LÍNEAS DE TRANSMISIÓN

DIAGRAMA DE SMITH

Diagrama de Smith

Representación gráfica de impedancias: $Z = R + jX$

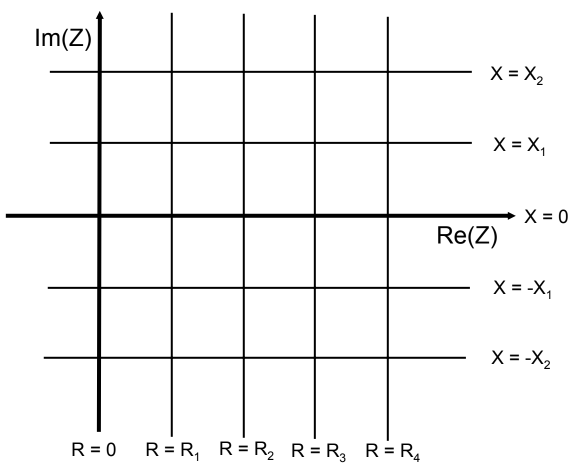


Diagrama de Smith

- Diagrama de Smith:
  - Representación gráfica de impedancias respecto a las coordenadas definidas por el coeficiente de reflexión
  - Herramienta gráfica para aplicaciones en circuitos de alta frecuencia

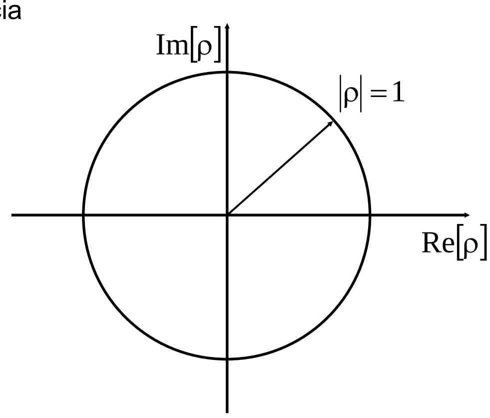


Diagrama de Smith

Relación entre impedancia y coeficiente de reflexión:

$$Z(z) = \frac{V(z)}{I(z)} = Z_0 \frac{1+\rho(z)}{1-\rho(z)}$$

Impedancia normalizada: $\boxed{\overline{Z}(z) \equiv \frac{Z(z)}{Z_0}}$

$$\overline{Z}(z) = \frac{1+\rho(z)}{1-\rho(z)} \qquad \overline{Z}(z) = f\left\{\mathrm{Re}[\rho],\ \mathrm{Im}[\rho]\right\}$$

Diagrama de Smith

Representación en el plano definido por el coeficiente de reflexión de:
- Curvas de parte real de impedancia normalizada constante
- Curvas de parte imaginaria de impedancia normalizada constante

$$\overline{Z}(z) = \mathrm{Re}\left[\overline{Z}\right] + j\,\mathrm{Im}\left[\overline{Z}\right] = r + jx$$

$$\rho(z) = \mathrm{Re}[\rho] + j\,\mathrm{Im}[\rho] = \rho_r + j\rho_i$$

$$r + jx = \frac{1 + \rho_r + j\rho_i}{1 - \rho_r - j\rho_i}$$

Diagrama de Smith

Separando parte real e imaginaria:

$$r = \frac{1 - \rho_r^2 - \rho_i^2}{(1 - \rho_r)^2 + \rho_i^2} \qquad x = \frac{2\rho_i}{(1 - \rho_r)^2 + \rho_i^2}$$

Operando:

$$\boxed{\left(\rho_r - \frac{r}{1 + r}\right)^2 + \rho_i^2 = \frac{1}{(1 + r)^2}}$$

$$\boxed{(\rho_r - 1)^2 + \left(\rho_i - \frac{1}{x}\right)^2 = \frac{1}{x^2}}$$

Diagrama de Smith

Curvas de parte real de impedancia normalizada constante

$$\left(\rho_r - \frac{r}{1+r}\right)^2 + \rho_i^2 = \frac{1}{(1+r)^2}$$

Ecuación de una circunferencia

Centro $\left(\frac{r}{1+r} \quad , \quad 0\right)$

Radio $\frac{1}{1+r}$

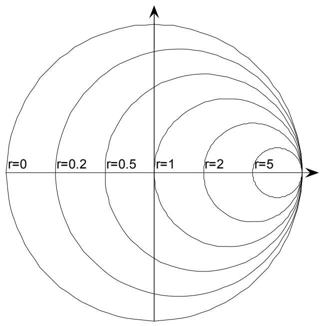


Diagrama de Smith

Curvas de parte imaginaria de impedancia normalizada constante

$$(\rho_r - 1)^2 + \left(\rho_i - \frac{1}{x}\right)^2 = \frac{1}{x^2}$$

Ecuación de una circunferencia

Centro $\left(1 \quad , \quad \frac{1}{x}\right)$

Radio $\frac{1}{|x|}$

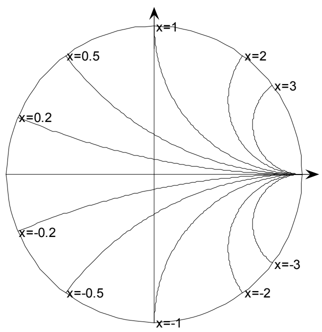


Diagrama de Smith

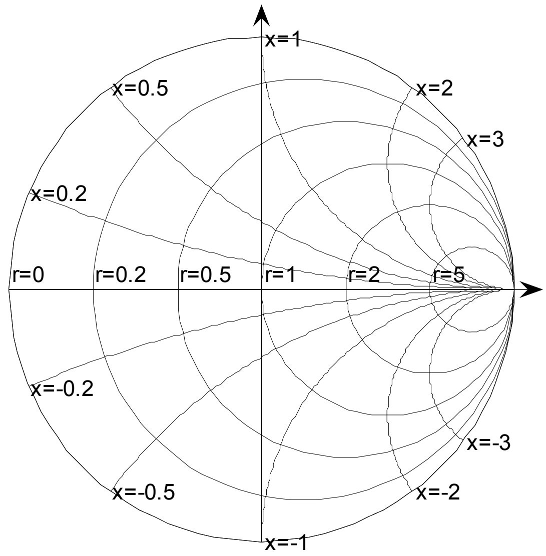


Diagrama de Smith

Aplicaciones del Diagrama de Smith

- Dado $Z(z) \rightarrow$ Encontrar $\rho(z)$
- Dado $\rho(z) \rightarrow$ Encontrar $Z(z)$

- Dado ρ_L, $Z_L \rightarrow$ Encontrar $\rho(z)$, $Z(z)$
- Dado $\rho(z)$, $Z(z) \rightarrow$ Encontrar ρ_L, Z_L

- Dado ρ_L, $Z_L \rightarrow$ Encontrar las posiciones de los máximos y mínimos de tensión

- Dado ρ_L, $Z_L \rightarrow$ Calcular la Relación de Onda Estacionaria (SWR)

- Dado $Z(z) \rightarrow$ Encontrar $Y(z)$
- Dado $Y(z) \rightarrow$ Encontrar $Z(z)$

Diagrama de Smith

Dado Z(z) → Encontrar ρ(z)

1. Normalizar la impedancia

$$\overline{Z}(z) = \frac{Z(z)}{Z_0} = \frac{R}{Z_0} + j\frac{X}{Z_0} = r + jx$$

2. Encontrar la circunferencia de parte real de impedancia normalizada r
3. Encontrar el arco de parte imaginaria de impedancia normalizada x
4. La intersección de ambas curvas (punto P) permite calcular el coeficiente de reflexión en el plano complejo:

- El módulo es la distancia del punto P al centro del diagrama de Smith
- La fase es el ángulo que forma la línea que une el punto P con el centro del diagrama de Smith con el eje horizontal

Diagrama de Smith

Ejemplo:

$$Z(d) = 25 + j100\,\Omega; \quad Z_0 = 50\,\Omega$$

$$\overline{Z}(d) = 0{,}5 + j2{,}0$$

$$\rho(d) = |\rho|\, e^{j\phi}$$

$$|\rho| = 0{,}8246$$

$$\phi = 50{,}906^{o}$$

$$\rho(d) = 0{,}52 + j0{,}64$$

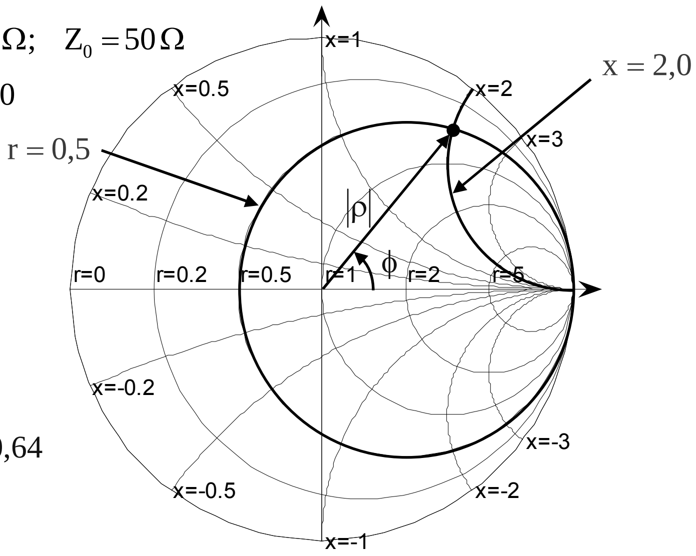


Diagrama de Smith

Dado $\rho(z) \rightarrow$ Encontrar $Z(z)$

1. Determinar en el plano complejo el punto P que representa el coeficiente de reflexión $\rho(z)$ en el diagrama de Smith
2. Encontrar las curvas de parte real de impedancia normalizada r y parte imaginaria de impedancia normalizada x que pasan por el punto P
3. La impedancia normalizada es:

$$\overline{Z}(z) = r + jx$$

y desnormalizando se obtiene la impedancia:

$$Z(z) = Z_0 \cdot \overline{Z}(z) = Z_0 (r + jx) = Z_0 r + j Z_0 x = R + jX$$

Diagrama de Smith

Dado ρ_L, $Z_L \leftrightarrow$ Encontrar $\rho(z)$, $Z(z)$

En una **línea sin pérdidas**, el módulo del coeficiente de reflexión se mantiene constante a lo largo de la línea

$$\rho(z) = \rho_L e^{-j2\beta z} \quad \Longrightarrow \quad |\rho(z)| = |\rho_L|$$

En el plano complejo, una circunferencia cuyo centro coincida con el centro del diagrama de Smith y de radio igual al módulo del coeficiente de reflexión, representa todos los coeficientes de reflexión, y por tanto impedancias, que se pueden encontrar en los diferentes puntos de la línea

Diagrama de Smith

Dado ρ_L, Z_L → Encontrar $\rho(z)$, $Z(z)$

1. Identificar el coeficiente de reflexión o la impedancia normalizada de la carga en el diagrama de Smith (punto P)
2. Dibujar la circunferencia de módulo de coeficiente de reflexión constante que pasa por el punto P
3. Partiendo del punto P, que representa la impedancia normalizada de la carga, moverse en el sentido en el que **disminuye** el ángulo del coeficiente de reflexión (**hacia generador**), un ángulo:

$$\theta = 2\beta z = 2\frac{2\pi}{\lambda} z$$

El punto P' obtenido representa el coeficiente de reflexión y la impedancia normalizada a una distancia z de la carga

Diagrama de Smith

Dado $\rho(z)$, $Z(z)$ → Encontrar ρ_L, Z_L

1. Identificar el coeficiente de reflexión o la impedancia normalizada a una distancia z de la carga en el diagrama de Smith (punto Q)
2. Dibujar la circunferencia de módulo de coeficiente de reflexión constante que pasa por el punto Q
3. Partiendo del punto Q, que representa la impedancia normalizada a una distancia z de la carga, moverse en el sentido en el que **aumenta** el ángulo del coeficiente de reflexión (**hacia carga**), un ángulo:

$$\theta = 2\beta z = 2\frac{2\pi}{\lambda} z$$

El punto Q' obtenido representa el coeficiente de reflexión y la impedancia normalizada en la carga

Diagrama de Smith

Observaciones:

Dar una vuelta entera en el diagrama de Smith

⇩

La fase del coeficiente de reflexión varía en la cantidad 2π

⇩

El coeficiente de reflexión y la impedancia normalizada vuelven a tener el mismo valor

Si $\theta = 2\pi$ $\Rightarrow$ $2\pi = 2\beta z = 2\dfrac{2\pi}{\lambda} z$ $\Rightarrow$ $z = \dfrac{\lambda}{2}$

Dar una vuelta entera en el diagrama de Smith es equivalente a moverse λ/2 en la línea de transmisión

Diagrama de Smith

Ejemplo:

$Z_L = 25 + j100\,\Omega; \quad Z_0 = 50\,\Omega$

¿ $Z(d), \rho(d)$? $\quad d = 0{,}18\lambda$

$\overline{Z}_L = 0{,}5 + j2{,}0$

$\rho(d) = |\rho|\, e^{j\phi}$

$|\rho| = 0{,}8246$

$\phi = -78{,}7^{o} = 281{,}3^{o}$

$\rho(d) = 0{,}161 - j0{,}809$

$\overline{Z}(d) = 0{,}236 - j1{,}192$

$Z(d) = \overline{Z}(d) \cdot Z_0 = 11{,}79 - j59{,}6\,\Omega$

$\theta = 2\beta d$
$= 2(2\pi/\lambda)0{,}18\lambda$
$= 2{,}262$ rad
$= 129{,}6^{o}$

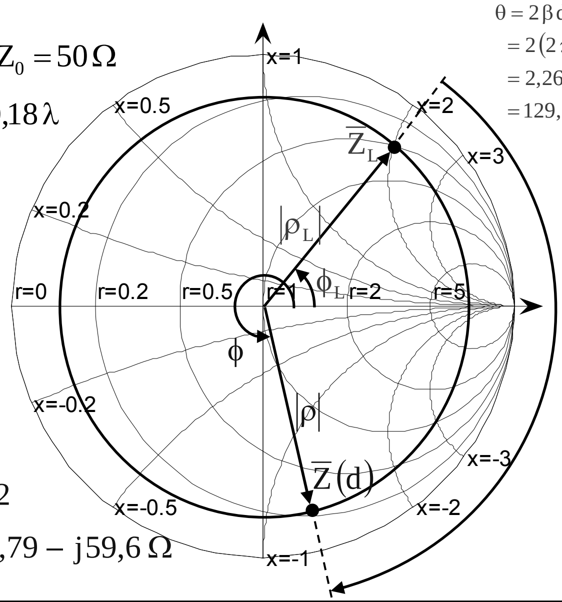


Diagrama de Smith

Dado ρ_L, Z_L → Encontrar las posiciones de los máximos y mínimos de tensión

Línea sin pérdidas: $\left|V(z)\right| = \left|V_{iL}\right|\left|\left[1+\rho(z)\right]\right|$

En un máximo de tensión, la onda incidente y la onda reflejada están en fase, por lo cual el coeficiente de reflexión es real y positivo.

$$\rho(z_{MV}) = \left|\rho(z_{MV})\right| \quad \Longrightarrow \quad \left|V(z)\right|_{max} = \left|V_{iL}\right|\left(1+\left|\rho_L\right|\right) = \left|V_i(z_{MV})\right|\left[1+\left|\rho(z_{MV})\right|\right]$$

En un mínimo de tensión, la onda incidente y la onda reflejada están en oposición de fase, por lo cual el coeficiente de reflexión es real y negativo.

$$\rho(z_{mV}) = -\left|\rho(z_{MV})\right| \quad \Longrightarrow \quad \left|V(z)\right|_{min} = \left|V_{iL}\right|\left(1-\left|\rho_L\right|\right) = \left|V_i(z_{mV})\right|\left[1-\left|\rho(z_{mV})\right|\right]$$

Diagrama de Smith

Dado ρ_L, Z_L → Encontrar las posiciones de los máximos y mínimos de tensión

1. Identificar el coeficiente de reflexión o la impedancia normalizada de la carga en el diagrama de Smith (punto P)
2. Dibujar la circunferencia de módulo de coeficiente de reflexión constante que pasa por el punto P. Esta circunferencia corta al eje real de coeficiente de reflexión en dos puntos (parte positiva: máximo M; parte negativa: mínimo m)
3. Moverse del punto P hacia generador hasta encontrar los puntos M y m. Los ángulos hallados permiten calcular las posiciones de los máximos y mínimos de tensión:

$$z = \frac{\theta}{2\beta}; \qquad z/\lambda = \frac{\theta}{4\pi}$$

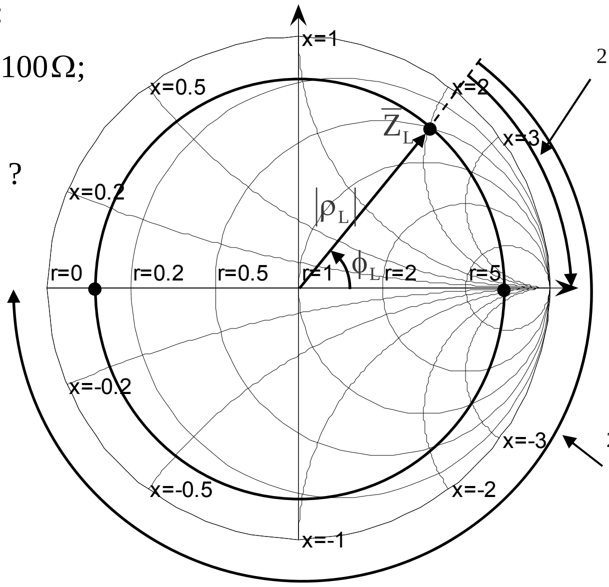
Diagrama de Smith

Ejemplo:

$Z_L = 25 + j100\,\Omega;$

$Z_0 = 50\,\Omega$

¿ d_{max}, d_{min} ?



$2\beta d_{max} = 50{,}9^\circ$

$d_{max} = 0{,}0707\ \lambda$

$2\beta d_{min} = 230{,}9^\circ$

$d_{min} = 0{,}3207\ \lambda$

Diagrama de Smith

Dado ρ_L, Z_L → Calcular la Relación de Onda Estacionaria (SWR)

La Relación de Onda Estacionaria se define como:

$$S = SWR = \frac{|V(z)|_{max}}{|V(z)|_{min}} = \frac{1+|\rho_L|}{1-|\rho_L|}$$

Relación entre impedancia normalizada y coeficiente de reflexión:

$$\overline{Z}(z) = \frac{1+\rho(z)}{1-\rho(z)}$$

En un máximo de tensión:

$$\overline{Z}(z_{MV}) = \frac{1+\rho(z_{MV})}{1-\rho(z_{MV})} = \frac{1+|\rho_L|}{1-|\rho_L|} = SWR$$

Diagrama de Smith

Dado ρ_L, Z_L → Calcular la Relación de Onda Estacionaria (SWR)

1. Identificar el coeficiente de reflexión o la impedancia normalizada de la carga en el diagrama de Smith (punto P)
2. Dibujar la circunferencia de módulo de coeficiente de reflexión constante que pasa por el punto P. Esta circunferencia corta a la parte positiva del eje real de coeficiente de reflexión en un punto Q
3. El valor de impedancia normalizada (que es un número real) correspondiente al punto Q coincide con la Relación de Onda Estacionaria

Diagrama de Smith

Ejemplo:

$Z_L = 25 + j100\,\Omega;$

$Z_0 = 50\,\Omega$

¿SWR ?

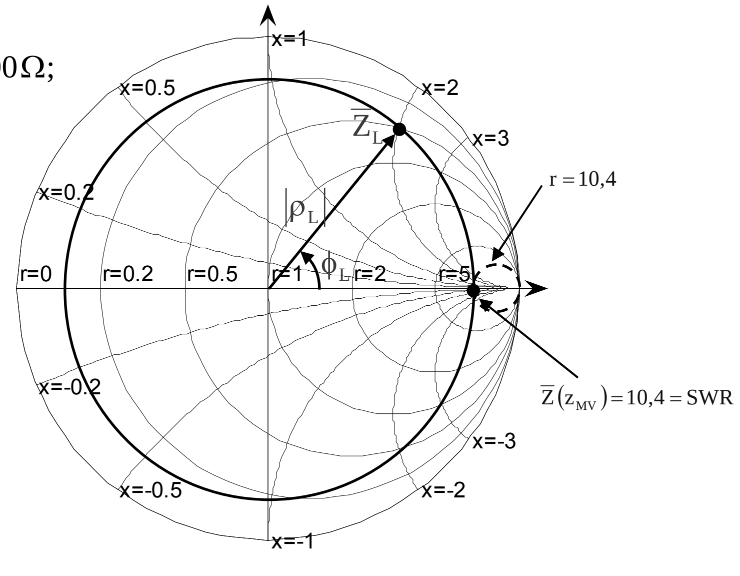


Diagrama de Smith

Dado Z(z) → Encontrar Y(z)

Relación entre impedancia o admitancia normalizadas y coeficiente de reflexión:

$$\overline{Z}(z) = \frac{1+\rho(z)}{1-\rho(z)} \qquad \overline{Y}(z) = \frac{1}{\overline{Z}(z)} = \frac{1-\rho(z)}{1+\rho(z)}$$

Como: $\rho\left(z+\frac{\lambda}{4}\right) = -\rho(z)$

$$\overline{Z}\left(z+\frac{\lambda}{4}\right) = \frac{1+\rho\left(z+\frac{\lambda}{4}\right)}{1-\rho\left(z+\frac{\lambda}{4}\right)} = \frac{1-\rho(z)}{1+\rho(z)} = \overline{Y}(z) \qquad \boxed{\overline{Z}\left(z+\frac{\lambda}{4}\right) = \overline{Y}(z)}$$

Diagrama de Smith

Dado Z(z) → Encontrar Y(z)

1. Identificar el coeficiente de reflexión o la impedancia normalizada en el diagrama de Smith (punto P)
2. Dibujar la circunferencia de módulo de coeficiente de reflexión constante que pasa por el punto P.
3. El valor de admitancia normalizada está localizado en el punto de esta circunferencia diametralmente opuesto al punto de impedancia normalizada, que se obtiene al moverse media vuelta en el diagrama de Smith (que corresponde a moverse una distancia λ/4)

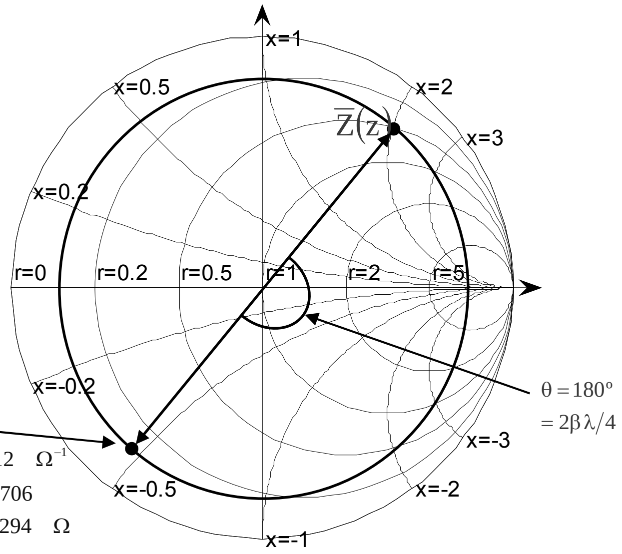
Diagrama de Smith

Ejemplo:

$Z(z) = 25 + j100\,\Omega;$

$Z_0 = 50\,\Omega$

$¿Y(z)?$



$\overline{Y}(z) = 0{,}11765 - j0{,}4706$

$Y(z) = 0{,}002353 - j0{,}009412 \quad \Omega^{-1}$

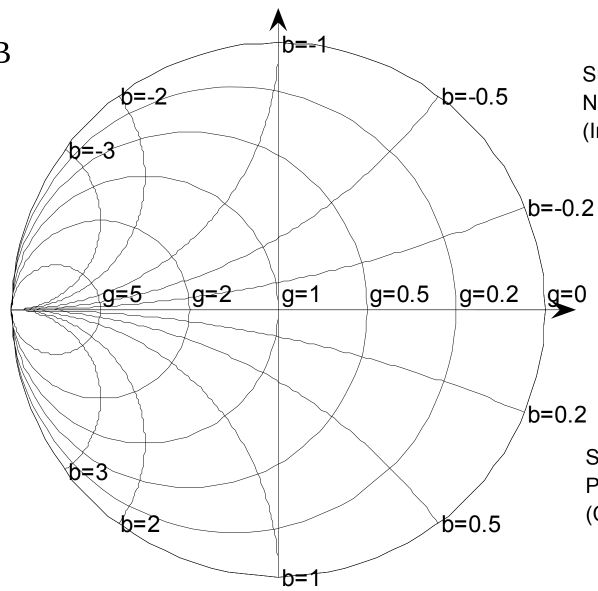
$\overline{Z}(z+\lambda/4) = 0{,}11765 - j0{,}4706$

$Z(z+\lambda/4) = 5{,}8824 - j23{,}5294 \quad \Omega$

Diagrama de Smith

$Y = G + jB$

$\overline{Y} = g + jb$



Susceptancia
Negativa
(Inductancia)

Susceptancia
Positiva
(Capacitancia)

Diagrama de Smith