SOLUCIONES

Universidad Carlos III de Madrid
Departamento de Economía

Examen de Matemáticas para la Economía 24/06/2011

APELLIDOS:	NOMBRE:	
DNI:	Grado: Finanzas y Contabilidad	Grupo:

IMPORTANTE

- **DURACIÓN DEL EXAMEN: 2h**
- **NO** se permite el uso de calculadoras, teléfonos móviles y, en general, de ninguna clase de aparato electrónico durante la realización del examen.
- **Sólo se entregará este cuadernillo.** Las respuestas deben escribirse en este cuadernillo ya que sólo se puntuará lo que haya escrito en él. Hay dos hojas adicionales para contestar las preguntas.
- Es imprescindible identificarse ante el profesor con un documento acreditativo oficial.
- Lea las preguntas con cuidado. Cada apartado del examen vale 0.5 puntos.

1. a) Calcular utilizando las propiedades de los determinantes

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 4 & 8 \\ 1 & 4 & 4 & 8 \\ 1 & 8 & 8 & 8 \end{vmatrix}.$$

b) Resolver la ecuación matricial $AX + B = 2A$, donde

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 4 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 2 & 4 \\ 6 & 2 \end{pmatrix}.$$

Solución:

a) *Denotando mediante r_j la fila j–ésima del determinante, las operaciones $r_2 - r_1$, $r_3 - r_1$ y $r_4 - r_1$ transforman el determinante en*

$$D = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 3 & 7 \\ 0 & 3 & 3 & 7 \\ 0 & 7 & 7 & 7 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 3 & 7 \\ 3 & 3 & 7 \\ 7 & 7 & 7 \end{vmatrix}.$$

De la misma forma, calculando $r_2 - 3r_1$ y $r_3 - 7r_1$ en el último determinante tenemos

$$D = \begin{vmatrix} 1 & 3 & 7 \\ 0 & -6 & -14 \\ 0 & -14 & -42 \end{vmatrix} = 6 \times 42 - 14 \times 14 = 56.$$

b) *Dado que A es inversible, tenemos que $X = 2I_2 - A^{-1}B$. Por otra parte,*

$$A^{-1} = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} \end{pmatrix}, \qquad A^{-1}B = \begin{pmatrix} -2 & 6 \\ 2 & -1 \end{pmatrix},$$

luego

$$X = 2I_2 - A^{-1}B = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} -2 & 6 \\ 2 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 & -6 \\ -2 & 3 \end{pmatrix}.$$

2. Dados $a, b \in \mathbb{R}$, consideramos el sistema lineal

$$\left.\begin{array}{r} -x + 2y + az = 2 \\ 2x + \ \ y + 6z = 2 \\ x - \ \ y \qquad = 1 \\ 3x \qquad + 6z = b \end{array}\right\}.$$

a) Discutir el sistema según los valores de a y b.

b) Resolver el sistema cuando sea posible.

Solución: *La matriz aumentada es*

$$\begin{pmatrix} -1 & 2 & a & 2 \\ 2 & 1 & 6 & 2 \\ 1 & -1 & 0 & 1 \\ 3 & 0 & 6 & b \end{pmatrix}.$$

Sea r_j su fila j–ésima. Las operaciones r_2+2r_1, r_3+r_2 y r_4+3r_1 permiten obtener la matriz equivalente

$$\begin{pmatrix} -1 & 2 & a & 2 \\ 0 & 5 & 6+2a & 6 \\ 0 & 1 & a & 3 \\ 0 & 6 & 6+3a & b+6 \end{pmatrix}.$$

Intercambiando r_2 con r_3 obtenemos

$$\begin{pmatrix} -1 & 2 & a & 2 \\ 0 & 1 & a & 3 \\ 0 & 5 & 6+2a & 6 \\ 0 & 6 & 6+3a & b+6 \end{pmatrix}.$$

Sobre esta matriz calculamos r_3-5r_2 y r_4-6r_2, obteniendo

$$\begin{pmatrix} -1 & 2 & a & 2 \\ 0 & 1 & a & 3 \\ 0 & 0 & 6-3a & -9 \\ 0 & 0 & 6-3a & b-12 \end{pmatrix}$$

y finalmente, r_4-r_3 da la matriz equivalente

$$\begin{pmatrix} -1 & 2 & a & 2 \\ 0 & 1 & a & 3 \\ 0 & 0 & 6-3a & -9 \\ 0 & 0 & 0 & b-3 \end{pmatrix}$$

a) *Claramente, el sistema no tiene solución cuando $b \neq 3$, porque el rango de la matriz del sistema is menor que el rango de la matriz aumentada. Cuando $b=3$ tenemos dos casos: $a \neq 2$ y $a = 2$. En el primer caso el rango de ambas matrices coincide con el númerod e variables, luego existe una única*

3. Se considera la función
$$f(x) = \frac{(x-1)^2}{2-x}.$$

a) Determinar el dominio y las asíntotas verticales de f. Demostrar analíticamente que $-2 \notin \text{Im}(f)$.

b) Calcular las asíntotas horizontales y oblicuas de f.

Solución:

a) $\text{Dom} f = \mathbb{R} - \{2\}$ *y* $x = 2$ *es la única asíntota vertical, dado que*
$$\lim_{x\to 2^-} \frac{(x-1)^2}{2-x} = \infty, \qquad \lim_{x\to 2^+} \frac{(x-1)^2}{2-x} = -\infty.$$
Si se supone que $-2 \in \text{Im}(f)$, *entonces* $-2 = f(x)$ *para algún* x, *luego se tendría la siguiente igualdad*
$$-2 = \frac{(x-1)^2}{2-x} \Rightarrow x^2 - 4x + 5 = 0.$$
Pero esta ecuación cuadrática no tiene soluciones, dado que su discriminante, $(-4)^2 - 4 \times 5 = -4$, *es negativo.*

b) *La función tiene una asíntota oblicua* $y = mx + n$, *donde*
$$m = \lim_{x\to\pm\infty} \frac{(x-1)^2}{x(2-x)} = -1$$
y
$$n = \lim_{x\to\pm\infty} \frac{(x-1)^2}{2-x} - mx = \lim_{x\to\pm\infty} \frac{(x-1)^2}{2-x} + x = \lim_{x\to\pm\infty} \frac{1}{2-x} = 0.$$
Luego $y = -x$ *es una asíntota oblicua. No hay asíntotas horizontales*

4. Se considera la función definida a trozos

$$f(x) = \begin{cases} 2|x|, & \text{si } x \leq 1; \\ ax^2 + b, & \text{si } x > 1, \end{cases}$$

donde $a, b \in \mathbb{R}$ son parámetros.

a) Estudiar la continuidad de f en $\mathbb{R}$.

b) Estudiar la diferenciabilidad de f en $\mathbb{R}$.

Solución:

a) *La función es continua en los puntos $x \neq 1$. Los límites laterales en en punto $x = 1$ son 2 (izquierda) y $a + b$ (derecha) que son iguales y coinciden con $f(1)$ sii $a + b = 2$. Por tanto, f es continua en $x = 1$ sii $a + b = 2$.*

b) *La función es derivable en todo punto $x \neq 1$ y $x \neq 0$, independientemente de los valores de a y b. No es diferenciable en $x = 0$ porque $|x|$ tiene un pico en $x = 0$. Asumiendo que $a + b = 2$, las derivadas laterales en el punto $x = 1$ valen 2 (izquierda) y $2a$ (derecha), luego f es derivable en sii $a + b = 2$ y $2a = 2$, es decir, sii $a = 1$ y $b = 1$.*

5. Se considera la función
$$f(x) = \frac{(x-1)^2}{2-x}.$$

a) Calcular los intervalos en los que f es creciente/decreciente y encontrar los máximos y mínimos locales de f en $\mathbb{R}$.

b) Calcular los extremos globales o absolutos de f en el intervalo $[0, \frac{3}{2}]$.

Solución:

a) *La función tiene una asíntota vertical en $x = 2$. La derivada es*
$$f'(x) = \frac{2(x-1)(2-x) + (x-1)^2}{(2-x)^2} = \frac{-x^2 + 4x - 3}{(2-x)^2},$$
que se anula en los puntos donde $-x^2 + 4x - 3 = 0$, es decir, en $x = 1$ y $x = 3$. Para estudiar la monotonía de f necesitamos dividir $\mathbb{R}$ en los siguinetes intervalos: $I_1 = (-\infty, 1)$, $I_2 = (1, 2)$, $I_3 = (2, 3)$ y $I_4 = (3, \infty)$ y estudiar el signo de f' en cada uno de ellos.
En I_1, $f' < 0$ ($f'(0) < 0$), en I_2, $f' > 0$ ($f'(3/2) > 0$), en I_3, $f' > 0$ ($f'(5/2) > 0$) y en I_4, $f' < 0$ ($f'(4) < 0$). Por tanto, podemos concluir qye f is decreciente en I_1 y en I_4, y creciente en I_2 y en I_3, luego $x = 1$ es un mínimo local y $x = 3$ es un máximo local. Notamos que f no tiene extremos globales.

b) *Dado que la función es continua en el intervalo cerrado y acotado $[0, 3/2]$, podemos asegurar, por el Teorema de Weierstrass que existen extremos globales. Por el apartado a) anterior, $x = 1$ es mínimo local de f y pertenece a $[0, 3/2]$, mientras que $3 \notin [0, 3/2]$. Luego, los únicos candidatos son $x = 0$, $x = 1$ y $x = 3/2$. Evaluando f en estos puntos tenemos $f(0) = 1/2$, $f(1) = 0$, y $f(3/2) = 1/2$ y por tanto $x = 0$ y $x = 3/2$ son máximos globales de f y $x = 1$ es el mínimo global en el intervalo $[0, 3/2]$.*

6. a) Halla las integrales siguientes:

$$\text{(i)} \int \frac{3x^4}{1+x^5}\,dx, \qquad \text{(ii)} \int xe^x\,dx.$$

b) Halla el área de la región acotada por la gráfica de las funciones $f(x) = x^2$ y $g(x) = 8 - x^2$.

Solución:

a) *(i) es inmediata:* $\frac{5}{3}\ln(1+x^5) + C$ *(puede hacerse el cambio de variable* $t = x^5$*); (ii)* $e^x(x-1) + C$ *(por partes,* $u = x$, $dv = e^x\,dx$*).*

b) *Las gráficas de* f *y* g *se cortan en los puntos* x *tales que* $f(x) = g(x)$*, es decir, cuando* $x^2 = 8 - x^2$*, o* $x = \pm 2$*. Dado que* $f(0) = 0 < 8 = g(0)$*,* $g(x) \geq f(x)$ *en el intervalo de integración* $[-2, 2]$*. Por definición, el área es*

$$\int_{-2}^{2} (g(x) - f(x))\,dx = \int_{-2}^{2} 8 - 2x^2\,dx = 8x - \frac{2}{3}x^3\Big|_{-2}^{2} = \frac{64}{3}\,u^2.$$