

GEOMETRÍA LINEAL, grupo A

Examen final, primera parte

14 de febrero de 2014

Tiempo: 1 hora y 15 minutos

Justifica tus respuestas

1) (2 puntos)

- (a) Define aplicación afín e isomorfismo afín.
- (b) Define isometría. Da un ejemplo de un isomorfismo afín del plano afín euclídeo estándar $\mathbf{A}_{\mathbf{R}}^2$ que no sea isometría.
- (c) Demuestra que un isomorfismo afín transforma rectas en rectas y rectas paralelas en rectas paralelas.
- (d) Demuestra que una isometría del plano afín euclídeo estándar $\mathbf{A}_{\mathbf{R}}^2$ transforma rectas en rectas y rectas perpendiculares en rectas perpendiculares.

2) (1 punto) En $\mathbf{P}_{\mathbf{R}}^2$ denotamos por l_0 a la recta de ecuación $x_0 = 0$. Dada una recta cualquiera l de $\mathbf{P}_{\mathbf{R}}^2$, identificamos $\mathbf{P}_{\mathbf{R}}^2 \setminus l$ con $\mathbf{A}_{\mathbf{R}}^2$ de la siguiente forma:

- (i) Fijamos una proyectividad f de $\mathbf{P}_{\mathbf{R}}^2$ tal que $f(l_0) = l$.
- (ii) definimos la aplicación inyectiva $j = f \circ i$, donde i es la aplicación

$$i : \mathbf{A}_{\mathbf{R}}^2 \hookrightarrow \mathbf{P}_{\mathbf{R}}^2 \\ (x, y) \mapsto (1 : x : y).$$

(iii) Para todo punto $(x, y) \in \mathbf{A}_{\mathbf{R}}^2$, identificamos (x, y) con $j(x, y)$.

Consideramos los puntos $p_1 = (0 : 1 : 1)$, $p_2 = (1 : 1 : 1)$, $p_3 = (1 : 1 : 1/2)$ y $p_4 = (1 : 2 : 1)$ de $\mathbf{P}_{\mathbf{R}}^2$. Encuentra una recta l de $\mathbf{P}_{\mathbf{R}}^2$ tal que p_1, p_2, p_3, p_4 sean los vértices consecutivos de un paralelogramo.

The logo for Cartagena99 features the text 'Cartagena99' in a stylized, blue, serif font. The '99' is significantly larger and more prominent than the 'Cartagena' part. The text is set against a light blue background with a subtle gradient and a soft shadow effect.

CLASES PARTICULARES, TUTORÍAS TÉCNICAS ONLINE
LLAMA O ENVÍA WHATSAPP: 689 45 44 70

ONLINE PRIVATE LESSONS FOR SCIENCE STUDENTS
CALL OR WHATSAPP:689 45 44 70

GEOMETRÍA LINEAL, grupo A

Examen final, segunda parte
14 de febrero de 2014

Tiempo: 2 horas y 45 minutos
Justifica tus respuestas

3) (5 puntos) Consideramos la proyectividad

$$f : \mathbf{P}_{\mathbb{C}}^3 \longrightarrow \mathbf{P}_{\mathbb{C}}^3 \\ (x_0 : x_1 : x_2 : x_3) \mapsto (x_0 : -2x_0 + 3x_1 : x_2 : -x_0 + x_1 + 2x_2 + 3x_3).$$

Sea Π es plano de $\mathbf{P}_{\mathbb{C}}^3$ de ecuación $x_0 - x_1 = 0$.

- Halla los puntos fijos de f .
- Halla los planos invariantes de f .
- Encuentra todas las rectas invariantes de f contenidas en Π . Encuentra el resto de rectas invariantes de f .
- Halla un sistema de referencia proyectivo $\mathcal{R} = \{p_0, p_1, p_2, p_3; p_4\}$ de $\mathbf{P}_{\mathbb{C}}^3$ respecto del cual la matriz de f sea de la forma

$$M_{\mathcal{R}}f = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 3 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}.$$

Indicación: busca primero p_0, p_1 y p_2 y toma $p_3 = (0 : 1 : 0 : 0)$.

- ¿Es f el completado proyectivo de una proyección afín? ¿Es f el completado proyectivo de una traslación?

4) (2 puntos) Consideramos la cónica C de $\mathbf{A}_{\mathbb{R}}^2$ de ecuación $x^2 + 4xy + y^2 - x - y = 0$ y la cónica D de $\mathbf{P}_{\mathbb{R}}^2$ de ecuación $x_1^2 + x_2^2 - x_0x_1 - x_0x_2 = 0$.

- ¿Qué tipo de cónica proyectiva es D ? ¿Qué tipo de cónica afín es C ? Halla el centro de C .
- Halla las tangentes a C que pasan por el punto $(1/2, -1/2)$.

Indicación: recuerda que una recta l de $\mathbf{A}_{\mathbb{R}}^2$ es tangente a C en un punto p del lugar de ceros de C si el completado proyectivo \bar{l} de l es la tangente a \bar{C} en el punto $i(p)$, donde i es la aplicación

$$i : \mathbf{A}_{\mathbb{R}}^2 \hookrightarrow \mathbf{P}_{\mathbb{R}}^2 \\ (x, y) \mapsto (1 : x : y).$$

CLASES PARTICULARES, TUTORÍAS TÉCNICAS ONLINE
LLAMA O ENVÍA WHATSAPP: 689 45 44 70

ONLINE PRIVATE LESSONS FOR SCIENCE STUDENTS
CALL OR WHATSAPP:689 45 44 70

Cartagena99