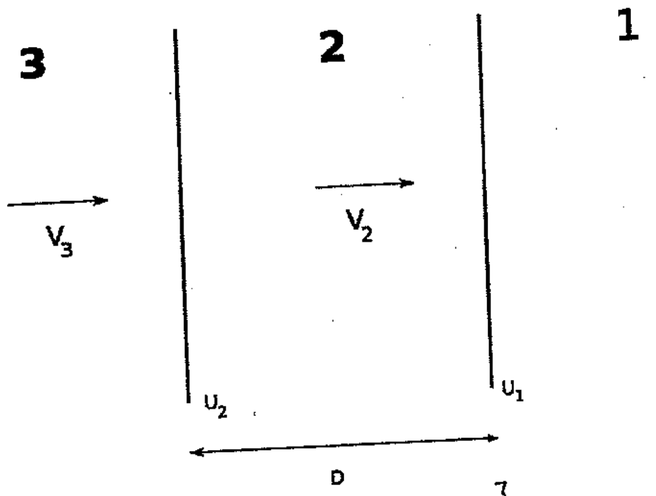
Problema 2:
En un medio infinito se propagan dos ondas de choque planas con velocidades U_1 y U_2 desconocidas. En $t = 0$, las dos ondas están separadas una distancia D y se quiere saber si las ondas coalescerán o se separarán con el tiempo. Para ello, se ha medido la velocidad del sonido a_1 y las velocidades del aire tras las dos ondas de choque $V_2/a_1 = 1.25$ y $V_3/a_1 = 4.14$

- Calcule el número de Mach de la primera onda de choque M_1 y el salto de presiones p_2/p_1 y temperaturas T_2/T_1 a través de ella. 4 puntos
- Obtenga el número de Mach de la segunda onda M_2 y el salto de presiones p_3/p_1 y de temperaturas T_3/T_1 4 puntos
- Determine si las ondas se separarán con el tiempo o coalescerán. Si eso último ocurriera, calcule el tiempo que tarda en ocurrir, dando el resultado en la forma adimensional $\tau = t/(D/a_1)$ 2 puntos



1) $\leftarrow U_1 - V_2$ $\quad\leftarrow U_1$

$M_1 = \frac{U_1}{a_1}$ $\quad \frac{U_1 - V_2}{U_1} = \frac{2+(\gamma-1)M_1^2}{(1+\gamma)\cdot M_1^2} \longrightarrow M_1 = 2 \longrightarrow \frac{p_2}{p_1} = 4'5$

$\frac{T_2}{T_1} = 1'69, \quad \frac{a_2}{a_1} = 1'3$

2) $\leftarrow U_2 - V_3$ $\quad\leftarrow U_2 - V_2$

$M_2 = \frac{U_2 - V_2}{a_2}$ $\quad \frac{U_2 - V_3}{U_2 - V_2} = \frac{2+(\gamma-1)M_2^2}{(1+\gamma)\cdot M_2^2}$

$\Downarrow$

$M_2 + \left(\frac{V_2}{a_1} - \frac{V_3}{a_1}\right)\cdot\frac{a_1}{a_2} = \frac{2+(\gamma-1)\cdot M_2^2}{(\gamma+1)\cdot M_2}$

$\Downarrow$

$\boxed{M_2 = 3}$

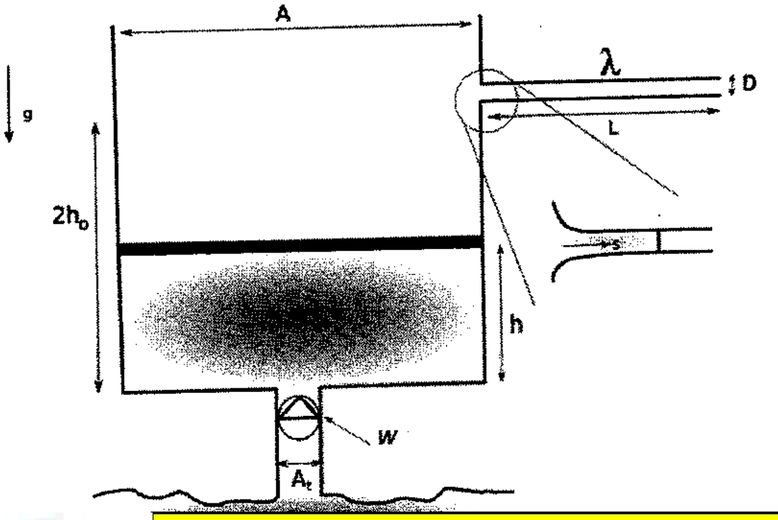
3) $\left.\begin{array}{l} S_2 = U_2 t \\ S_1 = U_1 t + D \end{array}\right\}$ $t = \frac{D}{U_2 - U_1} \Rightarrow \frac{t}{(D/a_1)} = \frac{1}{M_2\cdot\frac{a_2}{a_1} + \frac{V_2}{a_1} - M_1} = 0'317$

Ingeniería de Fluidos **10/1/2013**

Problema 1:

En la instalación hidráulica de la figura, una bomba de potencia W introduce un aceite de baja densidad ρ a través de una tubería de sección constante A_t en un depósito de área transversal A. En $t = 0$, el aceite está en reposo y llena el depósito hasta una altura h_0. Sobre el aceite se coloca una tapa móvil de masa M, como se indica en la figura. Si la densidad del aceite es comparable a la del aire y, por tanto, el efecto de la gravedad en las variaciones de presión es despreciable, atmosférica $p_d = p_a$

1. Calcule la presión del aceite en el depósito antes de encender la bomba $p_d(t = 0)$. 1 punto
2. Escriba las ecuaciones que permiten describir el desplazamiento de la tapa, la presión del aceite en el depósito $p_d(t)$ y el caudal Q de aceite que circula por la tubería con el tiempo si la bomba se pone en marcha en $t = 0$. 3 puntos
3. Si se desprecia la inercia de la tapa, calcule la presión del aceite en el despósito y escriba la ecuación algebraica que permite calcular el caudal de aceite movido por la bomba. 1 punto
4. En el momento en el que $h = 2h_0$, se destapa un conducto en la pared lateral del depósito de diámetro D y coeficiente de fricción λ. Obtenga el instante de tiempo en que eso ocurre. 1 punto
5. Obtenga, en función de los parámetros del problema, el valor mínimo de la potencia de la bomba W que permitiría estudiar el menisco de aceite dentro de la tubería de diámetro D de manera independiente al movimiento de la tapa. Para ello, imponga que el tiempo que tarda la tapa en recorrer una distancia de orden D es mucho menor que el tiempo que tarda el aceite en recorrer una distancia del orden de la longitud de la tubería $L \gg D$ 2 puntos
6. Obtenga la ecuación que describe la evolución con el tiempo del menisco de aceite en el interior de la tubería durante el transitorio inicial en que el aceite llena parcialmente la tubería. 1 punto
7. Obtenga el caudal Q_2 que sale por la tubería una vez alcanzado el estado estacionario. Obtenga el criterio que haría que $Q_2 \ll Q$. 1 punto.



1) $P_d(t=0) = P_a + \frac{M \cdot g}{A}$

2) Tapa: $\boxed{\frac{d^2h}{dt^2} = -g + \frac{P_d - P_a}{M} \cdot A}$ ① $t=0,\ h=h_0,\ \frac{dh}{dt}=0$, $P_d = P_d(t=0)$

Bomba: $\boxed{\dot{W} = \rho \cdot Q \left[\left(\frac{P_{SB}}{\rho} + e + \frac{v^2}{2}\right) - \left(\frac{P_{EB}}{\rho} + e + \frac{v^2}{2}\right)\right]}$ ② Entrada Bomba: $\frac{P_{EB}}{\rho} + \frac{v^2}{2} = \frac{P_a}{\rho}$

Continuidad en depósito: $\frac{d}{dt}\int_{\Sigma} \rho\, dV + \int \rho \bar{v} \bar{n}\, d\sigma = 0 \rightarrow \boxed{\frac{dh}{dt} = \frac{Q}{A}}$ ③ $v = \frac{dh}{dt}$

Energía en depósito: $\frac{d}{dt}\int \rho\left(e + \frac{v^2}{2}\right) dV + \int \rho\left(e + \frac{v^2}{2}\right) \bar{v}\bar{n}\, d\sigma = -\int p \cdot \bar{v} \cdot \bar{n}\, d\sigma$

$\rho\left(e + \frac{v^2}{2}\right) A \frac{dh}{dt} - \rho Q\left(e + \frac{v^2}{2}\right)_{SB} = P_{SB} \cdot v_{SB} \cdot A_t - P_d\, A \cdot \frac{dh}{dt}$

Usando ③ $\rightarrow$ $\boxed{\frac{P_d(t)}{\rho} + \frac{Q^2}{2A^2} = \frac{P_a}{\rho} + \frac{\dot{W}}{Q}}$ ④

Incógnitas: $P_d(t), Q, h_0$ resueltas usando ①, ③, ④

$\boxed{Q \cdot \frac{Mg}{A} + \frac{1}{2A^2} \cdot Q^3 = \dot{W}}$

3) $\frac{d^2h}{dt^2} = 0 \rightarrow P_d = P_a + \frac{Mg}{A} \rightarrow Q$ ④

4.) $h = h_0 + \frac{Q \cdot t}{A} \rightarrow \boxed{t_{llenado} = \frac{h_0 A}{Q}}$

5) $t_{c_1} \sim \frac{D \cdot A}{Q} \sim \frac{M \cdot g \cdot D}{\dot{W}}$

En tubería: $\frac{\partial v_t}{\partial t} + \frac{1}{\rho}\frac{\partial P}{\partial s} = -\frac{\lambda v_t^2}{2D}$

$v_{t_c}^2 \sim \frac{P_d - P_a}{\rho L} \cdot \frac{D}{\lambda}$

$t_2 \sim \frac{L}{v_{t_c}} \sim L \cdot \sqrt{\frac{\lambda \rho L}{(P_d - P_a) D}}$

$\frac{t_{c_1}}{t_2} \ll 1 \Rightarrow \dot{W} \gg \frac{M \cdot g \cdot (D/L)^{3/2}}{\lambda^{1/2}} \cdot \left(\frac{P_d - P_a}{\rho}\right)^{1/2}$

6) $\int_0^s \left(\frac{\partial v_t}{\partial t} + \frac{1}{\rho} \cdot \frac{\partial P}{\partial s} = -\frac{\lambda v_t^2}{2D}\right) ds$

$s \cdot \frac{dv_t}{dt} + \frac{1}{\rho}\left(P_a - P(0)\right) = -\frac{\lambda v_t^2}{2D} \cdot s$

Entrada: $P_d + \frac{1}{2}\rho \cdot v^2 = P(0) + \frac{1}{2}\rho \cdot v_t^2$

$s \cdot \frac{dv_t}{dt} = \frac{M \cdot g}{\rho A} + \frac{1}{2} \cdot \left(\frac{Q}{A}\right)^2 - \frac{v_t^2}{2} \cdot \left(1 + \frac{\lambda s}{2D}\right)$

$v_t = \frac{ds}{dt}$

$t=0,\ s=0,\ \frac{ds}{dt} = 0$

7) estacionario $\frac{dv_t}{dt} = 0$

Q