LÍNEAS DE TRANSMISIÓN

LÍNEAS DE TRANSMISIÓN
CON Y SIN PÉRDIDAS

Coeficiente de reflexión

Es el cociente entre la tensión reflejada y la tensión incidente

$$\rho(z) = \frac{V_r(z)}{V_i(z)} = \frac{V_{rL}\, e^{-\gamma z}}{V_{iL}\, e^{\gamma z}} = \rho_L\, e^{-2\gamma z}$$

Coeficiente de reflexión en la carga: (z = 0)

$$\rho_L = \frac{V_{rL}}{V_{iL}} = \frac{V_L - I_L Z_0}{V_L + I_L Z_0} = \frac{V_L/I_L - Z_0}{V_L/I_L + Z_0}$$

$$\boxed{\rho_L = \frac{Z_L - Z_0}{Z_L + Z_0}}$$

$$\rho_L = |\rho_L| e^{j\phi_L}$$

En general:

$$\boxed{\rho(z) = |\rho_L| e^{j\phi_L} e^{-2\gamma z} = |\rho_L| e^{-2\alpha z} e^{j(\phi_L - 2\beta z)}}$$

Líneas sin pérdidas

$$\boxed{\rho(z) = |\rho_L| e^{j(\phi_L - 2\beta z)}}$$

Tensión y corriente en la línea

$$V(z) = V_{iL}\, e^{\gamma z} + V_{rL}\, e^{-\gamma z} = V_{iL}\, e^{\gamma z}\left[1+\rho(z)\right] = V_{iL}\, e^{\gamma z}\left(1+\rho_L\, e^{-2\gamma z}\right)$$

$$V(z) = V_{iL}\, e^{\alpha z} e^{j\beta z}\left(1+\left|\rho_L\right| e^{-2\alpha z} e^{j(\phi_L - 2\beta z)}\right)$$

$$I(z) = \frac{V_{iL}\, e^{\alpha z} e^{j\beta z}}{Z_0}\left(1-\left|\rho_L\right| e^{-2\alpha z} e^{j(\phi_L - 2\beta z)}\right)$$

$$\left|V(z)\right| = \left|V_{iL}\right| e^{\alpha z}\sqrt{1+\left|\rho_L\right|^2 e^{-4\alpha z} + 2\left|\rho_L\right| e^{-2\alpha z}\cos(\phi_L - 2\beta z)}$$

$$\boxed{\left|V(z)\right| = \left|V_{iL}\right|\sqrt{e^{2\alpha z} + \left|\rho_L\right|^2 e^{-2\alpha z} + 2\left|\rho_L\right|\cos(\phi_L - 2\beta z)}}$$

$$\boxed{\left|I(z)\right| = \frac{\left|V_{iL}\right|}{Z_0}\sqrt{e^{2\alpha z} + \left|\rho_L\right|^2 e^{-2\alpha z} - 2\left|\rho_L\right|\cos(\phi_L - 2\beta z)}}$$

Tensión y corriente en la línea

Máximos de tensión: $\cos(\phi_L - 2\beta z) = 1$

$$\left|V(z)\right|_{max} = \left|V_{iL}\right| e^{\alpha z_{MV}}\left(1+\left|\rho_L\right| e^{-2\alpha z_{MV}}\right) = \left|V_i(z_{MV})\right|\left[1+\left|\rho(z_{MV})\right|\right]$$

$$z_{MV} = \frac{\phi_L \lambda}{4\pi} \pm n\frac{\lambda}{2}$$

Mínimos de tensión: $\cos(\phi_L - 2\beta z) = -1$

$$\left|V(z)\right|_{min} = \left|V_{iL}\right| e^{\alpha z_{mV}}\left(1-\left|\rho_L\right| e^{-2\alpha z_{mV}}\right) = \left|V_i(z_{mV})\right|\left[1-\left|\rho(z_{mV})\right|\right]$$

$$z_{mV} = \frac{\phi_L \lambda}{4\pi} \pm \left(\frac{1}{4} + \frac{n}{2}\right)\lambda$$

Tensión y corriente en la línea

Máximos de corriente: $\cos(\phi_L - 2\beta z) = -1$

$$\left|I(z)\right|_{max} = \frac{\left|V_{iL}\right|}{Z_0} e^{\alpha z_{MI}} \left(1 + \left|\rho_L\right| e^{-2\alpha z_{MI}}\right) = \frac{\left|V_i(z_{MI})\right|}{Z_0} \left[1 + \left|\rho(z_{MI})\right|\right]$$

$$z_{MI} = \frac{\phi_L \lambda}{4\pi} \pm \left(\frac{1}{4} + \frac{n}{2}\right)\lambda$$

Mínimos de corriente: $\cos(\phi_L - 2\beta z) = 1$

$$\left|I(z)\right|_{min} = \frac{\left|V_{iL}\right|}{Z_0} e^{\alpha z_{mI}} \left(1 - \left|\rho_L\right| e^{-2\alpha z_{mI}}\right) = \frac{\left|V_i(z_{mI})\right|}{Z_0} \left[1 - \left|\rho(z_{mI})\right|\right]$$

$$z_{mI} = \frac{\phi_L \lambda}{4\pi} \pm n\frac{\lambda}{2}$$

Tensión y corriente en la línea

En una línea de transmisión:

Los máximos de tensión coinciden con los mínimos de corriente
Los mínimos de tensión coinciden con los máximos de corriente

La separación entre máximos consecutivos de tensión (mínimos consecutivos de corriente) es $\lambda/2$

La separación entre mínimos consecutivos de tensión (máximos consecutivos de corriente) es $\lambda/2$

La separación entre un máximo y el siguiente mínimo (en tensión y en corriente) es $\lambda/4$

Tensión y corriente en la línea

Línea sin pérdidas: $\alpha = 0$

$$V(z) = V_{iL}\, e^{j\beta z} + V_{rL}\, e^{-j\beta z} = V_{iL}\, e^{j\beta z}\left[1+\rho(z)\right] = V_{iL}\, e^{j\beta z}\left(1+\rho_L\, e^{-2j\beta z}\right)$$

$$V(z) = V_{iL}\, e^{j\beta z}\left(1+|\rho_L|\, e^{j(\phi_L - 2\beta z)}\right)$$

$$I(z) = \frac{V_{iL}\, e^{j\beta z}}{Z_0}\left(1-|\rho_L|\, e^{j(\phi_L - 2\beta z)}\right)$$

$$\boxed{|V(z)| = |V_{iL}|\sqrt{1+|\rho_L|^2 + 2|\rho_L|\cos(\phi_L - 2\beta z)}}$$

$$\boxed{|I(z)| = \frac{|V_{iL}|}{Z_0}\sqrt{1+|\rho_L|^2 - 2|\rho_L|\cos(\phi_L - 2\beta z)}}$$

Tensión y corriente en la línea

Línea sin pérdidas: $\alpha = 0$

Máximos de tensión: $\cos(\phi_L - 2\beta z) = 1$

$$|V(z)|_{max} = |V_{iL}|\left(1+|\rho_L|\right) = |V_i(z_{MV})|\left[1+|\rho(z_{MV})|\right]$$

$$z_{MV} = \frac{\phi_L \lambda}{4\pi} \pm n\frac{\lambda}{2}$$

Mínimos de tensión: $\cos(\phi_L - 2\beta z) = -1$

$$|V(z)|_{min} = |V_{iL}|\left(1-|\rho_L|\right) = |V_i(z_{mV})|\left[1-|\rho(z_{mV})|\right]$$

$$z_{mV} = \frac{\phi_L \lambda}{4\pi} \pm \left(\frac{1}{4} + \frac{n}{2}\right)\lambda$$

Tensión y corriente en la línea

Línea sin pérdidas: $\alpha = 0$

Máximos de corriente: $\cos(\phi_L - 2\beta z) = -1$

$$|I(z)|_{max} = \frac{|V_{iL}|}{Z_0}\left(1 + |\rho_L|\right) = \frac{|V_i(z_{MI})|}{Z_0}\left[1 + |\rho(z_{MI})|\right]$$

$$z_{MI} = \frac{\phi_L \lambda}{4\pi} \pm \left(\frac{1}{4} + \frac{n}{2}\right)\lambda$$

Mínimos de corriente: $\cos(\phi_L - 2\beta z) = 1$

$$|I(z)|_{min} = \frac{|V_{iL}|}{Z_0}\left(1 - |\rho_L|\right) = \frac{|V_i(z_{mI})|}{Z_0}\left[1 - |\rho(z_{mI})|\right]$$

$$z_{mI} = \frac{\phi_L \lambda}{4\pi} \pm n\frac{\lambda}{2}$$

Tensión y corriente en la línea

En una línea de transmisión sin pérdidas:

Los máximos de tensión coinciden con los mínimos de corriente
Los mínimos de tensión coinciden con los máximos de corriente

La separación entre máximos consecutivos de tensión (mínimos consecutivos de corriente) es λ/2
La separación entre mínimos consecutivos de tensión (máximos consecutivos de corriente) es λ/2

La separación entre un máximo y el siguiente mínimo (en tensión y en corriente) es λ/4

El módulo de la tensión (y de la corriente) en todos los máximos tiene el mismo valor
El módulo de la tensión (y de la corriente) en todos los mínimos tiene el mismo valor

Relación de onda estacionaria

Es el cociente entre el módulo de la tensión (o de la corriente) de un máximo y de un mínimo

R.O.E. = Relación de Onda Estacionaria

S.W.R.= *Standing Wave Ratio*

Indica el grado de adaptación de una línea de transmisión

$$S = SWR \equiv \frac{|V(z)|_{max}}{|V(z)|_{min}} = \frac{|I(z)|_{max}}{|I(z)|_{min}} \qquad 1 \leq SWR \leq \infty$$

$$\boxed{SWR = \frac{e^{\alpha z_{MV}}\left(1 + |\rho_L| e^{-2\alpha z_{MV}}\right)}{e^{\alpha z_{mV}}\left(1 - |\rho_L| e^{-2\alpha z_{mV}}\right)}}$$

Líneas sin pérdidas:

$$\boxed{SWR = \frac{1 + |\rho_L|}{1 - |\rho_L|}}$$

Impedancia en la línea

La impedancia de la línea en cada punto es el cociente entre la tensión y la corriente en ese punto

$$Z(z) \equiv \frac{V(z)}{I(z)} = Z_0 \frac{1 + \rho(z)}{1 - \rho(z)}$$

En función de las ecuaciones hiperbólicas:

$$\boxed{Z(z) = Z_0 \frac{Z_L \cosh(\gamma z) + Z_0 \operatorname{senh}(\gamma z)}{Z_0 \cosh(\gamma z) + Z_L \operatorname{senh}(\gamma z)} = Z_0 \frac{Z_L + Z_0 \tanh(\gamma z)}{Z_0 + Z_L \tanh(\gamma z)}}$$

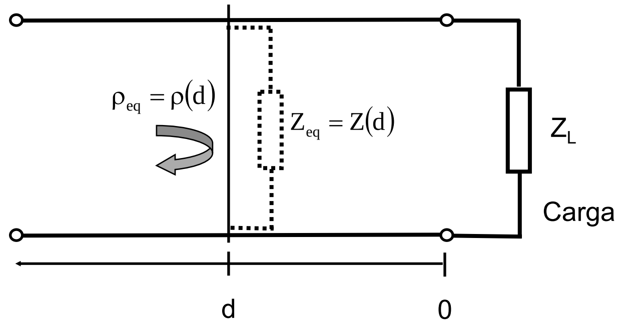
Líneas sin pérdidas:

$$\boxed{Z(z) = Z_0 \frac{Z_L \cos(\beta z) + jZ_0 \operatorname{sen}(\beta z)}{Z_0 \cos(\beta z) + jZ_L \operatorname{sen}(\beta z)} = Z_0 \frac{Z_L + jZ_0 \tan(\beta z)}{Z_0 + jZ_L \tan(\beta z)}}$$

$$Z(z) = Z\left(z + \frac{\lambda}{2}\right)$$

Impedancia en la línea

Significado de la impedancia y el coeficiente de reflexión en cada punto de una línea de transmisión:



$$Z(d) = Z_0 \frac{1+\rho(d)}{1-\rho(d)}$$

Potencia en la línea

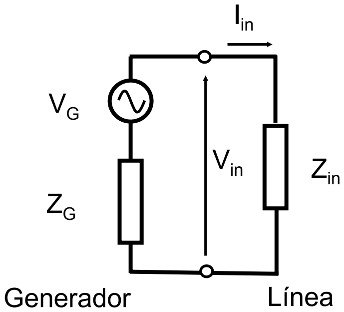
Potencia instantánea:

$$P(z, t) = V(z, t) \cdot I(z, t)$$

Potencia **media** que fluye a través de la línea, calculada en un punto a una distancia *z* de la carga:

$$P(z) = \frac{1}{2} \mathrm{Re}\left[V(z) \cdot I(z)^*\right]$$

Potencia suministrada por el generador a la línea de transmisión:



$$V_{in} = V_G \frac{Z_{in}}{Z_G + Z_{in}}$$

$$I_{in} = V_G \frac{1}{Z_G + Z_{in}}$$

$$P_{in} = \frac{1}{2} \mathrm{Re}\left[V_{in} \cdot I_{in}^*\right]$$

Potencia en la línea

La potencia suministrada a la línea de transmisión es máxima cuando la impedancia equivalente que presenta la línea es la conjugada de la impedancia interna del generador

Máxima potencia si: $Z_G = Z_{in}^*$

Potencia en la línea

Potencia **media** que fluye a través de la línea, calculada en un punto a una distancia *z* de la carga:

$$P(z) = \frac{1}{2}\mathrm{Re}\left[V(z)\cdot I(z)^*\right] = \frac{1}{2}\mathrm{Re}\left\{V_i(z)\left[1+\rho(z)\right]\frac{V_i^*(z)}{Z_0^*}\left[1-\rho(z)\right]^*\right\}$$

Línea de bajas pérdidas (impedancia característica real):

$$P(z) = \frac{1}{2}\mathrm{Re}\left\{V_{iL}\, e^{\alpha z} e^{j\beta z}\left(1+\left|\rho_L\right| e^{-2\alpha z} e^{j(\phi_L - 2\beta z)}\right)\frac{V_{iL}^*\, e^{\alpha z} e^{-j\beta z}}{Z_0}\left(1-\left|\rho_L\right| e^{-2\alpha z} e^{j(\phi_L - 2\beta z)}\right)^*\right\}$$

$$P(z) = \underbrace{\frac{1}{2Z_0}\left|V_{iL}\right|^2 e^{2\alpha z}}_{\text{Potencia incidente}} - \underbrace{\left|\rho_L\right|^2 \frac{1}{2Z_0}\left|V_{iL}\right|^2 e^{-2\alpha z}}_{\text{Potencia reflejada}}$$

$$P_r(z) = \left|\rho(z)\right|^2 P_i(z)$$

Potencia en la línea

Línea sin pérdidas (impedancia característica real y constante de atenuación nula):

$$P(z)=\frac{1}{2}\operatorname{Re}\left\{V_{iL}\, e^{j\beta z}\left(1+|\rho_L|e^{j(\phi_L-2\beta z)}\right)\frac{V_{iL}^{*}\, e^{-j\beta z}}{Z_0}\left(1-|\rho_L|e^{j(\phi_L-2\beta z)}\right)^{*}\right\}$$

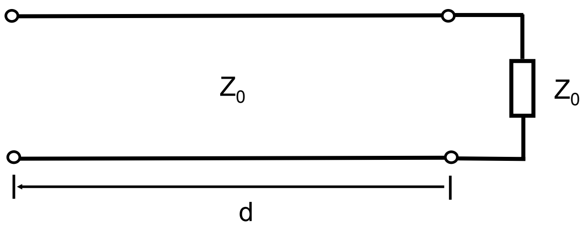
$$P(z)=\underbrace{\frac{1}{2Z_0}|V_{iL}|^2}_{\text{Potencia incidente}}-\underbrace{|\rho_L|^2\frac{1}{2Z_0}|V_{iL}|^2}_{\text{Potencia reflejada}}$$

$$P \neq P(z)$$

$$P_r = |\rho_L|^2\, P_i$$

Casos especiales

$Z_L = Z_0$ **Carga adaptada**



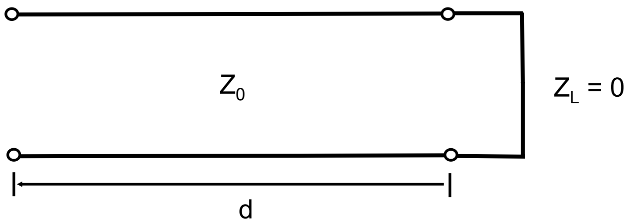
$$\rho_L = 0$$

$$Z(d) = Z_0 \qquad \rho(d) = 0$$

$$SWR = 1$$

Casos especiales

$Z_L = 0$ **Cortocircuito**



$\rho_L = -1$

$Z(d) = Z_0 \tanh(\gamma d)$

$\rho(d) = -\, e^{-2\alpha d}\, e^{-2j\beta d}$

Sin pérdidas:

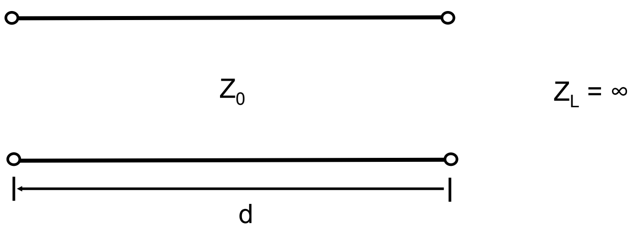
$Z(d) = j\, Z_0 \tan(\beta d)$

$\rho(d) = -\, e^{-2j\beta d}$

$SWR = \infty$

Casos especiales

$Z_L = \infty$ **Circuito abierto**



$\rho_L = 1$

$Z(d) = Z_0 \coth(\gamma d)$

$\rho(d) = e^{-2\alpha d}\, e^{-2j\beta d}$

Sin pérdidas:

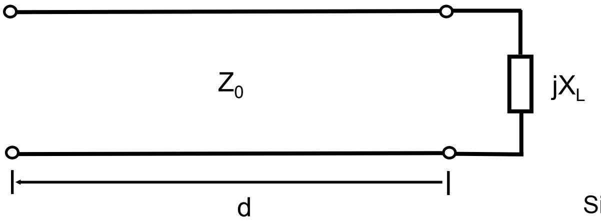
$Z(d) = -\, j\, Z_0 \cot(\beta d)$

$\rho(d) = e^{-2j\beta d}$

$SWR = \infty$

Casos especiales

$Z_L = jX_L$ **Carga imaginaria pura**



$|\rho_L| = 1$

$$\phi_L = \arctan\left(\frac{2\,X_L\,Z_0}{X_L^2 - Z_0^2}\right)$$

Sin pérdidas:

$$Z(d) = Z_0\,\frac{jX_L + Z_0\tanh(\gamma d)}{Z_0 + jX_L\tanh(\gamma d)}$$

$$Z(d) = Z_0\,\frac{Z_L + jZ_0\tan(\beta d)}{Z_0 + jZ_L\tan(\beta d)}$$

$$\rho(d) = e^{-2\alpha d}\,e^{-2j\beta d}\,e^{j\phi_L}$$

$$\rho(d) = e^{-2j\beta d}\,e^{j\phi_L}$$

$SWR = \infty$

LÍNEAS DE TRANSMISIÓN

PÉRDIDAS EN LA LÍNEA

Pérdidas por atenuación

Si consideramos que la carga está adaptada (no existe onda reflejada):

Potencia que suministra el generador: $P_{GEN} = P(z = L) = \frac{1}{2Z_0}|V_{iL}|^2 e^{2\alpha L}$

Potencia que se disipa en la carga: $P_L = P(z = 0) = \frac{1}{2Z_0}|V_{iL}|^2 = P_{GEN}\, e^{-2\alpha L}$

Atenuación: $\text{Ate.} = \frac{P_{GEN}}{P_L} = e^{2\alpha L}$

En dB:

$$\text{Ate.}(dB) = 10\log\left(\frac{P_{GEN}}{P_L}\right) = 10\log e^{2\alpha L} = \underbrace{20 \cdot \log e \cdot \alpha}_{\alpha(dB/m)} \cdot L = \alpha(dB/m) \cdot L(m)$$

Pérdidas por desadaptación

Potencia incidente en la carga $P_{iL} = \frac{1}{2Z_0}|V_{iL}|^2$

Potencia reflejada en la carga $P_{rL} = |\rho_L|^2 \frac{1}{2Z_0}|V_{iL}|^2 = |\rho_L|^2 P_{iL}$

Potencia disipada en la carga $P_{absL} = P_{iL} - P_{rL} = \left(1 - |\rho_L|^2\right) P_{iL}$

$$\frac{P_{rL}}{P_{iL}} = |\rho_L|^2 \qquad \text{R.L.} = -10\log\left(\frac{P_{rL}}{P_{iL}}\right) = -10\log\left(|\rho_L|^2\right) = -20\log\left(|\rho_L|\right)$$

$$\frac{P_{absL}}{P_{iL}} = 1 - |\rho_L|^2 \qquad 10\log\left(\frac{P_{absL}}{P_{iL}}\right) = 10\log\left(1 - |\rho_L|^2\right)$$