Centro Universitario de la Defensa Zaragoza

Examen de Sistemas Automáticos
Parcial 2

Ej. 1	Ej. 2	Test	Total

Apellidos, Nombre:
Sección:
Fecha: 23 de enero de 2016

- **Atención**: el enunciado consta de **dos ejercicios** prácticos y un test de respuesta múltiple
- Resuelva **todos** los ejercicios prácticos, además del test
- Utilice únicamente **bolígrafo negro o azul**

Sistemas de 2º orden básico

$$\omega_d = \omega_n\sqrt{1-\zeta^2} \quad T_p = \frac{\pi}{\omega_d} \qquad S_{\%} = 100 \times e^{-\pi\zeta/\sqrt{1-\zeta^2}}$$

$$T_{s_{95\,\%}} \approx \frac{3}{\zeta\omega_n} \qquad T_{s_{98\,\%}} \approx \frac{4}{\zeta\omega_n} \quad \zeta = \frac{-\ln(S_{\%}/100)}{\sqrt{\pi^2 + \ln^2(S_{\%}/100)}}$$

Sistemas realimentados

$$e_{\text{escalón}}(\infty) = \frac{1}{1+K_p} \quad e_{\text{rampa}}(\infty) = \frac{1}{K_v} \quad e_{\text{parábola}}(\infty) = \frac{1}{K_a}$$

Lugar de las raíces

$$\sigma_a = \frac{\sum \text{polos} - \sum \text{ceros}}{\#\text{polos} - \#\text{ceros}} \qquad \theta_a = \frac{180(2k+1)}{\#\text{polos} - \#\text{ceros}}$$

$$\angle_{\text{salida/llegada}} = 180 - \sum \angle\text{sing. del mismo tipo} + \sum \angle\text{sing. distinto tipo}$$

Diagramas de Bode

$$M_F \approx 100\zeta \quad |G(j\omega_c)| = 1 = 0\,\text{dB} \quad M_F = 180^\circ + \angle G(j\omega_c) \quad G_{\text{PID}}(s) = K_p + \frac{K_i}{s} + K_d s$$

1. **(3.5 puntos)** Una cierta planta tiene la siguiente función de transferencia:

$$G(s) = \frac{K}{(s+2)(s+4)(s+8)}$$

Se pide:

a) Dibujar el lugar de las raíces del sistema realimentado al variar K calculando toda la información relevante

Se sabe que para $K = 96$ el sistema está trabajando de tal forma que su respuesta ante escalón exhibe cierta sobreoscilación y que sus polos de bucle cerrado cumplen de forma estricta la inecuación que establece la aproximabilidad a segundo orden. Además se sabe que el polo dominado se encuentra en $s = -10$.

Se pretende controlar el sistema para que exhiba un tiempo de respuesta entre las dos terceras partes y las dos quintas partes del actual, una sobreoscilación máxima del 14 % y un tiempo de pico lo más pequeño posible.

Se pide:

b) Identificar la zona válida y el punto s^* que cumple con los requisitos

c) Calcular el controlador PD correspondiente

d) Calcular el controlador red de retardo que permite reducir el error ante entrada escalón a la mitad, posicionando el polo de la red en $s = -0.1$

2. **(3.5 puntos)** Se parte de un sistema cuya función de transferencia de rama directa es:

$$G(s) = \frac{25}{s(s+0.5)(s+50)}.$$

Con el objetivo de mejorar su transitorio y su permanente se ha añadido un controlador PID comercial y se han fijado sus constantes a los valores $K_p = 50, K_i = 80$ y $K_d = 5$. Se pide:

a) Dibujar el diagrama de Bode resultante de anteponer dicho PID a la planta

b) Utilizando el diagrama de Bode, calcular el máximo valor de K que hace que el sistema realimentado tenga mínima sobreoscilación. Suponiendo que dicho valor de K debe ser integrado como parte del PID, reajuste los valores de K_p, K_i y K_d para que los ceros del controlador no varíen

c) Suponiendo que el sistema realimentado siempre es aproximable a segundo orden, ¿qué tiempo de respuesta debemos esperar para valores elevados de K?

3 puntos, +0.2 cada acierto, -0.1 cada error. Marque todas las respuestas que considere correctas.
¡Atención! Si hay más respuestas incorrectas que correctas la calificación final del test será de **cero**.

1. En un diagrama de Bode de un sistema en bucle abierto el diagrama de la fase es constante a -180 grados:
   - a) ☐ El sistema tiene un único cero en el origen
   - b) ☐ Esto no es posible
   - c) ☒ Ninguna de las otras
   - d) ☐ El sistema tiene un único polo en el origen
2. Dado un sistema genérico y requisitos genéricos:
   - a) ☒ Si se puede controlar con una red de anticipo también se podrá con un PD
   - b) ☐ Se podrá siempre controlar con un PI
   - c) ☐ Si se puede controlar con un PI también se podrá con una red de retardo
   - d) ☐ Se podrá siempre controlar con un PD
3. Dada $G(s) = \dfrac{s+2}{(s+4)^2}$ y una entrada escalón unitario, el sistema:
   - a) ☐ En bucle cerrado comete un error de $1/8$
   - b) ☒ En bucle abierto comete un error de $7/8$
   - c) ☒ En bucle cerrado comete un error de $8/9$
   - d) ☐ En bucle abierto comete un error de $1/8$
4. Dada $G(s) = \dfrac{s+5}{(s+8)s^2}$ y requisito de error nulo ante escalón en bucle cerrado:
   - a) ☒ No se necesita ningún controlador
   - b) ☐ Se necesita un controlador de tipo RR
   - c) ☐ No se puede obtener error nulo ante escalón
   - d) ☐ Se necesita un controlador de tipo PI
5. Dada la función de transferencia $G(s) = \dfrac{1}{(s+2)^3}$, en el correspondiente lugar de las raíces:
   - a) ☒ El punto de ruptura está en $s = -2$
   - b) ☒ Existe un rango de valores de K que permite aproximar el sistema a uno de segundo orden
   - c) ☐ Al variar K el sistema es siempre estable
   - d) ☒ Las asíntotas coinciden con las ramas
6. Dada una señal de entrada $r(t) = sin(10t - 30)$ y una $G(s) = \dfrac{10}{s}$:
   - a) ☐ La salida es $y(t) = 0.1sin(10t - 30)$
   - b) ☐ La salida es $y(t) = sin(10t + 30)$
   - c) ☐ La salida es $y(t) = 0.1sin(10t + 120)$
   - d) ☒ La salida es $y(t) = sin(10t - 120)$
7. Para controlar un sistema se necesita desplazar hacia abajo el diagrama de Bode de la amplitud 30 dB. Por tanto se necesita:
   - a) ☐ Un polo en el origen
   - b) ☐ Una $K = 0.316$
   - c) ☐ Un cero en el origen
   - d) ☐ Una $K = 31.6$
8. Dada una entrada escalón y una función de transferencia de segundo orden sin ceros. Al realimentarla y variar K:
   - a) ☐ La respuesta nunca puede ser periódica
   - b) ☐ Toda las respuestas con sobreoscilación comparten tiempo de pico
   - c) ☒ Toda las respuestas con sobreoscilación comparten tiempo de respuesta
   - d) ☒ La respuesta puede ser críticamente amortiguada
9. Dada la FdT $G(s) = \dfrac{5}{(s+1)(s-5)}$ con un controlador proporcional en realimentación:
   - a) ☒ Es inestable y no se puede controlar con este controlador
   - b) ☐ Se puede obtener una sobreoscilación del 20 %
   - c) ☐ Se puede obtener un tiempo de pico de π segundos
   - d) ☐ Se puede obtener un tiempo de respuesta de $4/3$ segundos
10. Un sistema estable en realimentación comete un error nulo ante entrada rampa:
    - a) ☐ El error ante parábola es con certeza acotado y distinto de cero
    - b) ☐ Tiene un único polo en el origen
    - c) ☒ El error ante escalón es con certeza nulo
    - d) ☒ Tiene al menos dos polos en el origen

7) ASÍNTOTAS 60, 180, 300 GRADOS

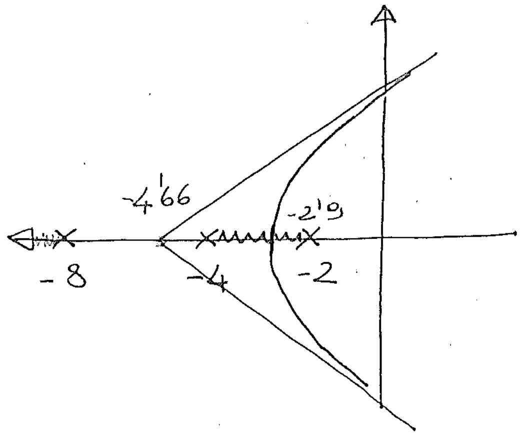
3 POLOS $\rightarrow$ 3 RAMAS

G.R. 3 $\rightarrow$ 3 ASINTOTA

$$\sigma_a = \frac{-2-4-8}{3} = 4'66$$

ÁNGULOS ASÍNTOTAS

60, 180, 300



PTO RUPTURA:

$$-\frac{\partial}{\partial s}\frac{1}{G(s)} = \emptyset \qquad \frac{\partial}{\partial s}(s+2)(s+8)(s+4) = \emptyset \qquad \frac{\partial}{\partial s} s^3 + 14s^2 + 56 + 64 = $$

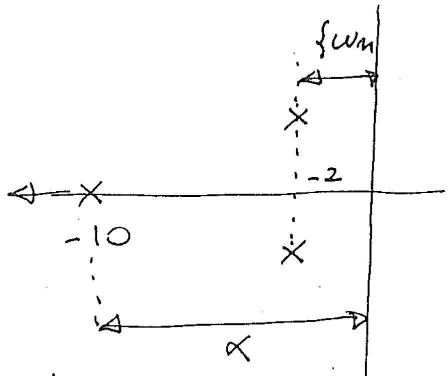
$$3s^2 + 28s + 56 = \emptyset \qquad s = -2'9$$

$s = -6,43$ ✗ NO VÁLIDA

(B) SISTEMA EN BUCLE CERRADO CON $K = 96$ Y QUE EXHIBE S.O.

ADEMÁS CUMPLE LA APROXIMABILIDAD A 2° ORDEN CON UNO DE LOS POLOS (EL DOMINADO) EN $s = -10$

LA SITUACIÓN ES LA SIGUIENTE:



LOS DOMINANTES CUMPLEN ESTRICTAMENTE

$$\alpha \geq 5\,\xi\omega_M$$

OPCION 2: REGLA DEL BARICENTRO

($\sum p_i$ es CONSTANTE)

$$\sum p_i = -2-4-8 = -14$$

SI UNO ESTÁ EN -10 LOS OTROS DOS DEBEN TENER PARTE REAL $\xi\omega_M = 2$

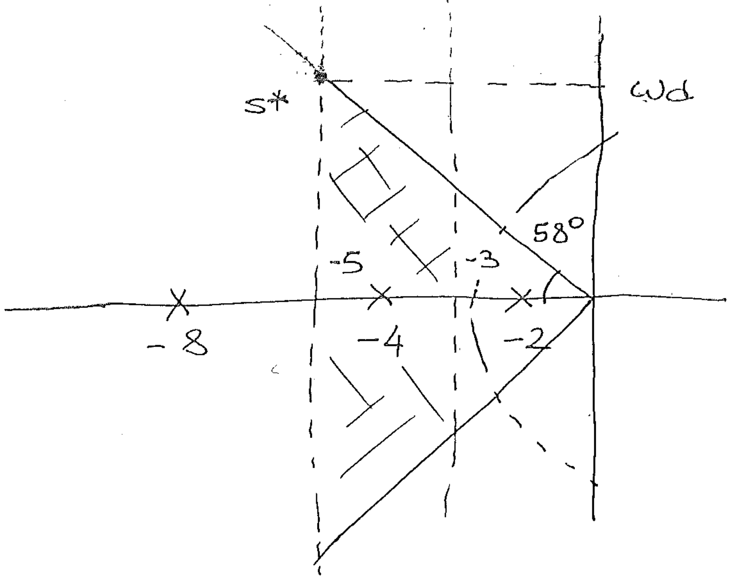
Tiempo de respuesta ACTUAL

$$T_s = \frac{4}{\xi\omega_M} = \frac{4}{2} = 2 \text{ seg}$$

se requiere x tanto:

$$2 \cdot \frac{2}{5} \leq T_s \leq 2 \cdot \frac{2}{3} \qquad \frac{4}{5} \leq T_s \leq \frac{4}{3}$$

Sobreoscilación $S\% \leq 14\% \Rightarrow \xi \geq 0'53 \Rightarrow \theta \leq 58°$



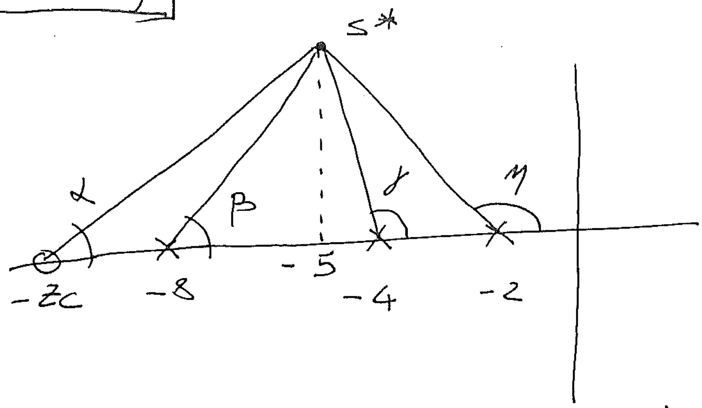
☒ ZONA VÁLIDA

- ENTRE LOS PTOS DE LA ZONA VÁLIDA EL DE MENOR TIEMPO DE PICO ES EL s* MARCADO.
- <u>NO</u> SE PUEDE USAR UN CONTROLADOR PROPORCIONAL

$s^* = -5 \pm j\,w_d$ $\qquad \operatorname{atan}\left(\frac{w_d}{5}\right) = 58^\circ \qquad w_d = 8$

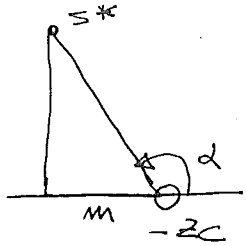
$\boxed{s^* = -5 \pm 8j}$

(C)



$\alpha - \beta - \gamma - \eta = 180 \qquad \alpha = 180 + \operatorname{atan}\frac{8}{3} + (180 - \operatorname{atan} 8) + \left(180 - \operatorname{atan}\frac{8}{3}\right)$

$\alpha = 180 + \cancel{\operatorname{atan}\frac{8}{3}} + 180 - \operatorname{atan} 8 + 180 \cancel{- \operatorname{atan}\frac{8}{3}} = 97'13^\circ > 90^\circ$



$\operatorname{atan}\frac{8}{m} = (180 - \alpha)$

$\boxed{m = 1}$

Por tanto $z_c = 4$ y $PD(s) = K_{PD}(s+4)$

$K_{PD} = \left|\frac{1}{G(s^*)\,PD(s^*)}\right| = \frac{|s^*+2|\,|s^*+8|}{96} = 0'76 \qquad PD(s) = 0'76(s+4)$

(D) ERROR ACTUAL.

$e_s(\infty) = \frac{1}{1+K_p} \qquad K_p = \lim_{s\to\infty} G(s)PD(s) = \frac{96 \cdot 0'76}{(s+2)(s+8)} = 4'56$

MITAD

$e_s(\infty) = \frac{1}{1+4{,}56} = 0'18 \Rightarrow 0'09 = \frac{1}{1+K_p} \qquad K_p = 10'11$

$$K_p = 10'11 = \lim_{s \to \infty} G(s)\,PD(s)\,RR(s) = \lim_{s \to 0} \frac{96 \cdot 0'76 (s+z_c)}{(s+2)(s+8)(s+0'1)}$$

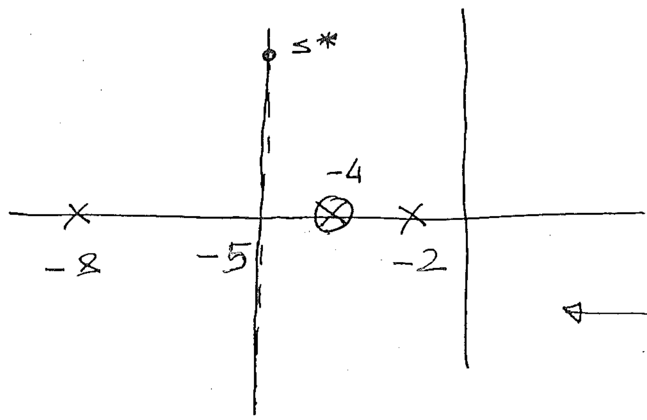
$$K_p = \frac{96\, z_c \cdot 0'76}{2 \cdot 8 \cdot 0'1} = 10'11 \qquad z_c = \frac{2 \cdot 8 \cdot 0'1 \cdot 10'11}{96 \cdot 0'76} = 0'22$$

$$PI(s) = K_{PI} \frac{(s+0'22)}{s+0'1} \qquad K_{PI} = \frac{|s^* + 0'1|}{|s^* + 0'22|} = 1'0067$$

$$PI(s) = 1'0067 \frac{(s+0'22)}{(s+0'1)}$$

$\boxed{\text{OPCIÓN 2 PARA EL PD}}$ (SIN CONDICIÓN DE FASE)

YA QUE EL $s^* = -5 \pm 8j$, PUEDO DEDUCIR DIRECTAMENTE QUE SI CANCELO EL POLO EN $s=-4$ TENDRÉ UN LDLR QUE PASA POR s^*. DE HECHO EL LDLR DE



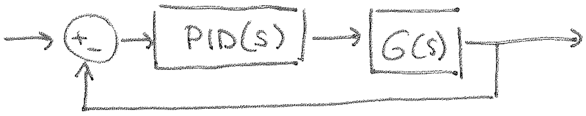
$$G^*(s) = \frac{K}{(s+2)(s+8)}$$

RESULTANTE AL CANCELAR EL POLO EN $s=-4$ ES:

ES DECIR, CONVIERTO LA FDT DE RAMA DIRECTA EN UNA DE 2° ORDEN PURO.

SOLUCIÓN EJERCICIO 2 16-01-23

Esquema



$$G(s) = \frac{25}{s(s+0'5)(s+50)} \qquad Kp = 50 \quad Ki = 80 \quad Kd = 5$$

Calculamos el PID (Fórmula en la chuleta)

$$PID(s) = Kp + \frac{Ki}{s} + Kd\,s = 50 + \frac{80}{s} + 5s = \frac{5s^2 + 50s + 80}{s}$$

$$= 5\,\frac{(s+2)(s+8)}{s}$$

a) Se pretende dibujar el diagrama de Bode de

$$PID(s)\cdot G(s) = 125\,\frac{(s+2)(s+8)}{s^2(s+0'5)(s+50)}$$

$$= \frac{125\cdot 2\cdot 8}{0'5\cdot 50}\;\frac{\left(\frac{s}{2}+1\right)\left(\frac{s}{8}+1\right)}{s^2\left(\frac{s}{0'5}+1\right)\left(\frac{s}{50}+1\right)}$$

Frecuencias de corte $\omega = \{0'5,\ 2,\ 8,\ 50\}$

Frecuencia inicial $\omega = 10^{-2}$ (viendo gráfica adjunta)

Ganancia inicial:

$$20\log\frac{125\cdot 2\cdot 8}{0'5\cdot 50} = 38'0\,dB$$

$$+\ 2\cdot 20\log\frac{1}{0'01} = 80\,dB$$

$$\Rightarrow 118\,dB$$

Fase inicial: 2 polos en origen $\Rightarrow -180^\circ$

Fase final: G. Relativo $\times -90 = -180^\circ$

Tabla pendientes ganancia

	0'01 – 0'5	0'5 – 2	2 – 8	8 – 50	50 – 1000
Polo en s=0	-20	-20	-20	-20	-20
Polo en s=0	-20	-20	-20	-20	-20
Polo en s=-0'5	0	-20	-20	-20	-20
Cero en s=-2	0	0	+20	+20	+20
Cero en s=-8	0	0	0	+20	+20
Polo en s=-50	0	0	0	0	-20
Total	-40	-60	-40	-20	-40

Tabla pendientes fase

	0'01 – 0'05	0'05 – 0'2	0'2 – 0'8	0'8 – 5	5 – 20	20 – 80	80 – 500	500 – 1000
Polo en s=-0'5		-45	-45	-45				
Cero en s=-2			45	45	45			
Cero en s=-8				45	45	45		
Polo en s=-50					-45	-45	-45	
Total	0	-45	0	45	45	0	-45	0

(b) Mínima S% $\Rightarrow$ Máximo MF $\Rightarrow$ Máximo ϕ

La máxima fase se observa en el intervalo $\omega \in [20, 80]$

En dicho intervalo hay que buscar el punto que maximice K $\Rightarrow$ mínima ganancia

Esta se obtiene en $\omega = 80$ rad/s con un valor aproximado de -35 dB

$$20 \log K = 35 \text{dB} \Rightarrow K = 56'23$$

El nuevo PID es $\quad PID(s) = 56'23 \cdot 5 \dfrac{(s+2)(s+8)}{s}$

De donde se obtienen las nuevas constantes

$Kp = 50 \cdot 56'23 = 2811 \qquad Ki = 4498 \qquad Kd = 281'1$

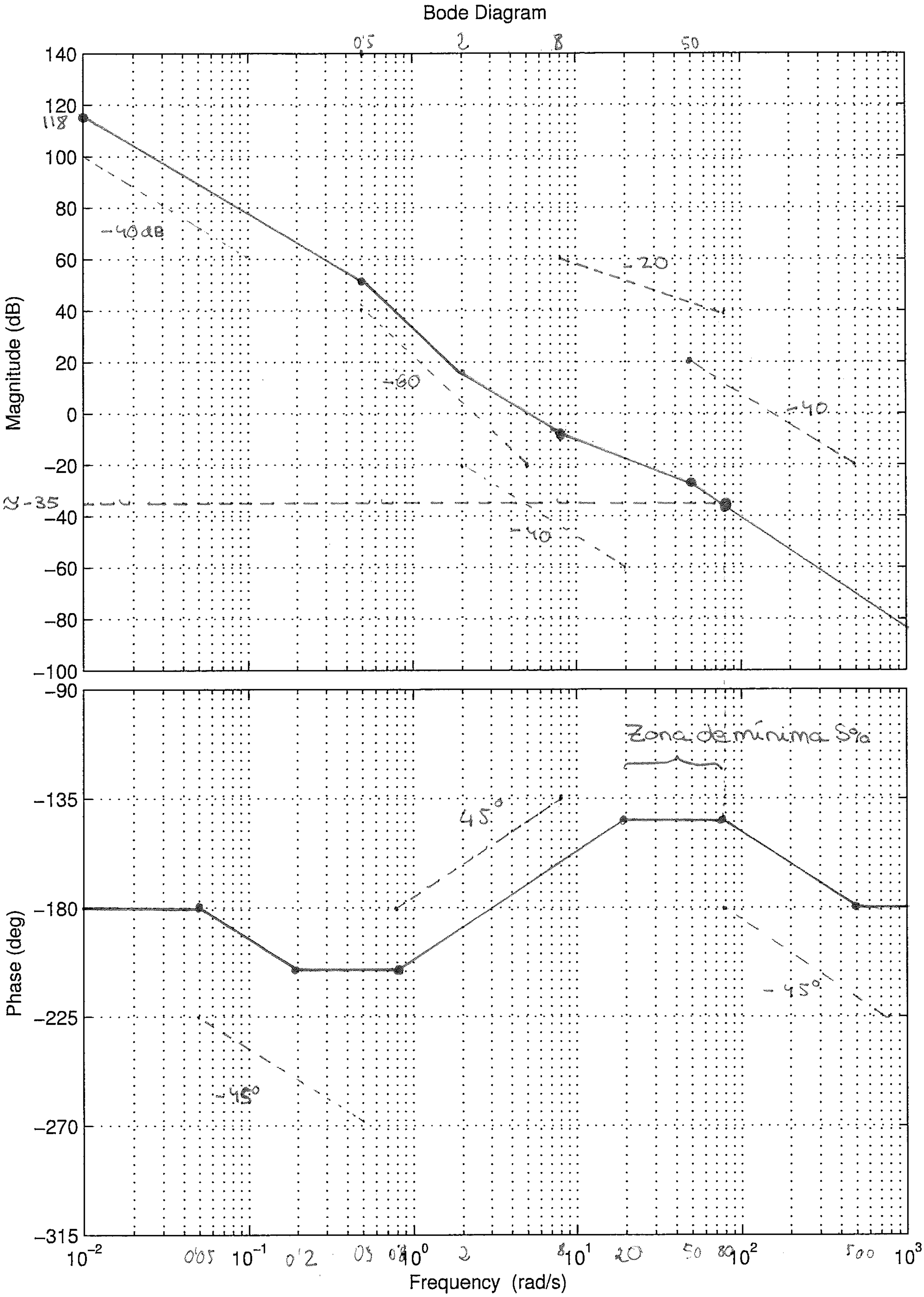
(c) El grado relativo de PID(s) G(s) es 2

Tenemos 2 asíntotas verticales en

$$\sigma_a = \frac{\sum p_i - \sum z_i}{\# p_i - \# z_i} = \frac{-0'5 - 50 + 2 + 8}{2} = -22'75$$

Para valores de K grandes los polos del sistema realimentado (los que se asume son dominantes) tendrán entonces parte real $-22'75 \Rightarrow \zeta\omega_n = 22'75$

$$T_s = \frac{4}{22'75} = 0'1758$$



Bode Diagram
Magnitude (dB)
Phase (deg)
Frequency (rad/s)
0'5
2
8
50
118
-40dB
-20
-60
-40
-40
≈-35
Zona de mínima S%
45°
-45°
-45°
0'05
0'2
0'5
0'8
2
8
20
50
80
500