

# GUÍAS DE ONDAS

## INTRODUCCIÓN

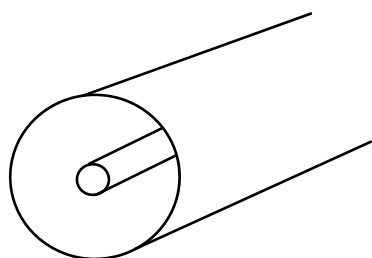
### Introducción

#### TRANSMISIÓN DE SEÑAL:

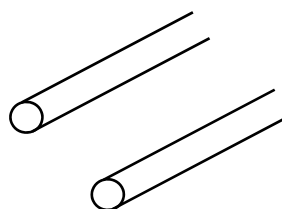
- ◆ Espacio libre
  - Ondas planas TEM
  - Análisis sencillo
  - Grandes pérdidas
  
- ◆ Ondas Dirigidas
  - Ondas TEM, TE, TM
  - Análisis complejo
  - Menores pérdidas

# Introducción

## LÍNEAS DE TRANSMISIÓN

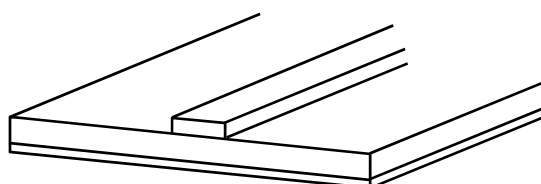


Cable coaxial



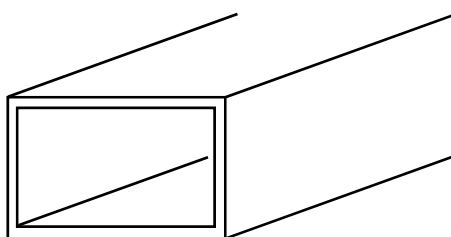
Línea bifilar

Línea microtira

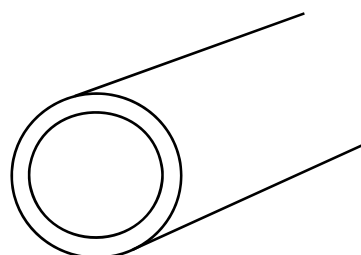


# Introducción

## GUÍAS DE ONDAS CONDUCTORAS



Guía rectangular



Guía circular

## Introducción

### ◆ Líneas de Transmisión

- Varios conductores
- Simetría traslacional
- Pérdidas altas (dieléctrico, radiación)
- A veces, campos no confinados

### ◆ Guías de Ondas

- Conductor único
- Simetría traslacional
- Pérdidas bajas
- Campos confinados

## Introducción

### ◆ Líneas de Transmisión

- Análisis sencillo (teoría de circuitos)
- Propagación de cualquier frecuencia, incluso dc
- Modo fundamental TEM, también modos TE, TM

### ◆ Guías de Ondas

- Análisis complicado (ecuaciones de Maxwell)
- Propagación si  $f > f_c$ ,  
**no** se propaga dc
- Modos  $TE_{mn}$ ,  $TM_{mn}$ ,  
**no** TEM

## Solución General

Se asume:

- Excitación temporal armónica

$$\vec{E}(x, y, z, t) = \text{Re} \left[ \vec{E}^F(x, y, z) \cdot e^{j\omega t} \right]$$

$$\vec{H}(x, y, z, t) = \text{Re} \left[ \vec{H}^F(x, y, z) \cdot e^{j\omega t} \right]$$

- Propagación a lo largo del eje z

$$\vec{E}^F(x, y, z) = \left[ \vec{e}(x, y) + \hat{z}e_z(x, y) \right] \cdot e^{j\beta z}$$

$$\vec{H}^F(x, y, z) = \left[ \vec{h}(x, y) + \hat{z}h_z(x, y) \right] \cdot e^{j\beta z}$$

## Solución General

Utilizando las ecuaciones de Maxwell para medios sin fuentes

$$\nabla \times \vec{E} = -j\omega\mu\vec{H}$$

$$\nabla \times \vec{H} = j\omega\varepsilon\vec{E}$$

$$\frac{\partial E_z}{\partial y} + j\beta E_y = -j\omega\mu H_x$$

$$\frac{\partial H_z}{\partial y} + j\beta H_y = j\omega\varepsilon E_x$$

$$-j\beta E_x - \frac{\partial E_z}{\partial x} = -j\omega\mu H_y$$

$$-j\beta H_x - \frac{\partial H_z}{\partial x} = j\omega\varepsilon E_y$$

$$\frac{\partial E_y}{\partial x} - \frac{\partial E_x}{\partial y} = -j\omega\mu H_z$$

$$\frac{\partial H_y}{\partial x} - \frac{\partial H_x}{\partial y} = j\omega\varepsilon E_z$$

## Solución General

Se pueden poner todas las componentes en función de  $E_z$  y  $H_z$

$$H_x = \frac{j}{k_c^2} \left( \omega \varepsilon \frac{\partial E_z}{\partial y} - \beta \frac{\partial H_z}{\partial x} \right)$$

$$H_y = \frac{-j}{k_c^2} \left( \omega \varepsilon \frac{\partial E_z}{\partial x} + \beta \frac{\partial H_z}{\partial y} \right)$$

$$E_x = \frac{-j}{k_c^2} \left( \beta \frac{\partial E_z}{\partial x} + \omega \mu \frac{\partial H_z}{\partial y} \right)$$

$$E_y = \frac{j}{k_c^2} \left( -\beta \frac{\partial E_z}{\partial y} + \omega \mu \frac{\partial H_z}{\partial x} \right)$$

$$k_c^2 = k^2 - \beta^2$$

$$k = \omega \sqrt{\mu \varepsilon} = \frac{2\pi}{\lambda}$$

## Solución General. Modo TEM

Modos TEM  $E_z = 0$ ;  $H_z = 0 \Rightarrow k_c = 0 \Rightarrow \beta = k = \omega \sqrt{\mu \varepsilon}$

$$\left. \begin{array}{l} \frac{\partial E_z}{\partial y} + j\beta E_y = -j\omega \mu H_x \\ -j\beta H_x - \frac{\partial H_z}{\partial x} = j\omega \varepsilon E_y \end{array} \right\} \Rightarrow \left. \begin{array}{l} j\beta E_y = -j\omega \mu H_x \\ -j\beta H_x = j\omega \varepsilon E_y \end{array} \right\} \Rightarrow \beta^2 E_y = \omega^2 \mu \varepsilon E_y$$

La ecuación de Helmholtz para  $E_x$

$$\left( \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2} + k^2 \right) E_x = 0 \Rightarrow \left( \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} \right) E_x = 0$$

$$\left( \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2} + k^2 \right) E_y = 0 \Rightarrow \left( \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} \right) E_y = 0$$

## Solución General . Modo TEM

Definiendo

$$\nabla_t^2 \equiv \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} \Rightarrow \nabla_t^2 \vec{e}(x, y) = 0$$

Similarmente  $\nabla_t^2 \vec{h}(x, y) = 0$

Los campos transversales satisfacen la ecuación de Laplace.  
Solución similar a la de estática

$$\vec{e}(x, y) = -\nabla_t \phi(x, y) \text{ donde } \nabla_t \equiv \hat{x} \frac{\partial}{\partial x} + \hat{y} \frac{\partial}{\partial y}$$

$$\nabla_t \times \vec{e}(x, y) = -j\omega\mu h_z \hat{z} = 0$$

$$\nabla \cdot \vec{D} = \epsilon \nabla_t \cdot \vec{e} = 0 \Rightarrow \nabla_t^2 \phi(x, y) = 0$$

Solución electrostática del potencial

## Solución General . Modo TEM

El voltaje entre dos conductores

$$V_{12} = \phi_1 - \phi_2 = \int_1^2 \vec{E} \cdot d\vec{l}$$

La corriente que circula por un conductor es

$$I = \oint_c \vec{H} \cdot d\vec{l}$$

Los modos TEM existen con la presencia de 2 o más conductores

$$Z_{\text{TEM}} = \frac{E_x}{H_y} = \frac{\omega\mu}{\beta} = \sqrt{\frac{\mu}{\epsilon}} = \eta = \frac{-E_y}{H_x}$$

$$\vec{h}(x, y) = \frac{1}{Z_{\text{TEM}}} \hat{z} \times \vec{e}(x, y)$$

En general

$$Z_{\text{TEM}} \neq Z_0 = \frac{V}{I}$$

## Solución General. Modo TE

Modos TE  $E_z = 0$ ;  $H_z \neq 0 \Rightarrow \beta \neq k$

$$H_x = \frac{-j\beta}{k_c^2} \frac{\partial H_z}{\partial x} \quad E_x = \frac{-j\omega\mu}{k_c^2} \frac{\partial H_z}{\partial y}$$

$$H_y = \frac{-j\beta}{k_c^2} \frac{\partial H_z}{\partial y} \quad E_y = \frac{j\omega\mu}{k_c^2} \frac{\partial H_z}{\partial x}$$

La ecuación de Helmholtz para  $H_z$

$$\left( \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2} + k^2 \right) H_z = 0 \Rightarrow \left( \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + k_c^2 \right) h_z = 0$$

$$k_c^2 = k^2 - \beta^2$$

$$Z_{\text{TE}} = \frac{E_x}{H_y} = \frac{-E_y}{H_x} = \frac{\omega\mu}{\beta} = \frac{k\eta}{\beta}$$

## Solución General. Modo TM

Modos TE  $H_z = 0$ ;  $E_z \neq 0 \Rightarrow \beta \neq k$

$$E_x = \frac{-j\beta}{k_c^2} \frac{\partial E_z}{\partial x} \quad H_x = \frac{j\omega\varepsilon}{k_c^2} \frac{\partial E_z}{\partial y}$$

$$E_y = \frac{-j\beta}{k_c^2} \frac{\partial E_z}{\partial y} \quad H_y = \frac{-j\omega\varepsilon}{k_c^2} \frac{\partial E_z}{\partial x}$$

La ecuación de Helmholtz para  $E_z$

$$\left( \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2} + k^2 \right) E_z = 0 \Rightarrow \left( \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + k_c^2 \right) e_z = 0$$

$$k_c^2 = k^2 - \beta^2$$

$$Z_{\text{TM}} = \frac{E_x}{H_y} = \frac{-E_y}{H_x} = \frac{\beta}{\omega\varepsilon} = \frac{\beta\eta}{k}$$

## Solución General. Atenuación

Dieléctrico con pérdidas  $\epsilon^c = \epsilon' - j\epsilon'' = \epsilon_0 \epsilon_r (1 - j \tan \delta)$

$$j\beta \rightarrow \gamma = \alpha_d + j\beta = \sqrt{k_c^2 - k^2} = \sqrt{k_c^2 - \omega^2 \mu_0 \epsilon_0 \epsilon_r (1 - j \tan \delta)}$$

Usando

$$\sqrt{a^2 + x^2} = a \sqrt{1 + \frac{x^2}{a^2}} \approx a \left( 1 + \frac{x^2}{2a^2} \right) = a + \frac{x^2}{2a} \quad \text{Para } x \ll a$$

$$\gamma = \sqrt{k_c^2 - k^2 + jk^2 \tan \delta} \approx \underbrace{\sqrt{k_c^2 - k^2}}_{j\beta} + \frac{jk^2 \tan \delta}{2\sqrt{k_c^2 - k^2}}$$

$$\gamma \approx j\beta + \frac{k^2 \tan \delta}{2\beta}$$

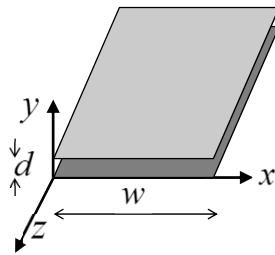
Modos TE y TM

$$\alpha_d = \frac{k^2 \tan \delta}{2\beta}$$

Modos TEM

$$\alpha_d = \frac{k \tan \delta}{2}$$

## Placas Paralelas



Modos TEM  $\nabla_t^2 \phi(x, y) = 0, \quad 0 \leq x \leq w, 0 \leq y \leq d$

$$\phi(x, 0) = 0, \quad 0 \leq x \leq w, y = 0; \quad \phi(x, d) = V_0, \quad 0 \leq x \leq w, y = d$$

$$\frac{\partial}{\partial x} = 0$$

Solución general  $\phi(x, y) = Ay + B$

Solución particular  $\phi(x, y) = \frac{V_0}{d} y$



## Placas Paralelas

Modos TEM

$$\vec{e}(x, y) = -\nabla_t \phi(x, y) = -\hat{y} \frac{V_0}{d}$$

$$\vec{E} = \vec{e} e^{-jkz} = -\hat{y} \frac{V_0}{d} e^{-jkz}$$

$$\vec{H} = \frac{1}{\eta} \hat{z} \times \vec{E} = \hat{x} \frac{V_0}{\eta d} e^{-jkz}$$

$$V = -\int_0^d \vec{E} \cdot d\vec{l} = -\int_0^d E_y dy = V_0 e^{-jkz}$$

$$I = \int_0^w \vec{J} \cdot \hat{z} dx = \int_0^w (-\hat{y} \times \vec{H}) \cdot \hat{z} dx = \int_0^w H_x dx = \frac{wV_0}{\eta d} e^{-jkz}$$

$$Z_0 = \frac{V}{I} = \frac{\eta d}{w}$$

$$v_f = \frac{\omega}{\beta} = \frac{w_1}{\sqrt{\epsilon \mu}}$$

## Placas Paralelas

Modos TM

$$\left( \frac{\partial^2}{\partial y^2} + k_c^2 \right) e_z(x, y) = 0$$

Solución general  $e_z(x, y) = A \sin(k_c y) + B \cos(k_c y)$

Condiciones de Frontera  $e_z(x, y) = 0$ , en  $y = 0, y = d$

Solución particular  $e_z(x, y) = A_n \sin\left(\frac{n\pi}{d} y\right)$

$$k_c = \frac{n\pi}{d}, \quad n = 0, 1, 2, \dots \quad \beta = \sqrt{k^2 - k_c^2} = \sqrt{k^2 - \left(\frac{n\pi}{d}\right)^2}$$

$$E_x = 0 \quad H_x = \frac{j\omega\epsilon d}{n\pi} A_n \cos\left(\frac{n\pi y}{d}\right) e^{-j\beta z}$$

$$E_y = \frac{-j\beta d}{n\pi} A_n \cos\left(\frac{n\pi y}{d}\right) e^{-j\beta z} \quad H_y = 0$$

$$E_z = A_n \sin\left(\frac{n\pi y}{d}\right) e^{-j\beta z} \quad H_z = 0$$

# Placas Paralelas

## Pérdidas debidas al conductor

Potencia transmitida en un medio con pérdidas:

$$P_T = P_{T(z=0)} e^{-2\alpha_c z}$$

Potencia disipada por unidad de longitud:

$$P_{lc} = P_{T(z=0)} - P_{T(z=1)} = P_{T(z=0)} - P_{T(z=0)} e^{-2\alpha_c}$$

$$\text{Si } \alpha_c \ll 1 \quad \implies \quad e^{-2\alpha_c} \approx 1 - 2\alpha_c$$

$$P_{lc} = P_{T(z=0)} - P_{T(z=0)}(1 - 2\alpha_c)$$

$$\alpha_c = \frac{P_{lc}}{2P_{T(z=0)}}$$

# Placas Paralelas

Modos TM

$$f_c = \frac{n}{2d\sqrt{\epsilon\mu}} \quad Z_{TM} = \frac{-E_y}{H_x} = \frac{\beta}{\omega\epsilon} = \frac{\beta\eta}{k}$$

$$v_f = \frac{\omega}{\beta} \quad \lambda_g = \frac{2\pi}{\beta} \quad \lambda_c = \frac{2d}{n} \quad R_s = \sqrt{\frac{\omega\mu}{2\sigma}}$$

$$P_0 = \frac{1}{2} \text{Re} \int_0^w \int_0^d \vec{E} \times \vec{H}^* \cdot \hat{z} \, dy \, dx = \begin{cases} \frac{w \text{Re}(\beta) \omega \epsilon d}{4k_c^2} |A_n|^2 & n > 0 \\ \frac{w \text{Re}(\beta) \omega \epsilon d}{2k_c^2} |A_n|^2 & n = 0 \end{cases}$$

$$P_l = 2 \frac{R_s}{2} \int_0^w |\vec{J}_s|^2 \, dx = \frac{\omega^2 \epsilon^2 R_s w}{k_c^2} |A_n|^2 \quad \alpha_c = \frac{2kR_s}{\beta\eta d} \frac{Np}{m} \quad n > 0$$

$$\alpha_c = \frac{R_s}{\eta d} \frac{Np}{m} \quad n = 0$$

## Placas Paralelas

Modos TE

$$\left( \frac{\partial^2}{\partial y^2} + k_c^2 \right) h_z(x, y) = 0$$

Solución general  $h_z(x, y) = A \operatorname{sen}(k_c y) + B \operatorname{cos}(k_c y)$

Condiciones de Frontera  $E_x(x, y, z) = 0$ , en  $y = 0, y = d$

Solución particular  $E_x(x, y, z) = \frac{j\omega\mu}{k_c} B_n \operatorname{sen}\left(\frac{n\pi}{d} y\right)$

$$k_c = \frac{n\pi}{d}, \quad n = 0, 1, 2, \dots \quad \beta = \sqrt{k^2 - k_c^2} = \sqrt{k^2 - \left(\frac{n\pi}{d}\right)^2}$$

$$E_x = \frac{j\omega\mu}{k_c} B_n \operatorname{sen} \frac{n\pi y}{d} e^{-j\beta z} \quad H_x = 0$$

$$E_y = 0 \quad H_y = \frac{j\beta}{k_c} B_n \operatorname{sen} \frac{n\pi y}{d} e^{-j\beta z}$$

$$E_z = 0 \quad H_z = B_n \operatorname{cos} \frac{n\pi y}{d} e^{-j\beta z}$$

## Placas Paralelas

Modos TE

$$f_c = \frac{n}{2d\sqrt{\epsilon\mu}} \quad Z_{\text{TE}} = \frac{E_x}{H_y} = \frac{\omega\mu}{\beta} = \frac{k\eta}{\beta}$$

$$v_f = \frac{\omega}{\beta} \quad \lambda_g = \frac{2\pi}{\beta} \quad \lambda_c = \frac{2d}{n} \quad R_s = \sqrt{\frac{\omega\mu}{2\sigma}}$$

$$P_0 = \frac{1}{2} \operatorname{Re} \int_0^w \int_0^d \vec{E} \times \vec{H}^* \cdot \hat{z} \, dy \, dx = \frac{w\omega\mu d}{4k_c^2} |B_n|^2 \operatorname{Re}(\beta), \quad n > 0$$

$$P_l = 2 \frac{R_s}{2} \int_0^w |\vec{J}_s|^2 \, dx = R_s |B_n|^2 w$$

$$\alpha_c = \frac{2k_c^2 R_s}{\omega\mu\beta d} = \frac{2k_c^2 R_s}{k\beta\eta d} \frac{Np}{m} \quad n > 0$$

## Placas Paralelas

Modos TE y TM como suma de Ondas Planas

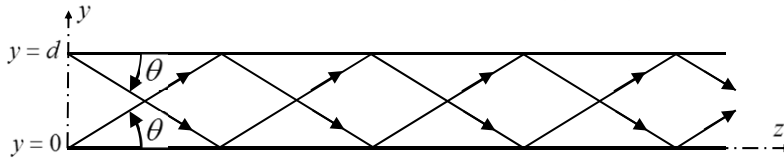
Ejemplo: Modo TM<sub>1</sub>  $\beta_1 = \sqrt{k^2 - (\pi/d)^2}$

$$E_z(x, y, z) = A_1 \operatorname{sen} \frac{\pi y}{d} e^{-j\beta_1 z}$$

$$E_z(x, y, z) = \frac{A_1}{2j} \left( e^{-j[-\pi y/d + \beta_1 z]} - e^{-j[\pi y/d + \beta_1 z]} \right)$$

$$\vec{d}_1 = -\pi \hat{y}/d + \beta_1 \hat{z} \quad \vec{d}_2 = \pi \hat{y}/d + \beta_1 \hat{z}$$

$$k \operatorname{sen} \theta = \pi/d; \quad k \cos \theta = \beta_1; \quad \Rightarrow \quad k^2 = (\pi/d)^2 + \beta_1^2$$



## Velocidades

Velocidad de la luz en el medio es la velocidad a la que se propaga una onda plana en dicho medio

$$v = \frac{1}{\sqrt{\mu\epsilon}}$$

Velocidad de fase es la velocidad a la que viaja un punto con fase constante

$$v_f = \frac{\omega}{\beta}$$

Para ondas TEM la velocidad de fase y la de la luz coinciden. No es cierto para otros tipos de ondas

Si la velocidad de fase y la atenuación son constantes no hay distorsión. En caso contrario si.

Hay dispersión cuando la velocidad de fase es función de la frecuencia.

## Velocidades

En medios bajamente dispersivos o con señales de banda estrecha se puede definir la velocidad de grupo

$$v_g = \frac{\partial \omega}{\partial \beta}$$

La velocidad de grupo es la velocidad a la que la señal se propaga

$$X(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} x(t) e^{-j\omega t} dt \Leftrightarrow x(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} X(\omega) e^{j\omega t} d\omega$$

A la salida de un sistema lineal e invariante

$$Y(\omega) = H(\omega) \cdot X(\omega)$$

En un sistema sin distorsión

$$H(\omega) = \frac{1}{A} e^{-j\omega t_0} \Rightarrow y(t) = \frac{1}{A} x(t - t_0)$$

## Velocidades

Una señal de banda estrecha se puede poner como

$$s(t) = x(t) e^{j\omega_0 t} \quad \text{donde } \omega_0 \gg \omega_m \quad S(\omega) = X(\omega - \omega_0)$$

La señal a la salida es

$$Y(\omega) = H(\omega) S(\omega) = \frac{1}{A} X(\omega - \omega_0) e^{-j\beta z}$$

$$y(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{A} X(\omega - \omega_0) e^{j(\omega t - \beta z)} d\omega$$

$$\beta(\omega) = \beta(\omega_0) + \left. \frac{d\beta}{d\omega} \right|_{\omega=\omega_0} (\omega - \omega_0) + \frac{1}{2} \left. \frac{d^2\beta}{d\omega^2} \right|_{\omega=\omega_0} (\omega - \omega_0)^2 + \dots$$

$$\beta(\omega) \approx \beta_0 + \beta_0' (\omega - \omega_0) \Rightarrow y(t) = \frac{1}{A} x(t - \beta_0' z) e^{j(\omega_0 t - \beta_0 z)}$$

$$v_g = \frac{1}{\beta_0'} = \left( \left. \frac{\partial \beta}{\partial \omega} \right)^{-1} \right|_{\omega=\omega_0}$$