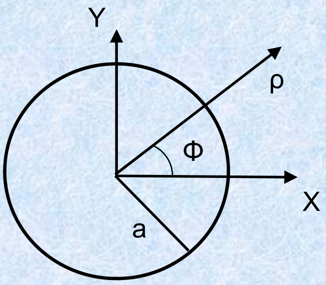
GUÍAS DE ONDAS

GUÍA CIRCULAR:

MODOS DE PROPAGACIÓN

Resolución de la Ecuación de Ondas



$$\nabla^2 \vec{E} = \mu\varepsilon \frac{\partial^2 \vec{E}}{\partial t^2}$$

$$\nabla^2 \vec{H} = \mu\varepsilon \frac{\partial^2 \vec{H}}{\partial t^2}$$

Solución: onda armónica propagándose en la dirección del eje de la guía (eje Z)

$$\vec{E}(\rho, \phi, z, t) = \mathrm{Re}\left[\left(\vec{e}(\rho, \phi) + \hat{z}e_z(\rho, \phi)\right)e^{-j\beta z}e^{j\omega t}\right]$$

$$\vec{H}(\rho, \phi, z, t) = \mathrm{Re}\left[\left(\vec{h}(\rho, \phi) + \hat{z}h_z(\rho, \phi)\right)e^{-j\beta z}e^{j\omega t}\right]$$

Resolución de la Ecuación de Ondas

Hay que resolver seis ecuaciones diferenciales:
- tres para el campo eléctrico
- tres para el campo magnético
- (una para cada componente de los campos)

A partir de las Ecuaciones de Maxwell se obtiene que las componentes transversales se pueden poner en función de las componentes longitudinales:

$$\begin{matrix} E_z \\ H_z \end{matrix} \Rightarrow \begin{matrix} E_\rho, & E_\phi \\ H_\rho, & H_\phi \end{matrix}$$

Sólo es necesario resolver dos ecuaciones diferenciales: para E_z, H_z,

Clasificación de las soluciones: Modos de propagación: Modos TM

$$H_z = 0$$

$$\nabla_t^2 e_z(\rho,\phi) + k_c^2\, e_z(\rho,\phi) = 0 \qquad k_c^2 = k^2 - \beta^2$$

$$\nabla_t^2 e_z(\rho,\phi) = \left(\frac{\partial^2}{\partial\rho^2} + \frac{1}{\rho}\frac{\partial}{\partial\rho} + \frac{1}{\rho^2}\frac{\partial^2}{\partial\phi^2}\right) e_z(\rho,\phi)$$

Ponemos la solución como:

$$e_z(\rho,\phi) = R(\rho)F(\phi)$$

$$R''\cdot F + \frac{R'\cdot F}{\rho} + \frac{R\cdot F''}{\rho^2} + k_c^2\, R\cdot F = 0$$

donde:

$$R'' = \frac{\partial^2 R}{\partial \rho^2} \qquad R' = \frac{\partial R}{\partial \rho} \qquad F'' = \frac{\partial^2 F}{\partial \varphi^2}$$

Clasificación de las soluciones: Modos de propagación: Modos TM

Multiplicando por ρ^2 y dividiendo por RF:

$$\rho^2 \frac{R''}{R} + \rho \frac{R'}{R} + k_c^2 \rho^2 = -\frac{F''}{F}$$

Sólo es función de ρ

Sólo es función de Φ

$$-\frac{F''}{F} = \xi^2$$

$$R'' + \frac{1}{\rho} R' + \left(k_c^2 - \frac{\xi^2}{\rho^2} \right) R = 0$$

Clasificación de las soluciones: Modos de propagación: Modos TM

$$F'' + \xi^2 F = 0$$

$$F = A_1 \operatorname{sen} \xi\phi + B_1 \cos \xi\phi$$

$$R'' + \frac{1}{\rho} R' + \left(k_c^2 - \frac{\xi^2}{\rho^2} \right) R = 0$$

$$R = C_1 \underbrace{J_\xi \left(k_c \rho \right)}_{\cos} + D_1 \underbrace{Y_\xi \left(k_c \rho \right)}_{\operatorname{sen}}$$

Funciones de Bessel

Clasificación de las soluciones: Modos de propagación: Modos TM

$$e_z(\rho,\phi)=\left[C_1\,J_\xi(k_c\rho)+D_1Y_\xi(k_c\rho)\right](A_1\,sen\,\xi\phi+B_1\cos\xi\phi)$$

Como el campo debe tener el mismo valor al pasar de Φ a Φ + 2π:

$\xi = \mathrm{m}$ m = 0, 1, 2,…

Como : $Y_\xi(k_c\rho)\Big|_{\rho=0} = \infty \Longrightarrow D_1 = 0$

$$e_z(\rho,\phi)=J_m(k_c\rho)(A\,sen\,m\phi+B\cos m\phi)$$

Clasificación de las soluciones: Modos de propagación: Modos TM

$$e_z(\rho,\phi)=J_m(k_c\rho)(A\,sen\,m\phi+B\cos m\phi)$$

Condición de contorno:
el campo eléctrico es perpendicular en la superficie de un conductor

$J_m(k_ca)(A\,sen\,m\phi+B\cos m\phi)=0 \Longrightarrow J_m(k_ca) = 0$

$k_ca=\chi_{mn}$ Ceros de las funciones de Bessel

$\boxed{k_c=\dfrac{\chi_{mn}}{a}}$

m = 0, 1, 2,…
n = 1, 2, 3,…

A cada pareja de m, n corresponde una solución o modo: TM_{mn}.

Clasificación de las soluciones: Modos de propagación: Modos TM

$\mathrm{H_z} = 0$ $\qquad e_z(\rho,\phi) = J_m(k_c\rho)(A\,\mathrm{sen}\,m\phi + B\cos m\phi)$ $\qquad k_c = \dfrac{\chi_{mn}}{a}$

A partir de E_z, H_z se puede calcular las demás componentes de los campos eléctrico y magnético

$$E_\rho = -\frac{j\beta}{k_c^2}\frac{\partial E_z}{\partial\rho} = -\frac{j\beta}{k_c}J'_m(k_c\rho)(A\,\mathrm{sen}\,m\phi + B\cos m\phi)e^{-j\beta z} \qquad J'_m(x) \equiv \frac{\partial J_m(x)}{\partial x}$$

$$E_\varphi = -\frac{\gamma}{k_c^2}\frac{1}{\rho}\frac{\partial E_z}{\partial\phi} = -\frac{j\beta}{k_c^2}\frac{m}{\rho}J_m(k_c\rho)(A\cos m\phi - B\,\mathrm{sen}\,m\phi)e^{-j\beta z}$$

$$H_\rho = -\frac{E_\phi}{Z_{TM}} \qquad H_\phi = \frac{E_\rho}{Z_{TM}} \qquad Z_{TM} = \eta\sqrt{1-\left(\frac{f_c}{f}\right)^2}$$

Clasificación de las soluciones: Modos de propagación: Modos TM

$$\boxed{E_z(\rho,\phi) = J_m(k_c\rho)(A\,\mathrm{sen}\,m\phi + B\cos m\phi)e^{-j\beta z}} \qquad k_c = \frac{\chi_{mn}}{a}$$

$$\boxed{\mathrm{H_z} = 0}$$

$$\boxed{E_\rho = -\frac{j\beta}{k_c}J'_m(k_c\rho)(A\,\mathrm{sen}\,m\phi + B\cos m\phi)e^{-j\beta z}} \qquad J'_m(x) \equiv \frac{\partial J_m(x)}{\partial x}$$

$$\boxed{E_\phi = -\frac{j\beta}{k_c^2}\frac{m}{\rho}J_m(k_c\rho)(A\cos m\phi - B\,\mathrm{sen}\,m\phi)e^{-j\beta z}}$$

$$\boxed{H_\rho = \frac{j\omega\varepsilon}{k_c^2}\frac{m}{\rho}J_m(k_c\rho)(A\cos m\phi - B\,\mathrm{sen}\,m\phi)e^{-j\beta z}}$$

$$\boxed{H_\phi = -\frac{j\omega\varepsilon}{k_c}J'_m(k_c\rho)(A\,\mathrm{sen}\,m\phi + B\cos m\phi)e^{-j\beta z}}$$

Clasificación de las soluciones: Modos de propagación: Modos TE

$$E_z = 0$$

$$\frac{\partial^2 h_z(\rho,\phi)}{\partial \rho^2} + \frac{1}{\rho}\frac{\partial h_z(\rho,\phi)}{\partial \rho} + \frac{1}{\rho^2}\frac{\partial^2 h_z(\rho,\phi)}{\partial \phi^2} + k_c^2\, h_z(\rho,\phi) = 0$$

$$k_c^2 = k^2 - \beta^2$$

La solución de esta ecuación es de la forma:

$$h_z(\rho,\phi) = J_m(k_c\rho)(A \operatorname{sen} m\phi + B\cos m\phi)$$

Clasificación de las soluciones: Modos de propagación: Modos TE

$$h_z(\rho,\phi) = J_m(k_c\rho)(A \operatorname{sen} m\phi + B\cos m\phi)$$

Condición de contorno:
el campo magnético es paralelo en la superficie de un conductor

$$H_\rho = -\frac{j\beta}{k_c^2}\frac{\partial H_z}{\partial \rho} \qquad H_\phi = -\frac{j\beta}{k_c^2}\frac{1}{\rho}\frac{\partial H_z}{\partial \phi}$$

$$J'_m(k_c a)(A \operatorname{sen} m\phi + B\cos m\phi) = 0 \quad \Rightarrow \quad J'_m(k_c a) = 0$$

$k_c a = \chi'_{mn}$ Ceros de las derivadas de las funciones de Bessel

$$\boxed{k_c = \frac{\chi'_{mn}}{a}}$$

m = 0, 1, 2,…
n = 1, 2, 3,…

A cada pareja de m, n corresponde una solución o modo: TE_{mn}.

Clasificación de las soluciones: Modos de propagación: Modos TE

$\mathrm{E_z = 0}$ $H_z(\rho,\phi) = J_m(k_c\rho)(A\,\mathrm{sen}\, m\phi + B\cos m\phi)e^{-j\beta z}$ $k_c = \frac{\chi'_{mn}}{a}$

A partir de E_z, H_z se puede calcular las demás componentes de los campos eléctrico y magnético

$$H_\rho = -\frac{j\beta}{k_c^2}\frac{\partial H_z}{\partial \rho} = -\frac{j\beta}{k_c} J'_m(k_c\rho)(A\,\mathrm{sen}\, m\phi + B\cos m\phi)e^{-j\beta z}$$

$$\mathrm{J'_m(x) \equiv \frac{\partial J_m(x)}{\partial x}}$$

$$H_\phi = -\frac{j\beta}{k_c^2}\frac{1}{\rho}\frac{\partial H_z}{\partial \phi} = -\frac{j\beta}{k_c^2}\frac{m}{\rho} J_m(k_c\rho)(A\cos m\phi - B\,\mathrm{sen}\, m\phi)e^{-j\beta z}$$

$k_c a = \chi'_{mn}$ $E_\phi = -Z_{TE} H_\rho$ $Z_{TE} = \frac{\eta}{\sqrt{1-\left(\frac{f_c}{f}\right)^2}}$

Clasificación de las soluciones: Modos de propagación: Modos TE

$$\boxed{\mathrm{E_z = 0}}$$

$$k_c = \frac{\chi'_{mn}}{a}$$

$$\boxed{H_z = J_m(k_c\rho)(A\,\mathrm{sen}\, m\phi + B\cos m\phi)e^{-j\beta z}}$$

$$\boxed{E_\rho = -\frac{j\omega\mu}{k_c^2}\frac{m}{\rho} J_m(k_c\rho)(A\cos m\phi - B\,\mathrm{sen}\, m\phi)e^{-j\beta z}}$$

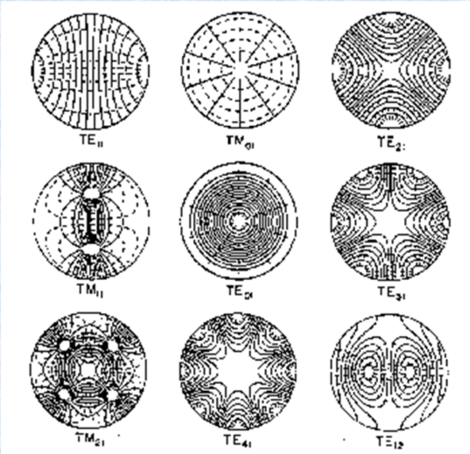
$$\mathrm{J'_m(x) \equiv \frac{\partial J_m(x)}{\partial x}}$$

$$\boxed{E_\phi = \frac{j\omega\mu}{k_c} J'_m(k_c\rho)(A\,\mathrm{sen}\, m\phi + B\cos m\phi)e^{-j\beta z}}$$

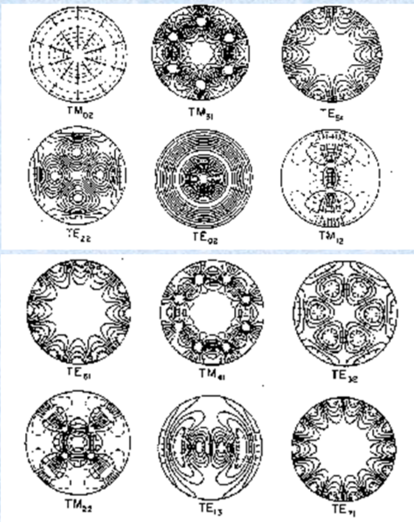
$$\boxed{H_\rho = -\frac{j\beta}{k_c} J'_m(k_c\rho)(A\,\mathrm{sen}\, m\phi + B\cos m\phi)e^{-j\beta z}}$$

$$\boxed{H_\phi = -\frac{j\beta}{k_c^2}\frac{m}{\rho} J_m(k_c\rho)(A\cos m\phi - B\,\mathrm{sen}\, m\phi)e^{-j\beta z}}$$

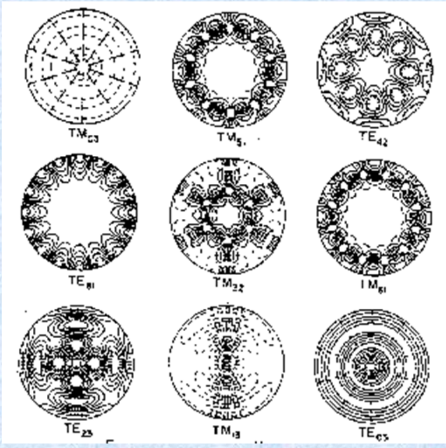
Modos de propagación



Modos de propagación



Modos de propagación



GUÍAS DE ONDAS

GUÍA CIRCULAR:

PROPIEDADES

Frecuencia de corte

Modos TM

$k_c = \frac{\chi_{mn}}{a}$

m = 0, 1, 2,…
n = 1, 2, 3,…

χ_{mn} Ceros de las funciones de Bessel

$f_c = \frac{k_c}{2\pi\sqrt{\mu\varepsilon}}$

$$\boxed{f_c = \frac{\chi_{mn}}{2\pi a\sqrt{\mu\varepsilon}}}$$

Modos TM_{mn}.

El modo TM con menor frecuencia de corte es el TM_{01}

$\chi_{01} = 2.4049$

Frecuencia de corte

Modos TE

$k_c = \frac{\chi'_{mn}}{a}$

m = 0, 1, 2,…
n = 1, 2, 3,…

χ'_{mn} Ceros de las derivadas de las funciones de Bessel

$f_c = \frac{k_c}{2\pi\sqrt{\mu\varepsilon}}$

$$\boxed{f_c = \frac{\chi'_{mn}}{2\pi a\sqrt{\mu\varepsilon}}}$$

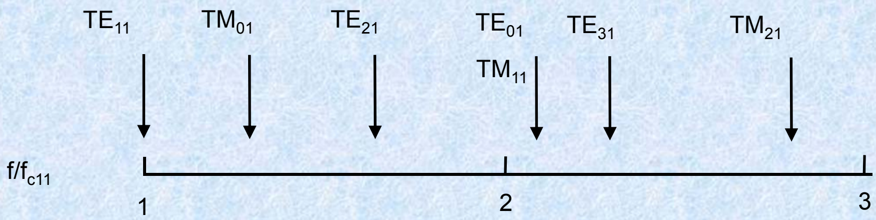
Modos TE_{mn}.

El modo TE con menor frecuencia de corte es el TE_{11}

$\chi'_{11} = 1.8412$

El modo fundamental en la guía circular es el TE_{11}

Frecuencia de corte



Los modos TE_{0n} y TM_{1n} tienen la misma frecuencia de corte

Velocidad de fase y de grupo

Longitud de onda:

$$\lambda_g = \frac{2\pi}{\beta} = \frac{\lambda_0}{\sqrt{1-\left(\frac{f_c}{f}\right)^2}} \qquad \lambda_0 = \frac{2\pi}{k}$$

Velocidad de fase:

$$v_f = \frac{\omega}{\beta} = \frac{v_0}{\sqrt{1-\left(\frac{f_c}{f}\right)^2}}$$

$$v_0 = \frac{1}{\sqrt{\mu\varepsilon}}$$

Velocidad de grupo:

$$v_g = \frac{d\omega}{d\beta} = v_0\sqrt{1-\left(\frac{f_c}{f}\right)^2}$$

$$v_0 = \frac{1}{\sqrt{\mu\varepsilon}}$$

11

Impedancia

Modos TM:

$$Z_{TM} = \frac{E_\rho}{H_\phi} = -\frac{E_\phi}{H_\rho}$$

$$Z_{TM} = \eta\sqrt{1-\left(\frac{f_c}{f}\right)^2}$$

Modos TE:

$$Z_{TE} = \frac{E_\rho}{H_\phi} = -\frac{E_\phi}{H_\rho}$$

$$Z_{TE} = \frac{\eta}{\sqrt{1-\left(\frac{f_c}{f}\right)^2}}$$

Pérdidas. Constante de atenuación

Pérdidas debidas al conductor

Modos TM:

$$\alpha_c = \frac{R_s}{a\eta}\frac{1}{\sqrt{1-\left(\frac{f_c}{f}\right)^2}}$$

Modos TE:

$$\alpha_c = \frac{2R_s}{a\eta\sqrt{1-\left(\frac{f_c}{f}\right)^2}}\left\{\left(\frac{f_c}{f}\right)^2 + \frac{m^2}{(\chi'_{mn})^2 - m^2}\right\}$$

Pérdidas. Constante de atenuación

Pérdidas debidas al dieléctrico

$$\alpha_d = \frac{\beta_0 \, \varepsilon''/\varepsilon'}{2\sqrt{1-\left(\frac{f_c}{f}\right)^2}}$$

$$\mathrm{tg}\,\delta \equiv \frac{\varepsilon''}{\varepsilon'}$$

Modo fundamental: TE_{11}

El modo fundamental es aquél que tiene la frecuencia de corte más baja:

Modo TE_{11}

$$f_c = \frac{\chi'_{11}}{2\pi a\sqrt{\mu\varepsilon}} \qquad \chi'_{11} = 1.8412$$

El siguiente modo es:

Modo TM_{01}

$$f_c = \frac{\chi_{01}}{2\pi a\sqrt{\mu\varepsilon}} \qquad \chi_{01} = 2.4049$$

El ancho de banda para conseguir propagación de un único modo en la guía circular es:

$$\frac{f_c(TM_{01})}{f_c(TE_{11})} = \frac{\chi_{01}}{\chi'_{11}} = \frac{2.4049}{1.8412} \approx 1.3 \Rightarrow$$

Menor que en una guía rectangular óptima: 2

Líneas de campo