_1} = 90°$$

$$a_{p_1} = \operatorname{atan}\left(\frac{3}{2}\right) \simeq 56'3°$$

$$a_{p_2} = \operatorname{atan}\left(\frac{3}{10}\right) \simeq 16'7°$$



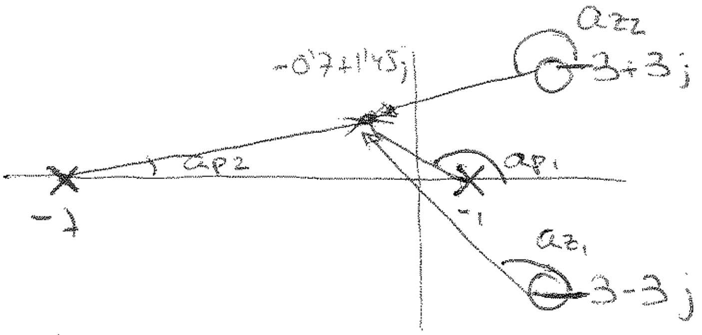
c) $T_s = \frac{4}{\zeta\omega_n}$ El punto con menor tiempo de respuesta es el que tiene mayor $\zeta\omega_n \Rightarrow$

$\Rightarrow$ Parte real de los polos del sistema realimentado más negativa.

La fórmula es válida para polos complejos y conjugados. Viendo el LdIR el punto más a la izquierda que cumple dicha restricción coincide (en el límite) con el punto de ruptura.

$$\zeta\omega_n = 1'05 \Rightarrow \boxed{T_s = \frac{4}{1'05} = 3'80\ s}$$

d) Para comprobar que $s = -0'7 + 1'45j \in$ LdIR aplico la condición de fase a dicho punto



$$a_{p1} = 180 - \operatorname{atan}\left(\frac{1'45}{1'7}\right) \simeq 139'5°$$

$$a_{p2} = \operatorname{atan}\left(\frac{1'45}{6'3}\right) \simeq 12'9°$$

$$a_{z1} = 180 - \operatorname{atan}\left(\frac{4'45}{3'7}\right) \simeq 129'7°$$

$$a_{z2} = 180 + \operatorname{atan}\left(\frac{1'55}{3'7}\right) \simeq 202'7°$$

$$a_{z1} + a_{z2} - a_{p1} - a_{p2} = 129'7 + 202'7 - 139'5 - 12'9 = 180°$$

Cumple la condición de fase, luego pertenece al LdIR

Para calcular el valor de K que hace que los polos del sistema realimentado se ubiquen en $s = -0'7 + 1'45j$ aplico la condición de módulo

Adicionalmente, observamos que el valor de K obtenido es consistente con el rango de estabilidad del apartado a

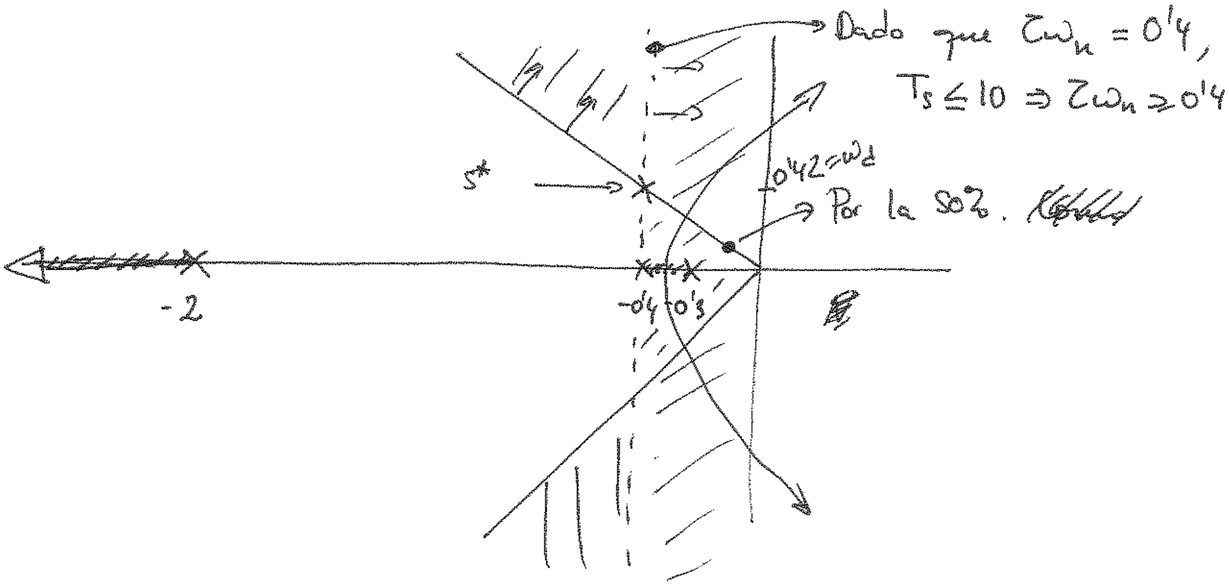
Ejercicio 2 Comienzo estudiando los requisitos:

- Altura exacta constante: requiere tipo 1 para anular el error en entrada escalón.

- Cambios de altura en 10s: tiempo de respuesta (asumo al 98%) de 10s $\Rightarrow 10 = \frac{4}{\zeta \omega_n} \Rightarrow \zeta\omega_n = \frac{4}{10} = 0'4$

- Sobreoscilación 5% $\Rightarrow \zeta = 0'69$ $\omega_n = 0'58$ $\Rightarrow \omega_d = 0'42$

El lugar de las raíces con zona prohibida:

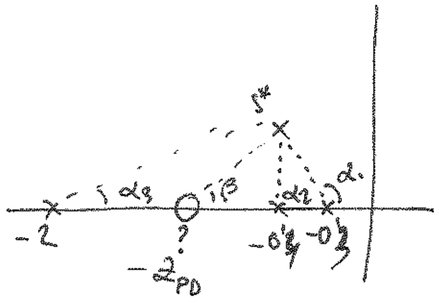


a) La planta es de tipo 0, no 1. Por tanto el PI es necesario. Al no incluirlo el diseño defectuoso, el error ante escalón no era nulo. Esta es la razón de que el vuelo se produjera a distinta altura de la deseada.

b) Para tener un diseño correcto, voy a necesitar el PD para hacer que el lugar pase por la zona válida, y el PI para elevar el tipo.

Comienzo con el transitorio, y elijo un punto s^* en el límite de los requisitos:

$\underline{s^*} = -\zeta\omega_n \pm j\omega_d = \underline{-0'4 \pm j0'42}$. Aplico cond. de fase:



$$\alpha_1 = 180 - \text{atan}\,\frac{0'42}{0'1} = 103'4^\circ$$

$$\alpha_2 = 90^\circ \qquad \alpha_3 = \text{atan}\,\frac{0'42}{1'6} = 14'7^\circ$$

$$180 = \beta - \alpha_1 - \alpha_2 - \alpha_3 \Rightarrow \beta = 388'1^\circ = 28'1^\circ$$

$$\text{atan}\,\frac{0'42}{z_{PD} - 0'4} = 28'1^\circ \Rightarrow \frac{0'42}{z - 0'4} = 0'534 \Rightarrow z_{PD} = 1'19$$

Para llevar los polos dominantes a s^*, aplico cond. de módulo:

$$K = \left|\frac{-1}{C(s)G(s)}\right| = \frac{|s^*+2||s^*+0'3||s^*+0'4|}{|s^*+1'19|} = \frac{|-1'6+0'42j||-0'1+0'42j||0'42j|}{|0'79+0'42j|} =$$

$$= \frac{1'65 \cdot 0'43 \cdot 0'42}{0'89} = 0'333$$

Luego el PD es: $0'333(s+1'19)$

Permanente

Necesito el polo en el origen y, para no estropear el transitorio, un cero bastante cercano. Como no hay requisitos de error en rampa, lo fijo respetando esa única consideración, en el intervalo $(-0'3 \dots 0)$, para que tampoco interfiera con los polos de la planta. Por ejemplo, en $-0'1$.

$z_{PI} = +0'1$. Y calculo su influencia en la ganancia final:

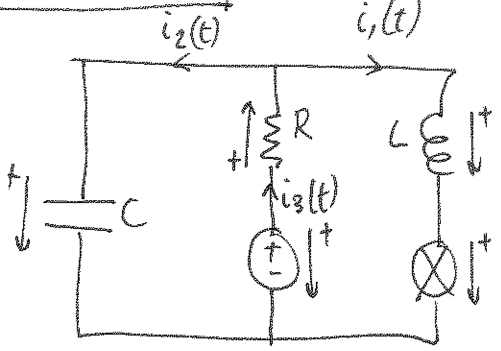
$$k_{PI} = \frac{|s^*|}{|s^* + 0'1|} = \frac{0'58}{0'52} = 1'1 \qquad PI = 1'1 \, \frac{(s+0'1)}{s}$$

c) $$PID = PD \cdot PI = 0'333 \cdot 1'1 \, \frac{(s+0'1)(s+1'19)}{s} = 0'366 \, \frac{s^2 + 1'29 s + 0'119}{s} =$$

$$= 0'366 s + 0'47 + \frac{0'044}{s} \Rightarrow \boxed{\begin{array}{l} K_p = 0'47 \\ K_d = 0'366 \\ K_i = 0'044 \end{array}}$$

Ejercicio 3

a) (Solución sujeta al etiquetado elegido)



b) $i_1(t)+i_2(t)=i_3(t) \quad \| \quad I_1(s)+I_2(s)=I_3(s)$

$$v_r(t)=Ri_3(t)+Li_1'(t)+V_e(t)$$

$$V_r(s)=RI_3(s)+LsI_1(s)+V_e(s)$$

$$v_r(t)=Ri_3(t)+\frac{1}{C}\int i_2(t)dt$$

$$V_r(s)=RI_3(s)+\frac{1}{Cs}I_2(s)$$

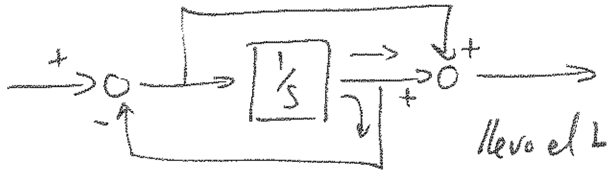
Efectos en el motor: $T(t)=K_i i_1(t) \quad \| \quad T(s)=K_i I_1(s)$

$$v_e(t)=K_e\omega(t) \quad \| \quad V_e(s)=K_e\Omega(s)$$

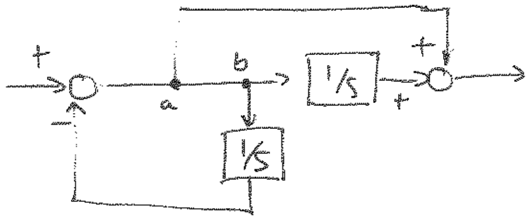
Al modelar la parte mecánica se observa que:

- Hay simetría, por lo que pueden sumarse dos veces la parte repetida.
- El eje central y los dos más alejados giran a la misma velocidad al tener el mismo número de dientes y estar conectados por un engranaje "loco". En todo caso, esto se observa tb de la relación de dientes explícita: $\omega(t)=\frac{N_p}{N_c}\frac{N_c}{N_p}\omega_3(t)$. Lo mismo ocurrirá con los pares. Por tanto,

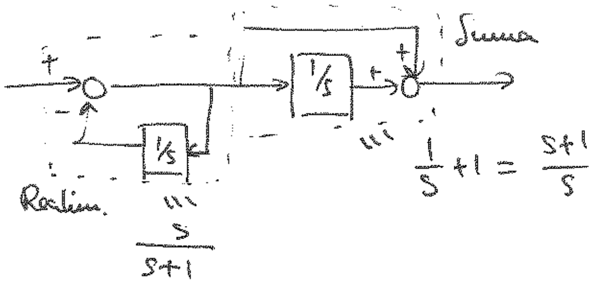
$$T(t)=\underbrace{2B\omega(t)+2J\dot{\omega}(t)}_{\text{Eje del motor}}+\underbrace{2\frac{N_c^2}{N_p^2}J_p\dot{\omega}(t)}_{\text{Ejes de los piñones*}}+\underbrace{2\left(B\omega(t)+2J\dot{\omega}(t)\right)}_{\text{Ejes anteriores}}=$$

c) 

llevo el bloque hacia la dcha:



Intercambio los nudos a y b:



En serie queda:

Por tanto, el sistema final es:

d) Al tener un sistema de tipo ∅ con realimentación unitaria, sabemos que

$$e(\infty) = \frac{1}{1+K_p} \Rightarrow 0'9 = \frac{1}{1+\lim\limits_{s\to\emptyset} G(s)} = \frac{1}{1+\frac{1}{4R+1}} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow 0'9 = \frac{1}{\frac{4R+2}{4R+1}} = \frac{4R+1}{4R+2} \Rightarrow 3'6R + 1'8 = 4R+1 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow 0'8 = 0'4R \Rightarrow \underline{R = 2}$$