(25 puntos) Cuestiones

a) De un proceso aleatorio $x[n]$ se ha estimado $\hat{R}_x[m]$, el estimador insesgado de la autocorrelación. Para ello se ha utilizado un número de muestras L lo suficientemente grande como para poder suponer que

$$\text{var}\{\hat{R}_x[m]\} \approx 0 \qquad |m| < 100$$

El valor estimado de la autocorrelación ha sido:

$$\hat{R}_x[m] = 0,9^{|m|} \qquad |m| < 100.$$

Determine la expresión del estimador espectral de Blackman-Tukey $\hat{\Phi}_x^{BT}(e^{j\omega})$ utilizando una ventana triangular de 5 muestras no nulas

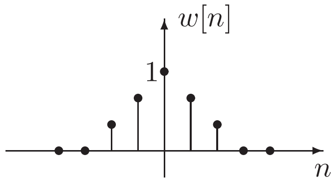

Figura 9: Ventana triangular para el método de Blackman-Tukey.

b) Sea $h[n]$, la respuesta impulsiva de un filtro FIR causal de duración D_1, es decir

$$h[n] = 0 \quad \begin{cases} \text{si } n < 0 \\ \text{si } n \geq D_1 \end{cases}$$

Sea $x[n]$ una señal de duración finita D_2 no nula para $n_0 \leq n < (n_0 + D_2)$. Determine cómo calcular $x[n] * h[n]$ usando el mínimo número posible de DFTs en los siguientes casos:

1. $n_0 = 0$.
2. $n_0 = -4$.

Solución

---

a) El estimador de Blackman-Tukey

$$\hat{\Phi}_x^{BT}(e^{j\omega}) = TF\{\hat{R}_x^{BT}[m]\} = TF\{\hat{R}_x[m]\, w[m]\}$$

siendo $w[m]$ la ventana triangular dada en la figura. Por tanto, el estimador pedido será:

$$\hat{\Phi}_x^{BT}(e^{j\omega}) = \hat{R}_x[0] + \frac{2}{3}\,\hat{R}_x[-1]\,e^{j\omega} + \frac{2}{3}\,\hat{R}_x[1]\,e^{-j\omega} + \frac{1}{3}\,\hat{R}_x[-2]\,e^{2j\omega} + \frac{1}{3}\,\hat{R}_x[2]\,e^{-2j\omega}$$

$$\hat{\Phi}_x^{BT}(e^{j\omega}) = 1 + \frac{4}{3}\,0{,}9\,\cos\omega + \frac{2}{3}\,0{,}81\,\cos 2\omega$$

b) Los métodos propuestos son:

1. En este caso la señal se extiende de 0 a D_2. El método para calcular la convolución será:
   - Se rellena con ceros $h[n]$ hasta que su duración sea $N = D_2 + D_1 - 1$.
   - Se obtiene $H[k] = DFT_N(h[n])$.
   - Se rellena con ceros $x[n]$ hasta que su duración sea N.
   - Se obtiene $X[k] = DFT_N(x[n])$.
   - Se calcula $y[n] = DFT_N^{-1}(X[k]\,H[k])$.
2. En este caso la señal se extiende de -4 a $D_2 - 4$. Se pueden utilizar dos métodos para calcular la convolución:

Método 1

- Se rellena con ceros $h[n]$ hasta que su duración sea $N = D_2 + D_1 - 1$.
- Se obtiene $H[k] = DFT_N(h[n])$.
- Se obtiene la secuencia

$$x_1[n] = x[n-4] \qquad 0 \leq n < D_2$$

- Se rellena con ceros $x_1[n]$ hasta que su duración sea N.
- Se obtiene $X_1[k] = DFT_N(x_1[n])$.
- Se calcula $y_1[n] = DFT_N^{-1}(X_1[k]\, H[k])$ $0 \leq n < N$ y nula en el resto.
- Finalmente se obtiene la secuencia

$$y[n] = y_1[n+4] \qquad -4 \leq n < N-4$$

Método 2

- Se rellena con ceros $h[n]$ hasta que su duración sea $N = D_2 + D_1 - 1$.
- Se obtiene $H[k] = DFT_N(h[n])$.
  item Se obtiene la secuencia

$$x_1[n] = \sum_{r=-\infty}^{\infty} x[n - rN] \qquad 0 \leq n < N$$

  donde $x_1[n]$ es el primer periodo de la repetición periódica con periodo N de $x[n]$
- Se obtiene $X_1[k] = DFT_N(x_1[n])$.
- Se calcula $y_1[n] = DFT_N^{-1}(X_1[k]\, H[k])$.
- Finalmente se obtiene la secuencia

$$y[n] = \sum_{r=-\infty}^{\infty} y_1[n - rN] \qquad -4 \leq n < N-4$$

  siendo nula en el resto de valores de n.