Apellidos:
Nombre:

VARIEDADES DIFERENCIABLES Y VDEE
Grupo A Examen final de Febrero del 2014
TEST.

- No se pueden utilizar libros, ni apuntes.
- Las justificaciones han de estar suficientemente detalladas.
- Tiempo: 1 hora.

Decir si son ciertas o falsas las siguientes afirmaciones, justificando la respuesta:[1]

1) Un punto cualquiera de una variedad diferenciable de dimensión m tiene siempre un entorno que es difeomorfo a todo $\mathbb{R}^m$.

CIERTO	
FALSO	

Justificación:

---

2) Todo difeomorfismo local entre variedades transforma cada dominio regular en un dominio regular.

CIERTO	
FALSO	

Justificación:

[1] Cada respuesta/justificación acertada vale 0,4 puntos. Cada una fallada descuenta 0,2 puntos. La nota final está entre -1 pto y 2 ptos.

3) Si una variedad tiene una función diferenciable cuya imagen es el intervalo cerrado $[0, 1]$, entonces es necesariamente compacta.

CIERTO	
FALSO	

Justificación:

———

4) El conjunto $D = \{(x, y, x) \in \mathbb{R}^3 : 1 \leq x^2 + y^2 + z^2 \leq 4\}$ es un dominio regular de $\mathbb{R}^3$

CIERTO	
FALSO	

Justificación:

———

5) Si ω es una 2-forma cerrada en $\mathbb{R}^3 - \{(0, 0, 0)\}$ entonces $\int_{\mathbb{S}^2_1} \omega = \int_{\mathbb{S}^2_2} \omega$, siendo $\mathbb{S}^2_r$ la esfera de radio $r > 0$ centrada en el origen con la orientación del vector normal hacia afuera.

CIERTO	
FALSO	

Justificación:

———

Apellidos:
Nombre:

VARIEDADES DIFERENCIABLES Y VDEE
Grupo A Examen final de Febrero del 2014
PARTE TEÓRICA

- No se pueden utilizar libros, ni apuntes.
- Todas las igualdades han de estar suficientemente justificadas.
- Tiempo: 1 hora.

(3 puntos)

a) Sea M variedad diferenciable, $\alpha \in \mathfrak{X}^*(M)$ una 1-forma en M. Se define:

$$\mathbf{d}\alpha : \mathfrak{X}(M) \times \mathfrak{X}(M) \ni (X, Y) \to X(\alpha(Y)) - Y(\alpha(X)) - \alpha([X, Y]) \in \mathfrak{F}(M)$$

Probar que $\mathbf{d}\alpha \in \Omega^2(M)$.

b) Supuesto $\alpha = P(x, y, z)\, dx + Q(x, y, z)\, dy + R(x, y, z)\, dz \in \Omega^1(\mathbb{R}^3)$, determinar la expresión analítica de la 2-forma $\mathbf{d}\alpha$. Probar que $\mathbf{d}\alpha = d\alpha$ siendo d el operador diferencial exterior.

Apellidos:
Nombre:

VARIEDADES DIFERENCIABLES Y VDEE
Grupo A Examen final de Febrero del 2014
PARTE PRÁCTICA

- Se pueden utilizar libros y apuntes, pero no calculadoras ni similares.
- Todas las respuestas han de estar suficientemente justificadas.
- Tiempo: 2 horas 30 minutos.

Ejercicio 1 (3 ptos).
Dar estructura de variedad diferenciable al conjunto

$$M = \left\{ (R, p) \Big/ \begin{array}{l} R \text{ es recta afin de } \mathbb{R}^2 \\ p \in R \end{array} \right\}$$

de *rectas punteadas del plano*, de forma que la aplicación $\phi : M \to \mathbb{R}^2$ que hace corresponder a cada recta punteada (p, R) su punto $p = \phi(R, p)$ sea una submersión.

Ejercicio 2 (4 ptos)
Se considera en $\mathbb{R}^3$ la forma diferencial

$$\omega = f(x)dy \wedge dz - (4zx^3 + f(x))dx \wedge dy$$

a) Determinar f sabiendo que ω es cerrada, y $f(0) = 0$.
b) Encontrar entonces otra 1-forma $\theta = Q(x, y, z)\, dy$ tal que $d\theta = \omega$.
c) Usando el teorema de Stokes, calcular el valor de la integral I_1^+ de ω sobre el *hemisferio norte* $(z \geq 0)$ de la esfera $\mathbb{S}^2$
d) Sea $I_r = \int_{\mathbb{S}_r^2} \omega$ la integral de la 2-forma ω en la esfera $\mathbb{S}_r^2$ de radio $r > 0$ centrada en el origen con la orientación del vector normal saliente. Calcular I_r para todo $r > 0$.

Soluciones.
Ejercicio 1.
Definimos

$$(m,b,\lambda)\xrightarrow{\varphi^{-1}}(R,p):\left\{\begin{array}{l} R: y=mx+b\\ p=(\lambda, m\lambda+b)\end{array}\right.$$

$$\left(\overline{m},\overline{b},\overline{\lambda}\right)\xrightarrow{\overline{\varphi}^{-1}}(R,p):\left\{\begin{array}{l} R: x=\overline{m}y+\overline{b}\\ p=\left(\overline{m}\overline{\lambda}+\overline{b},\overline{\lambda}\right)\end{array}\right.$$

El cambio de coordenadas es

$$(m,b,\lambda)\xrightarrow{\varphi^{-1}}(R,p):\left\{\begin{array}{l} R: x=(1/m)\,y-b/m\\ p=(\lambda, m\lambda+b)\end{array}\right.\xrightarrow{\overline{\varphi}}\left(\frac{1}{m},-\frac{b}{m},m\lambda+b\right)$$

y el cambio de coordenadas es $\overline{m}=1/m$, $\overline{b}=-b/m$, $\overline{\lambda}=m\lambda+b$ $(m\neq 0)$. con jacobiano

$$\left|\begin{array}{ccc} -1/m^2 & 0 & 0\\ -b/m^2 & -1/m & 0\\ \lambda & & 1\end{array}\right|=\frac{1}{m^3}\neq 0$$

Ejercicio 2.
a) $d\omega=\left(f'(x)-4x^3\right)dx\wedge dy\wedge dz=0\Rightarrow f'(x)=4x^3\Rightarrow f(x)=x^4$ (si ha de ser $f(0)=0$). Por tanto

$$\omega=x^4dy\wedge dz-(4zx^3+x^4)dx\wedge dy$$

b)

$$d\theta=-Q_zdy\wedge dz-P_zdx\wedge dz+\left(Q_x-P_y\right)dx\wedge dy$$

imponer $\omega=d\theta$ obliga a $-Q_z=x^4\Rightarrow Q=-zx^4+G(x,y)$, $P_z=0\Rightarrow P=P(x,y)$, $Q_x-P_y=-4zx^3+(G_x-P_y)=-4zx^3-x^4$, necesitamos $(G_x-P_y)=-x^4$
Podemos tomar por ejemplo $P=0$, $G=-x^5/5$ quedando

$$\theta=-\left(zx^4+\frac{x^5}{5}\right)dy$$

c) Sea $\mathbb{S}^2_+$ *hemisferio norte* $(z\geq 0)$ de la esfera $\mathbb{S}^2$ con borde parametrizado por

$$\gamma:\left\{\begin{array}{c} x=\cos t\\ y=\sin t\\ z=0\end{array}\right.;\quad\begin{array}{c} dx=-\sin t dt\\ y=\cos t dt\\ dz=0\end{array}$$

Por el Teorema de Stokes

$$\begin{aligned}\int_{\mathbb{S}^2_+}\omega &= \int_{\mathbb{S}^2_+}d\theta=\int_{\partial\mathbb{S}^2_+}\theta=\int_0^{2\pi}\gamma^*\theta\\ &= \frac{1}{5}\int_0^{2\pi}\cos^6(t)\,dt=\frac{\pi}{8}\end{aligned}$$