SOLUCIONES TDS

SEPTIEMBRE 2012

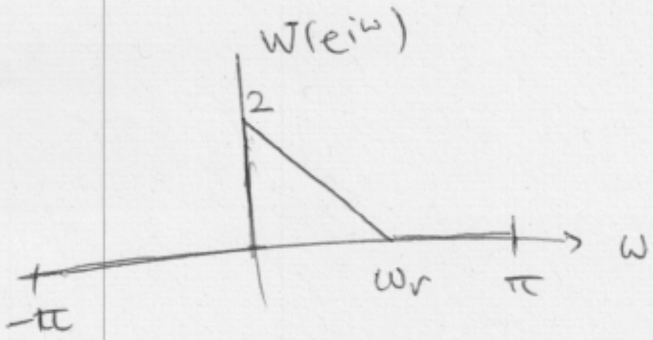
P1

$$H(e^{j\omega}) = \begin{cases} -j, & 0 < \omega < \pi \\ j, & -\pi < \omega < 0 \end{cases} \Rightarrow Y(e^{j\omega}) = \begin{cases} -jX(e^{j\omega}), & 0 < \omega < \pi \\ jX(e^{j\omega}), & -\pi < \omega < 0 \end{cases}$$

$$w[n] = x[n] + j\,y[n] \Rightarrow W(e^{j\omega}) = X(e^{j\omega}) + jY(e^{j\omega})$$

$$jY(e^{j\omega}) = \begin{cases} X(e^{j\omega}), & 0 < \omega < \pi \\ -X(e^{j\omega}), & -\pi < \omega < 0 \end{cases}$$

$$\Rightarrow W(e^{j\omega}) = \begin{cases} 2X(e^{j\omega}), & 0 < \omega < \pi \\ 0, & -\pi < \omega < 0 \end{cases}$$



- SEPT 2012 -

P2 Recordando el par transformado:

$$k \cdot a^n \cdot u[n] \longleftrightarrow \frac{k}{1 - a z^{-1}}$$

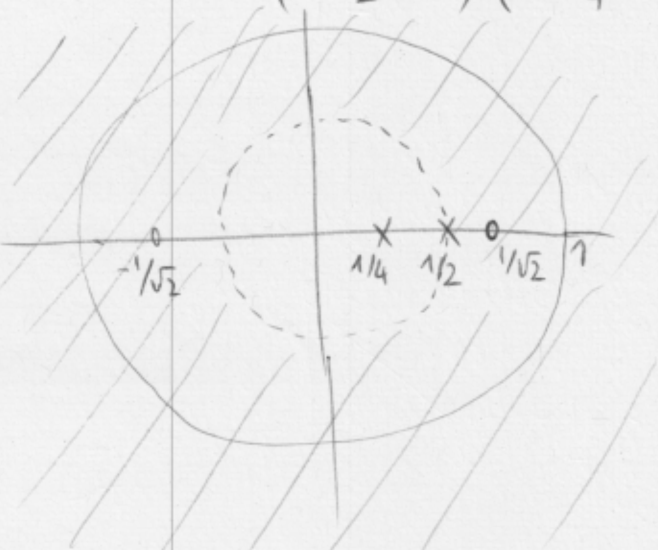
$$h[n] = -4\delta[n] - 2\left(\frac{1}{2}\right)^n u[n] + 7\left(\frac{1}{4}\right)^n u[n] \Rightarrow$$

$$\Rightarrow H(z) = -4 - \frac{2}{1 - \frac{1}{2} z^{-1}} + \frac{7}{1 - \frac{1}{4} z^{-1}} =$$

$$= -4 + \frac{5 + \frac{7}{2} z^{-1}}{1 - \frac{3}{4} z^{-1} + \frac{1}{8} z^{-2}} = \frac{1 - \frac{1}{2} z^{-2}}{\left(1 - \frac{1}{2} z^{-1}\right)\left(1 - \frac{1}{4} z^{-1}\right)}$$

(b)

$$H(z) = \frac{\left(1 - \frac{1}{\sqrt{2}} z^{-1}\right)\left(1 + \frac{1}{\sqrt{2}} z^{-1}\right)}{\left(1 - \frac{1}{2} z^{-1}\right)\left(1 - \frac{1}{4} z^{-1}\right)} \Rightarrow \begin{cases} \text{CEROS} & 1/\sqrt{2},\ -1/\sqrt{2} \\ \text{POLOS} & 1/2,\ 1/4 \end{cases}$$

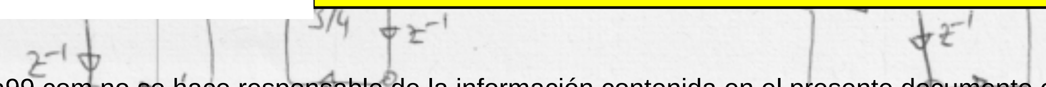


(c) ROC: $|z| > 1/2$

(d)

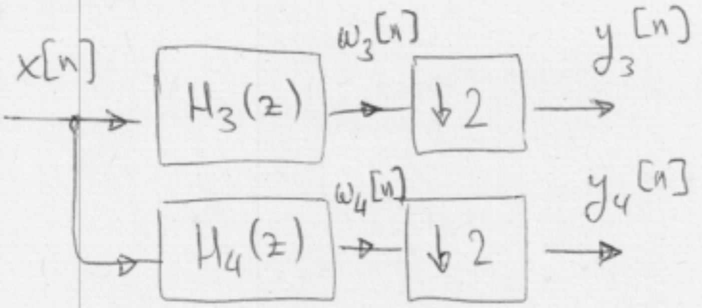
$$H(z) = \frac{1 - \frac{1}{2} z^{-2}}{1 - \frac{3}{4} z^{-1} + \frac{1}{8} z^{-2}} = \frac{Y(z)}{X(z)}$$

$$Y(z)\left(1 - \frac{3}{4} z^{-1} + \frac{1}{8} z^{-2}\right) = X(z)\left(1 - \frac{1}{2} z^{-2}\right)$$



- SEPT 2012 -

$\boxed{P3}$



$$H_3(e^{i\omega}) = 1$$

$$H_4(e^{i\omega}) = \begin{cases} 1, & 0 \leq \omega < \pi \\ -1, & -\pi \leq \omega < 0 \end{cases}$$

Veamos qué hay en $y_3(n)$ e $y_4[n]$ para intentar reconstruir $x[n]$ a partir de ellas.

$$w_3[n] = x[n] \Rightarrow y_3[n] = x[2n]$$

$\Rightarrow y_3[n]$ está formado por las muestras pares de $x[n]$, $\Rightarrow$ en la rama de arriba hemos perdido (irrecuperables) las impares $\Rightarrow$ necesitamos que la información de las $x[n]$ impares "permanezca" en la rama inferior.

Veamos qué hace $H_4(e^{i\omega})$: en primer lugar, haga lo que haga, vemos que es un sistema con inverso, ya que:

$$H_4(e^{i\omega}) \cdot H_4(e^{i\omega}) = 1 \Rightarrow h_4[n] * h_4[n] = \delta[n]$$

Por otro lado:

$$h_4[n] = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} H_4(e^{i\omega}) e^{i\omega n} \cdot d\omega = \frac{1}{2\pi}\left[\int_{-\pi}^{0} -e^{i\omega n} d\omega + \int_{0}^{\pi} e^{i\omega n} d\omega\right] =$$

$$\ldots \left[\ldots e^{i\omega n}\Big|^{0} \ldots e^{i\omega n}\Big|^{\pi} \right] = \frac{-1 + e^{-i\pi n} + e^{i\pi n} - 1}{\ldots} =$$

$j\pi n$ ... instantes impares

$\boxed{P3}$ (cont.)

Si llamamos: $x_{par}[n] = \begin{cases} x[n] & , n \text{ par} \\ 0 & , n \text{ impar} \end{cases}$

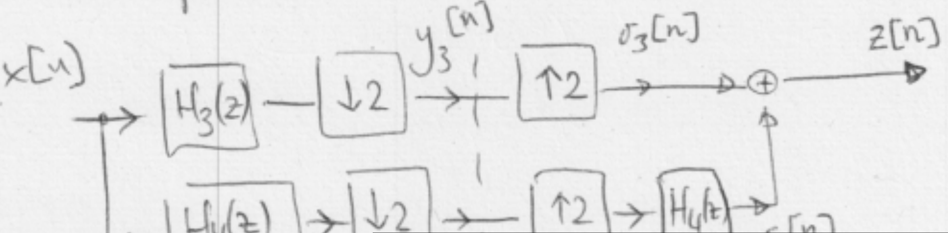
$$x_{impar}[n] = \begin{cases} 0 & , n \text{ par} \\ x[n] & , n \text{ impar} \end{cases}$$

$$\Rightarrow w_4[n] = \begin{cases} x_{impar}[n] * h_4[n] & , n \text{ par} \\ x_{par}[n] * h_4[n] & , n \text{ impar} \end{cases}$$

ya que $h_4[n]$ hace que las muestras pares de $x[n]$ sólo influyan en las muestras impares de $w_4[n]$, y las impares de $x[n]$ sólo influyan en las pares.

Entonces, $y_4[n] = w_4[2n] \Rightarrow$ nos quedamos sólo con las muestras pares de $w_4[n]$ que contienen la información de las impares de $x[n]$ pero convolucionadas con $h_4[n]$.

Por tanto, y al ser $h_4[n]$ invertible, podemos recuperar $x[n]$ desde $y_3[n]$ e $y_4[n]$ mediante:



$v_3[n] = x_{par}[n]$

$\Rightarrow z[n] = x_{par}[n] + x_{impar}[n] = x[n]$

- SEPT 2012 -

P4

$f_s = 44100 \text{ Hz}$

$f_a = 21000 \text{ Hz} \qquad \delta_a = -20\text{dB} = 0{,}1$

$f_p = 20000 \text{ Hz} \qquad \delta_p = 0{,}01 = -40\text{dB}$

$\delta = \min(\delta_a, \delta_p) = 0{,}01 = -40\text{dB}$

$\omega_a = 2\pi \dfrac{f_a}{f_s} = 0{,}952\pi = 2{,}992$

$\omega_c = \dfrac{\omega_a + \omega_p}{2} = 2{,}92$

$\omega_p = 2\pi \dfrac{f_p}{f_s} = 0{,}907\pi = 2{,}849$

$\Delta\omega = \omega_a - \omega_p = 0{,}045\pi = 0{,}143$

(a) $\delta = -40 \text{ dB} \Rightarrow$ HANNING

$M = \dfrac{8\pi}{\Delta\omega} = 175{,}7 \simeq 176$

La $h[n]$ del filtro resultante será:

$h[n] = h_d[n] \cdot \omega_{HANN}[n] =$

$= \dfrac{\operatorname{sen}[\omega_c(n - M/2)]}{\pi(n - M/2)} \cdot \{0{,}5 - 0{,}5\cos(2\pi n/M)\} =$

$= \dfrac{\operatorname{sen}[2{,}92(n-88)]}{\pi(n-88)} \cdot \{0{,}5 - 0{,}5\cos(\pi n/88)\}$

(b) $A = 40 \text{ dB} \Rightarrow$

$\beta = 0{,}5842(A-21)^{0{,}4} + 0{,}07886(A-21) = 3{,}395$

ops / muestra $\simeq 2M$ (M productos y

$\boxed{PJ}$ (a)

$f_s = 8$ kHz

longitud ventana datos: 30 ms

solapamiento entre ventanas: 2/3

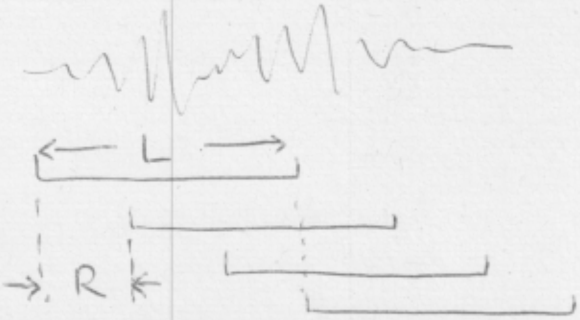
Llamando:

R: número de muestras entre ventanas consecutivas

L: número de muestras por ventana

N: número de coeficientes de la FFT $(N = 2^b)$

y haciendo uso del procedimiento STFT descrito en el apartado 10.3.2. del libro de la asignatura:



$L = f_s \cdot 30$ ms $= 240$ muestras

Al estar solapadas 2/3, el tiempo entre ventanas consecutivas es 10 ms, y por tanto:

$R = f_s \cdot 10$ ms $= 80$ muestras

Sabiendo que la condición de reconstrucción perfecta es $N \geq L \geq R$, y que hacemos FFT con número de una potencia de 2, cogemos $N = 256$

- SEPT 2012 -

P5 (cont.)

En el esquema STFT:

$$\# \text{ tramas / seg} = f_s / R = \frac{8000}{80} = 100$$

$$\# \text{ coefs / trama} = \frac{N}{2} \times 2 \text{ (módulo y fase)} = N = 256$$

Como la señal de voz es real, la FT es par y sólo necesito transmitir N/2 coeficientes complejos

Por tanto:

$$R_{b_{STFT}} = 100 \text{ tramas/seg} \times 256 \text{ coefs/trama} \times 32 \text{ bits/coef} = 819.200 \text{ bps}$$

⇒ el nuevo régimen binario es 3,2 veces superior, pero hemos conseguido transmitir la señal de forma ininteligible, tal y como nos pedía el enunciado, teniendo la posibilidad de recuperar exactamente la señal original a partir de la señal transmitida.