Cálculo numérico I

Lunes, 9/3/2015 | 1^{er} parcial | Curso 2014-2015

Apellidos: ____________ ____________ **Nombre:** ____________ **Grupo:**

`Tanto en 2) como en 3) hay que justificar las respuestas`

1) (**2 puntos**) Sea $g(x)$ una función con al menos 3 derivadas continuas y supongamos que tiene un punto fijo α. Se considera la iteración $x_{k+1} = g(x_k), k \geq 0$ con x_0 dado.

a) suponiendo que se toma x_0 suficientemente cerca de α ¿qué condición sobre $g(x)$ garantiza la convergencia de los iterados a α?

b) ¿qué quiere decir que la convergencia sea cuadrática?

c) ¿bajo qué condiciones está garantizada la convergencia cuadrática?

2) (**3 puntos**) Se considera la ecuación $e^x - x = a$ para $x \in \mathbb{R}$.

a) Demostrar que tiene dos soluciones, una positiva y otra negativa, siempre que $a > 1$.

b) Escribir la iteración de Newton para encontrar esas soluciones.

c) Demostrar que si x_0 se elige positivo, entonces la iteración converge a la raíz positiva y si x_0 es negativo, entonces converge a la solución negativa.

3) (**2.5 puntos**) Se quiere resolver el sistema $Ax = b$ con

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \\ -1 & 1 & 1 \end{bmatrix}$$

a) Describir el método de Gauss-Seidel para intentar aproximar la solución dado un $x^{(0)}$ inicial.

b) Para este ejemplo particular ¿converge el método? (para cualquier $x^{(0)}$). Enunciar con precisión el criterio aplicado describiendo qué significa cada cosa.

4) (**2.5 puntos**) (`Entregar en hoja aparte`)
Se considera la ecuación $e^x - x = a$ con $x \geq 0$. Esta ecuación tiene una única solución $x(a)$ si $a \geq 1$ (la función $a \to x(a)$ es la inversa de $x \to e^x - x$ y $x(0) = 0$).
Queremos construir una tabla de esa función para valores $1 \leq a \leq 10$ separados por una distancia **h** y con un error menor que **TOL** en cada valor $x(a)$.
Escribir pseudocódigo que describa el procedimiento para realizar esta tarea en Matlab.

CÁLCULO NUMÉRICO I

Lunes, 20/4/2015 | 2º parcial | Curso 2014-2015

Apellidos: ______________ ______________ **Nombre:** ______________ **Grupo:**_____

Hay que JUSTIFICAR todas las respuestas

1) (**3.8 puntos**) Sea $f(x) = x^6 - x^2 + 1$.

a) Usar la forma de Lagrange para encontrar $p_2(x)$, el polinomio interpolador de $f(x)$ en los puntos -1, 0, 1.

b) Si añadimos el nodo 2, encontrar el término que hay que sumar a $p_2(x)$ para obtener $p_3(x)$ **sin recalcular todo**.

c) Usando los apartados anteriores, decir cuánto valen $f[-1,0,1]$ y $f[-1,0,1,2]$.

d) El polinomio $p_2(x)$ encontrado en el apartado **a)** es un función par, lo que se puede justificar **sin necesidad de calcularlo**. Dar esa justificación.

2) (**3.7 puntos**) Se considera la función $g(x) = \displaystyle\int_0^x e^{-\frac{z^2}{2}} dz$.

a) Si se quiere aproximar $g(x)$ en el intervalo [0,3] con un error menor que ϵ y usando interpolación lineal a trozos ¿cuántos nodos se necesitan?

b) Si se quiere ahora calcular $g(a) = \displaystyle\int_0^a e^{\frac{z^2}{2}} dz$ usando la regla del trapecio compuesta y con un error menor que ϵ ¿cuántos subintervalos se necesitan?

c) ¿Qué quiere decir que una regla de cuadratura sea `exacta hasta orden N`?

d) Se considera la regla de cuadratura $I(f) = 2f(-1) + 2f(1)$ para $\int_{-2}^2 f(x)dx$ ¿Hasta qué orden es exacta?

3) (**2.5 puntos**) (`Entrega en hoja aparte`)
Se quiere implementar la aproximación descrita en el apartado **b)** del ejercicio **2)**. Escribir el pseudocódigo de una función en Matlab que, dados a y ϵ, calcule (y devuelva)

- Número de intervalos necesario.
- Valor aproximado de $g(a)$.
- Estimación del error cometido.

Estimación del error en la aproximación de $\int_a^b f(x)dx$

Error en la regla simple del punto medio: $\boxed{\left|E_{\text{punto medio simple}}(f)\right| \leq \frac{(b-a)^3}{24} \cdot \max_{x\in[a,b]} |f''(x)|;}$

Error en la regla simple del trapecio: $\boxed{\left|E_{\text{trapecio simple}}(f)\right| \leq \frac{(b-a)^3}{12} \cdot \max_{x\in[a,b]} |f''(x)|;}$

Error en la regla simple de Simpson: $\boxed{\left|E_{\text{Simpson simple}}(f)\right| \leq \frac{(b-a)^5}{2880} \cdot \max_{x\in[a,b]} |f^{(4)}(x)|.}$