JUAN TOMÁS CELIGÜETA

Curso de análisis estructural

- Prólogo
- Índice completo
- Índice resumido
- Índice de materias
- Ejercicios resueltos
- Enunciados de problemas

EUNSA

Prólogo

El objetivo de este libro es servir como material de base para un curso de análisis de estructuras, presentando los fundamentos teóricos y la aplicación práctica de los distintos métodos de cálculo existentes. Está orientado a estudiantes de ingeniería superior que deseen adquirir unos conocimientos sólidos de análisis estructural, aunque puede emplearse también como libro de consulta por los profesionales que desarrollen su actividad en este campo. El texto se limita al cálculo estático de estructuras reticulares ya que, por la importancia práctica de éstas en ingeniería y construcción, su estudio representa el primer paso fundamental del análisis de estructuras.

El texto está organizado en una serie de capítulos, cada uno de los cuales presenta de forma rigurosa un tema determinado. Al final de cada capítulo se incluyen diversos ejercicios resueltos, que permiten comprender mejor la aplicación de los fundamentos teóricos. Asimismo se incluyen una serie de enunciados de problemas para su resolución.

El libro incluye un CD-ROM que contiene una versión informatizada de todo el texto, lo cual permite consultar la obra desde un computador, manteniendo la misma calidad que en la versión sobre papel. Esta versión informatizada contiene numerosas referencias cruzadas entre distintas zonas del texto, a fin de mostrar la relación entre los distintos temas abordados, facilitando su estudio. Incluye también un sistema de búsqueda por palabras clave, que facilita la consulta de un tema determinado. En el CD-ROM se incluyen asimismo una serie de programas de computador, de uso interactivo muy sencillo, que permiten al estudiante analizar estructuras cuya resolución no sea abordable manualmente.

El primer capítulo está dedicado a efectuar una introducción al análisis estructural, describiendo los tipos básicos de estructuras y los métodos de análisis existentes. El capítulo 2 se dedica a la exposición de los teoremas fundamentales empleados en el cálculo de estructuras. Se repasan los conceptos básicos de elasticidad y en base a ellos se formulan los teoremas fundamentales relativos al equilibrio estático de sólidos.

Los capítulos 3 a 6 se dedican al estudio de las tipologías estructurales más habituales: celosías, vigas, pórticos y arcos. Para todas ellas se analizan en primer lugar sus condiciones de estabilidad y determinación estática, así como la teoría básica que rige su comportamiento. A continuación se presentan los distintos métodos para su cálculo, tanto a nivel de esfuerzos en los elementos como de deformaciones, haciendo especial hincapié en el método de análisis de flexibilidad.

Al método de rigidez se le dedican los capítulos 7 y 8. Hoy en día es el universalmente empleado en los programas de computador, y sin embargo sus fundamentos y desarrollo práctico suelen ser a veces menos conocidos que otros métodos, como el de flexibilidad. Por esta razón se ha efectuado una presentación rigurosa del método,

comenzando por sus fundamentos teóricos, para a continuación efectuar un desarrollo detallado de los distintos pasos de su aplicación práctica. Se incluye la descripción de las propiedades de rigidez de los elementos más importantes, tanto para estructuras planas como espaciales, incluyendo temas avanzados como son la energía debida al esfuerzo cortante, el descentramiento de los nudos, etc. Se describe asimismo el proceso a seguir para tratar todo tipo de acciones exteriores, como fuerzas sobre las barras, variaciones de temperatura, errores en la geometría de los elementos, fuerzas de pretensión, etc. Las condiciones de ligadura se tratan también en detalle, incluyendo el estudio de movimientos de los apoyos, apoyos inclinados, apoyos elásticos… Se incluye asimismo un capítulo dedicado a temas avanzados relativos al método de rigidez: una descripción de la condensación estática de grados de libertad y una introducción teórica al análisis por subestructuras.

En el capítulo 9 se presenta el estudio de estructuras simétricas, y en el capítulo 10 el cálculo de líneas de influencia, es decir de la variación que sufren los esfuerzos y deformaciones cuando las cargas actuantes varían su punto de aplicación. En el capítulo 11 se estudian las vigas apoyadas sobre una fundación elástica. En primer lugar se presenta la teoría básica de su comportamiento, y continuación una solución empleando el método de rigidez.

Se ha incluido un capítulo que describe el método de la distribución de momentos, o de Cross, que tanto auge tuvo antes de la generalización del uso de los ordenadores. Aunque haya caído en desuso hoy en día, resulta de interés conocer los fundamentos teóricos de este método y su relación con los otros métodos de cálculo.

El último capítulo se dedica a efectuar una introducción a la estabilidad estructural. En primer lugar se estudia en detalle el colapso de elementos aislados, tanto en régimen elástico como inelástico. A continuación se estudia la determinación de la carga de colapso global de una estructura completa, considerando la influencia de los esfuerzos axiales en las características de rigidez de los elementos estructurales.

Para terminar quisiera mostrar mi sincero agradecimiento a todos aquellos que me han ayudado de una u otra forma. En primer lugar a la Dirección de la Escuela Superior de Ingenieros Industriales de San Sebastián y del CEIT, por el apoyo que me han prestado para poderme dedicar a la preparación del libro. Gracias a mis ayudantes en la docencia en estos últimos años, Juan Manuel Pagalday y Joseba Gallastegui, por su ayuda en la preparación de problemas y ejercicios. Asimismo a José Luis Arzalluz, por sus pacientes explicaciones sobre el funcionamiento de las librerías MFC.

Finalmente un agradecimiento muy especial a mi mujer y mis hijos por el apoyo y el ánimo que siempre he recibido de ellos, sin los cuales esta obra no hubiese sido posible. Estoy en deuda con ellos por las numerosas horas que les he quitado para dedicarlas a escribir este libro. En particular debo expresar un reconocimiento especial a mi hijo Jose Mari por su paciente lectura del manuscrito y sus numerosas observaciones y sugerencias, y a mi hijo Iñigo por su inestimable ayuda en el desarrollo de los programas de ordenador que acompañan al libro.

Juan Tomás Celigüeta
San Sebastián, mayo de 1998

Contenido

Capítulo 1 Introducción al análisis estructural 1

1.1	Concepto de estructura en ingeniería mecánica	1
1.2	Definiciones generales	3
1.3	Clasificación de las estructuras	4
1.4	Clasificación de los métodos de análisis	7
1.5	Condiciones de sustentación de las estructuras	8
1.6	Condiciones de construcción	12
1.7	Estabilidad y grado de determinación externo	14
1.8	Bibliografía	16

Capítulo 2 Teoremas fundamentales 17

2.1	Introducción	17
2.2	Trabajo	18
2.3	Resumen de elasticidad	21
2.4	Densidad de energía de deformación	26
2.5	Energía de deformación	29
2.6	Densidad de energía de deformación complementaria	29
2.7	Energía de deformación complementaria	31
2.8	Principio del trabajo virtual	31
2.9	Principio de la mínima energía potencial	33
2.10	Principio del trabajo virtual complementario	34
2.11	Principio de la mínima energía potencial complementaria	36
2.12	Primer teorema de Castigliano	37
2.13	Segundo teorema de Castigliano	38
2.14	Teorema de Betti-Rayleigh o del trabajo recíproco	39
2.15	Teorema de Maxwell o de las deformaciones recíprocas	40
2.16	Teorema de Crotti – Engesser	42
2.17	Teorema de Engesser	43
2.18	Teorema de Ménabréa	44
2.19	Estructuras sometidas a cargas térmicas	44
2.20	Bibliografía	48

Capítulo 3 Celosías 50

3.1 Introducción 50
3.2 Condiciones de estabilidad 51
3.3 Clasificación de las celosías planas 53
3.4 Clasificación de las celosías espaciales 55
3.5 Métodos de análisis para celosías isostáticas 59
3.6 Estudio de la barra articulada 69
3.7 Cálculo de celosías hiperestáticas por el método de flexibilidad 71
3.8 Cálculo de deformaciones 76
3.9 Errores en la longitud de las barras 78
3.10 Interpretación física del método de flexibilidad 80
3.11 Ejercicios 83
3.12 Bibliografía 94
3.13 Problemas 94

Capítulo 4 Vigas 99

4.1 Generalidades 99
4.2 Condiciones de estabilidad 100
4.3 Teoría general de la flexión de vigas planas 102
4.4 Diagramas de esfuerzos 108
4.5 Relación entre carga, esfuerzo cortante y momento flector 108
4.6 Teoremas de Mohr 111
4.7 Cálculo de esfuerzos en vigas hiperestáticas 112
4.8 Cálculo de deformaciones en vigas 122
4.9 Flexión de vigas con energía de esfuerzo cortante 125
4.10 Teoremas de Mohr con energía de esfuerzo cortante 131
4.11 Método de flexibilidad con energía de cortante 132
4.12 Ejercicios resueltos 133
4.13 Bibliografía 149
4.14 Problemas 149

Capítulo 5 Pórticos 151

5.1 Introducción 151
5.2 Condiciones de estabilidad 152
5.3 Estudio de la barra prismática en el plano 154
5.4 Método de flexibilidad en pórticos planos 162
5.5 Cálculo de deformaciones en pórticos planos 166
5.6 Estudio de la barra prismática en el espacio 169
5.7 Energía de esfuerzo cortante 175
5.8 Torsión 176
5.9 Método de flexibilidad para pórticos espaciales 176
5.10 Cálculo de deformaciones en pórticos espaciales 177
5.11 Muelles 178
5.12 Interpretación física del método de flexibilidad 182

5.13 Ejercicios resueltos 183
5.14 Bibliografía 199
5.15 Problemas 200

Capítulo 6 Arcos 205

6.1 Introducción 205
6.2 Generalidades 206
6.3 Arco triarticulado 208
6.4 Arco biarticulado 212
6.5 Arco biarticulado atirantado 215
6.6 Arco biempotrado 217
6.7 Arco biempotrado. Centro elástico 219
6.8 Analogía de la columna 222
6.9 Ejercicios resueltos 224
6.10 Bibliografía 237
6.11 Problemas 238

Capítulo 7 Rigidez de los elementos estructurales 241

7.1 Introducción 241
7.2 Concepto de grados de libertad 242
7.3 Concepto de rigidez de una estructura 242
7.4 Barra articulada plana 247
7.5 Barra biarticulada espacial 252
7.6 Viga a flexión en el plano 255
7.7 Elemento de emparrillado plano 260
7.8 Viga espacial 264
7.9 Viga plana articulada empotrada 273
7.10 Viga plana empotrada articulada 277
7.11 Elementos espaciales con articulaciones 280
7.12 Muelles de esfuerzo axial 281
7.13 Muelles al giro 283
7.14 Elementos descentrados 284
7.15 Elementos curvos planos 288
7.16 Influencia de la energía de esfuerzo cortante 293
7.17 Ejercicios resueltos 298
7.18 Bibliografía 306
7.19 Problemas 306

Capítulo 8 Método de rigidez 308

8.1 Grados de libertad de la estructura 308
8.2 Equilibrio de un elemento estructural 309
8.3 Ecuación de equilibrio de la estructura 309
8.4 Propiedades de la matriz de rigidez de la estructura 314
8.5 Comparación con el método de flexibilidad 315

8.6 Fuerzas exteriores sobre los nudos 316
8.7 Fuerzas exteriores sobre los elementos 316
8.8 Esfuerzos en los elementos 319
8.9 Cargas térmicas 320
8.10 Vigas planas con temperatura 322
8.11 Elementos tridimensionales con temperatura 326
8.12 Elemento de emparrillado plano con temperatura 329
8.13 Errores en la forma de los elementos 330
8.14 Pretensión inicial en los elementos 333
8.15 Condiciones de ligadura 336
8.16 Ligaduras de desplazamiento nulo 337
8.17 Ligaduras de desplazamiento conocido 338
8.18 Método de la rigidez ficticia para condiciones de ligadura 339
8.19 Apoyos elásticos 340
8.20 Condiciones de contorno no en los ejes generales 342
8.21 Ejercicios resueltos 346
8.22 Bibliografía 391
8.23 Problemas 392

Capítulo 9 Análisis de estructuras simétricas 395

9.1 Introducción 395
9.2 Sistemas simétricos y antisimétricos en el plano 396
9.3 Descomposición del sistema de cargas 396
9.4 Estructuras planas con cargas simétricas 397
9.5 Estructuras planas con cargas antisimétricas 399
9.6 Sistemas simétricos y antisimétricos en el espacio 402
9.7 Estructuras espaciales con cargas simétricas 403
9.8 Estructuras espaciales con cargas antisimétricas 405
9.9 Estructuras espaciales con varios planos de simetría 408
9.10 Ejercicios resueltos 410
9.11 Problemas 412

Capítulo 10 Líneas de influencia 415

10.1 Definición 415
10.2 Líneas de influencia en vigas isostáticas 416
10.3 Líneas de influencia en celosías isostáticas 418
10.4 Empleo del Principio de los Trabajos Virtuales 420
10.5 Otros tipos de cargas móviles 422
10.6 Teorema de Müller-Breslau 424
10.7 Discusión sobre el Teorema de Müller-Breslau 428
10.8 Líneas de influencia de deformaciones 431
10.9 Ejercicios resueltos 432
10.10 Bibliografía 462
10.11 Problemas 462

Capítulo 11 Vigas en fundación elástica 467

11.1 Introducción 467
11.2 Comportamiento del terreno 468
11.3 Teoría básica 469
11.4 Solución general de la ecuación de la elástica 471
11.5 Viga infinita 472
11.6 Viga semi infinita 482
11.7 Viga de longitud finita 485
11.8 Propiedades de rigidez de la viga en fundación elástica 487
11.9 Viga libre con carga puntual en el centro 488
11.10 Viga empotrada con carga uniforme 490
11.11 Ejercicios resueltos 491
11.12 Bibliografía 496
11.13 Problemas 497

Capítulo 12 Condensación de ecuaciones y análisis por subestructuras 499

12.1 Condensación de grados de libertad 499
12.2 Aplicaciones de la condensación de grados de libertad 501
12.3 Análisis por subestructuras 504
12.4 Ventajas e inconvenientes del análisis mediante subestructuras 511
12.5 Ejercicios resueltos 512
12.6 Bibliografía 516
12.7 Problemas 516

Capítulo 13 Método de distribución de momentos 518

13.1 Introducción 518
13.2 Descripción general del método de Cross 519
13.3 Momentos debidos a los giros 520
13.4 Momentos debidos a las traslaciones 524
13.5 Barras articuladas 528
13.6 Ejercicios resueltos 529
13.7 Bibliografía 543
13.8 Problemas 544

Capítulo 14 Introducción a la estabilidad estructural 546

14.1 Introducción 546
14.2 Ecuación de equilibrio de la viga - columna 549
14.3 Columna recta articulada en ambos extremos 551
14.4 Columna recta empotrada en ambos extremos 555
14.5 Columna empotrada articulada 558
14.6 Columna con carga axial excéntrica 560
14.7 Fórmula de la secante 563

14.8	Columnas con curvatura inicial	565
14.9	Longitud de pandeo	569
14.10	Vigas columna	570
14.11	Propiedades de rigidez de la viga columna	577
14.12	Pandeo inelástico. Teoría del módulo tangente	581
14.13	Teoría del módulo reducido	584
14.14	Teoría de Shanley	588
14.15	Fórmulas de diseño de columnas	590
14.16	Rigidez geométrica	593
14.17	Carga crítica de estabilidad global de una estructura	597
14.18	Análisis no lineal	599
14.19	Ejercicios resueltos	602
14.20	Bibliografía	615
14.21	Problemas	616

Anejo A Términos de carga para la fórmula de los tres momentos 619

Anejo B Integrales de distribuciones de momentos 620

Anejo C Esfuerzos de empotramiento perfecto 622

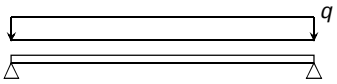
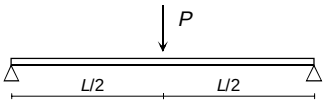
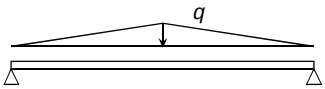
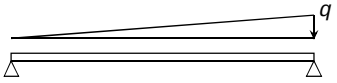
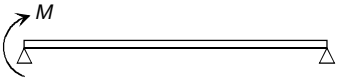
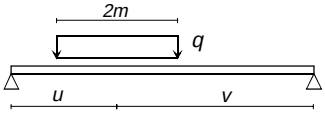
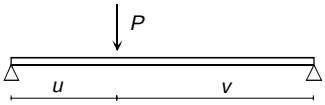
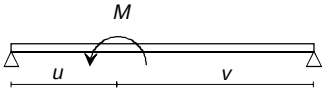
Anejo D Programas de computador 625

Índice de materias 627

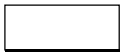
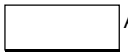
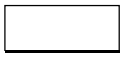
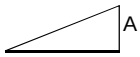
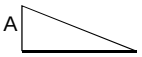
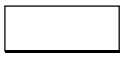
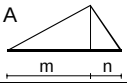
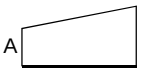
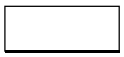
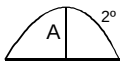
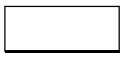
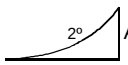
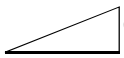
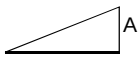
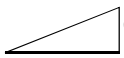
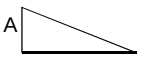
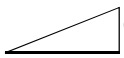
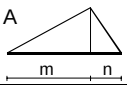
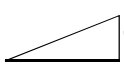
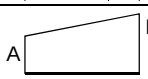
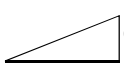
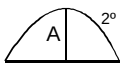
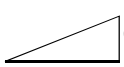
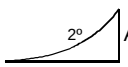
Índice resumido

1	Introducción al análisis estructural	1
2	Teoremas fundamentales	17
3	Celosías	50
4	Vigas	99
5	Pórticos	151
6	Arcos	205
7	Rigidez de los elementos estructurales	241
8	Método de rigidez	308
9	Análisis de estructuras simétricas	395
10	Líneas de influencia	415
11	Vigas en fundación elástica	467
12	Condensación de ecuaciones y análisis por subestructuras	499
13	Método de distribución de momentos	518
14	Introducción a la estabilidad estructural	546
Anejo A	Términos de carga para la fórmula de los tres momentos	619
Anejo B	Integrales de distribuciones de momentos	620
Anejo C	Esfuerzos de empotramiento perfecto	622
Anejo D	Programas de computador	625
Índice de materias		627

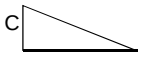
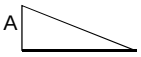
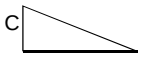
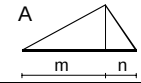
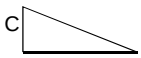
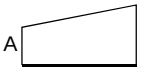
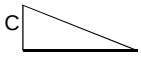
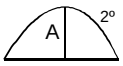
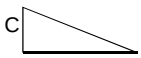
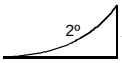
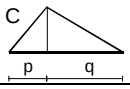
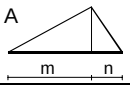
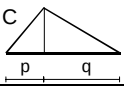
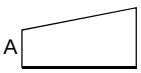
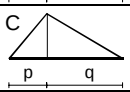
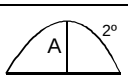
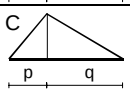
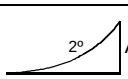
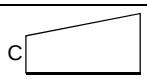
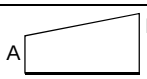
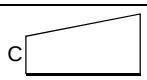
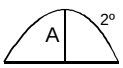
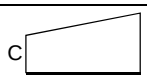
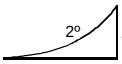
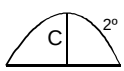
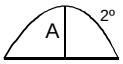
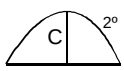
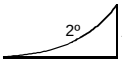
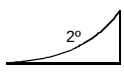
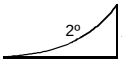
Anejo A. Términos de carga para la fórmula de los tres momentos

Carga	m_i	m_d
	$\frac{qL^3}{24}$	$\frac{qL^3}{24}$
	$\frac{PL^2}{16}$	$\frac{PL^2}{16}$
	$\frac{5}{192}qL^3$	$\frac{5}{192}qL^3$
	$\frac{8}{360}qL^3$	$\frac{7}{360}qL^3$
	$\frac{ML}{6}$	$\frac{ML}{3}$
	$\frac{qmu}{3L}\left(L^2-u^2-m^2\right)$	$\frac{qmv}{3L}\left(L^2-v^2-m^2\right)$
	$\frac{Puv}{6L}(L+u)$	$\frac{Puv}{6L}(L+v)$
	$\frac{M}{6L}\left(3u^2-L^2\right)$	$\frac{M}{6L}\left(L^2-3v^2\right)$

Anejo B. Integrales de distribuciones de momentos

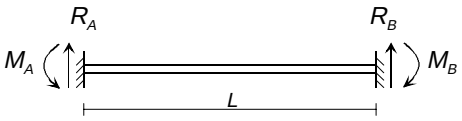
M^i	M^j	$\int_0^L M^i M^j dx$
		$L\,A\,C$
		$\frac{L}{2}A\,C$
		$\frac{L}{2}A\,C$
		$\frac{L}{2}A\,C$
		$\frac{L}{2}(A+B)\,C$
		$\frac{2L}{3}A\,C$
		$\frac{L}{3}A\,C$
		$\frac{L}{3}A\,C$
		$\frac{L}{6}A\,C$
		$\frac{(L+m)}{6}A\,C$
		$\frac{L}{6}(A+2B)\,C$
		$\frac{L}{3}A\,C$
		$\frac{L}{4}A\,C$

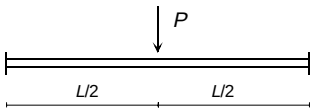
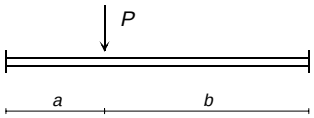
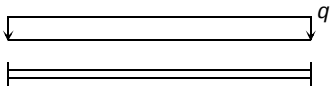
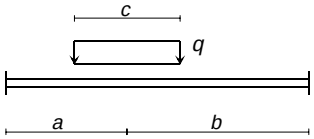
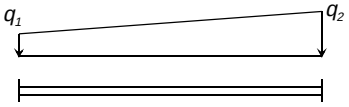
Integrales de distribuciones de momentos.

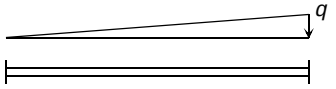
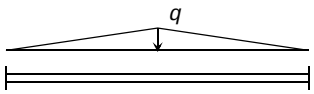
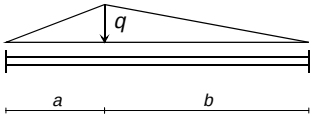
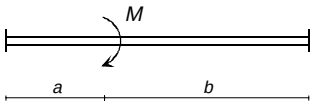
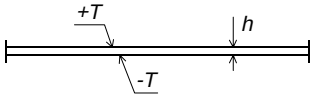
M^i	M^j	$\int_0^L M^i M^j dx$
		$\frac{L}{3} A\,C$
		$\frac{(L+n)}{6} A\,C$
		$\frac{L}{6}(2A+B)\,C$
		$\frac{L}{3} A\,C$
		$\frac{L}{12} A\,C$
		$m \geq p \qquad \frac{L}{3} A\,C - \frac{L(m-p)^2}{6mq} A\,C$
		$\frac{L+q}{6} A\,C + \frac{L+p}{6} B\,C$
		$\frac{(L^2+pq)}{3L} A\,C$
		$\frac{L}{12}\left(1+\frac{p}{L}+\frac{p^2}{L^2}\right) A\,C$
		$\frac{L}{6} A\,(2C+D) + \frac{L}{6} B\,(C+2D)$
		$\frac{L}{3} A\,(C+D)$
		$\frac{L}{12}(C+3D)\,A$
		$\frac{8L}{15} A\,C$
		$\frac{L}{5} A\,C$
		$\frac{L}{5} A\,C$

Anejo C. Esfuerzos de empotramiento perfecto

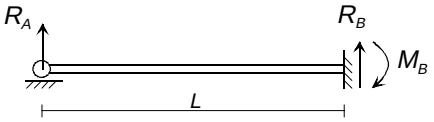
Viga empotrada en ambos extremos.

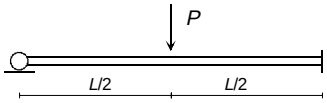
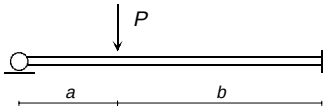


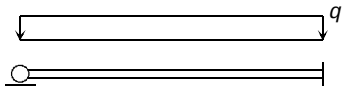
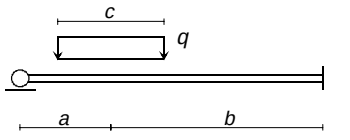
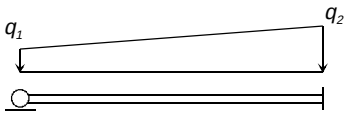
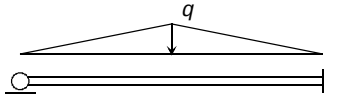
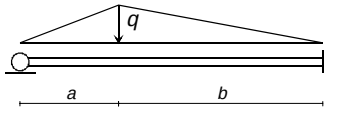
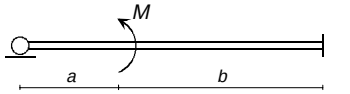
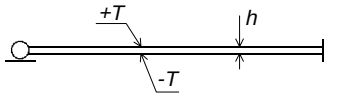
	$M_A = M_B = \frac{PL}{8}$ $\quad R_A = R_B = \frac{P}{2}$
	$M_A = \frac{Pab^2}{L^2}$ $\quad M_B = \frac{Pba^2}{L^2}$ $R_A = \frac{Pb^2}{L^3}(L+2a)$ $\quad R_B = \frac{Pa^2}{L^3}(L+2b)$
	$M_A = M_B = \frac{qL^2}{12}$ $\quad R_A = R_B = \frac{qL}{2}$
	$M_A = \frac{qc}{12L^2}\ Lc^2 - 3bc^2 + 12ab^2$ $M_B = \frac{qc}{12L^2}\ Lc^2 - 3ac^2 + 12a^2b$ $R_A = \frac{qbc}{L} + \frac{M_A - M_B}{L}$ $\quad R_B = \frac{qac}{L} - \frac{M_A - M_B}{L}$
	$M_A = \frac{L^2}{60}\ 3q_1 + 2q_2$ $\quad M_B = \frac{L^2}{60}\ 2q_1 + 3q_2$ $R_A = \frac{(2q_1 + q_2)L}{6} + \frac{M_A - M_B}{L}$ $R_B = \frac{(q_1 + 2q_2)L}{6} - \frac{M_A - M_B}{L}$

	$M_A = \frac{qL^2}{30}$ $M_B = \frac{qL^2}{20}$ $R_A = \frac{3qL}{20}$ $R_B = \frac{7qL}{20}$
	$M_A = M_B = \frac{5qL^2}{96}$ $R_A = R_B = \frac{qL}{4}$
	$M_A = \frac{q}{20L}\left(L^3 + a^3 + L^2 a - \frac{7}{3}La^2\right)$ $M_B = \frac{q}{30L}\left(L^3 - \frac{3}{2}a^3 + L^2 a + La^2\right)$ $R_A = \frac{q(L+b)}{6} + \frac{M_A - M_B}{L}$ $R_B = \frac{q(L+a)}{6} - \frac{M_A - M_B}{L}$
	$M_A = \frac{Mb}{L}\left(\frac{3b}{L} - 2\right)$ $M_B = \frac{Ma}{L}\left(2 - \frac{3a}{L}\right)$ $R_A = -\frac{6Mab}{L^3}$ $R_B = \frac{6Mab}{L^3}$
	$M_A = M_B = -EI\alpha 2T / h$ $R_A = R_B = 0$

Viga articulada empotrada.



	$M_B = \frac{3PL}{16}$ $R_A = \frac{5P}{16}$ $R_B = \frac{11P}{16}$
	$M_B = \frac{Pa}{2L^2}\ L^2 - a^2$ $R_A = \frac{Pb^2}{2L^3}(3a + 2b$ $R_B = \frac{Pa}{2L^3}\ 3L^2 - a^2$

	$M_B = \frac{qL^2}{8}$ $R_A = \frac{3qL}{8}$ $R_B = \frac{5qL}{8}$
	$M_B = \frac{qabc}{2L^2}\left(2a + b - \frac{c^2}{4b}\right)$ $R_A = \frac{qbc}{L} - \frac{M_B}{L}$ $R_B = \frac{qac}{L} + \frac{M_B}{L}$
	$M_B = \frac{L^2}{120}\left(7q_1 + 8q_2\right)$ $R_A = \frac{L}{120}\left(33q_1 + 12q_2\right)$ $R_B = \frac{L}{120}\left(27q_1 + 48q_2\right)$
	$M_B = \frac{qL^2}{15}$ $R_A = \frac{qL}{10}$ $R_B = \frac{4qL}{10}$
	$M_B = \frac{5qL^2}{64}$ $R_A = \frac{11qL}{64}$ $R_B = \frac{21qL}{64}$
	$M_B = \frac{q(L+a)}{120L}\left(7L^2 - 3a^2\right)$ $R_A = \frac{q(L+b)}{6} - \frac{M_B}{L}$ $R_B = \frac{q(L+a)}{6} + \frac{M_B}{L}$
	$M_B = \frac{M}{2L^2}\left(3a^2 - L^2\right)$ $R_A = \frac{3M}{2L^3}\left(L^2 - a^2\right)$ $R_B = -R_A$
	$M_B = -3EI\alpha T / h$ $R_A = 3EI\alpha T / hL$ $R_B = -R_A$

Anejo D. Programas de computador

En el disco CD adjunto se incluyen una serie de programas de computador que permiten el análisis de distintos tipos de estructuras. Utilizan los fundamentos teóricos explicados en el texto, y se basan en el método de rigidez, por su sencillez de programación y generalidad.

Estos programas han sido desarrollados con una vocación únicamente docente, y tienen una doble finalidad: en primer lugar servir para la comprobación de los cálculos hechos a mano (por ejemplo los problemas cuyos enunciados se plantean en el texto), y en segundo lugar, permitir al lector efectuar ejercicios de cálculo de estructuras más complicados, cuya resolución manual no es planteable. En todo caso, queda expresamente prohibido el empleo de los programas para otro uso que no sea el estrictamente docente.

Programa Cespla *(Cálculo de estructuras planas)*

Este programa efectúa el análisis de estructuras planas de cualquier tipo, compuestas por barras empotradas y/o articuladas, como celosías, pórticos o vigas. Además permite considerar elementos tipo resorte a esfuerzo axial o al giro, así como elementos en fundación elástica. Pueden aplicarse fuerzas sobre los nudos o sobre los elementos, y estas últimas pueden ser puntuales, distribuidas, de origen térmico o debidas a errores de forma. Se pueden considerar apoyos elásticos, así como imponer deformaciones de valor conocido en los apoyos.

El programa calcula y representa gráficamente las deformaciones de los nudos y barras, y los diagramas de esfuerzos internos en los elementos. Asimismo calcula la carga crítica de pandeo global de la estructura y el modo de pandeo correspondiente.

Programa Cestri *(Cálculo de estructuras tridimensionales)*

Este programa efectúa el análisis de estructuras espaciales de cualquier tipo, compuestas por barras empotradas y/o articuladas, como celosías o pórticos espaciales. Permite además considerar elementos tipo resorte, a esfuerzo axial o al giro, así como elementos en fundación elástica. Pueden aplicarse fuerzas sobre los nudos o sobre los elementos, y estas últimas pueden ser puntuales, distribuidas, de origen térmico o debidas a errores de forma. Se pueden considerar apoyos elásticos, así como imponer deformaciones de valor conocido en los apoyos.

El programa calcula y representa gráficamente las deformaciones de los nudos y barras, los diagramas de esfuerzos internos en los elementos, la carga crítica de pandeo global de la estructura y el modo de pandeo correspondiente.

Programa Calest *(Cálculo de estructuras)*

Este programa efectúa el análisis de estructuras planas o espaciales de cualquier tipo, compuestas por barras empotradas y/o articuladas, unidas entre si de cualquier forma en los nudos. Permite considerar resortes a esfuerzo axial o al giro, así como elementos en fundación elástica. Pueden aplicarse fuerzas sobre los nudos o sobre los elementos, y estas últimas pueden ser puntuales, distribuidas, de origen térmico o debidas a errores de forma. Se pueden considerar condiciones de ligadura de cualquier tipo, apoyos elásticos, o deformaciones de valor conocido en los apoyos.

El programa calcula las deformaciones de los nudos y barras, y los esfuerzos internos en los elementos, así como la carga crítica y el modo de pandeo global de la estructura. Su generalidad permite estudiar situaciones no admitidas por los programas anteriores. Los datos se definen en un archivo de texto y los resultados se obtienen en forma de listado.

Requisitos

Los programas deben ejecutarse en un ordenador personal tipo PC, dotado de sistema operativo Windows® (versión 95 o posterior) o Windows NT™ (versión 4.0 o posterior).

Los requerimientos del hardware del ordenador son: cualquier procesador que soporte al sistema operativo requerido, 8 Mb de memoria RAM, espacio libre en disco de 10 Mb, ratón y lector de CD-ROM para la instalación de los programas. Los programas no tienen ningún límite al tamaño de la estructura a calcular, sino que éste queda impuesto por la cantidad de memoria RAM disponible en el computador.

Instalación

Los programas se hallan situados en la carpeta llamada Programas del CD adjunto. El archivo Leame.txt contiene información complementaria sobre los programas.

Antes de utilizar los programas, deben instalarse en el disco duro del ordenador. Para ello basta con situarse en el directorio Programas del CD (utilizando el explorador de Windows), y ejecutar el archivo denominado setup.exe. Esto activa el proceso automático de instalación, cuya utilización es autoexplicativa.

Una vez completada la instalación aparece un nuevo grupo de programas en el menú Comienzo del entorno Windows, denominado Análisis Estructural, que contiene los distintos programas instalados.

Ejecución

Una vez instalados los programas, su ejecución se efectúa activándolos desde el menú Comienzo del sistema operativo. Su utilización interactiva es muy sencilla e intuitiva, estando documentada en las guías de usuario correspondientes.

Windows® y Windows NT™ son marcas registradas de Microsoft Corporation.

Capítulo 1

Introducción al análisis estructural

1.1 Concepto de estructura en ingeniería mecánica

Una estructura es, para un ingeniero, cualquier tipo de construcción formada por uno o varios elementos enlazados entre sí que están destinados a soportar la acción de una serie de fuerzas aplicadas sobre ellos.

Esta definición es quizás excesivamente simplista, ya que al emplear los términos "elementos enlazados entre sí", se induce a pensar en estructuras formadas por componentes discretos, por lo que sólo puede servir como una primera definición. La realidad es que las estructuras con componentes discretos son muy frecuentes en la práctica por lo que su estudio resulta del máximo interés. Además lo habitual es que los elementos sean lineales, del tipo pieza prismática, conocidos como vigas o barras, y cuyo comportamiento estructural individual es relativamente fácil de estudiar, como se hace en Resistencia de Materiales. Con la definición anterior serían ejemplos de estructuras una viga, un puente metálico, una torre de conducción de energía, la estructura de un edificio, un eje...

La definición anterior puede generalizarse diciendo que una estructura es cualquier dominio u extensión de un medio material sólido, que está destinado a soportar alguna acción mecánica aplicada sobre él.

Esta definición amplía el concepto de estructura a sistemas continuos donde no se identifican elementos estructurales discretos, como por ejemplo: la carrocería de un automóvil, la bancada de una máquina herramienta, un depósito de agua, un ala de avión, una presa de hormigón..., que no estaban incluidas en la idea inicial. De esta manera se introduce en realidad el estudio de problemas de mecánica de sólidos en medios continuos, que requieren del empleo de métodos sofisticados de análisis. Por esta razón este texto se limita al estudio de estructuras formadas por elementos discretos, de directriz habitualmente recta y en algunos casos curva.

En las definiciones anteriores se dice que actúan sobre la estructura unas cargas, que normalmente son de tipo mecánico, es decir fuerzas o pares. También se considera la posibilidad de otros efectos, como: variaciones en la temperatura del material de la estructura, movimientos conocidos de los apoyos, errores en la longitud y forma de los elementos, esfuerzos de pretensión durante el montaje, etc. Todos estos efectos dan lugar a unas cargas mecánicas equivalentes, por lo que resulta fácil considerarlos.

Respecto a la forma en que la estructura debe soportar las cargas no es fácil poner un límite claro. Quizás lo más general sea decir que la estructura debe tener un estado de tensiones y deformaciones tal que no se produzca un fracaso estructural que lleve a la destrucción de la misma, en ninguno de los estados de carga posibles. Por debajo de este amplio límite se imponen limitaciones más estrictas en función del tipo de estructura y de su aplicación concreta. La limitación que siempre se impone es la del valor máximo de las tensiones que aparecen en el material, en cualquier punto de la estructura, a fin de evitar su rotura. Este es el caso de edificios, naves industriales, bastidores de vehículos y maquinaria, tuberías, etc.

Además de la limitación en las tensiones, es también muy habitual imponer un límite a las deformaciones de la estructura, bien por motivos funcionales (p.e. bastidores de máquinas), estéticos, o de resistencia de los elementos que apoyen sobre la estructura (tabiques de edificios de viviendas).

En estructuras sofisticadas las tensiones alcanzadas pueden ser muy grandes, llegando a sobrepasar el límite elástico, y permitiéndose incluso la existencia de alguna grieta, cuyo tamaño máximo es entonces el límite para el buen funcionamiento estructural, siempre bajo severas condiciones de control (esto ocurre por ejemplo en tecnología nuclear). En otros casos más complejos la idoneidad de la estructura viene controlada por la ausencia de inestabilidades en la misma (pandeo), o incluso porque su respuesta dinámica sea la adecuada (por ejemplo en brazos de manipuladores, antenas, …).

El problema que trata de resolver el Análisis Estructural es *la determinación del estado de deformaciones y tensiones que se producen en el interior de la estructura, a consecuencia de todas las acciones actuantes sobre ella*. Como consecuencia también se determinan las reacciones que aparecen en la sustentación de la estructura.

Una vez conocidas las tensiones y deformaciones, el decidir si éstas son admisibles y si la estructura está en buen estado de funcionamiento, es objeto de otras materias específicas como el diseño de estructuras metálicas o de hormigón armado, la construcción de máquinas, etc, y a veces la propia experiencia y sentido común del analista.

Como primeras reseñas históricas sobre Análisis Estructural se debe citar a Leonardo da Vinci y a Galileo[1], que fue el primero en estudiar el fallo de una viga en voladizo. Posteriormente han sido muy numerosos los autores que han colaborado al desarrollo del estudio de las estructuras. Una excelente revisión de la contribución de todos ellos ha sido publicada por Timoshenko en 1953. Asimismo una revisión bibliográfica muy detallada

[1] Galileo Galilei, "*Discorsi e dimostrazioni matematiche intorno à due nuove science*", 1638. Traducción al inglés: The Macmillan Company, New York, 1933.

sobre los fundamentos teóricos del Análisis Estructural ha sido publicada por Oravas y McLean, en 1966.

La concepción de una estructura, por parte del ingeniero, se desglosa en tres fases: fase de planteamiento, fase de diseño y fase de construcción. En la fase de diseño, que es la que interesa para el análisis estructural, se pueden distinguir a su vez las siguientes etapas:

Determinación de la forma y dimensiones generales: se eligen el tipo de estructura y la geometría de la misma, de acuerdo con su funcionalidad y la normativa aplicable. Se determinan asimismo los materiales principales a utilizar.

Determinación de las cargas: se determinan las fuerzas exteriores que actúan sobre la estructura, así como todos aquellos efectos que puedan afectar a su comportamiento (errores de forma, movimientos de los apoyos, …).

Análisis. Consiste en determinar los esfuerzos internos y las deformaciones que se originan en la estructura como consecuencia de las cargas actuantes. Para efectuar el análisis de una estructura es necesario proceder primero a su *idealización*, es decir a asimilarla a un modelo cuyo cálculo sea posible efectuar. Esta idealización se hace básicamente introduciendo algunas suposiciones sobre el comportamiento de los elementos que forman la estructura, sobre la forma en que éstos están unidos entre sí, y sobre la forma en que se sustenta. Una vez idealizada la estructura se procede a su análisis, calculando las deformaciones y esfuerzos que aparecen en ella, y utilizando para ello las técnicas propias del Análisis Estructural. Para este análisis siempre se dispone, como datos de partida, de los valores de las acciones exteriores y las dimensiones de la estructura, determinadas en las fases anteriores.

Salvo en casos muy simples, para el análisis de la estructura es necesario conocer las dimensiones transversales de los elementos que la componen, pero ocurre que estas dimensiones están básicamente determinadas por los esfuerzos internos que aparecen sobre ellos, y que en principio son desconocidos. Por esta razón el análisis de una estructura suele ser en general iterativo, hasta lograr unos esfuerzos internos y unas deformaciones que sean adecuados a las dimensiones transversales de los elementos.

Para comenzar este proceso iterativo de análisis se deben imponer unos valores para las dimensiones transversales de los elementos, basándose en la experiencia, o en un predimensionamiento, que normalmente se basa en hipótesis simplificativas.

Diseño de detalles. Son propios de la tecnología usada en la construcción de la estructura: nudos de unión, aparatos de apoyo, armaduras de hormigón, etc. El análisis de estructuras no interviene en esta fase.

1.2 DEFINICIONES GENERALES

Para que el análisis de una estructura sea correcto es necesario que la idealización que de ella se haga se acerque lo más posible a su comportamiento real. Para efectuar esta idealización existen diversos aspectos a tener en cuenta, como son:

- Disposición espacial de la estructura: puede ser en una, dos o tres dimensiones.

- Tipo de cargas actuantes: estáticas o dinámicas, según que sean constantes en el tiempo o variables con él.
- Tipo de elementos que forman la estructura: elementos discretos (piezas prismáticas), elementos continuos, o incluso estructuras mixtas.
- Tipo de uniones estructurales entre los elementos: articuladas, rígidas (habitualmente llamadas empotradas), o flexibles.
- Comportamiento del material: puede ser elástico, cuando al desaparecer las cargas el material vuelve a su estado inicial o no (por ejemplo si hay plasticidad). Dentro de los materiales elásticos el caso más habitual es el lineal, cuando la tensión y la deformación unitaria son proporcionales.
- Pequeñas deformaciones: cuando la posición deformada de la estructura coincide sensiblemente con su posición sin deformar. Esto simplifica la relación entre las deformaciones unitarias y los desplazamientos de un punto, que es lineal. En caso contrario se trata de un problema de grandes deformaciones, y la relación entre deformaciones unitarias y desplazamiento no es lineal.

De entre todos estos aspectos, en este texto se estudian estructuras de las siguientes características:

- estructuras formadas por elementos discretos,
- sometidas a cargas no variables con el tiempo, es decir en régimen estático,
- con uniones entre los elementos rígidas, articuladas o flexibles,
- extendidas en una, dos o tres dimensiones,
- formadas por un material con comportamiento elástico lineal, y
- con pequeñas deformaciones.

1.3 CLASIFICACIÓN DE LAS ESTRUCTURAS

Efectuar una clasificación detallada de las estructuras no es tarea fácil, pues depende de la tecnología y materiales usados para su construcción y del uso que se da a la estructura. Por esta razón sólo se incluyen aquí los tipos más usuales de estructuras, atendiendo a sus diferencias desde el punto de vista de su análisis, pero no desde el punto de vista de su funcionalidad.

Ya las primeras definiciones del concepto de estructura orientan a considerar dos grandes tipos de ellas: con elementos discretos o con elementos continuos. Ambos tipos se detallan a continuación.

1.3.1 Estructuras con elementos discretos

En estas estructuras se identifican claramente los elementos que la forman. Estos elementos se caracterizan por tener:

◊ una dimensión longitudinal mucho mayor que las otras dos,

- el material agrupado alrededor de la línea directriz del elemento, que normalmente es recta.

Estos elementos son por lo tanto piezas prismáticas y se denominan habitualmente *vigas* o *barras*. Los puntos de unión de unos elementos con otros se llaman *nudos* y cada elemento siempre tiene dos nudos extremos. Con esto la estructura se asemeja a una retícula formada por los distintos elementos unidos en los nudos. De hecho a estas estructuras se les denomina habitualmente *reticulares*.

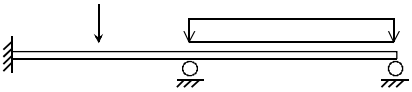
La unión de unos elementos con otros en los nudos puede hacerse de distintas formas, siendo las más importantes:

- unión rígida o empotramiento, que impone desplazamientos y giros comunes al elemento y al nudo, de tal manera que entre ellos se transmiten fuerzas y momentos,
- articulación, que permite giros distintos del elemento y del nudo, y en la que no se transmite momento en la dirección de la articulación,
- unión flexible, en la que los giros del elemento y el nudo son diferentes, pero se transmite un momento entre ambos elementos.

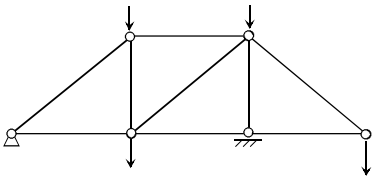
Los tipos más importantes de estructuras reticulares son:

- *Cerchas o celosías*. Están formadas por elementos articulados entre sí, y con cargas actuantes únicamente en los nudos. Los elementos trabajan a esfuerzo axial, y no hay flexión ni cortadura. Por su disposición espacial pueden ser planas o tridimensionales.
- *Vigas*. Están formadas por elementos lineales unidos rígidamente entre sí, y que pueden absorber esfuerzos de flexión y cortadura, sin torsión. También pueden absorber esfuerzo axial, pero éste está desacoplado de los esfuerzos de flexión y cortadura, en la hipótesis de pequeñas deformaciones.
- *Pórticos planos*. Son estructuras compuestas por elementos prismáticos, unidos rígidamente entre sí, y dispuestos formando una retícula plana, con las fuerzas actuantes situadas en su plano. Estas estructuras se deforman dentro de su plano y sus elementos trabajan a flexión, cortadura y esfuerzo axial.
- *Pórticos espaciales.* Son similares a los anteriores, pero situados formando una retícula espacial. Sus elementos pueden trabajar a esfuerzo axial, torsión y flexión en dos planos.
- *Arcos*. Son estructuras compuestas por una única pieza, cuya directriz es habitualmente una curva plana. Absorben esfuerzos axiales, de flexión y de cortadura. Como caso general existen también los arcos espaciales, cuya directriz es una curva no plana. En muchas ocasiones los arcos se encuentran integrados en otras estructuras más complejas, del tipo pórtico plano o espacial.
- *Emparrillados planos*. Son estructuras formadas por elementos viga dispuestos formando una retícula plana, pero con fuerzas actuantes perpendiculares a su plano. Se deforman perpendicularmente a su plano, y sus elementos trabajan a torsión y flexión.

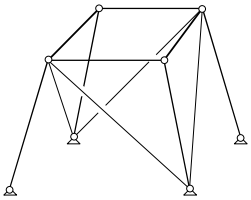
La figura 1.1 muestra algunos ejemplos de los tipos anteriores.



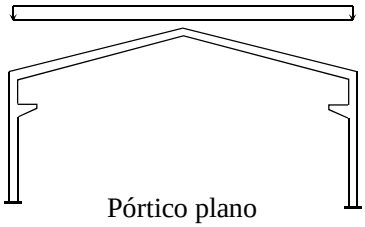
Viga



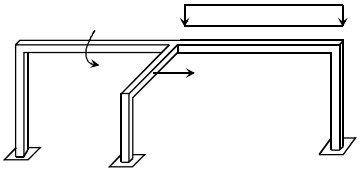
Celosía plana



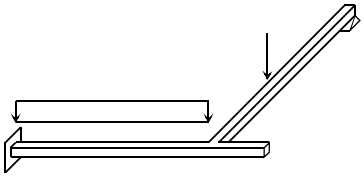
Celosía espacial



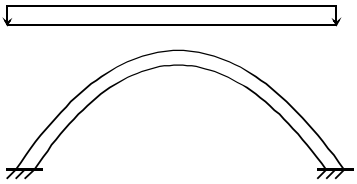
Pórtico plano



Pórtico espacial



Emparrillado



Arco

Figura 1.1

1.3.2 Estructuras con elementos continuos

En esta estructuras no se identifica a priori ninguna dirección preponderante y el material está distribuido de manera continua en toda la estructura. El concepto de nudo estructural tampoco puede introducirse de forma intuitiva y simple. Su análisis es más complejo que para las estructuras reticulares y no se aborda en este texto. Sin embargo, a continuación se resumen los casos más habituales de estructuras continuas.

- *Membranas planas*. Consisten en un material continuo, de espesor pequeño frente a sus dimensiones transversales, situado en un plano y con cargas contenidas en él. Corresponde al problema de elasticidad bidimensional, y son el equivalente continuo de un pórtico.

- *Placas*. Consisten en un medio continuo plano, de espesor pequeño frente a sus dimensiones transversales, con fuerzas actuantes perpendiculares a su plano. Son el equivalente continuo de un emparrillado plano.
- *Sólidos*. Son medios continuos tridimensionales sometidos a un estado general de tensiones y deformaciones.
- *Cáscaras*. Son medios continuos curvos, con pequeño espesor. Son el equivalente a la suma de una membrana y una placa, pero cuya superficie directriz es curva.

1.4 CLASIFICACIÓN DE LOS MÉTODOS DE ANÁLISIS

A continuación se resumen los principales métodos de análisis estructural para estructuras discretas, no pretendiéndose hacer una clasificación exhaustiva, sino sólo indicar los más importantes. Se presentan englobados en cuatro grandes bloques, en base a su naturaleza.

- Soluciones analíticas. Consisten en resolver directamente las ecuaciones que controlan el problema, por lo que normalmente sólo se pueden aplicar a casos sencillos.
  - ◊ Integración de la ecuación de la elástica en vigas.
  - ◊ Teoremas de Mohr para vigas.
  - ◊ Método de la viga conjugada para vigas.
- Empleo de las ecuaciones de la estática: sólo se pueden aplicar a estructuras isostáticas.
  - ◊ Método del equilibrio de los nudos para celosías.
  - ◊ Método de las secciones para celosías.
  - ◊ Método de la barra sustituida para celosías.
- Métodos basados en la flexibilidad.
  - ◊ Principio del Trabajo Virtual Complementario y principio del potencial complementario estacionario.
  - ◊ Segundo teorema de Castigliano y teorema de Crotti-Engesser.
  - ◊ Método general de flexibilidad, basado en el segundo teorema de Engesser.
  - ◊ Método de la compatibilidad de deformaciones en vigas.
  - ◊ Fórmula de los tres momentos para vigas.
  - ◊ Principio de Müller-Breslau para cargas móviles.
- Métodos basados en la rigidez.
  - ◊ Principio del Trabajo Virtual y principio del potencial total estacionario.
  - ◊ Primer teorema de Castigliano.
  - ◊ Método de rigidez en formulación matricial, para estructuras de cualquier tipo.
  - ◊ Método de la distribución de momentos, o de Cross, para pórticos planos.

1.5 CONDICIONES DE SUSTENTACIÓN DE LAS ESTRUCTURAS

Para que una estructura pueda considerarse como tal, debe estar en equilibrio bajo la acción de todas las fuerzas que actúan sobre ella, entre las que se incluyen tanto las acciones exteriores conocidas, como las reacciones desconocidas en los puntos de sustentación.

En el equilibrio de la estructura juega un papel fundamental la forma en que la estructura se halla unida a su sustentación, que se efectúa habitualmente a través de uno o varios puntos de apoyo, cada uno de los cuales introduce una o varias restricciones al movimiento de la estructura. Se denomina *condición de ligadura* (o simplemente ligadura, o también condición de apoyo) *a una condición que define la deformación en un punto y una dirección dados de la estructura*.

Como cada ligadura define la forma en que la estructura puede deformarse en el punto y la dirección donde está aplicada, aparece una fuerza o momento desconocido en la dirección de la ligadura, denominada fuerza o momento de reacción. Esta fuerza de reacción es la fuerza que la sustentación debe hacer para que se satisfaga la condición de ligadura.

Las ligaduras son direccionales, es decir que cada una de ellas actúa en una sola dirección del espacio. Sin embargo las condiciones de apoyo habituales de las estructuras hacen que varias ligaduras aparezcan agrupadas, introduciendo simultáneamente varias condiciones de deformación.

Siempre se cumple que en la dirección donde hay una ligadura aplicada se conoce el valor de la deformación (normalmente dicho valor es cero), y se desconoce el valor de la reacción que aparece. En el caso de desconocerse el valor de la deformación se dice que no hay ninguna ligadura aplicada, y en ese caso se conocerá el valor de la fuerza exterior aplicada en esa dirección, estando la deformación controlada por el comportamiento de la estructura.

A continuación se describen los tipos de apoyos más habituales que pueden encontrarse en las estructuras, indicando las condiciones de ligadura que introducen.

1.5.1 Estructuras planas

Apoyo deslizante o de rodillos

Impide el desplazamiento perpendicular a la línea de apoyo, y su reacción es una fuerza perpendicular a dicha línea. Se supone sin rozamiento y bidireccional, es decir que es capaz de ejercer reacción en los dos sentidos (a pesar de la forma sencilla que se emplea para su representación).

Este apoyo no influye en el giro de la estructura, que puede tener uno o varios giros, en función de la forma en que los distintos elementos estructurales se unan al nudo, como se muestra en la figura 1.2.

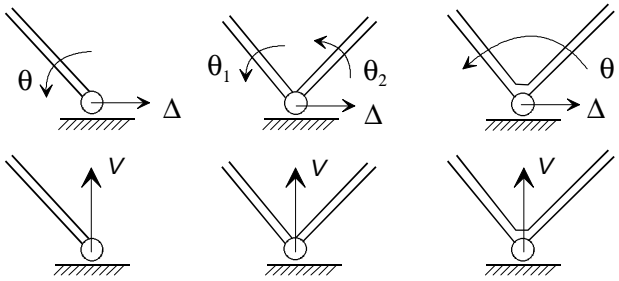


Figura 1.2

Apoyo articulado

No permite ningún tipo de desplazamiento, y su reacción es una fuerza de dirección arbitraria, que equivale a dos fuerzas según dos ejes ortogonales.

Este apoyo no influye en el giro de la estructura, que puede tener uno o varios giros, en función de la forma en que los distintos elementos estructurales se unen al nudo (figura 1.3).

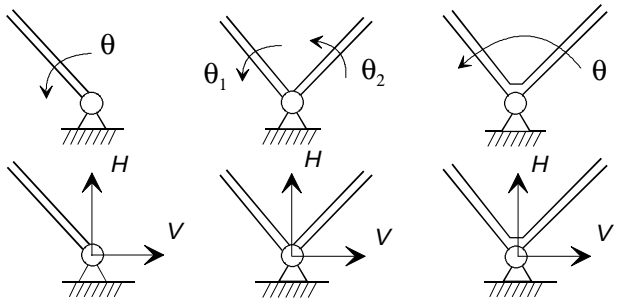


Figura 1.3

Empotramiento

No permite ningún desplazamiento ni el giro. Su reacción son dos fuerzas (*H* y *V*) contenidas en el plano de la estructura, y un momento *M* perpendicular a él (figura 1.4).

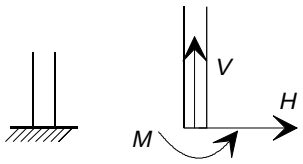


Figura 1.4

Empotramiento deslizante

Permite únicamente el desplazamiento en una dirección, pero impide el desplazamiento en la dirección perpendicular y también el giro. Se trata por lo tanto de un caso particular del empotramiento, pero que permite el deslizamiento en una dirección determinada. Su

reacción es una fuerza perpendicular al eje de deslizamiento *H*, y un momento *M* perpendicular al plano de la estructura (figura 1.5). Este tipo de apoyo no suele encontrarse habitualmente en la realidad, pero aparece cuando se emplean simplificaciones para considerar la simetría de una estructura.

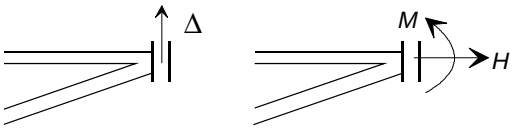


Figura 1.5

Apoyo flexible

El apoyo flexible está constituido por un punto de la estructura que está unido a la sustentación mediante uno o varios muelles, como se muestra en la figura 1.6. En general puede haber constantes de rigidez distintas en cada dirección, pudiendo ser cero en alguna de ellas (dirección libre). Asimismo el apoyo elástico puede coexistir con otras condiciones de ligadura.

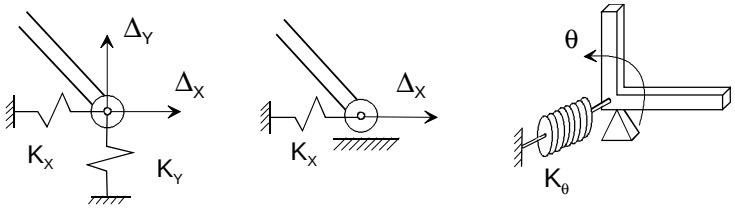


Figura 1.6

Es habitual incluir el apoyo flexible en la descripción de los tipos de apoyos, pero en sentido estricto este apoyo no es una condición de ligadura para la estructura, pues no es un punto en el que se conoce el valor de la deformación. En efecto, no se conocen ni el desplazamiento del nudo ni la fuerza en el muelle, sino únicamente la relación entre ellos, que es la constante de rigidez del muelle: la fuerza en el muelle es proporcional a la deformación del apoyo y la reacción de la sustentación es igual a la fuerza en el muelle. Esta igualdad entre la fuerza en el muelle y la reacción de la sustentación es la que hace que este nudo se considere a veces como un apoyo, aunque como se ha dicho no lo es. Se trata por lo tanto de un nudo de la estructura como cualquier otro, al que llegan una serie de elementos estructurales y además el muelle, que debe considerarse como uno más. En este sentido, siempre se considerarán aquí los muelles como elementos estructurales, y se les dará el mismo tratamiento que a los demás.

1.5.2 Estructuras tridimensionales

Rótula esférica

Es el equivalente tridimensional de la articulación plana. No permite ningún desplazamiento, y sí permite los tres giros. Su reacción son tres fuerzas ortogonales (o un vector fuerza de dirección arbitraria), como se indica en la figura 1.7.

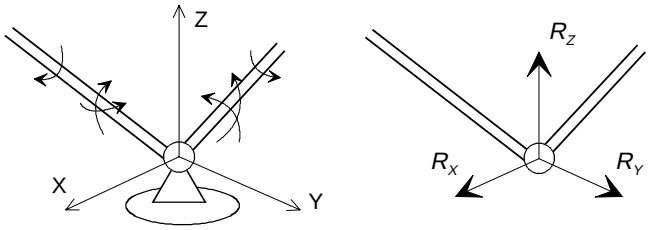


Figura 1.7

Apoyo deslizante sobre un plano

Se trata de un punto que puede moverse apoyado sobre todo un plano, el cual puede ser uno de los planos coordenados, u otro cualquiera. Su reacción es una fuerza normal al plano de deslizamiento (figura 1.8).

No influye en los giros que pueda tener la estructura, que podrán ser uno o varios, en función de la forma en que los distintos elementos estructurales se unan al nudo.

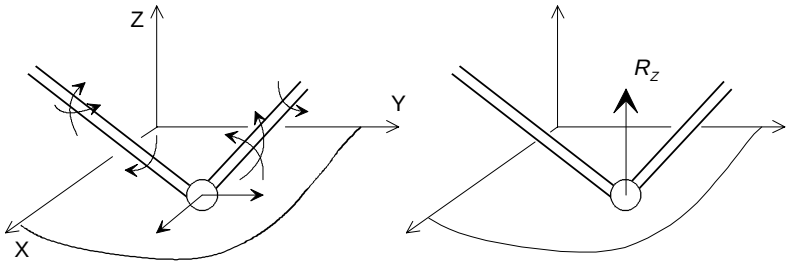


Figura 1.8

Apoyo deslizante sobre una recta.

En este caso el punto de apoyo está obligado a moverse sobre una recta conocida, por lo que el único desplazamiento posible es en la dirección de dicha recta (figura 1.9). La reacción son dos fuerzas perpendiculares a la recta (*H, V*). Al igual que en caso anterior, esta condición de ligadura no influye sobre los giros.

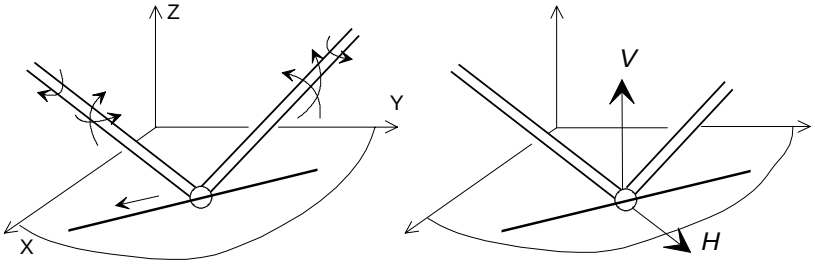


Figura 1.9

Empotramiento deslizante prismático

En este caso el punto de apoyo se mueve sobre una recta, pero no tiene ninguna posibilidad de giro, como se muestra en la figura 1.10. Existe por lo tanto un sólo grado de libertad, que es el desplazamiento en la dirección de la recta. La reacción tiene cinco componentes: dos fuerzas perpendiculares a la recta (V y T) y tres momentos (M_L, M_V y M_T).

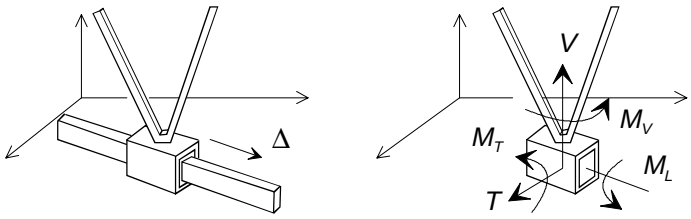


Figura 1.10

Empotramiento deslizante cilíndrico

En este caso el punto puede deslizar sobre una recta y además puede girar respecto a ella. Existen por lo tanto dos grados de libertad: el desplazamiento en la dirección de la recta y la rotación alrededor de ella (figura 1.11). La reacción tiene cuatro componentes: dos fuerzas perpendiculares a la recta (V y T), y dos momentos también perpendiculares a ella (M_V y M_T).

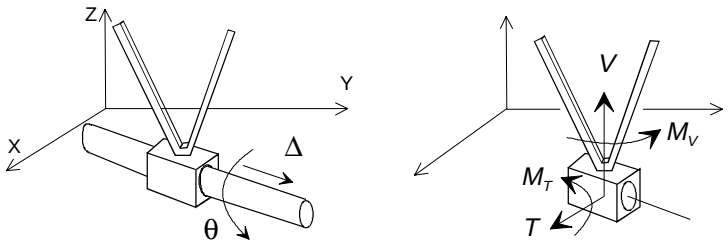


Figura 1.11

1.6 CONDICIONES DE CONSTRUCCIÓN

Los distintos elementos que componen una estructura reticular se pueden unir básicamente de dos formas:

- De forma totalmente rígida, transmitiéndose entre los elementos unidos todas las fuerzas y momentos posibles: tres fuerzas y tres momentos en el caso espacial, y dos fuerzas y un momento en el caso plano. En este caso todas las deformaciones de los elementos unidos son iguales.
- Mediante uniones imperfectas, que permiten un cierto movimiento relativo entre los elementos unidos. Estas uniones imperfectas se obtienen a base de anular la capacidad de transmisión de alguno de los esfuerzos transmitidos entre los elementos. Al

eliminarse esta capacidad de transmitir algún esfuerzo, aparece un movimiento relativo entre los elementos, en la dirección del esfuerzo anulado.

Se denominan condiciones de construcción a estas condiciones de esfuerzo nulo impuestas a las uniones entre los elementos de la estructura. Su presencia juega un papel importante en la estabilidad de la estructura, o en su naturaleza isostática o hiperestática.

Los tipos más importantes de condiciones de construcción se indican en la tabla 1.1.

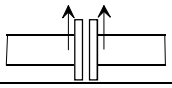
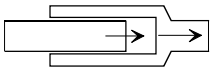
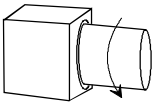
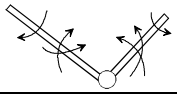
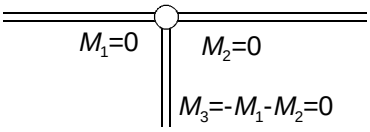
Tipo	Esfuerzo anulado	Representación
Articulación (o rótula)	Momento flector	
Deslizadera	Esfuerzo cortante	
Deslizadera axial	Esfuerzo axial	
Articulación a torsión	Momento torsor	
Rótula esférica	Dos momentos flectores, y un momento torsor	

Tabla 1.1

Puede ocurrir que en un mismo punto existan varias condiciones de construcción, que se deben ir identificando de manera independiente, y cuyos efectos se suman. Así por ejemplo, la rótula esférica está compuesta por dos articulaciones según dos ejes perpendiculares al elemento y una articulación a la torsión.

Ejemplo

En un nudo totalmente articulado de una estructura plana, al que llegan n barras, el número de condiciones de construcción es n-1. La ecuación n-sima es la ecuación estática de suma de momentos nulos en el nudo.



1.7 ESTABILIDAD Y GRADO DE DETERMINACIÓN EXTERNO

Para analizar una estructura se debe establecer en primer lugar el diagrama de sólido libre de toda ella. En este diagrama se considera a toda la estructura como un sólido rígido, y se sustituyen las ligaduras por sus reacciones correspondientes, con lo que se obtienen tantas incógnitas como reacciones haya, en número *r*. A este conjunto se le aplica un estudio de estabilidad.

La estática facilita q=3 ecuaciones de equilibrio en el caso plano, y q=6 ecuaciones en el espacial. En función de como sea el número de reacciones incógnita, en relación con este número de ecuaciones de equilibrio se presentan tres casos diferentes. Suponiendo que no hay condiciones de construcción en la estructura, es decir que las uniones en todos los nudos son rígidas, dichos casos son:

A. El número de reacciones es menor que el de ecuaciones de equilibrio $r<q$: la estructura es un conjunto inestable, y se dice que es externamente inestable. Sin embargo para ciertas combinaciones particulares de las fuerzas exteriores la estructura puede encontrarse en equilibrio, que se denomina equilibrio inestable.

B. El número de reacciones es igual al número de ecuaciones de equilibrio $r=q$. En principio la estructura es externamente isostática ya que hay ecuaciones de la estática en número suficiente para calcular todas las reacciones. Sin embargo esta condición es necesaria pero no suficiente para garantizar que la estructura es externamente isostática. En efecto, puede ocurrir que el número de reacciones sea el correcto, pero que su disposición geométrica sea tal que la estructura sea inestable en una determinada dirección: se dice en este caso que tiene inestabilidad externa. Esto ocurre por ejemplo en una estructura plana cuando las tres reacciones se cortan en un punto, o son paralelas.

C. El número de reacciones es mayor que el de ecuaciones de equilibrio $r>q$. La estructura está estáticamente indeterminada en principio, y se dice que es externamente hiperestática: es necesario introducir nuevas condiciones, además de las de la estática, para calcular las reacciones exteriores. Al igual que en el caso anterior esta condición es necesaria pero no suficiente: puede ocurrir que aunque haya reacciones en exceso, éstas tengan una disposición espacial tal que no impidan la existencia de algún tipo de inestabilidad en alguna otra dirección.

Normalmente los casos de inestabilidad externa suelen ir acompañados de algún tipo de hiperestaticidad externa en alguna otra dirección, de tal manera que el cómputo global de incógnitas y ecuaciones no da una respuesta correcta.

La tabla 1.2 resume las posibles situaciones.

	$r < q$	$\rightarrow$ Inestable externamente
Isostática externamente $\rightarrow$	$r = q$	
Hiperestática externamente $\rightarrow$	$r > q$	

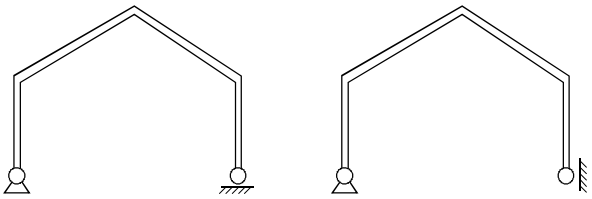
Tabla 1.2

Puede concluirse que la comparación del número de reacciones *r* con el número de ecuaciones de la estática *q*, brinda nada más que un balance global del estado de la

estructura, pero no permite determinar con precisión su situación. Esto requiere en general una inspección de la misma y un análisis de si existen posibles situaciones de inestabilidad.

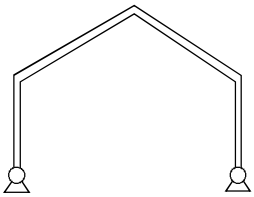
Ejemplos

Las estructuras de la figura siguiente tienen ambas r=q=3. Sin embargo la de la izquierda es estable e isostática, ya que las tres reacciones son independientes, mientras que la de la derecha es inestable, pues las tres reacciones se cortan en el apoyo de la izquierda.



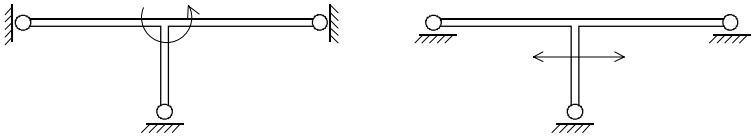
Estable, isostática Inestable

La estructura de la figura siguiente tiene r=4, y es externamente hiperestática.



Hiperestática

Las estructuras siguientes tienen ambas r=q=3, pero su situación es muy diferente, pues la disposición de las reacciones produce inestabilidad de distinto tipo. Esta inestabilidad está unida a una hiperestaticidad en otra dirección, de tal manera que el cómputo total de reacciones hace parecer que la estructura es isostática.



Hiperestática s/X
Inestable al giro

Hiperestática s/Y
Inestable s/X

1.8 BIBLIOGRAFÍA

1. Argüelles Alvarez, R., y Argüelles Bustillo, R., *Análisis de Estructuras: Teoría, Problemas y Programas*, Escuela Técnica Superior de Ingenieros de Montes, Madrid, 1996.
2. Hibbeler, R. C., *Structural Analysis*, Prentice-Hall, New Jersey, 1996.
3. Oravas, G. A., McLean, L., *Historical Development of Energetical Principles in Elastomechanics*, Applied Mechanics Review, Parte I, Vol. 19, Nº 8, pp. 647-658, Agosto 1966.
4. Oravas, G. A., McLean, L., *Historical Development of Energetical Principles in Elastomechanics*, Applied Mechanics Review, Parte II, Vol. 19, Nº 11, pp. 919-933, Noviembre 1966.
5. Timoshenko, S. P., *History of Strength of Materials*, McGraw-Hill, New York, 1953.
6. Timoshenko, S. P., y Young, D. H., *Teoría de las Estructuras*, Ed. Urmo, Bilbao, 1974.
7. Tuma, J. J., *Análisis Estructural*, Serie Schaum, McGraw-Hill, New York, 1970.
8. Wang, C. K., *Intermediate Structural Analysis*, McGraw-Hill, New York, 1983.

Capítulo 2

Teoremas fundamentales

2.1 INTRODUCCIÓN

En este capítulo se presentan los teoremas fundamentales en que se basa el análisis estructural. Su estudio se hace desde la óptica de la mecánica de sólidos, considerando un medio continuo, con lo que se obtienen expresiones muy generales, aptas para ser empleadas tanto en el análisis de estructuras discretas como continuas.

Se considera aplicable la hipótesis de pequeñas deformaciones: la posición deformada del sólido coincide con la posición sin deformar, con lo que las ecuaciones de equilibrio estático se pueden plantear en la configuración inicial del sólido, que es conocida.

Se supone en principio un comportamiento elástico del material, pero siempre que es posible los desarrollos se hacen con la mayor generalidad, obteniéndose en ocasiones expresiones válidas para casos elásticos lineales o no lineales

2.1.1 Fuerzas exteriores

Sobre el sólido pueden actuar las siguientes fuerzas (figura 2.1):

- Fuerzas distribuidas sobre el volumen del sólido $\mathbf{q}_v$. Tienen tres componentes y cada una de ellas es una función del punto sobre el que actúan. Están definidas en principio sobre todo el volumen del sólido.
- Fuerzas distribuidas sobre la superficie exterior del sólido $\mathbf{q}_s$. Tienen tres componentes, cada una de las cuales es una función del punto sobre el que actúan, aunque sólo están definidas en puntos situados sobre la superficie exterior del sólido.
- Fuerzas y momentos puntuales, aplicadas directamente en determinados puntos del sólido. No son consistentes con la mecánica de los medios continuos, pero se introducen, cuando es posible, por su gran interés práctico. Habitualmente se manejan descompuestas en todas sus componentes escalares, y agrupadas en un único vector **P**

que contiene todas las componentes escalares de todas las fuerzas y momentos, en número *N*.

$$\mathbf{q}_v = \begin{Bmatrix} q_{vx} \\ q_{vy} \\ q_{vz} \end{Bmatrix} \qquad \mathbf{q}_s = \begin{Bmatrix} q_{sx} \\ q_{sy} \\ q_{sz} \end{Bmatrix} \qquad \mathbf{P} = \begin{Bmatrix} P_1 \\ P_2 \\ \dots \\ P_N \end{Bmatrix} \tag{2.1}$$

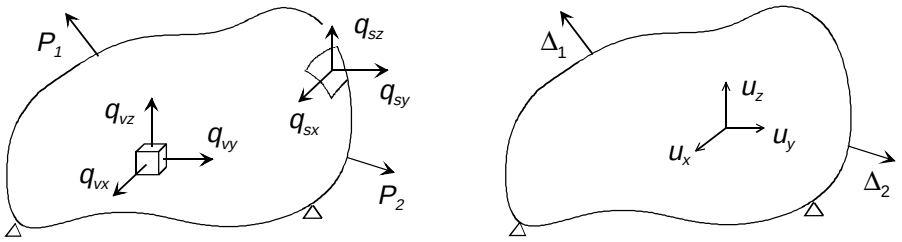


Figura 2.1

2.1.2 Campo de deformaciones

En cada punto del sólido existe una deformación (figura 2.1) que se denomina

$$\mathbf{u} = \begin{Bmatrix} u_x \\ u_y \\ u_z \end{Bmatrix} \tag{2.2}$$

y cuyas tres componentes son función de las coordenadas del punto (*x*,*y*,*z*).

Se define asimismo un vector $\boldsymbol{\Delta}$, que contiene los valores que adopta el campo de deformaciones en los puntos de aplicación y en la dirección de las fuerzas puntuales aplicadas. Es decir que $\boldsymbol{\Delta}$ contiene las deformaciones del sólido medidas en la dirección de las fuerzas aplicadas, consideradas como escalares.

$$\boldsymbol{\Delta} = \begin{Bmatrix} \Delta_1 \\ \Delta_2 \\ \dots \\ \Delta_N \end{Bmatrix} \tag{2.3}$$

2.2 TRABAJO

El trabajo efectuado por las fuerzas puntuales **P**, cuando su punto de aplicación se deforma una cantidad $\boldsymbol{\Delta}$, tiene la expresión:

$$W_P = \int_0^{\boldsymbol{\Delta}} \mathbf{P}^T d\boldsymbol{\Delta} \tag{2.4}$$

Si el sólido es elástico lineal, existe una proporcionalidad entre deformaciones y fuerzas a través de una matriz **k** que mide la rigidez del sólido:

$$\mathbf{P} = \mathbf{k}\boldsymbol{\Delta} \tag{2.5}$$

con lo que el valor del trabajo es

$$W_P = \int_{\mathbf{0}}^{\boldsymbol{\Delta}} \boldsymbol{\Delta}^T \mathbf{k} d\boldsymbol{\Delta} = \frac{1}{2}\boldsymbol{\Delta}^T \mathbf{k}\boldsymbol{\Delta} = \frac{1}{2}\mathbf{P}^T\boldsymbol{\Delta} \tag{2.6}$$

Para las fuerzas distribuidas de volumen y superficie se define el *trabajo unitario*, o trabajo efectuado por unidad de volumen o de superficie, según corresponda por el tipo de fuerza, como (figura 2.2):

$$W_0 = \int_0^{\mathbf{u}} \mathbf{q}_v^T d\mathbf{u} + \int_0^{\mathbf{u}} \mathbf{q}_s^T d\mathbf{u} \tag{2.7}$$

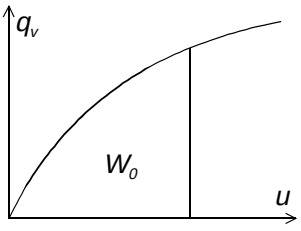


Figura 2.2

En régimen lineal las fuerzas y las deformaciones son proporcionales a través de unas matrices simétricas $\mathbf{k}_v$ y $\mathbf{k}_s$, con lo que el trabajo unitario queda:

$$W_0 = \int_0^{\mathbf{u}} \mathbf{u}^T \mathbf{k}_v d\mathbf{u} + \int_0^{\mathbf{u}} \mathbf{u}^T \mathbf{k}_s d\mathbf{u} = \frac{1}{2}\mathbf{u}^T \mathbf{k}_v \mathbf{u} + \frac{1}{2}\mathbf{u}^T \mathbf{k}_s \mathbf{u} = \frac{1}{2}\mathbf{q}_v^T \mathbf{u} + \frac{1}{2}\mathbf{q}_s^T \mathbf{u} \tag{2.8}$$

El trabajo producido por las fuerzas de volumen y superficie W_d sobre todo el sólido es la integral al volumen o a la superficie correspondientes, del trabajo unitario. En régimen lineal, su expresión es:

$$W_d = \frac{1}{2}\int_v \mathbf{q}_v^T \mathbf{u} dv + \frac{1}{2}\int_s \mathbf{q}_s^T \mathbf{u} ds \tag{2.9}$$

2.2.1 Trabajo complementario

El trabajo complementario efectuado por una fuerza $\vec{F}$, cuando su punto de aplicación se mueve una magnitud $\vec{u}$ es:

$$W_F^* = \int_0^{\vec{F}} \vec{u} \cdot d\vec{F} \tag{2.10}$$

El trabajo complementario efectuado por las fuerzas puntuales tiene la expresión:

$$W_P^* = \int_{\mathbf{0}}^{\mathbf{P}} \boldsymbol{\Delta}^T d\mathbf{P} \tag{2.11}$$

En el caso lineal existe proporcionalidad entre deformaciones y fuerzas, por lo que su valor es :

$$W_P^* = \frac{1}{2}\boldsymbol{\Delta}^T\mathbf{P} \tag{2.12}$$

que como puede comprobarse es igual al trabajo de las fuerzas W_P dado por (2.6).

Para las fuerzas de volumen y distribuidas se define el *trabajo complementario unitario*, o trabajo complementario efectuado sobre la unidad de volumen o de superficie, según el tipo de fuerza (figura 2.3):

$$W_0^* = \int_0^{\mathbf{q}_v} \mathbf{u}^T d\mathbf{q}_v + \int_0^{\mathbf{q}_s} \mathbf{u}^T d\mathbf{q}_s \tag{2.13}$$

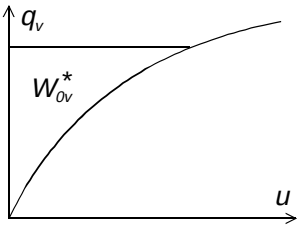


Figura 2.3

En régimen lineal las fuerzas y las deformaciones son proporcionales, con lo que el trabajo complementario unitario es:

$$W_0^* = \frac{1}{2}\mathbf{u}^T\mathbf{q}_v + \frac{1}{2}\mathbf{u}^T\mathbf{q}_s \tag{2.14}$$

El trabajo complementario producido por las fuerzas de volumen y superficie en todo el sólido es la integral, a su volumen o superficie, del trabajo unitario correspondiente. Su expresión en régimen lineal es:

$$W_d^* = \frac{1}{2}\int_v \mathbf{u}^T\mathbf{q}_v\, dv + \frac{1}{2}\int_s \mathbf{u}^T\mathbf{q}_s\, ds \tag{2.15}$$

que como puede comprobarse es igual al trabajo de las fuerzas W_d dado por (2.9).

2.2.2 Trabajo virtual

El trabajo virtual se define como el trabajo que efectúan las fuerzas aplicadas sobre la estructura cuando ésta se somete a un pequeño desplazamiento hipotético, llamado desplazamiento virtual, compatible con las condiciones de sustentación de la misma.

Para aplicar este concepto a un sólido deformable se varía el campo de desplazamientos $\mathbf{u}$ en una magnitud $\delta\mathbf{u}$ que es el desplazamiento virtual. Este es un campo de desplazamientos continuo que cumple con la condición de pequeñas deformaciones y es compatible con todas las condiciones de sustentación existentes en el sólido. Esto quiere decir que en aquellas zonas del sólido donde existen desplazamientos impuestos de valor conocido, el desplazamiento virtual es nulo. Durante esta variación del campo de desplazamientos todas las fuerzas aplicadas sobre el sólido se mantienen constantes.

Al aplicarse la variación $\delta\mathbf{u}$, también se produce una variación $\delta\boldsymbol{\Delta}$ en el vector de deformaciones en la dirección de las fuerzas puntuales. El trabajo virtual que se produce es:

$$\delta W = \int_v \mathbf{q}_v^T \delta \mathbf{u} dv + \int_s \mathbf{q}_s^T \delta \mathbf{u} ds + \mathbf{P}^T \delta \boldsymbol{\Delta} \tag{2.16}$$

Esta expresión es válida tanto en régimen lineal como en no lineal (figura 2.4).

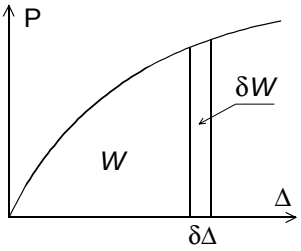


Figura 2.4

2.2.3 Trabajo complementario virtual

Por analogía con el trabajo virtual, se define el trabajo complementario virtual como el trabajo producido por las fuerzas aplicadas sobre el sólido, cuando se aplica una variación hipotética a dichas fuerzas llamada variación virtual, manteniendo fijos los desplazamientos. La variación virtual de las fuerzas debe cumplir con el equilibrio de fuerzas, por lo que es necesario en general variar tanto las fuerzas exteriores como las reacciones en los puntos de apoyo.

Si la variación de las fuerzas es $\delta \mathbf{q}_v, \delta \mathbf{q}_s, \delta \mathbf{P}$, el trabajo complementario virtual que se produce es:

$$\delta W^* = \int_v \mathbf{u}^T \delta \mathbf{q}_v dv + \int_s \mathbf{u}^T \delta \mathbf{q}_s ds + \boldsymbol{\Delta}^T \delta \mathbf{P} \tag{2.17}$$

Esta expresión es válida tanto en régimen lineal como en no lineal (figura 2.5).

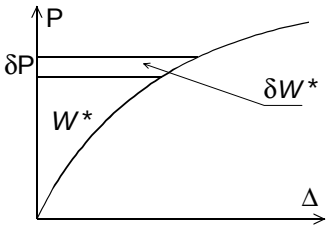


Figura 2.5

2.3 RESUMEN DE ELASTICIDAD

2.3.1 Campo de tensiones

Para introducir el concepto de tensión, se efectúa un corte arbitrario al sólido en equilibrio y en dicho corte se considera un elemento infinitesimal de superficie Δs, siendo $\vec{n}$ el vector unitario normal a él. La resultante de las acciones que el resto del sólido efectúa sobre el elemento de superficie está compuesta por una fuerza $\vec{f}$ y un momento $\vec{m}$ (figura 2.6).

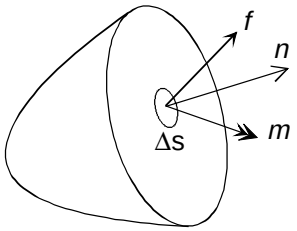


Figura 2.6

Se define el *vector tensión* como:

$$\vec{t}^{\,n} = \lim_{\Delta s \to 0} \frac{\vec{f}}{\Delta s} \tag{2.18}$$

El vector tensión depende de la orientación $\vec{n}$ del elemento de superficie, por lo que se añade el superíndice *n* para indicarlo.

Con objeto de hallar una expresión más detallada del vector tensión se considera un tetraedro elemental (figura 2.7) y se estudia su equilibrio de fuerzas. Este equilibrio se expresa en forma vectorial[1] como:

$$A^n \vec{t}^{\,n} - A_1 \vec{t}^{\,1} - A_2 \vec{t}^{\,2} - A_3 \vec{t}^{\,3} = 0 \tag{2.19}$$

siendo:

A^n el área de la base del tetraedro,

$\vec{n}$ es el vector unitario normal a la base del tetraedro,

A_i es el área de la cara *i* del tetraedro,

$\vec{t}^{\,n}$ es el vector tensión sobre la base del tetraedro,

$\vec{t}^{\,i}$ es el vector tensión en la cara *i* del tetraedro.

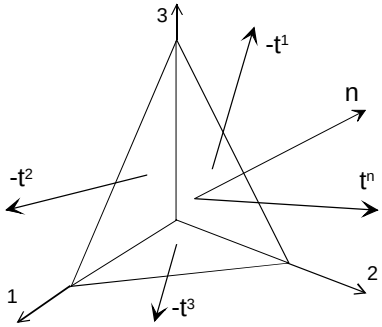


Figura 2.7

Pero se cumple que:

$$A^i = A^n n_i \quad i = 1,3 \tag{2.20}$$

[1] En los desarrollos siguientes se emplean indistintamente las denominaciones X,Y,Z o 1,2,3 para los ejes coordenados.

luego el equilibrio queda:

$$\vec{t}^{\,n} = n_1\vec{t}^{\,1} + n_2\vec{t}^{\,2} + n_3\vec{t}^{\,3} \tag{2.21}$$

Pero a su vez cada vector tensión se puede expresar[2] en función de los tres vectores de la base $\vec{u}_i$ en la forma:

$$\vec{t}^{\,i} = \sigma_{ij}\vec{u}_j \qquad i,j = 1,3 \tag{2.22}$$

siendo σ_{ij} las componentes del vector tensión en la cara *i* según los tres ejes. Sustituyendo en la ecuación de equilibrio se obtiene:

$$\vec{t}^{\,n} = \sigma_{1j}\vec{u}_j n_1 + \sigma_{2j}\vec{u}_j n_2 + \sigma_{3j}\vec{u}_j n_3 \tag{2.23}$$

$$\vec{t}^{\,n} = \sigma_{ij} n_i \vec{u}_j \tag{2.24}$$

Esta es la denominada fórmula de Cauchy, que proporciona el valor del vector tensión en una dirección cualquiera dada por el vector n_i. Esta fórmula introduce el *tensor de tensiones* σ_{ij} e indica que multiplicando este tensor por el vector unitario de una dirección $\vec{n}$ se obtiene el vector de tensiones en dicha dirección. Así pues el tensor de tensiones caracteriza la totalidad del estado de tensiones del material en el punto considerado y es independiente de la dirección en que se mida.

La representación de la fórmula de Cauchy en notación de subíndices y matricial es:

$$t_j^n = \sigma_{ij} n_i \qquad\qquad \mathbf{t}^n = \boldsymbol{\sigma}^T \mathbf{n} \tag{2.25}$$

donde $\boldsymbol{\sigma}$ es la matriz que representa al tensor σ_{ij}.

- El vector tensión se equilibra en el interior del sólido con el vector tensión en la cara opuesta de la sección de corte, que es igual y de sentido contrario.
- En la superficie exterior del sólido (figura 2.8) el vector tensión se equilibra con las fuerzas exteriores aplicadas sobre ella:

  $$\vec{q}_s = \vec{t}^{\,n} \tag{2.26}$$

  Por lo tanto se cumple que:

  $$\vec{q}_s = \sigma_{ij} n_i \vec{u}_j \qquad\qquad \mathbf{q}_s = \boldsymbol{\sigma}^T \mathbf{n} \tag{2.27}$$

  que es la expresión de la ecuación de equilibrio en la superficie.

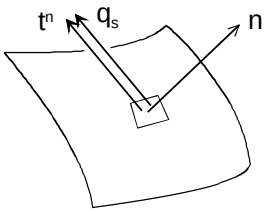


Figura 2.8

[2] Con notación de subíndices, se emplea el criterio de la suma en los índices mudos.

2.3.2 Deformaciones unitarias

Al aceptarse la hipótesis de pequeñas deformaciones, las deformaciones unitarias se representan mediante el *tensor infinitesimal de deformaciones unitarias*, cuya definición, en función de las deformaciones, es:

$$\varepsilon_{ij} = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial u_i}{\partial x_j} + \frac{\partial u_j}{\partial x_i} \right) \tag{2.28}$$

Se observa que es un tensor simétrico, por lo que sólo seis de sus componentes son distintas.

Este tensor se emplea bien como tensor, tal y como se ha definido, o bien como un vector $\boldsymbol{\varepsilon}$, que agrupa sólo las seis componentes distintas. Cuando se usa como vector, para las tres componentes de cortadura (aquellas en que $i \neq j$) se emplean las deformaciones ingenieriles γ, que son el doble de las exactas.

$$\varepsilon_{ii} = \frac{\partial u_i}{\partial x_i} \qquad i = j \qquad\qquad \gamma_{ij} = \frac{\partial u_i}{\partial x_j} + \frac{\partial u_j}{\partial x_i} = 2\varepsilon_{ij} \qquad i \neq j \tag{2.29}$$

$$\boldsymbol{\varepsilon} = \begin{Bmatrix} \varepsilon_{11} \\ \varepsilon_{22} \\ \varepsilon_{33} \\ \gamma_{12} \\ \gamma_{23} \\ \gamma_{31} \end{Bmatrix} \tag{2.30}$$

El empleo de esta representación simplifica algunos desarrollos posteriores, permitiendo pasar con sencillez de la notación tensorial a la vectorial.

2.3.3 Ecuaciones de equilibrio

Para obtener las ecuaciones de equilibrio del sólido se aísla un subdominio arbitrario del mismo, de volumen V y superficie S y se le aplican las ecuaciones de equilibrio de fuerzas y de momentos.

Equilibrio de fuerzas

Las tres ecuaciones de equilibrio del dominio se pueden expresar como

$$\int_V q_{vi}\, dv + \int_S t_i^n\, ds = 0 \qquad i = 1,3 \tag{2.31}$$

Las fuerzas en la superficie de dominio se pueden sustituir por su valor en función del tensor de tensiones mediante la fórmula de Cauchy, quedando:

$$\int_V q_{vi}\, dv + \int_S \sigma_{ji} n_j\, ds = 0 \qquad i = 1,3 \tag{2.32}$$

Aplicando el teorema de la divergencia, la segunda integral se puede transformar en una integral de volumen:

$$\int_V q_{vi} dv + \int_V \frac{\partial \sigma_{ji}}{\partial x_j} dv = 0 \qquad i = 1,3 \tag{2.33}$$

$$\int_V \left(q_{vi} + \frac{\partial \sigma_{ji}}{\partial x_j} \right) dv = 0 \qquad i = 1,3 \tag{2.34}$$

pero como el dominio V es arbitrario el integrando debe ser nulo, con lo que se obtiene:

$$\frac{\partial \sigma_{ji}}{\partial x_j} + q_{vi} = 0 \qquad i = 1,3 \tag{2.35}$$

que son las ecuaciones de equilibrio del sólido, expresadas usando el tensor de tensiones como incógnita.

Equilibrio de momentos

Aplicando el equilibrio de momentos al dominio arbitrario, y tras un desarrollo que se omite, se obtiene:

$$\sigma_{ij} = \sigma_{ji} \qquad \rightarrow \qquad \boldsymbol{\sigma} = \boldsymbol{\sigma}^T \tag{2.36}$$

Es decir que el tensor de tensiones es simétrico.

2.3.4 Ecuación constitutiva

La ecuación constitutiva del material representa su comportamiento mecánico y establece una relación entre los tensores de tensiones y de deformaciones unitarias:

$$\sigma_{ij} = D_{ijkl} \varepsilon_{kl} \tag{2.37}$$

donde D_{ijkl} es un tensor que define las propiedades del material. Es de orden 4 y por lo tanto requiere 81 coeficientes para su definición; pero al ser los tensores σ y ε simétricos, el D también lo es, por lo que sólo requiere 36 términos distintos. Por consideraciones termodinámicas relativas a la naturaleza reversible del proceso de carga y descarga del material se puede reducir el número de parámetros requeridos hasta 21. Finalmente para materiales ortótropos (materiales con dos direcciones preponderantes) el número de parámetros es de sólo 9; y si el material es isótropo (materiales con propiedades iguales en todas las direcciones) se demuestra que sólo son necesarios dos parámetros diferentes para definir el tensor D. Estos parámetros son habitualmente el módulo de elasticidad E y el módulo de Poisson ν.

En particular se consideran aquí los materiales *elásticos*, en los cuales se cumple que el proceso de carga y descarga del material se lleva a cabo siempre por la misma curva; y sea cual sea la historia de cargas, el material siempre se encuentra en un punto de dicha curva característica (figura 2.9).

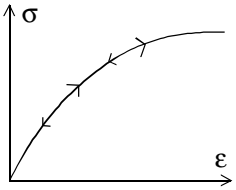


Figura 2.9

La expresión de la ecuación constitutiva para un material isótropo elástico, puesta en notación matricial es:

$$\boldsymbol{\sigma} = \mathbf{D}\boldsymbol{\varepsilon} \tag{2.38}$$

$$\begin{Bmatrix} \sigma_{xx} \\ \sigma_{yy} \\ \sigma_{zz} \\ \sigma_{xy} \\ \sigma_{yz} \\ \sigma_{zx} \end{Bmatrix} = \frac{E(1-\nu)}{(1+\nu)(1-2\nu)} \begin{bmatrix} 1 & \frac{\nu}{1-\nu} & \frac{\nu}{1-\nu} & 0 & 0 & 0 \\ \frac{\nu}{1-\nu} & 1 & \frac{\nu}{1-\nu} & 0 & 0 & 0 \\ \frac{\nu}{1-\nu} & \frac{\nu}{1-\nu} & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{1-2\nu}{2(1-\nu)} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{1-2\nu}{2(1-\nu)} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{1-2\nu}{2(1-\nu)} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \varepsilon_{xx} \\ \varepsilon_{yy} \\ \varepsilon_{zz} \\ \gamma_{xy} \\ \gamma_{yz} \\ \gamma_{zx} \end{Bmatrix} \tag{2.39}$$

La matriz simétrica **D** se denomina *matriz elástica*. Si el material es lineal, los coeficientes de **D** son constantes, y en caso contrario pueden ser función de la propias deformación o tensión en el material.

2.4 DENSIDAD DE ENERGÍA DE DEFORMACIÓN

Se define la densidad de energía de deformación, o energía de deformación unitaria, como la integral:

$$U_0(\varepsilon_{ij}) = \int_0^{\varepsilon_{ij}} \sigma_{ij} d\varepsilon_{ij} \tag{2.40}$$

con la condición de que sea sólo función del estado final de deformación unitaria, es decir que la integral sea independiente del camino (figura 2.10).

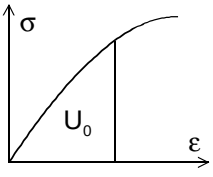


Figura 2.10

Para ello debe cumplirse que el integrando sea una diferencial perfecta, es decir que exista una magnitud U_0 tal que se cumpla:

$$dU_0 = \sigma_{ij} d\varepsilon_{ij} \tag{2.41}$$

Esto implica que las tensiones deben poderse obtener como

$$\sigma_{ij} = \frac{\partial U_0}{\partial \varepsilon_{ij}} \tag{2.42}$$

El análisis riguroso de la existencia de la densidad de energía requiere complejos razonamientos termodinámicos, y de ellos se deduce que la función U_0 definida antes existe si el proceso de carga y descarga es reversible. Esta condición se cumple siempre si el material tiene un comportamiento elástico, lineal o no, por lo que para todos los materiales elásticos puede considerarse la existencia de la U_0.

El significado físico de la densidad de energía puede obtenerse efectuando el desarrollo que se indica a continuación, que no se incluye aquí en detalle, y puede consultarse en Shames y Dym (1985). Se considera un elemento diferencial de volumen y se aplican sobre sus caras las fuerzas originadas por las tensiones, a continuación se calcula el trabajo efectuado por dichas fuerzas al producirse las deformaciones en las caras del elemento. El valor del trabajo que se obtiene, dividido por el volumen el elemento, resulta ser igual al valor de la U_0 en ese punto.

Por lo tanto puede decirse que la densidad de energía U_0 representa el trabajo efectuado en una unidad de volumen por las tensiones, al producirse la deformación elástica del sólido. De hecho también se suele denominar a la densidad de energía como trabajo interno unitario.

Dado que el trabajo producido por las tensiones es igual a la energía que se acumula en el sólido, ocurre que la densidad de energía U_0 es la energía elástica acumulada en el sólido por unidad de volumen.

La densidad de energía puede expresarse en notación de vectores como:

$$U_0 = \int_{\mathbf{0}}^{\boldsymbol{\varepsilon}} \boldsymbol{\sigma}^T d\boldsymbol{\varepsilon} \tag{2.43}$$

en este caso las tres componentes de cortadura del vector $\boldsymbol{\varepsilon}$ son las distorsiones ingenieriles γ, que son el doble de las reales. De esta forma la expresión de U_0 es la misma si se calcula a partir de la fórmula en notación de tensores (2.40) o de vectores (2.43). Este es uno de los aspectos que justifican el empleo de la distorsiones de cortadura ingenieriles.

Comprobación: Si la energía se calcula empleando el tensor ε_{ij}, su valor es:

$$U_0 = \int_0^{\varepsilon_{ij}} \left(\sigma_{11} d\varepsilon_{11} + \sigma_{22} d\varepsilon_{22} + \sigma_{33} d\varepsilon_{33} + \sigma_{12} d\varepsilon_{12} + \sigma_{21} d\varepsilon_{21} + \ldots\right)$$

Si se emplea el vector $\boldsymbol{\varepsilon}$ se obtiene:

$$U_0 = \int_0^{\varepsilon_{ij}} \left(\sigma_{11} d\varepsilon_{11} + \sigma_{22} d\varepsilon_{22} + \sigma_{33} d\varepsilon_{33} + \sigma_{12} d\gamma_{12} + \ldots\right)$$

Los tres términos debidos a la tensión axial ($i=j$) son iguales en ambos casos. Para cada tensión cortante hay dos sumandos en el primer caso y sólo uno en el segundo caso, pero se comprueba fácilmente que ambos son iguales, precisamente por ser la $\gamma_{ij}=2\varepsilon_{ij}$.

$$\int_0^{\varepsilon_{ij}} \left(\sigma_{ij} d\varepsilon_{ij} + \sigma_{ji} d\varepsilon_{ji}\right) = \int_0^{\varepsilon_{ij}} \sigma_{ij}\left(d\varepsilon_{ij} + d\varepsilon_{ji}\right) = \int_0^{\varepsilon_{ij}} \sigma_{ij} d\gamma_{ij} \qquad i \neq j$$

Caso de material lineal

Si el material es elástico lineal (figura 2.11), la relación entre tensión y deformación es una matriz **D** constante y la integral que define la densidad de energía puede efectuarse con sencillez:

$$U_0 = \int_{\mathbf{0}}^{\boldsymbol{\varepsilon}} \boldsymbol{\sigma}^T d\boldsymbol{\varepsilon} = \int_{\mathbf{0}}^{\boldsymbol{\varepsilon}} \boldsymbol{\varepsilon}^T \mathbf{D}^T d\boldsymbol{\varepsilon} = \frac{1}{2}\boldsymbol{\varepsilon}^T \mathbf{D}^T \boldsymbol{\varepsilon} = \frac{1}{2}\boldsymbol{\varepsilon}^T \boldsymbol{\sigma} \tag{2.44}$$

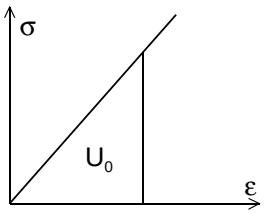


Figura 2.11

Variación de la densidad de energía

Resulta de interés determinar la variación que sufre la densidad de energía cuando se aplica una variación virtual a los desplazamientos $\delta\mathbf{u}$, manteniendo constante el valor de las tensiones, es decir en condiciones similares a las aplicadas para calcular el trabajo virtual.

Al variar los desplazamientos se origina una variación virtual de las deformaciones unitarias $\delta\varepsilon_{ij}$, y ello da lugar a una variación de la densidad de energía (figura 2.12) cuyo valor es:

$$\delta U_0 = \int_{\varepsilon_{ij}}^{\varepsilon_{ij}+\delta\varepsilon_{ij}} \sigma_{ij} d\varepsilon_{ij} = \sigma_{ij} \int_{\varepsilon_{ij}}^{\varepsilon_{ij}+\delta\varepsilon_{ij}} d\varepsilon_{ij} = \sigma_{ij}\delta\varepsilon_{ij} \tag{2.45}$$

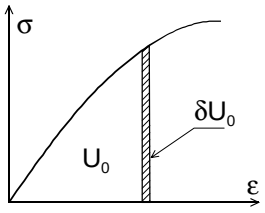


Figura 2.12

2.5 ENERGÍA DE DEFORMACIÓN

La energía de deformación es la energía elástica total que se acumula en el sólido. Se obtiene por integración de la densidad de energía a todo el volumen:

$$U = \int_v U_0 dv \qquad\qquad U = \int_v \left(\int_0^{\varepsilon_{ij}} \sigma_{ij} d\varepsilon_{ij} \right) dv \tag{2.46}$$

Caso de material lineal

Para un material lineal la densidad de energía tiene una expresión sencilla, por lo que la energía total acumulada es:

$$U = \frac{1}{2} \int_v \boldsymbol{\varepsilon}^T \mathbf{D} \boldsymbol{\varepsilon} dv = \frac{1}{2} \int_v \boldsymbol{\varepsilon}^T \boldsymbol{\sigma} dv \tag{2.47}$$

Ejemplo. *Energía acumulada en una pieza sometida a una distribución uniforme de tensiones provocada por una fuerza axial N, sobre un área A.*

$$\sigma = \frac{N}{A} \qquad\qquad \varepsilon = \frac{\sigma}{E} = \frac{N}{EA}$$

$$U = \frac{1}{2} \int \varepsilon^T \sigma dv = \frac{1}{2} \int \frac{N}{EA} \frac{N}{A} A dx = \frac{1}{2} \int \frac{N^2}{EA} dx$$

Fórmula de Clapeyron

En el caso de un sólido elástico lineal, la energía elástica acumulada U es igual al trabajo efectuado por las fuerzas exteriores aplicadas, de acuerdo con la fórmula deducida por Clapeyron en 1833. Para el caso de fuerzas puntuales dicha fórmula se puede poner como:

$$U = W_P = \frac{P_i \Delta_i}{2} = \frac{1}{2} \mathbf{P}^T \boldsymbol{\Delta} \tag{2.48}$$

Variación de la energía de deformación

Si la densidad de energía U_0 sufre una variación, la energía total acumulada U sufre también una variación, cuyo valor es:

$$\delta U = \int_v \delta U_0 dv = \int_v \sigma_{ij} \delta \varepsilon_{ij} dv \tag{2.49}$$

2.6 DENSIDAD DE ENERGÍA DE DEFORMACIÓN COMPLEMENTARIA

De manera análoga a la densidad de energía de deformación se define la densidad de energía de deformación complementaria o energía de deformación unitaria complementaria como la integral:

$$U_0^*(\sigma_{ij}) = \int_0^{\sigma_{ij}} \varepsilon_{ij} d\sigma_{ij} \tag{2.50}$$

con la condición de que sea sólo función del estado final de tensión, es decir que la integral sea independiente del camino (figura 2.13).

Para ello debe cumplirse que el integrando sea una diferencial perfecta, es decir que exista una magnitud U_0^* tal que se cumpla

$$dU_0^* = \varepsilon_{ij} d\sigma_{ij} \tag{2.51}$$

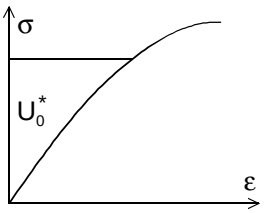


Figura 2.13

Esto implica que las deformaciones unitarias deben poderse obtener como

$$\varepsilon_{ij} = \frac{\partial U_0^*}{\partial \sigma_{ij}} \tag{2.52}$$

El análisis de la existencia de la densidad de energía complementaria es similar al de la densidad de energía, y al igual que para ésta se demuestra que la densidad de energía complementaria existe si el material tiene un comportamiento elástico. En realidad la densidad de energía complementaria representa el trabajo complementario efectuado por las tensiones al producirse la deformación elástica, en una unidad de volumen.

La densidad de energía complementaria puede expresarse también en notación de vectores como:

$$U_0^* = \int_{\mathbf{0}}^{\boldsymbol{\sigma}} \boldsymbol{\varepsilon}^T d\boldsymbol{\sigma} \tag{2.53}$$

En este caso las tres componentes de cortadura del vector $\boldsymbol{\varepsilon}$ son las distorsiones ingenieriles γ, con el fin de que la expresión (2.53) dé el mismo valor que la (2.50).

Caso de material lineal

Si el material es elástico lineal (figura 2.14), la relación entre tensión y deformación es una matriz **D** constante, y la integral que define la densidad de energía complementaria puede efectuarse con sencillez, obteniéndose:

$$U_0^* = \int_{\mathbf{0}}^{\boldsymbol{\sigma}} \boldsymbol{\varepsilon}^T d\boldsymbol{\sigma} = \int_{\mathbf{0}}^{\boldsymbol{\varepsilon}} \boldsymbol{\sigma}^T \mathbf{D}^{-T} d\boldsymbol{\sigma} = \frac{1}{2}\boldsymbol{\sigma}^T \mathbf{D}^{-T}\boldsymbol{\sigma} = \frac{1}{2}\boldsymbol{\sigma}^T \mathbf{D}^{-1}\boldsymbol{\sigma} = \frac{1}{2}\boldsymbol{\sigma}^T\boldsymbol{\varepsilon} = U_0 \tag{2.54}$$

Es decir que la densidad de energía en un material lineal tiene el mismo valor que la densidad de energía complementaria.

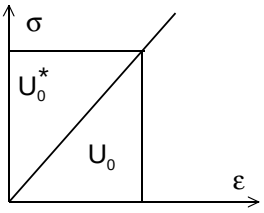


Figura 2.14

Variación de la densidad de energía complementaria

Para los desarrollos posteriores, resulta de interés determinar la variación que sufre la densidad de energía complementaria cuando se aplica una variación virtual a las fuerzas exteriores, manteniendo constante el valor de las deformaciones, es decir en condiciones similares a las aplicadas para calcular el trabajo virtual complementario.

La variación de las fuerzas produce una variación virtual de las tensiones $\delta\sigma$, y ello da lugar a una variación de la densidad de energía complementaria (figura 2.15) cuyo valor es:

$$\delta U_0^* = \int_0^{\delta\sigma_{ij}} \varepsilon_{ij} d\sigma_{ij} = \varepsilon_{ij} \int_0^{\delta\sigma_{ij}} d\sigma_{ij} = \varepsilon_{ij}\delta\sigma_{ij} \qquad (2.55)$$

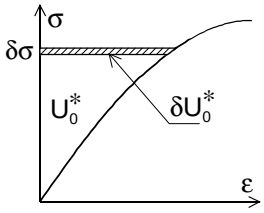


Figura 2.15

2.7 ENERGÍA DE DEFORMACIÓN COMPLEMENTARIA

La energía de deformación complementaria es la integral de la densidad de energía complementaria a todo el volumen del sólido:

$$U^* = \int_v U_0^* dv \qquad\qquad U^* = \int_v \left(\int_0^{\sigma_{ij}} \varepsilon_{ij} d\sigma_{ij} \right) dv \qquad (2.56)$$

Caso de material lineal

Para un material lineal la densidad de energía complementaria tiene una expresión sencilla, por lo que la energía complementaria total acumulada es:

$$U^* = \frac{1}{2}\int_v \boldsymbol{\sigma}^T \mathbf{D}^{-1} \boldsymbol{\sigma} dv = \frac{1}{2}\int_v \boldsymbol{\sigma}^T \boldsymbol{\varepsilon} dv = U \qquad (2.57)$$

y tiene el mismo valor que la energía elástica.

2.8 PRINCIPIO DEL TRABAJO VIRTUAL

Se considera un sólido en equilibrio y se estudia la expresión del trabajo virtual producido en él al aplicar una variación virtual a las deformaciones $\delta\mathbf{u}$. En notación de subíndices este trabajo virtual es:

$$\delta W = \int_v q_{vi}\delta u_i dv + \int_s q_{si}\delta u_i ds \tag{2.58}$$

En esta expresión no se ha introducido el término correspondiente a las fuerzas puntuales. Las fuerzas de superficie aplicadas en el contorno del sólido se pueden poner en función del tensor de tensiones en dicho contorno mediante la fórmula de Cauchy.

$$\delta W = \int_v q_{vi}\delta u_i dv + \int_s \sigma_{ij} n_j \delta u_i ds \tag{2.59}$$

La integral de superficie puede transformarse en una integral de volumen aplicando el teorema de la divergencia:

$$\delta W = \int_v q_{vi}\delta u_i dv + \int_v \frac{\partial\left(\sigma_{ij}\delta u_i\right)}{\partial x_j} dv \tag{2.60}$$

$$\delta W = \int_v \left(q_{vi} + \frac{\partial \sigma_{ij}}{\partial x_j} \right) \delta u_i dv + \int_v \sigma_{ij} \frac{\partial \delta u_i}{\partial x_j} dv \tag{2.61}$$

Como el sólido está en equilibrio, la primera integral es nula pues su integrando son las ecuaciones de equilibrio del sólido.

Para desarrollar la segunda integral, se considera la descomposición del tensor gradiente de la deformación en sus componentes simétrica y antimétrica:

$$\frac{\partial u_i}{\partial x_j} = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial u_i}{\partial x_j} + \frac{\partial u_j}{\partial x_i} \right) + \frac{1}{2}\left(\frac{\partial u_i}{\partial x_j} - \frac{\partial u_j}{\partial x_i} \right) = \varepsilon_{ij} + \omega_{ij} \tag{2.62}$$

Donde se han identificado el tensor de deformaciones unitarias infinitesimales ε_{ij} y el tensor de rotación (antisimétrico) ω_{ij}. Esta misma relación es aplicable a la variación de u_i, dado que los operadores variación δ y derivada son intercambiables.

$$\frac{\partial \delta u_i}{\partial x_j} = \delta\varepsilon_{ij} + \delta\omega_{ij} \tag{2.63}$$

Sustituyendo en la expresión del trabajo virtual se obtiene.

$$\delta W = \int_v \sigma_{ij}\left(\delta\varepsilon_{ij} + \delta\omega_{ij}\right) dv = \int_v \left(\sigma_{ij}\delta\varepsilon_{ij} + \sigma_{ij}\delta\omega_{ij}\right) dv \tag{2.64}$$

Pero el segundo término es nulo pues representa el producto interno de un tensor simétrico σ_{ij} por uno antisimétrico $\delta\omega_{ij}$, con lo que se obtiene:

$$\delta W = \int_v \sigma_{ij}\delta\varepsilon_{ij} dv \tag{2.65}$$

Sustituyendo el trabajo virtual por su valor se obtiene:

$$\int_v q_{vi}\delta u_i dv + \int_s q_{si}\delta u_i ds = \int_v \sigma_{ij}\delta\varepsilon_{ij} dv \tag{2.66}$$

que es la expresión del principio de los trabajos virtuales aplicado a un sólido elástico. El término de la izquierda es el trabajo virtual de las fuerzas exteriores, mientras que el de la derecha representa el *trabajo virtual interno*, esto es, el trabajo virtual que hacen las fuerzas originadas por las tensiones cuando el campo de deformaciones unitarias sufre una variación virtual, a tensión constante.

La deducción anterior ha permitido hallar una condición necesaria para el equilibrio, y mediante un desarrollo similar puede demostrarse que dicha condición es también suficiente (ver Shames y Dym, 1985).

Se puede por lo tanto enunciar que la condición necesaria y suficiente para que un sólido deformable esté en equilibrio es que *para cualquier variación virtual de las deformaciones* (compatibles con los enlaces) *el trabajo virtual de las fuerzas exteriores sea igual al trabajo virtual interno de las tensiones*.

Tal y como se ha obtenido, este principio es válido para cualquier tipo de material, elástico o no, pues no se ha incluido en él la ecuación constitutiva. Está limitado a pequeñas deformaciones pues la condición de equilibrio se ha aplicado en el estado sin deformar. También es aplicable a problemas con grandes deformaciones si el dominio donde se aplica el equilibrio es la situación deformada.

Caso de material elástico

Si el material es elástico, existe la energía de deformación U, y puede comprobarse que el término de la derecha del Principio del Trabajo Virtual, coincide con la variación de dicha energía (ecuación (2.45)). Por lo tanto se puede poner:

$$\delta W = \int_v \delta U_0 dv = \delta U \tag{2.67}$$

Se puede por lo tanto enunciar que *la condición necesaria y suficiente para que haya equilibrio, en una estructura elástica, es que para cualquier desplazamiento virtual* (compatible con los enlaces) *el trabajo virtual de las fuerzas exteriores sea igual a la variación de la energía elástica* (figura 2.16).

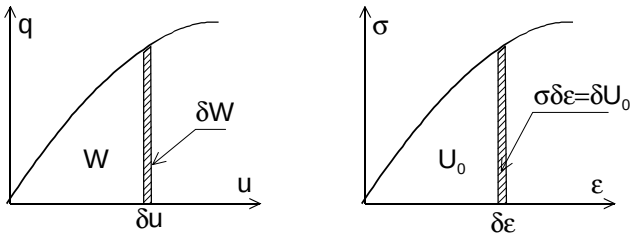


Figura 2.16

2.9 PRINCIPIO DE LA MÍNIMA ENERGÍA POTENCIAL

Se considera un sólido elástico, para el que por lo tanto existe la energía elástica. Se define el *potencial de las fuerzas exteriores V* como una función del campo de deformaciones y de las cargas:

$$V \equiv -\int_v q_{vi} u_i dv - \int_s q_{si} u_i ds \tag{2.68}$$

Si se aplica una variación virtual a las deformaciones, el potencial de la fuerzas sufre una variación de valor:

$$\delta V = -\int_v q_{vi} \delta u_i dv - \int_s q_{si} \delta u_i ds = -\delta W \tag{2.69}$$

que coincide con el valor del trabajo virtual cambiado de signo. Aplicando el principio de los trabajos virtuales se puede poner que, para cualquier desplazamiento virtual:

$$\delta V = -\delta W = -\delta U \tag{2.70}$$

$$\delta(U+V) = 0 \tag{2.71}$$

La cantidad $\pi = U+V$, es la *energía potencial total* del sólido:

$$\pi = U + V = U - \int_v q_{vi} u_i dv - \int_s q_{si} u_i ds \tag{2.72}$$

La ecuación (2.71) indica que el potencial total π es estacionario para cualquier desplazamiento virtual. Queda así demostrado que la condición necesaria para que la estructura esté en equilibrio es que el potencial total sea estacionario. Por un proceso similar puede demostrarse que la condición de potencial estacionario es una condición suficiente para el equilibrio.

Se puede por lo tanto enunciar el principio de la mínima energía potencial como: *la condición necesaria y suficiente para que un sólido esté en equilibrio es que el potencial total π sea estacionario* para cualquier variación virtual de las deformaciones. Es decir que, en el equilibrio, los campos de deformaciones y tensiones y las fuerzas exteriores definen un valor extremo del potencial total.

Se puede demostrar también que el potencial total π tiene un valor mínimo en la posición de equilibrio del sólido, comparado con el valor en cualquier posición vecina admisible (ver Oden, 1980). Por lo tanto dicha posición es de equilibrio estable.

2.10 PRINCIPIO DEL TRABAJO VIRTUAL COMPLEMENTARIO

Se considera un sólido en equilibrio y se estudia la expresión del trabajo virtual complementario producido al aplicar una variación virtual a las fuerzas exteriores. En notación de subíndices el trabajo virtual se expresa como:

$$\delta W^* = \int_v u_i \delta q_{vi} dv + \int_s u_i \delta q_{si} ds \tag{2.73}$$

La variación de las fuerzas de superficie aplicadas en el contorno del sólido se puede poner en función del tensor de tensiones en dicho contorno mediante la fórmula de Cauchy.

$$\delta W^* = \int_v u_i \delta q_{vi} dv + \int_s u_i \delta \sigma_{ij} n_j ds \tag{2.74}$$

Aplicando el teorema de la divergencia la integral de superficie puede transformarse en una integral de volumen:

$$\delta W^* = \int_v u_i \delta q_{vi} dv + \int_v \frac{\partial \left(u_i \delta \sigma_{ij} \right)}{\partial x_j} dv \tag{2.75}$$

$$\delta W^* = \int_v u_i \left(\delta q_{vi} + \frac{\partial \delta \sigma_{ij}}{\partial x_j} \right) dv + \int_v \frac{\partial u_i}{\partial x_j} \delta \sigma_{ij} dv \tag{2.76}$$

Como el sólido está en equilibrio, la primera integral es nula, pues su integrando es la variación de las ecuaciones de equilibrio.

Para desarrollar la segunda integral se considera la descomposición del tensor gradiente de la deformación en sus componentes simétrica y antimétrica, dada por (2.62). Sustituyendo en la expresión del trabajo virtual se obtiene:

$$\delta W^* = \int_v \left(\varepsilon_{ij} + \omega_{ij} \right) \delta \sigma_{ij} dv = \int_v \left(\varepsilon_{ij} \delta \sigma_{ij} + \omega_{ij} \delta \sigma_{ij} \right) dv \tag{2.77}$$

Pero el segundo término es nulo pues representa el producto interno de un tensor simétrico $\delta \sigma_{ij}$ por uno antisimétrico ω_{ij}, con lo que se obtiene:

$$\delta W^* = \int_v \varepsilon_{ij} \delta \sigma_{ij} dv \tag{2.78}$$

$$\int_v u_i \delta q_{vi} dv + \int_s u_i \delta q_{si} ds = \int_v \varepsilon_{ij} \delta \sigma_{ij} dv \tag{2.79}$$

que es la expresión del principio del trabajo virtual complementario. El término de la izquierda es el trabajo virtual complementario de las fuerzas exteriores, mientras que el de la derecha representa el *trabajo virtual complementario interno*, esto es, el trabajo virtual complementario que hacen las deformaciones unitarias, cuando el campo de tensiones originadas por las fuerzas exteriores sufre una variación virtual, a deformación constante.

La deducción anterior ha permitido hallar una condición necesaria para el equilibrio, pero mediante un desarrollo similar puede demostrarse que dicha condición es también suficiente.

Se puede por lo tanto enunciar que la condición necesaria y suficiente para que un sólido deformable esté en equilibrio es que *para cualquier variación virtual de las fuerzas exteriores (que satisfaga el equilibrio) el trabajo virtual de complementario producido por las deformaciones sea igual al trabajo virtual complementario interno de las tensiones.*

Tal y como se ha obtenido este principio es válido para cualquier tipo de material, elástico o no, pues no se ha incluido en él la ecuación constitutiva. Está limitado a las pequeñas deformaciones pues la condición de equilibrio se ha aplicado en el estado sin deformar.

Caso de material elástico

Si el material es elástico, existe la energía de deformación complementaria U^*, y puede comprobarse que el término de la derecha del Principio del Trabajo Virtual Complementario (2.79) coincide con la variación de dicha energía (ecuación (2.55)). Por lo tanto se puede escribir:

$$\delta W^* = \int_v \delta U_0^* dv = \delta U^* \tag{2.80}$$

y puede enunciarse como: *la condición necesaria y suficiente para que un sólido esté en equilibrio es que para cualquier variación virtual de las fuerzas (que cumpla el equilibrio) el trabajo virtual complementario producido sea igual a la variación de la energía complementaria elástica*. La figura 2.17 muestra las distintas magnitudes involucradas.

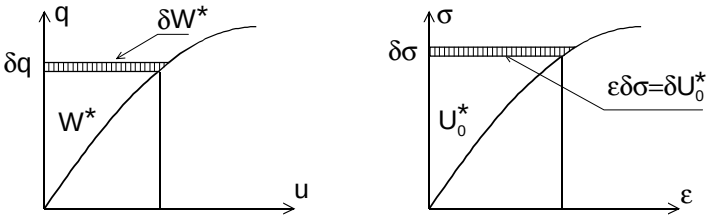


Figura 2.17

2.11 PRINCIPIO DE LA MÍNIMA ENERGÍA POTENCIAL COMPLEMENTARIA

Se considera un sólido elástico, para el que por lo tanto existe la energía elástica complementaria. Se define el *potencial complementario de las fuerzas exteriores V** como una función del campo de deformaciones y de las cargas:

$$V^* \equiv -\int_v q_{vi} u_i dv - \int_s q_{si} u_i ds \tag{2.81}$$

Si se aplica una variación virtual a las fuerzas exteriores, el potencial complementario de las fuerzas sufre una variación de valor:

$$\delta V^* = -\int_v \delta q_{vi} u_i dv - \int_s \delta q_{si} u_i ds = -\delta W^* \tag{2.82}$$

que coincide con el valor del trabajo virtual complementario cambiado de signo. Aplicando el principio del trabajo virtual complementario se puede poner que, para cualquier variación virtual de las fuerzas:

$$\delta V^* = -\delta W^* = -\delta U^*$$

$$\delta(U^* + V^*) = 0 \tag{2.83}$$

La cantidad $\pi^* = U^* + V^*$ se llama *energía potencial complementaria total* del cuerpo:

$$\pi^* = U^* + V^* = U^* - \int_v q_{vi} u_i dv - \int_s q_{si} u_i ds \tag{2.84}$$

La ecuación (2.83) indica que π^* es estacionario, para cualquier variación virtual de las fuerzas. Queda así demostrado que el potencial total complementario es estacionario si la estructura está en equilibrio, es decir que se trata de una condición necesaria. Por un proceso similar puede demostrarse que la condición de potencial complementario estacionario es una condición suficiente para el equilibrio.

Se puede por lo tanto enunciar el principio de la mínima energía potencial complementaria como: *la condición necesaria y suficiente para que un sólido esté en equilibrio es que el potencial total complementario* π^* *sea estacionario*, es decir que los campos de deformaciones y tensiones y las fuerzas exteriores definan un valor del potencial total complementario que adopte un valor extremo.

Se puede demostrar también que el potencial complementario total π^* tiene un valor mínimo en la posición de equilibrio del sólido, comparado con el valor en cualquier posición vecina admisible. Por lo tanto dicha posición es de equilibrio estable.

2.12 PRIMER TEOREMA DE CASTIGLIANO

Se considera un sólido elástico en equilibrio, sometido a un sistema de N cargas puntuales exteriores P_i, que pueden ser indistintamente fuerzas o momentos. En cada punto de aplicación de una carga se identifica la deformación Δ_i en la dirección de la carga, que es un desplazamiento si se trata de una fuerza o un giro si se trata de un momento (figura 2.18).

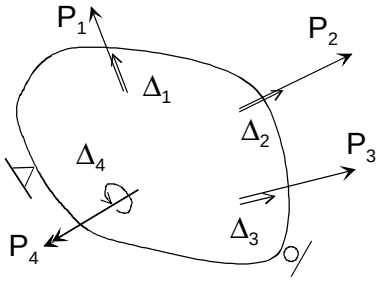


Figura 2.18

Supongamos que es posible expresar la energía elástica almacenada en el sólido en función de las deformaciones $U(\Delta_i)$. El potencial total puede entonces ponerse como:

$$\pi = U(\Delta_i) + V = U(\Delta_i) - \sum_{i=1,N} P_i \Delta_i \tag{2.85}$$

Al estar el sólido en equilibrio, este potencial es estacionario, con lo que:

$$\delta\pi = 0 \quad \forall \delta\Delta_i \quad \rightarrow \quad \sum_{i=1,N} \frac{\partial \pi}{\partial \Delta_i} \delta\Delta_i = 0 \tag{2.86}$$

$$\sum_{i=1,N}\left(\frac{\partial U}{\partial \Delta_i}\delta\Delta_i - P_i\delta\Delta_i\right) = 0 \tag{2.87}$$

$$\sum_{i=1,N}\left(\frac{\partial U}{\partial \Delta_i} - P_i\right)\delta\Delta_i = 0 \tag{2.88}$$

Pero al ser la variación de los desplazamientos arbitraria, debe ser cero cada uno de los términos del sumatorio, es decir:

$$P_i = \frac{\partial U}{\partial \Delta_i} \qquad i = 1, N \tag{2.89}$$

Esta es la expresión del conocido primer teorema de Castigliano (1879), que es de gran utilidad para el análisis de estructuras, y que de hecho es la base del denominado *método de rigidez*. Es aplicable a sistemas elásticos, con la condición de que pueda expresarse la energía elástica en función de las deformaciones. En estructuras reticulares formadas por vigas, con las suposiciones habituales para su análisis, siempre es posible expresar dicha energía en función de una serie de parámetros de deformación (desplazamientos y giros de los extremos de las vigas), por lo que este teorema es de gran interés.

2.13 Segundo teorema de Castigliano

Se considera nuevamente un sólido elástico en equilibrio (figura 2.18), sometido a un sistema de cargas puntuales exteriores P_i, y sean Δ_i las deformaciones en la dirección de las cargas.

Se supone ahora que es posible expresar la energía elástica complementaria almacenada en el sólido en función de las fuerzas $U^*(P_i)$. El potencial complementario total puede entonces ponerse como:

$$\pi^* = U^*(P_i) + V^* = U^*(P_i) - \sum_{i=1,N}\Delta_i P_i \tag{2.90}$$

Al estar el cuerpo en equilibrio, este potencial complementario es estacionario, con lo que:

$$\delta\pi^* = 0 \quad \forall \delta P_i \quad \rightarrow \quad \sum_{i=1,N}\frac{\partial \pi^*}{\partial P_i}\delta P_i = 0 \tag{2.91}$$

$$\sum_{i=1,N}\left(\frac{\partial U^*}{\partial P_i}\delta P_i - \Delta_i\delta P_i\right) = 0 \tag{2.92}$$

$$\sum_{i=1,N}\left(\frac{\partial U^*}{\partial P_i} - \Delta_i\right)\delta P_i = 0 \tag{2.93}$$

Pero al ser la variación de las fuerzas arbitraria, debe ser cero cada uno de los términos del sumatorio, es decir:

$$\Delta_i = \frac{\partial U^*}{\partial P_i} \qquad i = 1, N \tag{2.94}$$

Si el sólido es lineal la energía y la energía complementaria coinciden, con lo que queda:

$$\Delta_i = \frac{\partial U}{\partial P_i} \qquad i = 1, N \tag{2.95}$$

Esta es la expresión del conocido segundo teorema de Castigliano (1879), de enorme utilidad para el análisis de estructuras y en particular para el cálculo de deformaciones. De hecho este teorema es la base del denominado *método de flexibilidad* para análisis estructural. Es aplicable a sistema elásticos, con la condición de que pueda expresarse la energía elástica complementaria en función de las fuerzas generalizadas, lo cual es siempre posible en estructuras reticulares con las suposiciones que habitualmente se hacen para su estudio.

2.14 TEOREMA DE BETTI-RAYLEIGH O DEL TRABAJO RECÍPROCO

Sea un sistema elástico lineal, sometido a dos sistemas de fuerzas distintos:

- Sistema A, compuesto por una sola fuerza P_A, que produce una deformación Δ_A^A en su punto de aplicación A y Δ_B^A en otro punto B (figura 2.19).
- Sistema B, compuesto por una sola fuerza P_B, que produce una deformación Δ_B^B en su punto de aplicación B y Δ_A^B en el otro punto A (figura 2.19).

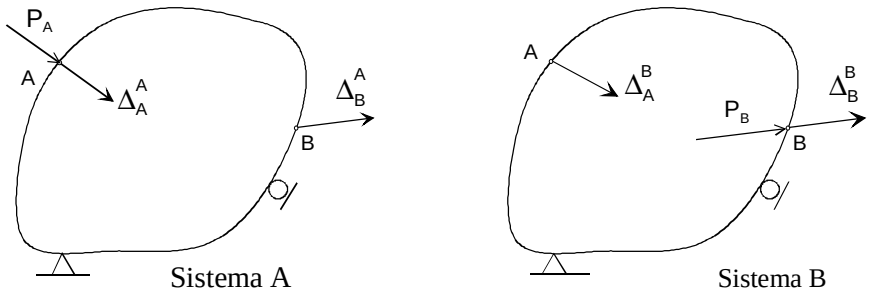


Figura 2.19

Si se aplican ambos sistemas sobre el sólido, en primer lugar el sistema A y a continuación el B, el trabajo que producen es:

$$W^{A,B} = \frac{1}{2} P_A \Delta_A^A + \frac{1}{2} P_B \Delta_B^B + P_A \Delta_A^B \tag{2.96}$$

El primer sumando corresponde al trabajo efectuado por la fuerza P_A durante su aplicación, el segundo corresponde al trabajo producido por la fuerza P_B durante su aplicación y el último corresponde al trabajo efectuado por P_A durante la aplicación de P_B.

Se considera ahora la situación inversa: se aplica en primer lugar el sistema B y a continuación el A. El trabajo que se produce es:

$$W^{B,A} = \frac{1}{2} P_B \Delta_B^B + \frac{1}{2} P_A \Delta_A^A + P_B \Delta_B^A \tag{2.97}$$

El primer sumando corresponde al trabajo efectuado por la fuerza P_B durante su aplicación, el segundo corresponde al trabajo producido por la fuerza P_A durante su aplicación y el último corresponde al trabajo efectuado por P_B durante la aplicación de P_A.

Como el trabajo total es el mismo en ambos casos, igualándolos se obtiene:

$$P_A \Delta_A^B = P_B \Delta_B^A \tag{2.98}$$

Esta es la expresión del teorema del trabajo recíproco, enunciado por E. Betti (1872) y Lord Rayleigh (1874). Se puede enunciar como: *el trabajo producido por un sistema de fuerzas A actuando sobre las deformaciones producidas por otro sistema B es igual al trabajo producido por el sistema de fuerzas B actuando sobre las deformaciones producidas por el sistema A.*

Este teorema es aplicable a sólidos elásticos y lineales, donde es aplicable el principo de superposición. Es válido para cualquier tipo de fuerza o momento, considerando en cada caso la deformación correspondiente en la dirección de la fuerza o momento. En el caso general, si actúan fuerzas de volumen y de superficie, la expresión del teorema de los trabajos recíprocos es:

$$\int_v \mathbf{q}_v^{A^T} \mathbf{u}^B dv + \int_s \mathbf{q}_s^{A^T} \mathbf{u}^B ds = \int_v \mathbf{q}_v^{B^T} \mathbf{u}^A dv + \int_s \mathbf{q}_s^{B^T} \mathbf{u}^A ds \tag{2.99}$$

2.15 TEOREMA DE MAXWELL O DE LAS DEFORMACIONES RECÍPROCAS

Sea un sistema elástico lineal, sometido a dos sistemas de fuerzas distintos (figura 2.20):

- Sistema A, compuesto por una sola fuerza unitaria $P_A = 1$, que produce una deformación Δ_A^A en su punto de aplicación A y Δ_B^A en otro punto B.
- Sistema B, compuesto por una sola fuerza unitaria $P_B = 1$, que produce una deformación Δ_B^B en su punto de aplicación B y Δ_A^B en el otro punto A.

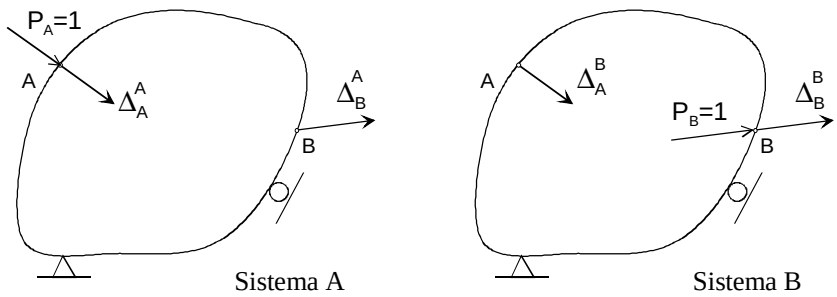


Figura 2.20

Aplicando el teorema del trabajo recíproco de Betti-Rayleigh se cumple que el trabajo cruzado entre los dos sistemas es el mismo:

$$P_A \Delta_A^B = P_B \Delta_B^A \tag{2.100}$$

Al ser las dos fuerzas unitarias, se obtiene que:

$$\Delta_A^B = \Delta_B^A \tag{2.101}$$

Esta es la expresión del teorema de las deformaciones recíprocas. Puede enunciarse diciendo *que la deformación inducida en un punto A por una fuerza unitaria aplicada en otro punto B es igual a la deformación inducida en B por una fuerza unitaria aplicada en A.*

Este teorema fue obtenido por Maxwell (1864) para el caso de celosías y en realidad es un caso particular el teorema del trabajo recíproco. Aunque aquí se ha deducido para fuerzas, puede aplicarse a cualquier tipo de esfuerzo (fuerza o momento) y de deformación (desplazamiento o giro), utilizando siempre fuerzas o momentos de valor unidad y midiendo la deformación correspondiente en la dirección del esfuerzo.

Generalización

En algunos casos resulta interesante poder relacionar las deformaciones que se producen en estructuras que están cargadas con varias fuerzas unitarias. Sea de nuevo un sólido elástico lineal, sometido a dos sistemas de fuerzas distintos:

- Sistema A, compuesto por una sola fuerza unitaria $P_A = 1$ situada en el punto A.
- Sistema B, compuesto por N fuerzas unitarias $P_{Bi} = 1$ situadas en los puntos B_i.

- El sistema A (figura 2.21) produce unas deformaciones:

  Δ_A^A en el punto A

  Δ_{Bi}^A en el punto B_i

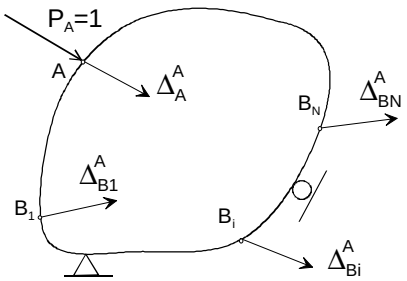


Figura 2.21

- El sistema B, formado por N fuerzas unitarias $P_{Bi} = 1$ situadas en B_i, produce unas deformaciones: Δ_A^B en el punto A y Δ_{Bi}^B en el punto B_i.

  Este sistema se puede descomponer en suma de N sistemas B_i, cada uno cargado con una sola fuerza $P_{Bi} = 1$ (figura 2.22). Por lo tanto se puede poner que:

$$\Delta_A^B = \sum_{i=1,N} \Delta_A^{Bi} \tag{2.102}$$

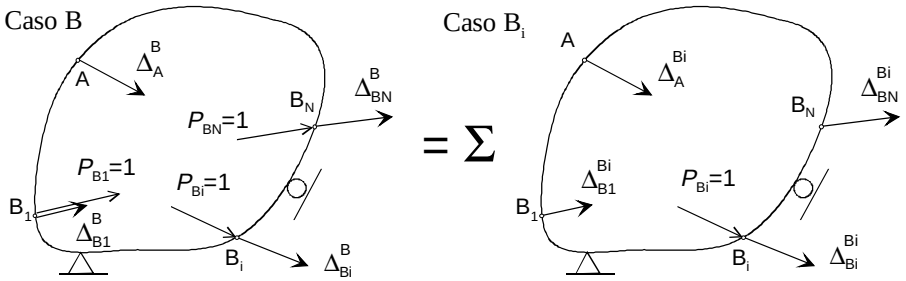


Figura 2.22

Aplicando el teorema de reciprocidad de Maxwell entre los casos A y B_i, se cumple que:

$$\Delta_A^{Bi} = \Delta_{Bi}^A \tag{2.103}$$

y sustituyendo en la expresión (2.102) resulta:

$$\Delta_A^B = \sum_{i=1,N} \Delta_{Bi}^A \tag{2.104}$$

Esta es una expresión generalizada del teorema de Maxwell, para el caso de que haya varias cargas unitarias en uno de los sistemas, como se muestra en la figura 2.23.

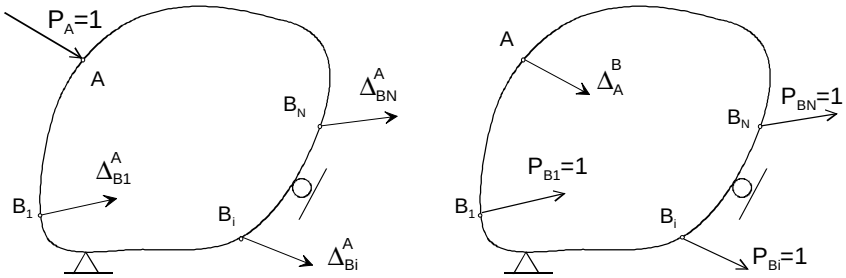


Figura 2.23

2.16 TEOREMA DE CROTTI - ENGESSER

La expresión de este teorema ha sido obtenida durante la deducción del segundo teorema de Castigliano (ecuación (2.94)), del cual es una generalización:

$$\Delta_i = \frac{\partial U^*}{\partial P_i} \qquad i = 1, N \tag{2.105}$$

Este teorema fue propuesto en esta forma, y de manera casi simultánea e independiente, por F. Crotti en 1888 y F. Engesser en 1889. Se trata por lo tanto de una generalización del segundo teorema enunciado por Castigliano, y resulta muy práctico para calcular deformaciones en una estructura en la que se conoce su energía complementaria.

2.17 TEOREMA DE ENGESSER

Sea una estructura reticular formada por piezas prismáticas, con material elástico y sometida a un sistema de cargas general, incluyendo cargas puntuales, de superficie y de volumen.

Se considera un esfuerzo interno cualquiera (esfuerzo axial, momento flector o esfuerzo cortante), que se denomina genéricamente X, y se aplica la siguiente variación virtual al sistema de fuerzas:

- Todas las fuerzas exteriores y todas las reacciones se mantienen constantes.
- El esfuerzo interior X se varía en una magnitud δX. Al ser un esfuerzo interior, siempre estará formado por una pareja de fuerzas (o momentos) iguales y de sentido contrario y su variación también estará compuesta por dos fuerzas (o momentos) iguales y de sentido contrario (figura 2.24).

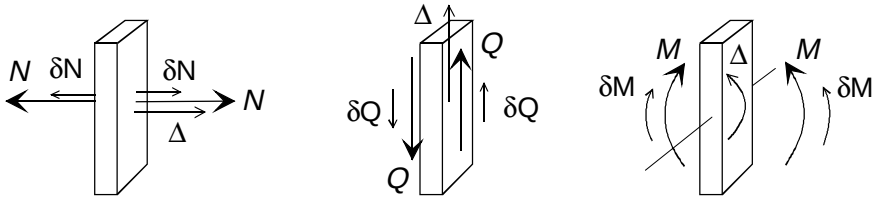


Figura 2.24

Se puede comprobar que la variación virtual de las fuerzas cumple con la condición de equilibrio. Sea Δ la componente de la deformación en la dirección de la fuerza interior. El trabajo virtual complementario producido por la variación de fuerzas aplicada resulta ser nulo:

$$\delta W^* = \delta X \Delta + (-\delta X)\Delta = 0 \tag{2.106}$$

Aplicando el principio del trabajo virtual complementario:

$$\delta W^* = 0 = \delta U^* \tag{2.107}$$

Pero la variación de la energía complementaria siempre se puede poner como:

$$\delta U^* = \frac{\partial U^*}{\partial X}\delta X = 0 \tag{2.108}$$

y como esto debe satisfacerse para cualquier variación δX, se debe cumplir que

$$\frac{\partial U^*}{\partial X} = 0 \tag{2.109}$$

Esta expresión es conocida como segundo teorema de Engesser (para evitar confusiones con el teorema de Crotti - Engesser), y vale para cualquier fuerza interior X en una estructura reticular. Resulta muy útil, como se verá más adelante, para formular las ecuaciones de compatibilidad de deformaciones en el método de flexibilidad.

2.18 TEOREMA DE MÉNABRÉA

Si la estructura es lineal, y no hay efectos térmicos, la energía y la energía complementaria son iguales, con lo que el segundo teorema de Engesser queda:

$$\frac{\partial U}{\partial X} = 0 \tag{2.110}$$

Esta expresión constituye el llamado teorema de Ménabréa (1858), quien lo enunció para el caso particular de las estructuras de celosía hiperestáticas.

2.19 ESTRUCTURAS SOMETIDAS A CARGAS TÉRMICAS

La existencia de variaciones en la temperatura de un sólido deformable afecta a su comportamiento estructural, modificando las tensiones y deformaciones que aparecen en él. En ese apartado se revisan las principales magnitudes ya presentadas y se estudia la influencia que tiene sobre ellas la existencia de cargas térmicas.

En primer lugar, hay que decir que la expresión del tensor de tensiones y la fórmula de Cauchy no se ven afectadas por la presencia de temperaturas, pues su obtención está basada solamente en criterios de equilibrio de un elemento diferencial.

2.19.1 Deformaciones unitarias

El campo de deformaciones unitarias tiene dos componentes:

$$\boldsymbol{\varepsilon} = \boldsymbol{\varepsilon}_0 + \boldsymbol{\varepsilon}_m \tag{2.111}$$

- $\boldsymbol{\varepsilon}$ son las deformaciones unitarias totales existentes en el sólido. Su expresión corresponde al tensor infinitesimal de deformaciones ya definido en la ecuación (2.28).
- $\boldsymbol{\varepsilon}_0$ son las deformaciones unitarias iniciales producidas por la presencia de las temperaturas. Corresponden a las deformaciones unitarias que aparecen en el sólido cuando éste se halla en el estado de tensión nula, o de libre dilatación, es decir cuando el sólido no está sometido a ninguna fuerza exterior y puede dilatarse libremente.
- $\boldsymbol{\varepsilon}_m$ son las deformaciones unitarias producidas únicamente por las fuerzas aplicadas sobre el sólido.

Las deformaciones unitarias de origen térmico en un punto cualquiera tienen la expresión general siguiente, en notación de tensores:

$$\varepsilon_{0ij} = \alpha T \delta_{ij} \tag{2.112}$$

siendo α el coeficiente de dilatación lineal del material, T la temperatura en el punto y δ_{ij} la delta de Kronecker[3]. La expresión anterior indica que la dilatación térmica produce un aumento uniforme de volumen y no genera deformaciones unitarias de cortadura.

[3] La delta de Kronecker se define como: $\delta_{ij} = 1 \quad i = j \qquad \delta_{ij} = 0 \quad i \neq j$

Para el caso plano el vector de deformaciones unitarias térmicas es (figura 2.25):

$$\boldsymbol{\varepsilon}_0 = \begin{Bmatrix} \varepsilon_{0x} \\ \varepsilon_{0y} \\ \gamma_{0xy} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \alpha T \\ \alpha T \\ 0 \end{Bmatrix} \qquad (2.113)$$

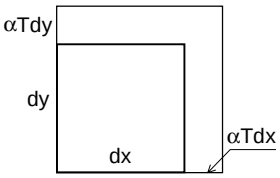


Figura 2.25

2.19.2 Ecuación constitutiva con temperaturas

Cuando existen deformaciones unitarias iniciales, la ecuación constitutiva del material tiene la forma:

$$\boldsymbol{\sigma} = \mathbf{D}(\boldsymbol{\varepsilon} - \boldsymbol{\varepsilon}_0) \qquad (2.114)$$

donde $\boldsymbol{\varepsilon}_0$ son las deformaciones unitarias iniciales presentes en el material en su estado sin tensión. La representación gráfica de esta ecuación, para el caso de una dimensión, se muestra en la figura 2.26. Lo habitual es que se produzcan por variaciones en la temperatura, pero pueden originarse en cualquier otro fenómeno, como por ejemplo por errores en la forma del dominio material.

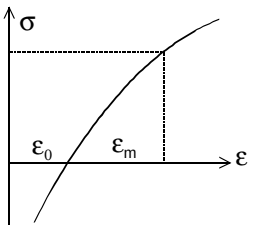


Figura 2.26

Despejando las deformaciones unitarias se obtiene:

$$\boldsymbol{\varepsilon} = \boldsymbol{\varepsilon}_0 + \mathbf{D}^{-1}\boldsymbol{\sigma} \qquad (2.115)$$

Comparando esta ecuación con la definición de las componentes del tensor $\boldsymbol{\varepsilon}$, se deduce que sólo las deformaciones unitarias $\boldsymbol{\varepsilon}_m$ producen tensión.

2.19.3 Energía elástica y Principio de Trabajo Virtual

La energía elástica tiene la misma definición en presencia de temperaturas, aunque su valor será lógicamente distinto. Para un material elástico lineal, en el que la matriz **D** es constante, su valor es:

$$U_{0T} = \int_{\mathbf{0}}^{\boldsymbol{\varepsilon}} \boldsymbol{\sigma}^T d\boldsymbol{\varepsilon} = \int_{\mathbf{0}}^{\boldsymbol{\varepsilon}} \boldsymbol{\varepsilon}^T \mathbf{D}^T d\boldsymbol{\varepsilon} - \int_{\mathbf{0}}^{\boldsymbol{\varepsilon}} \boldsymbol{\varepsilon}_0^T \mathbf{D}^T d\boldsymbol{\varepsilon} \qquad (2.116)$$

$$U_{0T} = \frac{1}{2}\boldsymbol{\varepsilon}^T \mathbf{D}\boldsymbol{\varepsilon} - \boldsymbol{\varepsilon}_0^T \mathbf{D}\boldsymbol{\varepsilon} \qquad (2.117)$$

El primer término corresponde al área del triángulo ABC en la figura 2.27, y el segundo al área del rectángulo ODCB.

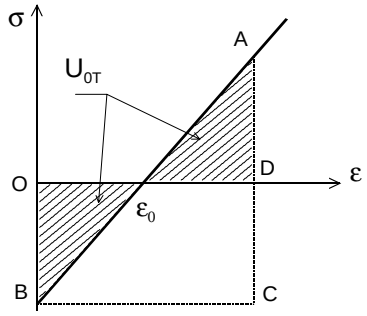


Figura 2.27

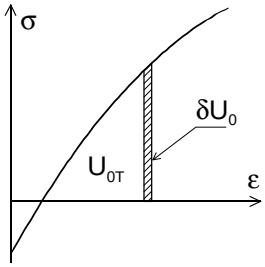


Figura 2.28

Al aplicarse una variación en el campo de deformaciones, la variación de la energía es:

$$\delta U_{0T} = \int_0^{\delta\boldsymbol{\varepsilon}} \boldsymbol{\sigma}^T d\boldsymbol{\varepsilon} = \boldsymbol{\sigma}^T \int_0^{\delta\boldsymbol{\varepsilon}} d\boldsymbol{\varepsilon} = \boldsymbol{\sigma}^T \delta\boldsymbol{\varepsilon} = \delta U_0 \tag{2.118}$$

Es decir que la variación de la energía es la misma con y sin cargas térmicas (figura 2.28).

El Principio del Trabajo Virtual tiene la misma expresión que sin temperaturas, pues en su deducción no interviene la ecuación constitutiva. Además la variación de la energía elástica es la misma con y sin temperatura (figura 2.29).

$$\delta W = \int_v \delta U_{0T} dv = \int_v \delta U_0 dv = \delta U \tag{2.119}$$

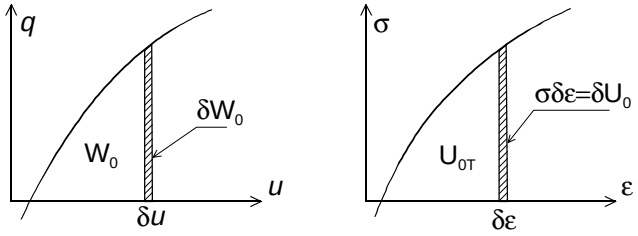


Figura 2.29

Por lo tanto este principio no aporta ninguna información adicional para el caso de que existan cargas térmicas.

2.19.4 Energía complementaria

La densidad de energía complementaria con temperatura tiene lógicamente la misma definición que sin ella:

$$U_{0T}^{*} = \int_{\mathbf{0}}^{\boldsymbol{\sigma}} \boldsymbol{\varepsilon}^T d\boldsymbol{\sigma} \tag{2.120}$$

Sustituyendo la expresión de las deformaciones unitarias, en notación de subíndices:

$$U_{0T}^{*} = \int_{0}^{\sigma_{ij}} \varepsilon_{0ij} d\sigma_{ij} + \int_{0}^{\sigma_{ij}} \varepsilon_{mij} d\sigma_{ij} = \int_{\mathbf{0}}^{\sigma_{ij}} \alpha T \delta_{ij} d\sigma_{ij} + U_{0}^{*} \tag{2.121}$$

La primera integral contiene el producto interno de la delta de Kronecker por el tensor de tensiones, que es igual a la suma de los términos de la diagonal del tensor de tensiones. La segunda integral es la densidad de energía complementaria en ausencia de temperaturas.

$$U_{0T}^{*} = \int_{\mathbf{0}}^{\sigma_{ij}} \alpha T d\sigma_{ii} + U_{0}^{*} = \alpha T \sigma_{ii} + U_{0}^{*} \tag{2.122}$$

donde la expresión σ_{ii} es el primer invariante del tensor de tensiones (suma de los términos de la diagonal).

Por lo tanto en la densidad de energía complementaria con temperaturas se añade un nuevo sumando, de valor proporcional al nivel de tensiones. Este nuevo sumando corresponde al área rayada en la figura 2.30.

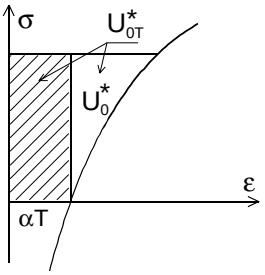


Figura 2.30

La variación de la densidad de energía complementaria al aplicar una variación en las fuerzas exteriores es:

$$\delta U_{0T}^{*} = \varepsilon_{ij} \delta\sigma_{ij} = \varepsilon_{0ij} \delta\sigma_{ij} + \varepsilon_{mij} \delta\sigma_{ij} = \alpha T \delta_{ij} \delta\sigma_{ij} + \delta U_{0}^{*} \tag{2.123}$$

$$\delta U_{0T}^{*} = \alpha T \delta\sigma_{ii} + \delta U_{0}^{*} \tag{2.124}$$

Se observa que aparece un nuevo término, que es proporcional al nivel de tensiones y a la temperatura, y que se suma a la variación de la energía complementaria que había en el caso sin temperaturas. Su representación gráfica se muestra en la figura 2.31.

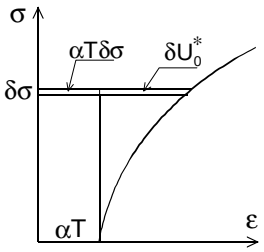


Figura 2.31

2.19.5 Principio del trabajo virtual complementario

La expresión del principio del trabajo virtual complementario es la misma que en el caso sin temperatura, pues en su deducción no interviene la ecuación constitutiva:

$$\delta W^* = \int_v \varepsilon_{ij} \delta\sigma_{ij} dv \tag{2.125}$$

Sustituyendo el valor de las deformaciones unitarias se obtiene:

$$\delta W^* = \int_v \alpha T \delta\sigma_{ii} dv + \int_v \varepsilon_{mij} \delta\sigma_{ij} dv \tag{2.126}$$

Si el sólido es elástico queda la expresión:

$$\delta W^* = \int_v \alpha T \delta\sigma_{ii} dv + \int_v \delta U_0^* dv = \int_v \delta U_{0T}^* dv = \delta U_T^* \tag{2.127}$$

Esta es la expresión del principio del trabajo virtual complementario en presencia de variaciones de temperatura en el sólido, que es similar a la obtenida sin temperaturas, y en la que únicamente cambia el valor de la expresión de la variación de la energía complementaria. La figura 2.32 resume la situación.

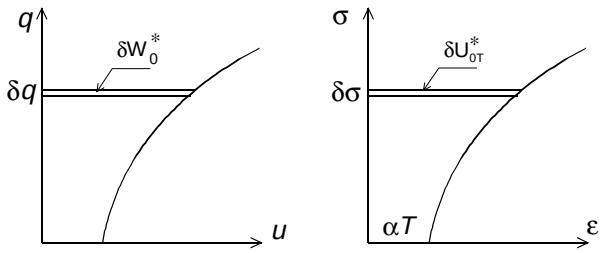


Figura 2.32

2.20 BIBLIOGRAFÍA

1. Argyris, J. H., y Kelsey, S., *Energy Theorems and Structural Analysis*, Butterworth, Londres, 1960.
2. Betti, E., *Teoria della Elasticita*, Il Nuovo Cimento, Serie 2, Vol. 7 y 8, 1872.
3. Castigliano, A., *Theorie de l'équilibre des systèmes élastiques*, A. F. Negro, Turin, 1879.
4. Engesser, F., *Ueber statich unbestimmte Träger bei beliebigem Formänderungs*, Zeits. Architekten und Ingenieur Vereins zu Hannover, Vol. 35, pp. 733-744, 1889.
5. Maxwell, J. C., *On the Calculation of the Equilibrium and the Stiffness of Frames*, Philosophical Magazine, Vol. 27, pp. 294-299, 1864.
6. Ménabréa, L. F., *Nouveau principe sur la distribution des tensions dans les systèmes élastiques*, Comptes Rendus, Vol. 46, pp. 1056-1060, 1858.

7. Oden, J. T., y Ripperger, E. A., *Mechanics of Elastic Structures*, McGraw-Hill, New York, 1980.

8. Oravas, G. A., McLean, L., *Historical Development of Energetical Principles in Elastomechanics*, Applied Mechanics Review, Parte I, Vol. 19, Nº 8, pp. 647-658, Agosto 1966.

9. Oravas, G. A., McLean, L., *Historical Development of Energetical Principles in Elastomechanics*, Applied Mechanics Review, Parte II, Vol. 19, Nº 11, pp. 919-933, Noviembre 1966.

10. Pilkey, W. D., Wunderlich, W., *Mechanics of Structures, Variational and Computational Methods*, CRC Press, Boca Ratón, 1994.

11. Rayleigh, J. W., *A Statical Theorem*, Philosophy Magazine, Vol. 48, pp. 452-456, 1874.

12. Shames, I. H., y Dym, C. L., *Energy and Finite Element Methods in Structural Mechanics*, McGraw-Hill, New York, 1985.

13. Tauchert, T. R., *Energy Principles in Structural Mechanics*, McGraw-Hill, New York, 1974.

14. Timoshenko, S. P., y Goodier, J. N., *Teoría de la Elasticidad*, Ed. Urmo, Bilbao, 1975.

Capítulo 3

Celosías

3.1 INTRODUCCIÓN

Una celosía es una estructura reticular formada por elementos discretos, unidos entre sí por medio de articulaciones, y que está destinada a soportar las fuerzas exteriores aplicadas sobre ella por medio del esfuerzo axial en sus elementos.

El modelo estructural idealizado que se emplea para el estudio de una celosía se basa en las siguientes suposiciones:

- Las barras se unen entre si en sus extremos, mediante uniones que sólo transmiten fuerzas y no pueden transmitir ningún tipo de momento: articulaciones en el caso plano y rótulas esféricas en el caso espacial, todas ellas sin fricción.
- El eje centroidal de cada barra es recto, y coincide con la línea que une los centros de las articulaciones de cada extremo de la barra.
- La sección transversal de cada barra tiene un área despreciable frente a su longitud.
- Las fuerzas están aplicadas en los nudos, y nunca sobre las barras. Esto obliga a sustituir el peso propio de las barras por fuerzas aplicadas en los nudos extremos de las mismas.

Estas suposiciones son comunes a cualquier tipo de celosía. Si además se cumplen las condiciones siguientes, se define una celosía plana:

- ◊ Todos los ejes centroidales de las barras están contenidos en un mismo plano, que es el plano de la estructura. Normalmente éste se toma como el plano XY.
- ◊ Todas las fuerzas aplicadas y las reacciones en los apoyos están contenidas en el plano de la estructura.
- ◊ A consecuencia de las condiciones anteriores, las deformaciones de los nudos están contenidas en el plano de la estructura.

Si no se cumplen estas condiciones y tanto las barras como las fuerzas están situadas en el espacio de forma arbitraria, la celosía de denomina espacial. Las deformaciones de los nudos tienen componentes según los tres ejes del espacio.

Si se cumplen las suposiciones anteriores se obtiene un modelo estructural muy simple de una celosía, que puede ser analizado con gran sencillez, y proporciona habitualmente resultados suficientemente fiables para el diseño.

En las condiciones anteriores, una barra de una celosía está sometida a dos fuerzas iguales en sus dos extremos, situadas sobre su eje centroidal, con lo que el estado de tensión en el material es de tracción o compresión pura. El análisis estructural completo de una celosía consiste por lo tanto en determinar estos esfuerzos axiales en cada barra.

3.2 CONDICIONES DE ESTABILIDAD

En las condiciones de estabilidad se compara el número de incógnitas existentes en la celosía con el número de ecuaciones de la estática disponibles. Las incógnitas en cualquier celosía siempre son los esfuerzos axiales en las barras (cuyo número se denomina b) y las reacciones en los apoyos (cuyo número es r). Lógicamente las condiciones de estabilidad tienen expresiones diferentes según sea la disposición, plana o espacial, de la celosía.

3.2.1 Celosías planas

En este caso se dispone de dos ecuaciones de equilibrio de fuerzas según las direcciones X e Y de cada nudo, dando un total de $2n$ ecuaciones para los n nudos. Comparando con las $b+r$ incógnitas existentes, las distintas situaciones que pueden producirse son:

A		$b+r < 2n$	$\rightarrow$	Inestable
B	Isostática $\rightarrow$	$b+r = 2n$		
C	Hiperestática $\rightarrow$	$b+r > 2n$		

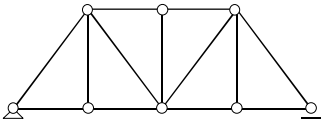
Estas relaciones definen la condición de estabilidad global de la celosía, considerándola como un todo único. La condición A es suficiente para indicar que la celosía tiene algún tipo de inestabilidad, pero sin indicar su origen interior o exterior.

Las condiciones B y C son necesarias pero no suficientes ya que además se requiere que haya una disposición de barras y reacciones tal que no exista inestabilidad exterior ni interior, en ningún subconjunto de la celosía.

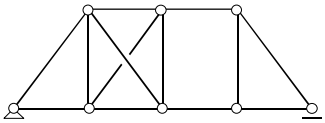
En todo caso, además de la aplicación de las fórmulas anteriores, se requiere normalmente un análisis visual de la estructura para su correcta clasificación.

Ejemplo. *Todas las celosías de la figura tienen 13 barras, 3 reacciones y 8 nudos, por lo que se cumple que el número incógnitas $b+r = 13+3 = 16$ es igual al número de ecuaciones $2n=2x8 = 16$.*

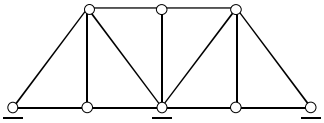
Sin embargo, variando la disposición de las barras y los apoyos, se obtienen distintas condiciones de estabilidad, que se muestran en las figuras siguientes.



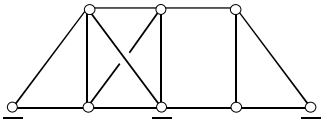
Isostática



Isostática externamente
Inestable internamente



Isostática internamente
Inestable externamente



Inestable externamente
Inestable internamente

3.2.2 Celosías espaciales

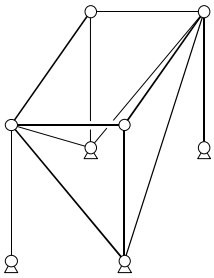
En este caso se dispone de tres ecuaciones de equilibrio de fuerzas en cada nudo, según las direcciones X, Y, Z. Las distintas situaciones que pueden producirse son las mismas que en el caso plano:

A		$b+r < 3n$	$\rightarrow$	Inestable
B	Isostática $\rightarrow$	$b+r = 3n$		
C	Hiperestática $\rightarrow$	$b+r > 3n$		

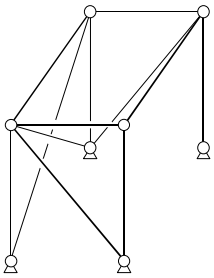
Al igual que en el caso plano, la condición A es suficiente para indicar que la celosía tiene algún tipo de inestabilidad, pero sin indicar su origen interior o exterior. Las condiciones B y C son necesarias pero no suficientes, ya que se requiere además que haya una disposición de barras y reacciones tal que no exista inestabilidad exterior ni interior, en ningún subconjunto de la celosía.

Por lo tanto es necesario también un análisis visual de la estructura para su correcta clasificación, lo cual resulta normalmente bastante complejo dada la distribución espacial de las barras.

Ejemplo. *Las celosías de la figura tienen 12 barras, 12 reacciones y 8 nudos, por lo que se cumple que el número de incógnitas $b+r = 12+12 = 24$ es igual al número de ecuaciones de equilibrio $3n = 3x8 = 24$. Sin embargo, variando la disposición de las barras se pasa de una estructura perfectamente estable e isostática a otra que es a la vez hiperestática e inestable.*



Isostática-Estable



Hiperestática-Inestable

3.3 CLASIFICACIÓN DE LAS CELOSÍAS PLANAS

Las celosías planas se clasifican en los dos tipos siguientes: celosías isostáticas y celosías hiperestáticas. Las isostáticas a su vez pueden ser: simples, compuestas y complejas.

3.3.1 Celosías planas simples

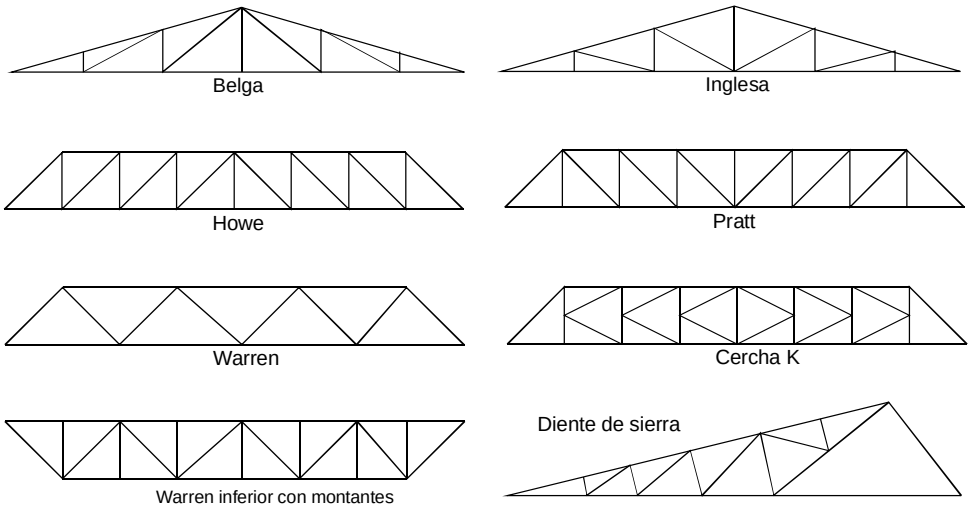
La celosía simple es el tipo de celosía plana más sencilla que puede construirse. Se forma partiendo de tres barras unidas entre sí, que forman un triángulo básico, al que se van añadiendo sucesivamente, y uno a uno, nuevos nudos. Esto se hace a base de añadir dos nuevas barras, que parten de dos nudos cualesquiera de la retícula ya formada, y que se cortan en el nuevo nudo. Se debe cumplir que el nuevo nudo que se añade y los dos nudos de base en que se apoyan las barras añadidas no pueden estar en línea recta, para evitar que la celosía creada sea inestable.

El triángulo básico que se usa para comenzar la creación de la celosía puede estar compuesto sólo por dos barras, unidas en un extremo y con los otros dos extremos unidos al suelo.

Con este proceso se obtiene un mosaico plano de triángulos yuxtapuestos, y se puede demostrar fácilmente que la relación entre el número de barras b y el de nudos n es siempre $b+3=2n$. Por otra parte la condición de estabilidad interna de una celosía plana es $b+r=2n$. Comparando ambas se observa que si el número de reacciones es $r=3$, una celosía simple construida siguiendo el proceso anterior es siempre isostática y estable. Al ser la condición de estabilidad necesaria pero no suficiente, se debe cumplir además que la celosía no tenga ninguna inestabilidad, ni interior ni exterior.

Puede ocurrir que la celosía tenga cuatro o más reacciones exteriores, por lo que éstas no pueden determinarse del equilibrio del conjunto, pero que podrán hallarse siempre después de calcular los esfuerzos en las barras.

Ejemplo. *Las figuras siguientes muestran algunas disposiciones típicas de celosías planas.*



3.3.2 Celosías planas compuestas

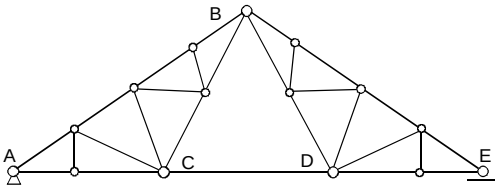
Son las obtenidas a base de unir entre sí dos o más celosías simples, de tal forma que dicha unión sea estable e isostática. Esto se consigue empleando para cada unión tres vínculos, lo cual puede hacerse de varias maneras:

- ◊ por medio de tres barras no concurrentes ni paralelas que conectan las dos celosías simples, o bien
- ◊ haciendo coincidir un nudo (lo cual equivale a emplear dos vínculos) y empleando una tercera barra para conectar las celosías simples, o bien
- ◊ haciendo coincidir dos nudos entre tres celosías simples.

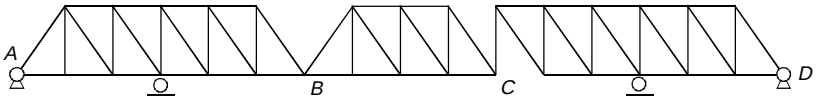
Los vínculos de unión entre las celosías simples pueden ser asimismo otras celosías simples, en lugar de barras. De esta manera una celosía compuesta puede estar formada por la unión de múltiples celosías simples. La relación entre los números de nudos y barras para una celosía compuesta es $b+r=2n$, que es la misma que para las celosías simples. Por lo tanto las celosías compuestas creadas por el proceso anterior son siempre isostáticas y estables.

En general, si la celosía compuesta está formada por n_s celosías simples, ocurre que la suma del número de reacciones exteriores r más el número de vínculos que unen las celosías simples v es igual a $3n_s$, es decir que se cumple: $r+v=3n_s$.

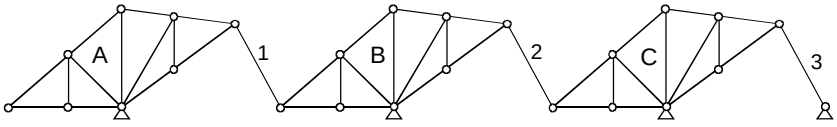
Ejemplo. *La estructura de la figura está compuesta por dos celosías simples ABC y BDE, unidas por 3 vínculos: la barra CD y la coincidencia del punto B.*



Ejemplo. *La estructura de la figura está compuesta por tres celosías simples: AB, BC y CD, unidas por tres vínculos, que son la coincidencia del punto B y la barra vertical situada en C.*



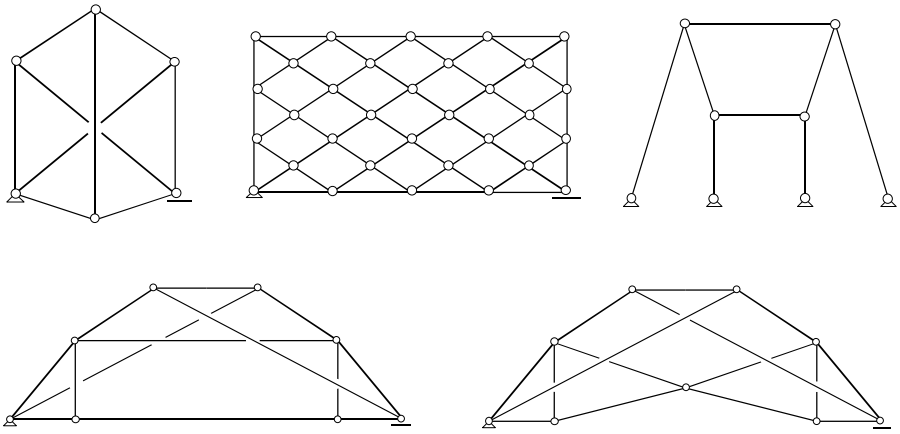
Ejemplo. *La celosía compuesta de la figura, denominada cercha Houx, está formada por tres celosías simples A, B y C, unidas entre sí y al suelo por medio de 9 vínculos: las tres barras 1, 2 y 3, y las seis reacciones en los puntos de apoyo de A, B y C.*



3.3.3 Celosías planas complejas

Son todas aquellas que no pueden clasificarse dentro de los dos tipos anteriores, es decir que no pueden crearse tal y como se ha indicado para las celosías simples y compuestas. En todo caso, para que sean isostáticas, tienen que cumplir la relación $b+r=3n$ y ser estables, pues en caso contrario son hiperestáticas.

Ejemplos



3.4 CLASIFICACIÓN DE LAS CELOSÍAS ESPACIALES

Las celosías espaciales se clasifican en los mismos tipos que las planas: isostáticas e hiperestáticas. La isostáticas a su vez pueden ser: simples, compuestas y complejas.

3.4.1 Celosías espaciales simples

Una celosía espacial simple se forma partiendo de un tetraedro básico formado por seis barras, al que se van añadiendo sucesivamente, y uno a uno, nuevos nudos. Esto se hace a base de añadir tres nuevas barras que parten de tres nudos cualesquiera de la retícula ya formada y se cortan en el nuevo nudo. Se debe cumplir que el nuevo nudo que se añade y los tres nudos de base en que se apoyan las tres nuevas barras añadidas no pueden estar en el mismo plano, para evitar que la celosía creada sea inestable.

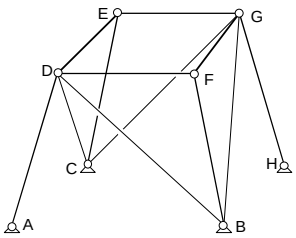
El tetraedro básico que se usa para comenzar la creación de la celosía puede estar compuesto por menos de seis barras, si están convenientemente unidas al suelo. De hecho basta con emplear sólo tres barras que se unen en un punto (un vértice del tetraedro), si los otros tres nudos están unidos al suelo.

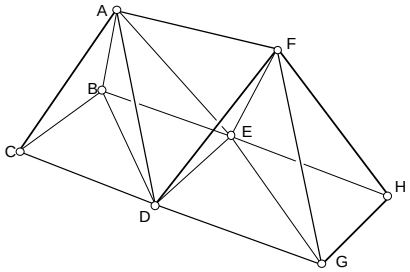
Con este proceso se obtiene una malla espacial de tetraedros yuxtapuestos, y se puede demostrar fácilmente que la relación entre el número de barras b y el de nudos n es siempre $b+6=3n$. Como la condición de estabilidad interna de una celosía espacial es $b+r=3n$, se deduce que si el número de reacciones es $r=6$, una celosía espacial simple construida siguiendo el proceso anterior es siempre isostática y estable. Al ser la condición

de estabilidad necesaria pero no suficiente, se debe cumplir además que la celosía no debe tener ninguna inestabilidad, ni interior ni exterior.

Puede ocurrir que la celosía tenga más de seis reacciones exteriores, por lo que éstas no pueden determinarse del equilibrio del conjunto, pero siempre pueden hallarse después de calcular los esfuerzos en las barras.

Ejemplos





3.4.2 Celosías espaciales compuestas

Son las obtenidas a base de unir dos o más celosías espaciales simples, de tal forma que dicha unión sea estable e isostática. Esto se consigue empleando para cada unión seis vínculos, lo cual puede hacerse de varias maneras. Las más habituales (figura 3.1) son:

- ◊ por medio de seis barras no concurrentes ni paralelas que conectan las dos celosías simples, o bien
- ◊ haciendo coincidir un nudo (lo cual equivale a emplear tres vínculos) y empleando tres barras más para conectar las celosías simples, o bien
- ◊ haciendo coincidir dos nudos y empleando una barra más para conectar las dos celosías simples.

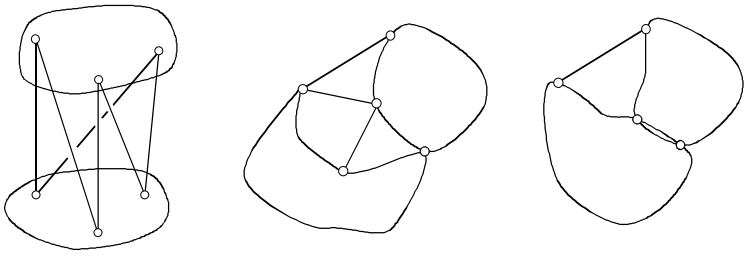


Figura 3.1

Los vínculos de unión entre las celosías simples pueden ser asimismo otras celosías simples, en lugar de barras. De esta manera una celosía compuesta puede estar formada por la unión de múltiples celosías simples.

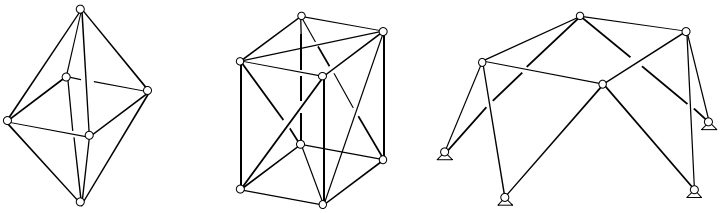
La relación entre los números de nudos y barras para una celosía espacial compuesta es $b+6=3n$, que es la misma que para las celosías espaciales simples. Por lo tanto las celosías compuestas creadas por el proceso anterior son siempre isostáticas y estables, si están sustentadas de manera isostática.

3.4.3 Celosías espaciales complejas

Son todas aquellas que no pueden clasificarse dentro de los dos tipos anteriores, es decir que no pueden crearse tal y como se ha indicado para las celosías simples y compuestas.

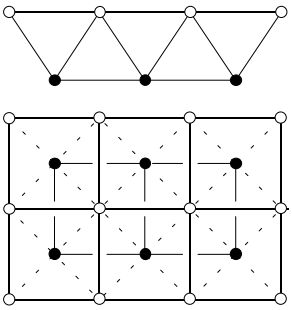
Ejemplos

La figura siguiente muestra algunos ejemplos sencillos de celosías complejas. Nótese que en todos sus nudos confluyen al menos cuatro barras.



La figura siguiente muestra un ejemplo de una celosía compleja, compuesta por seis semioctaédros cuya base está en la cara superior, y cuyo vértice está en la cara inferior. Estos vértices inferiores se conectan por medio de siete barras. Los vértices de la capa superior se han indicado con círculos blancos y los de la capa inferior con círculos negros. Las diagonales están en línea discontinua, en la vista en planta.

La estructura tiene n=18 y b=48. Si se emplea una sustentación isostática (r=6), el número de ecuaciones y de incógnitas es de 54, con lo que la estructura es isostática. Para su cálculo pueden emplearse en principio los métodos descritos más adelante para casos isostáticos, pero la complejidad geométrica de la estructura es tal, que incluso en este sencillo caso es necesario emplear un algoritmo programado en un ordenador.

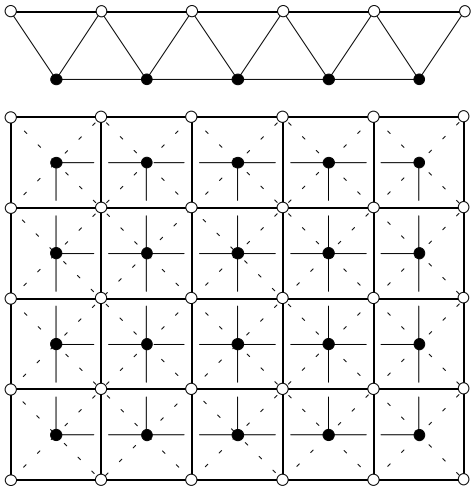


3.4.4 Celosías espaciales hiperestáticas

Las celosías espaciales se emplean a menudo para cubrir grandes luces, en cuyo caso están formadas por cantidades enormes de barras y nudos, y alcanzan grados de hiperestaticidad muy altos. Su geometría puede ser asimismo diversa (plana, piramidal, esférica, etc), pero su organización topológica responde a una serie de tipos básicos. De entre todos estos tipos quizás los más extendidos son las mallas construidas a base de tetraedros y las construidas a base de semioctaédros. A su vez, estas últimas pueden tener múltiples variantes, en función de la disposición de sus diagonales, etc.

Ejemplo

La figura adjunta muestra una malla rectangular formada por un conjunto de semioctaedros adosados unos a otros, con los vértices colocados alternativamente hacia arriba y hacia abajo, en una disposición muy habitual en la práctica.



Si se denominan M y N al número de módulos en cada dirección, las características de la celosía son:

$n = 2MN+M+N+1$

$b = 8MN$

$h = 2MN-3M-3N+r-3$

La tabla siguiente resume algunas situaciones típicas, suponiendo una sustentación isostática (r=6).

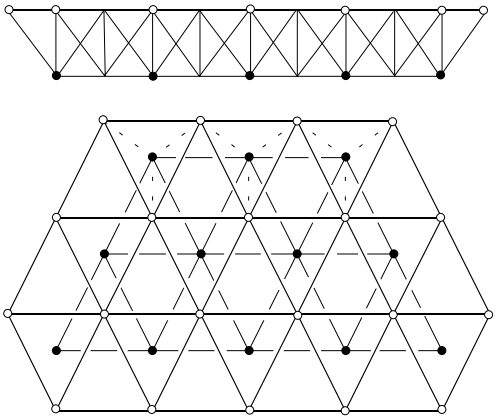
M=1	*N=1*	*h=-1*	*(inestable)*	*M=2*	*N=1*	*h=-2*	*(inestable)*
M=2	*N=2*	*h=-1*	*(inestable)*	*M=3*	*N=2*	*h=0*	*(isostática)*
M=3	*N=3*	*h=3*		*M=5*	*N=5*	*h=23*	
M=10	*N=10*	*h=143*		*M=20*	*N=10*	*h=313*	

Obsérvese que es necesario emplear como mínimo una solución 3x2 para tener una estructura isostática; de hecho esta es la única disposición isostática de esta malla. A partir de ahí la estructura es hiperestática, y a medida que se aumenta el tamaño de la malla, el grado de hiperestaticidad crece enormemente, al ser proporcional al producto MxN. De este ejemplo sencillo se concluye que la complejidad de estas celosías es tal que sólo pueden calcularse por un método sistemático y general como es el de rigidez.

Ejemplo

La figura adjunta muestra una celosía del tipo malla tetraédrica, formada por tetraedros dispuestos alternativamente con sus vértices en las caras superior e inferior (las diagonales sólo se han representado en la fila superior, para no complicar el dibujo).

Sus magnitudes son: n=36, b=103. Suponiendo una sustentación isotática (r=6), la estructura tiene un grado de hiperestaticidad h=109-72=37. Esta misma situación de gran hiperestaticidad es habitual en todas las mallas basadas en tetraedros.



3.5 MÉTODOS DE ANÁLISIS PARA CELOSÍAS ISOSTÁTICAS

3.5.1 Método del equilibrio de los nudos

En una celosía estáticamente determinada hay $b+r$ incógnitas (b esfuerzos en las barras, y r reacciones exteriores), y su número coincide con el de ecuaciones de equilibrio estático, que es $2n$ en el caso plano y $3n$ en el espacial, siendo n el número de nudos.

El método del equilibrio de los nudos consiste sencillamente en aplicar las ecuaciones de equilibrio de fuerzas en todas las direcciones, en cada uno de los n nudos de la celosía. Sobre un nudo cualquiera i actúan las fuerzas siguientes:

- ◊ F_{xi}^{ext} F_{yi}^{ext} F_{zi}^{ext} fuerzas exteriores actuantes sobre el nudo. Entre ellas se incluyen las fuerzas conocidas y las reacciones desconocidas en los apoyos.
- ◊ F_{xi}^{int} F_{yi}^{int} F_{zi}^{int} fuerzas interiores producidas por los distintos elementos que se conectan al nudo, las cuales se pueden poner siempre en función de las fuerzas que ejercen las barras sobre el nudo:

$$F_{xi}^{\text{int}} = \sum_{j=1,n_i} N_j \cos\alpha_j^i \qquad F_{yi}^{\text{int}} = \sum_{j=1,n_i} N_j \cos\beta_j^i \qquad F_{zi}^{\text{int}} = \sum_{j=1,n_i} N_j \cos\gamma_j^i \qquad (3.1)$$

donde n_i es el número de barras que llegan al nudo i, N_j es el esfuerzo en la barra j y α_j^i β_j^i γ_j^i son los ángulos que forma dicha barra con los ejes coordenados, en el nudo i.

Las ecuaciones de equilibrio estático de todos los nudos quedan en su conjunto:

$$\begin{aligned} F_{xi}^{ext} + \sum_{j=1,n_i} N_j \cos\alpha_j^i = 0 \\ F_{yi}^{ext} + \sum_{j=1,n_i} N_j \cos\beta_j^i = 0 \\ F_{zi}^{ext} + \sum_{j=1,n_i} N_j \cos\gamma_j^i = 0 \end{aligned} \qquad (3.2)$$

Se obtiene de esta manera un sistema de *3n* ecuaciones simultáneas (*2n* en el caso plano) cuya solución son las *r* reacciones y los *b* esfuerzos en las barras N_i. Este método puede aplicarse en la práctica de tres maneras diferentes.

3.5.1.1 Planteamiento conjunto

Se plantean simultáneamente todas la ecuaciones de equilibrio de fuerzas en los nudos antes mencionadas, y de su solución se obtienen todos los valores desconocidos (esfuerzos en las barras y reacciones). Este planteamiento puede emplearse para cualquier tipo de celosía, isostática plana o espacial, simple, compuesta o compleja. Lleva a un sistema de ecuaciones lineales simultáneas:

$$\mathbf{C}\mathbf{N} = \mathbf{F}^{ext} \tag{3.3}$$

siendo **N** el vector que contiene todos los esfuerzos incógnita en la celosía: *b* esfuerzos en las barras y *r* reacciones exteriores.

$$\mathbf{N} = \left\{ N_1 \quad N_2 \quad \cdots \quad N_b \mid R_1 \quad \cdots \quad R_r \right\}^T \tag{3.4}$$

La matriz **C** del sistema es de tamaño (3*n* *x* *b*+*r*), y sus coeficientes son los cosenos directores de las distintas barras en los nudos. Para formarla se considera que una barra *j*, que conecta los nudos *i*, *k*, introduce seis términos en esta matriz, en las posiciones siguientes:

$$\begin{aligned} C_{3i-2,j} &= \cos\alpha_j^i \qquad C_{3i-1,j} = \cos\beta_j^i \qquad C_{3i,j} = \cos\gamma_j^i \\ C_{3k-2,j} &= -\cos\alpha_j^i \qquad C_{3k-1,j} = -\cos\beta_j^i \qquad C_{3k,j} = -\cos\gamma_j^i \end{aligned} \tag{3.5}$$

Las reacciones se consideran como pequeñas barras ficticias, orientadas en la dirección de la reacción. Una reacción exterior *j* cualquiera, aplicada en el nudo *i*, sólo añade tres coeficientes a la matriz **C**, en las posiciones:

$$C_{3i-2,b+j} = \cos\alpha_j^i \qquad C_{3i-1,b+j} = \cos\beta_j^i \qquad C_{3i,b+j} = \cos\gamma_j^i \tag{3.6}$$

siendo α_j^i β_j^i γ_j^i los ángulos que forma la reacción *j* en el nudo *i*.

El término independiente es el vector de fuerzas exteriores aplicadas en los nudos $\mathbf{F}^{\text{ext}}$.

3.5.1.2 Planteamiento individual

En muchos casos no es necesario plantear y resolver todas las ecuaciones conjuntamente (2*n* o 3*n* según que la celosía sea plana o espacial), sino que la propia geometría de la celosía permite encontrar un nudo donde sólo hay dos fuerzas incógnita (tres en el caso espacial), que pueden ser esfuerzos en barras o reacciones, y en el que se pueden aplicar las ecuaciones de equilibrio estático del nudo. A continuación se busca otro nudo donde sólo haya dos (o tres) fuerzas incógnita y se le aplican nuevamente las ecuaciones de equilibrio. De esta forma se va recorriendo toda la celosía, nudo por nudo, hasta calcular todos los esfuerzos y reacciones desconocidos.

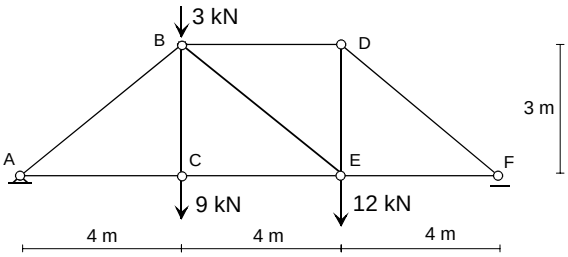
Si la celosía es externamente isostática, pueden aplicarse primero las ecuaciones de equilibrio a toda ella en conjunto para obtener las reacciones en sus apoyos. Conocidas

éstas se suele disponer de un nudo con tantas incógnitas como ecuaciones de la estática, en el que se puede comenzar el proceso anterior.

Este método puede aplicarse siempre a una celosía que haya sido clasificada como del tipo simple, con la única salvedad de que a veces será necesario hallar primero las reacciones exteriores y otras veces no. En celosías compuestas y complejas normalmente no es posible aplicarlo: antes o después se llega a una situación en la que no hay ningún nudo con sólo dos incógnitas (tres en el caso espacial).

Ejemplo

La celosía simple de la figura tiene 9 barras y 3 reacciones, es decir 12 incógnitas, y 6 nudos que proporcionan 12 ecuaciones de equilibrio.



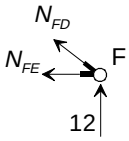
Las reacciones en los apoyos se obtienen del equilibrio del conjunto.

$$\sum M_A = 0 \quad \rightarrow \quad 12R_{FY} = 4\cdot 9 + 4\cdot 3 + 8\cdot 12 \quad \rightarrow \quad R_{FY} = 12 \text{ kN}$$

$$\sum F_Y = 0 \quad \rightarrow \quad R_{AY} + R_{FY} = 9 + 3 + 12 \quad \rightarrow \quad R_{AY} = 12 \text{ kN}$$

A continuación se aplican las dos ecuaciones de equilibrio a cada nudo, eligiendo los nudos de tal forma que sólo haya dos barras con esfuerzos desconocidos en el nudo, y aprovechando los valores ya calculados de los esfuerzos en las demás barras.

Nudo F:

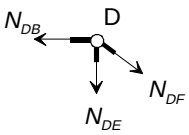


$$\sum F_X = 0 \qquad -N_{FE} - N_{FD}(0.8) = 0$$

$$\sum F_Y = 0 \qquad R_{FY} + N_{FD}(0.6) = 0$$

$$N_{FD} = -20 \text{ kN} \qquad N_{FE} = 16 \text{ kN}$$

Nudo D:



$$\sum F_X = 0 \qquad (-20)(0.8) - N_{DB} = 0$$

$$\sum F_Y = 0 \qquad -N_{DE} - (-20)(0.6) = 0$$

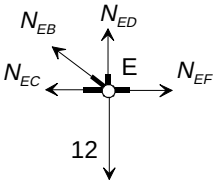
$$N_{DE} = 12 \text{ kN} \qquad N_{BD} = -16 \text{ kN}$$

Nudo E:

$$\sum F_X = 0 \qquad 16 - N_{EB}(0.8) - N_{EC} = 0$$

$$\sum F_Y = 0 \qquad 12 + N_{EB}(0.6) - 12 = 0$$

$$N_{EC} = 16 \text{ kN} \qquad N_{EB} = 0$$

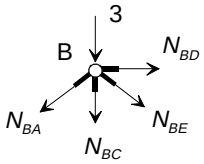


Nudo B:

$$\sum F_X = 0 \qquad -16 + (0)(0.8) - N_{BA}(0.8) = 0$$

$$\sum F_Y = 0 \qquad -N_{BA}(0.6) - N_{BC} - (0)(0.6) - 3 = 0$$

$$N_{BA} = -20 \text{ kN} \qquad N_{BC} = 9 \text{ kN}$$

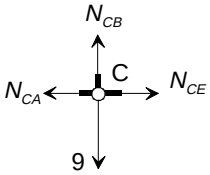


Nudo C:

$$\sum F_X = 0 \qquad -N_{CA} + 16 = 0$$

$$\sum F_Y = 0 \qquad 9 - 9 = 0$$

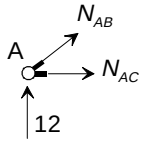
$$N_{CA} = 16 \text{ kN}$$



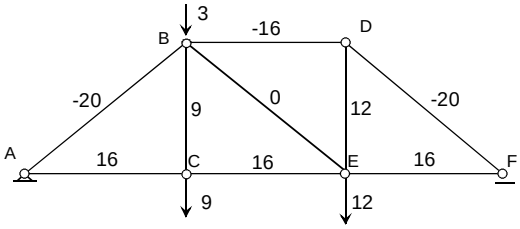
Nudo A: los esfuerzos en todas las barras que llegan a este nudo son conocidos, por lo que el equilibrio del nudo sólo permite verificar que todos los esfuerzos están en equilibrio con las reacciones exteriores.

$$N_{AC} + N_{AB}(0.8) = 0 \qquad 16 + (-20)(0.8) = 0$$

$$N_{AB}(0.6) + 12 = 0 \qquad (-20)(0.6) + 12 = 0$$



La figura siguiente muestra los esfuerzos axiales en todos los elementos, en kN.



3.5.1.3 Método gráfico para celosías planas

Para las celosías planas, las ecuaciones de equilibrio de los distintos nudos pueden resolverse de manera gráfica. Este método se conoce habitualmente como método de Cremona, quien lo publicó en 1872, o de Maxwell, que lo publicó en 1864.

Para aplicar el método gráfico se procede de la forma siguiente:

- Se calculan las reacciones exteriores en los puntos de apoyo de forma gráfica, a base de dibujar el polígono de las fuerzas exteriores y las reacciones.
- Se van recorriendo uno tras otro todos los nudos de la estructura, buscando siempre uno en el que sólo haya dos barras con esfuerzos desconocidos. Se aplica el equilibrio de dicho nudo dibujando su polígono de fuerzas, que incluye las fuerzas exteriores aplicadas sobre el nudo y las fuerzas conocidas en los elementos que llegan a él, y del que se obtienen las dos fuerzas desconocidas. Cada polígono se dibuja sobre los anteriores, a fin de aprovechar los valores de los esfuerzos ya calculados.
- Se obtiene de esta manera una figura geométrica que contiene todos los esfuerzos en todas las barras. Estas figuras se denominan figuras recíprocas de la celosía.

Este método gráfico puede aplicarse en las mismas situaciones que el método individual, es decir sólo para celosías simples, pues en realidad es el mismo método pero empleando una técnica gráfica en lugar de analítica para resolver el equilibrio de cada nudo.

3.5.1.4 Simplificaciones

Para la aplicación práctica del método se pueden tener en cuenta algunas simplificaciones.

Celosías planas

- Si en un nudo descargado confluyen dos barras no colineales, ambas estarán descargadas. Esto se deduce de forma inmediata si se aplica la ecuación de equilibrio del nudo en la dirección perpendicular a una cualquiera de las barras (figura 3.2.a)
- Si en un nudo descargado confluyen tres barras, siendo dos de ellas colineales, la tercera barra estará descargada. Esto se deduce de forma inmediata si se aplica la ecuación de equilibrio del nudo en la dirección perpendicular a las dos barras alineadas. Además, las dos barras alineadas tienen el mismo esfuerzo axial (figura 3.2.b).

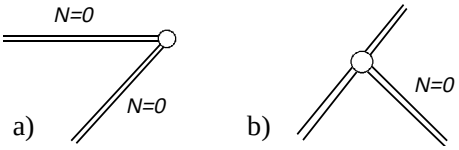


Figura 3.2

Celosías espaciales

- Si en un nudo descargado confluyen tres barras no coplanares, todas ellas están descargadas. Si se aplica la ecuación de equilibrio del nudo en la dirección perpendicular al plano formado por dos de las barras, se deduce que la tercera barra está descargada. Las dos barras que quedan están descargadas en virtud de una de las simplificaciones de estructuras planas (figura 3.3.a).
- Si en un nudo descargado todas las barras que confluyen son coplanares salvo una, esta última está descargada. Esto se deduce de forma inmediata si se aplica la ecuación de equilibrio del nudo en la dirección perpendicular al plano formado por las tres barras (figura 3.3.b).

- Si en un nudo descargado confluyen cuatro barras y dos de ellas están alineadas, las otras dos están descargadas. Aplicando el criterio anterior a las barras alineadas y a una de las otras se deduce que la cuarta está descargada. A continuación se emplea la segunda simplificación de las estructuras planas (figura 3.3.c).

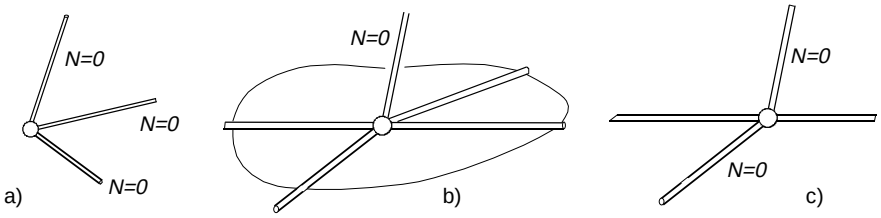
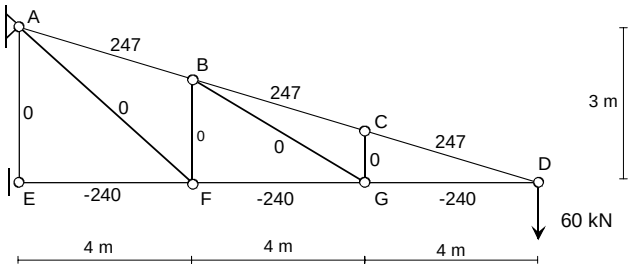


Figura 3.3

Ejemplo. *En la celosía simple de la figura, las reglas de simplificación permiten facilitar mucho su cálculo.*



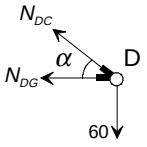
Aplicando la segunda regla de simplificación al nudo C se deduce que el esfuerzo en la barra CG es nulo. Aplicando a continuación la misma regla al nudo G se deduce que la barra BG tiene también esfuerzo nulo (considerando para ello que CG tiene esfuerzo nulo).

Aplicando a continuación la misma regla de simplificación al nudo B se deduce que la barra BF está descargada. Finalmente aplicando la simplificación al nudo F se deduce que AF está también descargada.

Por lo tanto todas las barras que forman la celosía de relleno están descargadas; las barras del cordón superior tienen todas el mismo esfuerzo y lo mismo ocurre con las del cordón inferior. Estos esfuerzos se calculan considerando el equilibrio del nudo D.

$$\sum F_Y = 0 \qquad N_{DC}\sin\alpha = 60 \qquad \rightarrow \qquad N_{DC} = 247.4 \text{ kN}$$

$$\sum F_X = 0 \qquad N_{DG} + N_{DC}\cos\alpha = 0 \qquad \rightarrow \qquad N_{DG} = -240 \text{ kN}$$



3.5.2 Método de las secciones

El método de las secciones consiste en aislar un trozo de la celosía, cortando varias barras, y aplicar a continuación las ecuaciones de equilibrio al trozo aislado, a fin de obtener los esfuerzos en las barras cortadas. Para el trozo de celosía aislado se dispone de las ecuaciones de la estática, es decir tres para el caso plano y seis para el espacial. Por lo tanto

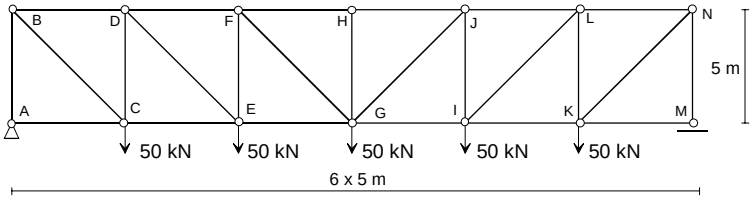
el corte efectuado para aislar dicho trozo deberá tener solamente tres fuerzas incógnita (o seis en el caso espacial). Sin embargo a veces, por la disposición geométrica de las barras, pueden presentarse casos particulares en los que se corten más de tres barras (o más de seis en el caso espacial), pero de las cuales puedan calcularse unas cuantas.

Al igual que en el método de los nudos, el cálculo previo de las reacciones exteriores simplifica la aplicación del método.

Este método es menos sistemático que el de los nudos, y a veces requiere cierto ingenio, pero es muy útil cuando sólo se desea el esfuerzo en unas pocas barras de la celosía. Fue presentado por el ingeniero alemán Ritter en 1862, utilizando un método analítico para hallar las fuerzas en la sección de corte, y por su compatriota Culmann en 1866, empleando éste un método gráfico para calcular dichas fuerzas.

Ejemplo

Calcular los esfuerzos en el panel central EFGH de la cercha Pratt de la figura.

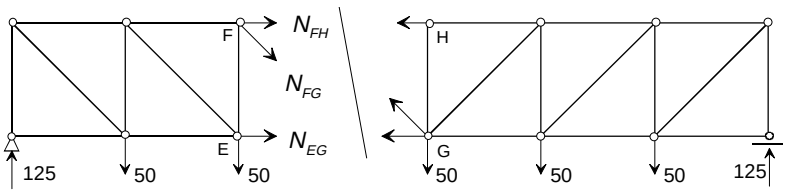


En primer lugar se calculan las reacciones en los apoyos, a base de aplicar el equilibrio del conjunto.

$$\sum M_A = 0 \quad \rightarrow \quad R_{MY}\,30 = 50\cdot 5 + 50\cdot 10 + 50\cdot 15 + 50\cdot 20 + 50\cdot 25 \quad \rightarrow \quad R_{MY} = 125\ \text{kN}$$

$$\sum F_Y = 0 \quad \rightarrow \quad R_{AY} + R_{MY} = 5\cdot 50 \quad \rightarrow \quad R_{AY} = 125\ \text{kN}$$

Se efectúa un corte como el indicado, que atraviesa las tres barras cuyos esfuerzos interesan.



Se aplican las tres ecuaciones de equilibrio al trozo izquierdo de la estructura, lo que permite determinar los tres esfuerzos buscados:

$$\sum M_G^{izda} = 0 \quad \rightarrow \quad N_{FH}\cdot 5 + 125\cdot 15 = 50\cdot 10 + 50\cdot 5 \quad \rightarrow \quad N_{FH} = -225\ \text{kN}$$

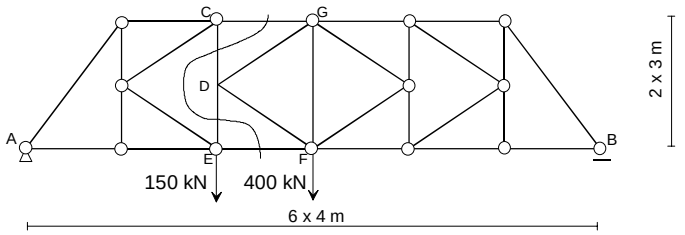
$$\sum F_Y^{izda} = 0 \quad \rightarrow \quad N_{FG}\cos 45 + 50 + 50 = 125 \quad \rightarrow \quad N_{FG} = 35.3\ \text{kN}$$

$$\sum M_F^{izda} = 0 \quad \rightarrow \quad N_{EG}\cdot 5 + 50\cdot 5 = 125\cdot 10 \quad \rightarrow \quad N_{EG} = 200\ \text{kN}$$

Por equilibrio vertical del nudo H, el esfuerzo en la barra GH es nulo. Los esfuerzos en las barras HJ, GJ y GI son iguales a los de sus barras simétricas.

Ejemplo

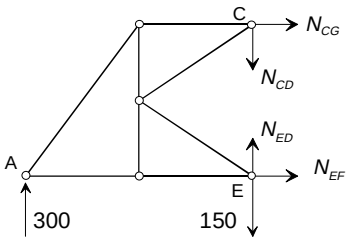
Para determinar los esfuerzos en el panel central CDEFG de la cercha K, resulta ventajoso efectuar un corte como el indicado en la figura.



En primer lugar se determinan las reacciones exteriores aislando toda la estructura. Resultan ser $R_{AY} = 300$ kN, $R_{BY} = 250$ kN.

La sección de corte involucra a 4 esfuerzos. Tomando momentos respecto de C, en la parte izquierda de la viga, puede determinarse el esfuerzo en el cordón inferior:

$$N_{EF}(6) - 300(8) = 0 \qquad N_{EF} = 400 \text{ kN}$$



El equilibrio de fuerzas horizontales proporciona el esfuerzo en el cordón superior:

$$N_{CG} + N_{EF} = 0 \qquad N_{CG} = -400 \text{ kN}$$

Los esfuerzos verticales no pueden determinarse mediante esta sección.

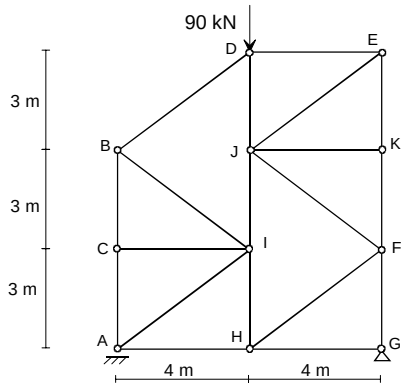
3.5.3 Método mixto

El método mixto consiste en aplicar de forma combinada los métodos del equilibrio de los nudos y de las secciones. Así, suele aplicarse el método de las secciones para calcular algunos esfuerzos que hagan más fácil la aplicación del de los nudos.

Este método es particularmente útil para el análisis de celosías compuestas, en las que muy frecuentemente ocurre que sólo el método de los nudos, o el de las secciones no bastan para resolverlas. Así es habitual tener que aislar por independiente las distintas celosías simples que forman la celosía compuesta, a base de efectuar secciones que las separen. Aplicando el equilibrio de cada celosía simple se hallan las fuerzas en los vínculos de conexión entre las celosías simples y finalmente se calcula cada una de éstas mediante el método de los nudos.

Ejemplo

La celosía compuesta de la figura está formada por 3 celosías simples: BCAHI, FGH y DEKFJ, unidas por 6 vínculos: 2 fuerzas en H, 2 fuerzas en F, así como las barras BD y JI.



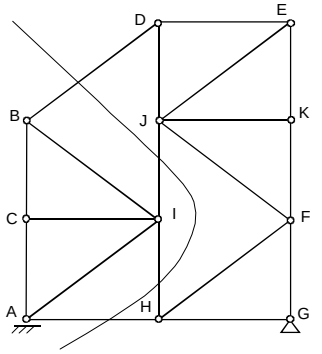
Las reacciones en los apoyos pueden obtenerse del equilibrio del conjunto de la estructura.

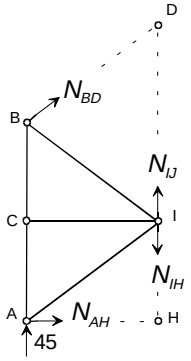
$$\sum M_G = 0 \qquad R_{AY}(8) = 90(4) \qquad R_{AY} = 45 \text{ kN}$$

$$\sum F_Y = 0 \qquad R_{AY} + R_{GY} = 90 \qquad R_{GY} = 45 \text{ kN}$$

Si se pretenden calcular los esfuerzos empleando el método de los nudos se ve que sólo se puede aplicar el equilibrio al nudo G para obtener los esfuerzos en GF y GH. A partir de ahí en todos los nudos coinciden tres barras con esfuerzo desconocido, por lo que no se puede proseguir aislando nudos de forma individual. Evidentemente pueden plantearse las 22 ecuaciones de equilibrio de los 11 nudos y resolverlas conjuntamente. Sin embargo, aplicando el método de las secciones puede resolverse la situación.

En efecto, una sección como la indicada en la figura siguiente permite separar la celosía simple de la izquierda de las demás.





Aunque en el corte se han interceptado 4 esfuerzos desconocidos, es posible aplicar a la celosía de la izquierda una ecuación de equilibrio que permita calcular alguno de los esfuerzos. Por ejemplo, la ecuación de equilibrio de momentos respecto a D permite hallar el esfuerzo en AH:

$$\sum M_D = 0 \qquad N_{AH}(9) = R_{AY}(4) \qquad N_{AH} = 20 \text{ kN}$$

Del equilibrio horizontal de este trozo también se puede hallar N_{BD}=-25 kN. Los dos esfuerzos restantes en la sección de corte no pueden hallarse. También podría haberse

aplicado la ecuación de equilibrio de momentos respecto de H, con lo que se obtiene el esfuerzo en BD directamente.

Una vez hallados los esfuerzos en BD y AH es posible aplicar el método de los nudos a cada celosía simple, siguiendo el proceso habitual.

3.5.4 Método de la barra sustituida

Este método es debido a Henneberg (1886) y se aplica al análisis de celosías complejas, tanto planas como espaciales. Se basa en emplear el principio de superposición y descomponer la estructura real en suma de dos casos que puedan resolverse por los métodos del equilibrio de los nudos o de las secciones.

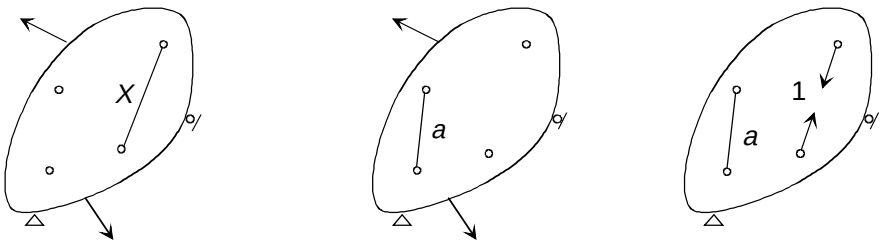
Los pasos a seguir para su aplicación (figura 3.4), son:

1. Se parte de la estructura original (denominada caso R) y se elimina de ella una barra, sustituyéndola por otra que se añade a la estructura en diferente posición. La sustitución por la barra añadida debe efectuarse de tal forma que la estructura modificada sea una celosía simple, y por lo tanto pueda calcularse por los métodos de los nudos o de las secciones. Se denomina *X* al esfuerzo real existente en la barra que se ha eliminado.
2. Se resuelve la estructura así modificada (denominada caso 1), con todas las fuerzas exteriores actuantes, y se obtienen unos esfuerzos en las barras que se denominan N_i^1. En particular el esfuerzo en la barra añadida es N_a^1.
3. Se aplica una fuerza de valor unitario en la barra eliminada, con lo que se obtiene un nuevo caso de carga denominado caso 2. Se calcula la estructura y se obtienen unos esfuerzos en las barras denominados N_i^2. En particular la barra añadida tiene un esfuerzo N_a^2.
4. Se aplica la condición de que la barra añadida en realidad no existe, por lo que el esfuerzo en ella debe ser cero. Esto se expresa como:

$$N_a^1 + XN_a^2 = 0 \tag{3.7}$$

de donde se obtiene el esfuerzo en la barra eliminada:

$$X = -\frac{N_a^1}{N_a^2} \tag{3.8}$$



Caso R Caso 1 Caso 2

Figura 3.4

Los esfuerzos en las restantes barras de la estructura son la suma de los esfuerzos en los casos 1 y 2:

$$N_i = N_i^1 - X\,N_i^2 = N_i^1 - \left(\frac{N_a^1}{N_a^2}\right) N_i^2 \tag{3.9}$$

3.6 ESTUDIO DE LA BARRA ARTICULADA

3.6.1 Campo de desplazamientos

Al estar el elemento sometido solamente a esfuerzo axial y no haber esfuerzos de flexión ni fuerzas aplicadas en el interior de la barra, su posición deformada es una línea recta (figura 3.5). La deformación de la barra está compuesta por una deformación axial *u*, que tiene una variación lineal entre las dos deformaciones U_1 , U_2 de los nudos extremos de la barra:

$$u = U_1 + (U_2 - U_1)x / L \tag{3.10}$$

y dos deformaciones laterales *v, w* que provocan un giro de la barra como sólido rígido, pero no producen esfuerzos.

Puede por lo tanto prescindirse de las deformaciones laterales *v,w*, y considerar únicamente la deformación axial *u*, que es la provocada por el esfuerzo axial. Así pues se trata de un problema unidimensional donde el campo de desplazamientos tiene sólo la componente axial *u(x).*

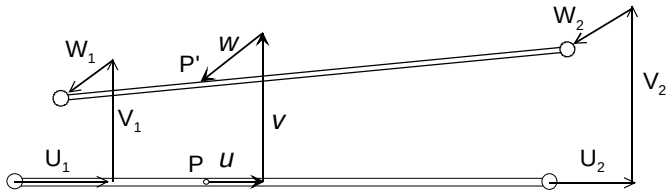


Figura 3.5

En consecuencia la deformación unitaria tiene una sola componente, en la dirección x, cuyo valor es:

$$\varepsilon = \frac{du}{dx} = \frac{U_2 - U_1}{L} \tag{3.11}$$

3.6.2 Distribución de temperatura

Se supone una distribución de temperaturas uniforme en toda la sección de la barra, de valor *T*. La deformación unitaria producida por esta distribución de temperaturas es:

$$\varepsilon_0 = \alpha T \tag{3.12}$$

3.6.3 Estado de tensiones y esfuerzos interiores

Al no haber fuerzas aplicadas sobre la barra, el elemento está sometido únicamente a un esfuerzo axial *N*, que es constante en toda la barra, sin que aparezcan ni momento flector ni esfuerzo cortante. El estado de tensiones es uniforme en cada sección y constante a lo largo de la barra, y vale:

$$\sigma = E(\varepsilon - \varepsilon_0) \tag{3.13}$$

El esfuerzo axial en cada sección de la barra, es la resultante de las tensiones en dicha sección. De esta manera es estáticamente equivalente a las fuerzas exteriores que actúan a un lado de la sección

$$N = \int \sigma dA = \sigma A = E(\varepsilon - \varepsilon_0)A \tag{3.14}$$

Sustituyendo la deformación unitaria térmica se obtiene

$$N = EA\varepsilon - EA\alpha T \tag{3.15}$$

3.6.4 Energía acumulada

Densidad de energía complementaria

La densidad de energía complementaria acumulada en un punto cualquiera de un elemento de celosía es:

$$U_0^* = \int_0^\sigma \varepsilon d\sigma \tag{3.16}$$

Sustituyendo el valor de ε dado por la ecuación constitutiva (3.13) e integrando se obtiene:

$$U_0^* = \int_0^\sigma \left(\frac{\sigma}{E} + \alpha T\right) d\sigma = \frac{\sigma^2}{2E} + \alpha T\sigma \tag{3.17}$$

y sustituyendo el valor de la tensión en función del esfuerzo axial, $\sigma = N/A$, se llega a:

$$U_0^* = \frac{N^2}{2A^2E} + \alpha T\frac{N}{A} \tag{3.18}$$

Energía complementaria

Integrando la densidad de energía complementaria a todo el volumen de la barra se obtiene:

$$U^* = \int U_0^* dv = \int \left(\frac{N^2}{2A^2E} + \alpha T\frac{N}{A}\right) A dx = \int \left(\frac{1}{2}\frac{N^2}{EA} + \alpha TN\right) dx \tag{3.19}$$

Esta es la expresión más general de la energía acumulada en un elemento de celosía, pero que puede simplificarse mucho para los elementos habituales.

Al no haber fuerzas aplicadas en la barra, el esfuerzo axial *N* es constante en toda ella. Además, se supone que la barra es de propiedades uniformes en toda su longitud, es decir que su producto *EA*, su coeficiente de dilatación α, y la distribución de temperatura *T*

son constantes en toda ella. Con todo ello el integrando de la expresión anterior es constante y la energía complementaria, para una barra de propiedades uniformes, resulta ser:

$$U^* = \frac{N^2 L}{2EA} + \alpha TLN \tag{3.20}$$

Para simplificar esta expresión se definen dos parámetros:

- *Flexibilidad de la barra* ρ: representa el alargamiento que experimenta la barra para un valor unidad del esfuerzo axial.

$$\rho = \frac{L}{EA} \tag{3.21}$$

- *Alargamiento de la barra debido a la temperatura* λ: corresponde al alargamiento que se produce en la barra cuando toda ella sufre un aumento de temperatura uniforme de valor T y puede dilatarse libremente.

$$\lambda = \alpha TL \tag{3.22}$$

La expresión final de la energía complementaria acumulada en una barra de propiedades uniformes resulta ser:

$$U^* = \frac{N^2 \rho}{2} + \lambda N \tag{3.23}$$

3.7 CÁLCULO DE CELOSÍAS HIPERESTÁTICAS POR EL MÉTODO DE FLEXIBILIDAD

Si en una celosía ocurre que el número de incógnitas (esfuerzos en barras más reacciones exteriores, $b+r$) es superior al número de ecuaciones de la estática ($2n$ en casos planos o $3n$ en espaciales), se dice que la celosía está estáticamente indeterminada, o que es hiperestática, pues la aplicación de las ecuaciones de la estática no permite calcular todos los esfuerzos desconocidos.

En este caso se denomina g*rado de hiperestaticidad h* al número de incógnitas en exceso sobre las ecuaciones de la estática. Su valor es $h=b+r-2n$ en casos planos y $h=b+r-3n$ en casos espaciales.

En los apartados siguientes se describe el empleo del método de flexibilidad para el cálculo de cualquier tipo de celosía, plana o espacial.

3.7.1 Incógnitas hiperestáticas

A las incógnitas en exceso se les denomina incógnitas superabundantes o incógnitas hiperestáticas, y pueden ser:

- Esfuerzos en barras. En este caso se corta una barra por un punto cualquiera y el esfuerzo axial en ella es la incógnita que se toma en exceso.
- Reacciones en los apoyos. En este caso se elimina la fuerza de reacción en una dirección dada.

Al conjunto de las h incógnitas hiperestáticas se le denomina genéricamente $X_j \;\; j = 1, h$. La elección del conjunto de incógnitas hiperestáticas es uno de los pasos críticos en el método de flexibilidad, y se debe cumplir lo siguiente:

- Las incógnitas hiperestáticas deben ser linealmente independientes.
- Las incógnitas hiperestáticas deber ser tales que si se eliminan de la estructura, ésta se convierta en una celosía isostática y estable, por lo que puede ser calculada por los métodos correspondientes.

En general existen varios conjuntos distintos válidos de incógnitas hiperestáticas, y su elección debe hacerse por inspección, en base a la experiencia. El método habitualmente empleado consiste en ir eliminado de la celosía, una tras otra, una serie de barras o de reacciones, hasta llegar a una celosía que se pueda identificar como celosía simple. De esta manera se obtienen a la vez el valor del grado de hiperestaticidad y el conjunto de incógnitas hiperestáticas.

Existen sin embargo algunas situaciones simples que permiten identificar incógnitas hiperestáticas (figura 3.6).

◊ Un conjunto de barras alineadas con sus dos extremos fijos a la sustentación: en este caso puede elegirse como incógnita en exceso el esfuerzo en una de las barras alineadas, o una de las reacciones en la dirección de las barras.

◊ Seis barras formando un cuadrilátero con sus dos diagonales: puede elegirse como incógnita en exceso al esfuerzo en una cualquiera de las seis barras.

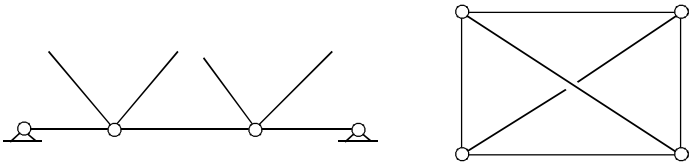


Figura 3.6

3.7.2 Condiciones de compatibilidad

Para resolver la celosía es necesario incluir en el análisis otras ecuaciones además de las de la estática, que se obtienen a base de imponer condiciones de compatibilidad geométrica relacionadas con las incógnitas hiperestáticas. Estas condiciones son de dos tipos.

- Si la incógnita hiperestática es una reacción en un apoyo, la condición de compatibilidad geométrica a emplear es que la deformación en la dirección de la reacción es conocida. Normalmente esta deformación es nula, pero en otros casos tiene un valor dato conocido (por ejemplo en el caso de movimientos de los apoyos). Según el teorema de Crotti-Engesser la deformación del apoyo es:

$$\frac{\partial U^*}{\partial X_j} = \Delta_j \tag{3.24}$$

siendo X_j la incógnita hiperestática correspondiente y Δ_j la deformación conocida.

- Si la incógnita hiperestática es el esfuerzo en una barra, la condición de compatibilidad geométrica a emplear es la igualdad de las deformaciones de los dos caras en el punto donde se ha cortado la barra. Esta condición puede expresarse como:

$$\Delta_{izda} = \Delta_{dcha} \tag{3.25}$$

  Sin embargo es mucho más simple expresar esta ecuación en base al segundo teorema de Engesser:

$$\frac{\partial U^*}{\partial X_j} = 0 \tag{3.26}$$

Se observa que ambas ecuaciones de compatibilidad tienen expresiones simulares. La única diferencia es que cuando la incógnita es una reacción donde hay un desplazamiento conocido, la ecuación está igualada a dicho desplazamiento, mientras que cuando la incógnita es el esfuerzo en una barra la ecuación se iguala a cero.

3.7.3 Proceso general de resolución

La resolución de una celosía hiperestática se basa en la aplicación del principio de superposición y de las condiciones de compatibilidad geométrica. Los pasos a seguir son los siguientes:

- Determinar el grado de hiperestaticidad de la celosía *h*.
- Seleccionar un conjunto de incógnitas hiperestáticas de acuerdo con los criterios anteriores (figura 3.7). Eliminarlas de la estructura, con lo que se obtiene una celosía isostática.

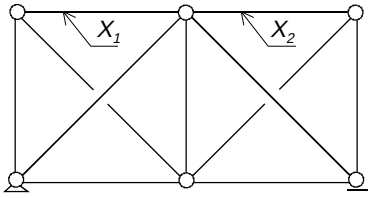


Figura 3.7

- Aplicar el principio de superposición y descomponer el comportamiento real de la estructura en suma de *1+h* casos. En todos ellos se han eliminado las incógnitas hiperestáticas, por lo que son isostáticos, y pueden resolverse con facilidad.

  ◊ Caso 0, llamado caso básico, o también caso de fuerzas exteriores, pues en él actúan solamente las fuerzas exteriores (figura 3.8). Los esfuerzos que aparecen sobre las barras se denominan N_i^0 siendo *i* el índice de la barra.

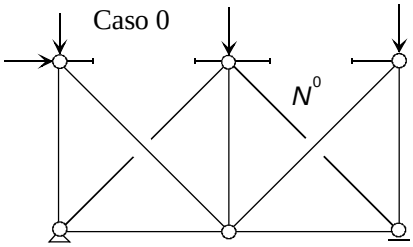


Figura 3.8

◊ Casos 1 a *h*, llamados casos de hiperestática unitaria o simplemente casos unitarios (figura 3.9). En cada uno de ellos se aplica un valor unitario de la incógnita hiperestática X_j y cero en todas las demás. Los esfuerzos que aparecen en las barras se denominan N_i^j siendo *i* el índice de la barra y *j=1,h* el caso considerado.

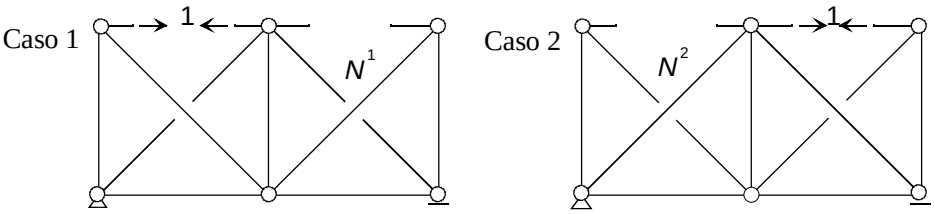


Figura 3.9

- Los esfuerzos finales en las barras son la combinación lineal de los 1+*h* casos básicos.

$$N_i = N_i^0 + \sum_{k=1,h} X_k N_i^k \tag{3.27}$$

- La energía complementaria acumulada en la estructura tiene la expresión:

$$U^* = \sum_{i=1,b} \frac{N_i^2 \rho_i}{2} + \sum_{i=1,b} \lambda_i N_i \tag{3.28}$$

- Se aplican las *h* condiciones de compatibilidad correspondientes a las *h* incógnitas hiperestáticas. Estas son en general de la forma:

$$\frac{\partial U^*}{\partial X_j} = 0 \quad j = 1,h \tag{3.29}$$

$$\sum_i 2N_i \frac{\rho_i}{2} \frac{\partial N_i}{\partial X_j} + \sum_i \lambda_i \frac{\partial N_i}{\partial X_j} = 0 \quad j = 1,h \tag{3.30}$$

Pero, derivando en la expresión (3.27) del esfuerzo en una barra se obtiene que

$$\frac{\partial N_i}{\partial X_j} = N_i^j \tag{3.31}$$

con lo que las ecuaciones de compatibilidad quedan:

$$\sum_i N_i \rho_i N_i^j + \sum_i \lambda_i N_i^j = 0 \quad j = 1, h \tag{3.32}$$

Se obtiene de esta forma un sistema de *h* ecuaciones cuyas incógnitas son las incógnitas hiperestáticas, que se hallan incluidas en la expresión de los esfuerzos. Para ponerlas de manifiesto se sustituye el valor de N_i según (3.27):

$$\sum_i \left(N_i^0 + \sum_k X_k N_i^k \right) \rho_i N_i^j + \sum_i \lambda_i N_i^j = 0 \quad j = 1, h \tag{3.33}$$

Cambiando de orden los sumatorios, el sistema de ecuaciones se puede poner como:

$$\sum_k X_k \sum_i \rho_i N_i^j N_i^k = -\sum_i N_i^0 \rho_i N_i^j - \sum_i \lambda_i N_i^j \quad j = 1, h \tag{3.34}$$

En forma matricial este sistema es:

$$\mathbf{fX} = \mathbf{D} \tag{3.35}$$

y su solución son las incógnitas hiperestáticas contenidas en el vector **X**.

La matriz **f** del sistema es la matriz de flexibilidad de la celosía. Es una matriz de tamaño *h*, y siempre tiene inversa si las incógnitas hiperestáticas son independientes. Sus términos valen:

$$f_{jk} = \sum_i \rho_i N_i^j N_i^k \tag{3.36}$$

y son los coeficientes de flexibilidad de la estructura en la dirección de cada pareja de incógnitas hiperestáticas. Nótese que con el valor de estos coeficientes, la matriz **f** es simétrica.

El término independiente **D** tiene dos sumandos: uno debido a las fuerzas exteriores que actúan sobre la celosía y otro debido a las variaciones de temperatura existentes en las barras:

$$D_j = -\sum_i N_i^0 \rho_i N_i^j - \sum_i \lambda_i N_i^j \tag{3.37}$$

El significado físico de todos estos coeficientes se explica en el apartado 3.10.

Caso particular para h=1

En este caso la ecuación de compatibilidad para *j=1* es:

$$\sum_i \left(N_i^0 + X_1 N_i^1 \right) \rho_i N_i^1 + \sum_i \lambda_i N_i^1 = 0 \tag{3.38}$$

y la incógnita hiperestática vale:

$$X_1 = \frac{-\sum_i N_i^0 \rho_i N_i^1 - \sum_i \lambda_i N_i^1}{\sum_i \rho_i N_i^1 N_i^1} \tag{3.39}$$

3.8 CÁLCULO DE DEFORMACIONES

Sea una celosía, isostática o hiperestática, en la que se han calculado los esfuerzos N_i en sus elementos, siguiendo uno de los métodos ya explicados. Se desea calcular el desplazamiento en un punto y una dirección dados, que se denomina Δ_r. Se trata por lo tanto de una magnitud escalar.

Para calcular el desplazamiento se emplea el método de la fuerza virtual unitaria:

- Se añade a la estructura real ya calculada (caso R), un caso virtual (caso V), en el que actúa únicamente una fuerza virtual V en la dirección del desplazamiento buscado (figura 3.10).
- Se resuelve el caso virtual para un valor unitario de la fuerza virtual V=1, y se calculan los esfuerzos que aparecen sobre la estructura, que se denominan N_i^V. Su cálculo requiere la resolución de una estructura igual a la original.

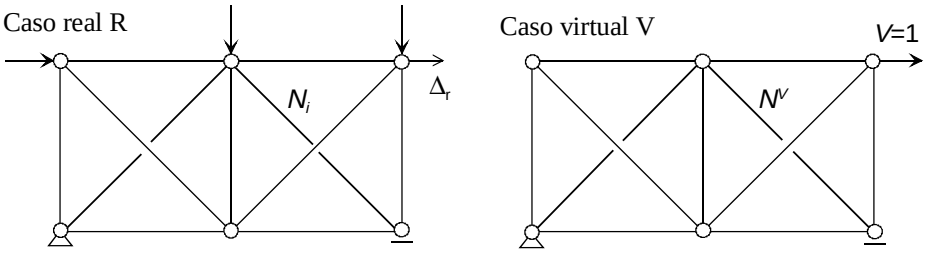


Figura 3.10

- Bajo la acción de las cargas reales y la carga virtual V, los esfuerzos en las barras de la estructura valen:

$$N_i^{RV} = N_i + N_i^V V \tag{3.40}$$

y la energía complementaria que se acumula es:

$$U^{*RV} = \sum_i \frac{N_i^{RV^2} \rho_i}{2} + \sum_i N_i^{RV} \lambda_i \tag{3.41}$$

La deformación buscada se obtiene empleando el teorema de Crotti-Engesser, considerando que la fuerza virtual no existe:

$$\Delta_r = \left(\frac{\partial U^{*RV}}{\partial V} \right)_{V=0} \tag{3.42}$$

$$\Delta_r = \left(\sum_i \rho_i N_i^{RV} \frac{\partial N_i^{RV}}{\partial V} + \sum_i \lambda_i \frac{\partial N_i^{RV}}{\partial V} \right)_{V=0} \tag{3.43}$$

pero de acuerdo con el valor de N_i^{RV} la derivada es:

$$\frac{\partial N_i^{RV}}{\partial V} = N_i^V \tag{3.44}$$

con lo que se obtiene:

$$\Delta_r = \sum_i \rho_i N_i N_i^V + \sum_i \lambda_i N_i^V \qquad (3.45)$$

Esta expresión puede aplicarse directamente para hallar la deformación buscada. Su uso requiere hallar los esfuerzos en el caso virtual unitario, cuyo cálculo implica resolver una vez más la estructura con una sola fuerza V=1. Si la estructura es isostática este cálculo extra no plantea ningún problema pues el caso V es isostático.

3.8.1 Estructuras hiperestáticas

La aplicación de la expresión (3.45) para el cálculo de deformaciones resulta compleja para estructuras hiperestáticas, pues requiere calcular los esfuerzos en el caso virtual unitario, que es hiperestático. Por ello resulta de interés desarrollar más la expresión anterior, con objeto de obtener expresiones de uso más simple. Con este objetivo se efectúa el cálculo de los esfuerzos en el caso virtual unitario, empleando el método general de análisis descrito en el apartado 3.7.3.

El caso virtual unitario V=1 es hiperestático de grado h (figura 3.11). Para resolverlo, se identifican h incógnitas hiperestáticas, que pueden ser las mismas que se utilizaron para calcular los esfuerzos en la estructura o no, y se descompone el caso virtual unitario en 1+h casos:

- Caso 0V (o isostático virtual), en el que actúan sólo las fuerzas exteriores, que en este caso es la fuerza virtual unitaria V=1. Los esfuerzos en este caso son N_i^{0V}.

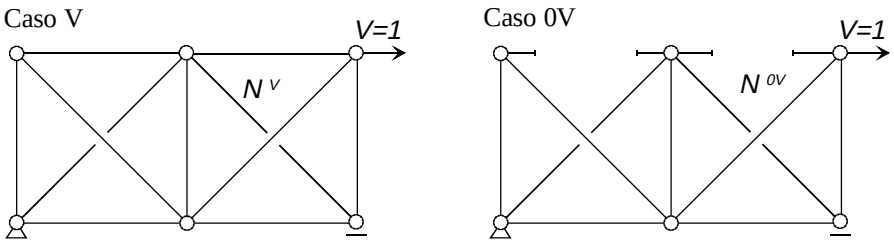


Figura 3.11

- Casos 1 a h, en cada uno de los cuales se aplica un valor unitario para la incógnita hiperestática X_j y cero para todas las demás (figura 3.12).

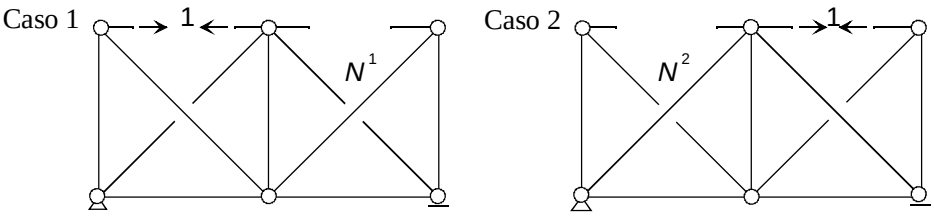


Figura 3.12

Los esfuerzos que aparecen en las barras en estos casos se denominan N_i^j siendo i el índice de la barra y j el caso considerado. Estos casos son exactamente iguales a los que se emplearon para calcular los esfuerzos en la estructura, por lo que no hay que volver a calcularlos.

Los esfuerzos en el caso V=1 son:

$$N_i^V = N_i^{0V} + \sum_{j=1,h} X_j N_i^j \tag{3.46}$$

Sustituyendo este valor en la expresión (3.45) de la deformación se obtiene

$$\Delta_r = \sum_i \rho_i N_i \left(N_i^{0V} + \sum_{j=1,h} X_j N_i^j \right) + \sum_i \lambda_i \left(N_i^{0V} + \sum_{j=1,h} X_j N_i^j \right) \tag{3.47}$$

Reordenando los sumatorios la expresión anterior queda:

$$\Delta_r = \sum_i \rho_i N_i N_i^{0V} + \sum_i \lambda_i N_i^{0V} + \sum_i \rho_i N_i \sum_{j=1,h} X_j N_i^j + \sum_i \lambda_i \sum_{j=1,h} X_j N_i^j \tag{3.48}$$

$$\Delta_r = \sum_i \rho_i N_i N_i^{0V} + \sum_i \lambda_i N_i^{0V} + \sum_j X_j \left(\sum_i \rho_i N_i N_i^j + \sum_i \lambda_i N_i^j \right) \tag{3.49}$$

Pero la expresión entre paréntesis del tercer sumando no es otra cosa que la condición de compatibilidad (3.32) para la incógnita hiperestática j, y por lo tanto es nula. Con ello la expresión final de la deformación buscada es:

$$\Delta_r = \sum_i \rho_i N_i N_i^{0V} + \sum_i \lambda_i N_i^{0V} \tag{3.50}$$

Esta ecuación permite obtener la deformación en un punto y dirección cualquiera de una celosía hiperestática cuyos esfuerzos reales se conocen N_i. No se requiere la resolución del caso con la fuerza virtual unitaria (que es hiperestático), sino solamente la de un caso isostático cargado con dicha fuerza V=1, lo cual simplifica mucho los cálculos. Nótese la similitud entre esta expresión y la inicial, que se diferencian únicamente en el uso de los esfuerzos N_i^{0V} en lugar de los N_i^V.

3.9 ERRORES EN LA LONGITUD DE LAS BARRAS

Los procesos de fabricación y montaje de las celosías hacen que en ocasiones la longitud real L_R con la que se ha fabricado una barra sea diferente de la distancia L entre los dos nudos donde debe montarse (longitud de montaje). La figura 3.13 muestra la situación. Si una barra que tiene un error de longitud se monta a la fuerza en la estructura, se originan una serie de esfuerzos en ella, pues la barra tiende a volver a su longitud real, a lo que se opone el resto de la estructura.

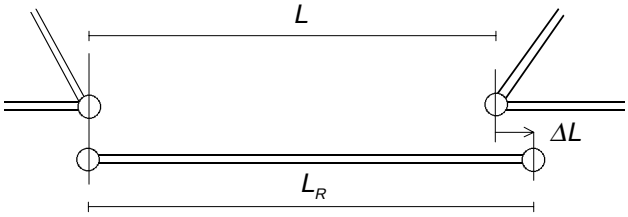


Figura 3.13

El tratamiento de este tipo de problemas es muy sencillo, pues en realidad el error en la longitud de la barra no es otra cosa que una deformación unitaria inicial, que se introduce en la ecuación constitutiva.

Si el error en la longitud de la barra ΔL es de pequeña magnitud comparado con su longitud (como debe ocurrir para que sea aplicable la hipótesis de pequeñas deformaciones), la deformación unitaria inicial a considerar es:

$$\varepsilon_0 = \frac{L_R - L}{L} = \frac{\Delta L}{L} \tag{3.51}$$

La ecuación constitutiva incluyendo la deformación unitaria inicial es:

$$\sigma = E(\varepsilon - \frac{\Delta L}{L}) \tag{3.52}$$

El esfuerzo axial N en cada sección de la barra, es la resultante de las tensiones en dicha sección.

$$N = \int \sigma dA = \sigma A = EA\varepsilon - EA\frac{\Delta L}{L} \tag{3.53}$$

La densidad de energía complementaria acumulada en un punto cualquiera de un elemento de celosía es:

$$U_0^* = \int_0^\sigma \varepsilon d\sigma = \int_0^\sigma \left(\frac{\sigma}{E} + \frac{\Delta L}{L}\right) d\sigma = \frac{\sigma^2}{2E} + \frac{\Delta L}{L}\sigma \tag{3.54}$$

Sustituyendo el valor de la tensión en función del esfuerzo axial $\sigma=N/A$, se obtiene:

$$U_0^* = \frac{N^2}{2A^2E} + \frac{\Delta L}{L}\frac{N}{A} \tag{3.55}$$

Integrando la densidad de energía complementaria a todo el volumen de la barra se obtiene la expresión de la energía complementaria:

$$U^* = \int U_0^* dv = \int \left(\frac{N^2}{2A^2E} + \frac{\Delta L}{L}\frac{N}{A}\right) A dx \tag{3.56}$$

Al ser el esfuerzo axial N y el producto EA constantes en toda la barra, la integral anterior queda:

$$U^* = \frac{N^2 L}{2EA} + \frac{\Delta L}{L} NL = \frac{N^2 L}{2EA} + \Delta L\ N \tag{3.57}$$

Comparando esta expresión con la obtenida para la barra con una variación de temperatura (ecuación (3.23)), se observa que son exactamente iguales, cambiando la constante λ por el error en la longitud ΔL. Por lo tanto los errores en la longitud de la barras pueden tratarse como variaciones de temperatura, empleando como parámetro λ el error en la longitud:

$$\lambda \equiv \Delta L \tag{3.58}$$

Se trata por lo tanto del mismo problema pero con un origen distinto: en el caso de las temperaturas el valor de $\lambda = \alpha TL$ se debe a la dilatación que sufre la barra por el incremento de temperatura, mientras que para los errores en longitud el valor de λ es el propio error en la longitud de la barra ΔL.

3.10 INTERPRETACIÓN FÍSICA DEL MÉTODO DE FLEXIBILIDAD

Sentido físico de los coeficientes de flexibilidad

Se considera una estructura de celosía cualquiera, sometida a un sistema de cargas formado por una única fuerza de valor unidad F_k=1, en una dirección cualquiera *k*, y se denomina N^k a los esfuerzos que se producen en la estructura en esa situación. La deformación de la estructura en otro punto y dirección cualquiera *j* está dada por la ecuación (3.45):

$$\left(\Delta_j\right)_{F_k=1} = \sum\nolimits_i \rho_i N_i^k N_i^j \tag{3.59}$$

donde N^j son los esfuerzos en el caso virtual unitario cargado en la dirección *j*. Comparando la expresión de esta deformación con la de los coeficientes de flexibilidad f_{jk} (ecuación (3.36)) se observa que son iguales. Por lo tanto puede concluirse que el coeficiente de flexibilidad f_{jk} es la deformación que se produce en la dirección *j*, cuando la estructura se carga únicamente con una fuerza unidad en la dirección *k*.

$$f_{jk} = \left(\Delta_j\right)_{F_k=1} \tag{3.60}$$

Esta ecuación brinda ya una interpretación física muy general de los coeficientes de flexibilidad, que se representa en la figura 3.14, para una celosía cualquiera.

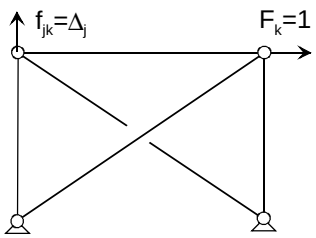


Figura 3.14

Esta interpretación puede concretarse aún más, si se consideran los *h* casos de incógnita hiperestática unitaria empleados en el método de flexibilidad: en cada uno ellos la estructura original se reduce a una estructura isostática, cargada únicamente con un valor unidad de una fuerza (la incógnita hiperestática). Considerando dos casos cualesquiera *j* y *k*,

se observa que ambos definen la misma situación anteriormente creada para estudiar el sentido físico de los coeficientes *f*.

Por lo tanto se deduce que el coeficiente de flexibilidad f_{jk} es la deformación que se produce en la dirección de la incógnita hiperestática *j* en el caso *k* (es decir cuando la estructura se carga únicamente con una fuerza unidad en la dirección *k*). Esto se representa en la figura 3.15, y puede ponerse en forma compacta como:

$$f_{jk} = \Delta_j^k \tag{3.61}$$

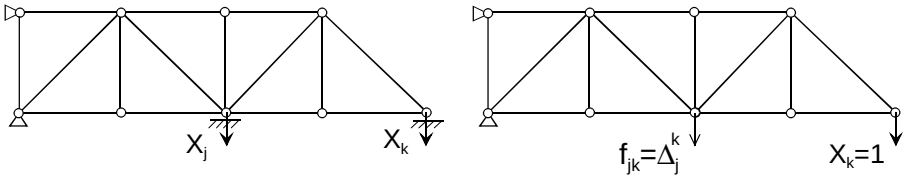


Figura 3.15

En el caso de que la incógnita hiperestática sea un esfuerzo interior, compuesto por dos fuerzas, la deformación a considerar es la suma de las dos deformaciones en el sentido de cada una de dichas fuerzas. La figura 3.16 ilustra la situación.

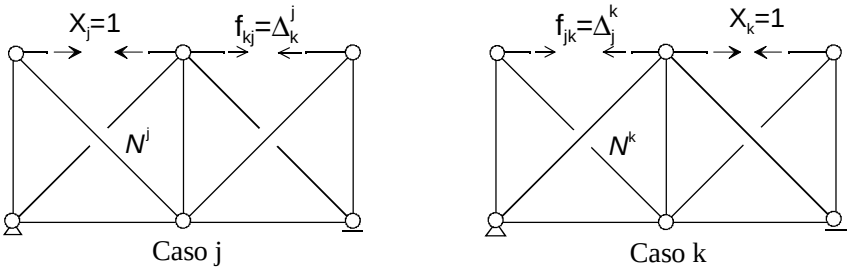


Figura 3.16

Sentido físico del término independiente

Los coeficientes D_j del término independiente vienen definidos por la ecuación (3.37). Comparando con la expresión (3.45) de la deformación, se observa que son iguales (con signo cambiado), si se considera como esfuerzos reales *N* en la estructura a los N^0 del caso 0, y como esfuerzos en el caso virtual N^V a los N^j en el caso *j*.

Se deduce por lo tanto que el término independiente D_j corresponde a la deformación que se produce en la dirección de la incógnita hiperestática *j* en el caso 0, cambiada de signo:

$$D_j = -\Delta_j^0 \tag{3.62}$$

La figura 3.17 muestra la situación para un caso típico.

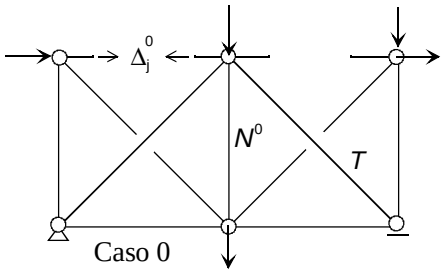


Figura 3.17

Sentido físico de cada ecuación de compatibilidad

Considerando el valor obtenido, en términos de deformación, para los distintos coeficientes que en ella intervienen, la ecuación de compatibilidad *j* (ecuación (3.34)) se puede poner en la forma:

$$\sum_{k=1,h} X_k f_{jk} = D_j \qquad \rightarrow \qquad \sum_{k=1,h} X_k \Delta_j^k + \Delta_j^0 = 0 \tag{3.63}$$

Esta ecuación contiene la suma de las deformaciones en la dirección de la incógnita hiperestática *j* en los casos *k*=1,*h*, más la deformación en la misma dirección en el caso 0 (figura 3.18). Corresponde por lo tanto al valor de la deformación total según la incógnita hiperestática *j*.

Por lo tanto la ecuación de compatibilidad *j* es sencillamente $\Delta_j = 0$, y restituye la compatibilidad de deformaciones según la incógnita hiperestática correspondiente, que se pierde al descomponer la estructura real en suma de los 1+*h* casos. Al haberse obtenido las ecuaciones de compatibilidad empleando el teorema de Engesser, de manera muy sistemática, su sentido físico parece haberse perdido aunque el análisis aquí efectuado lo pone de manifiesto con claridad.

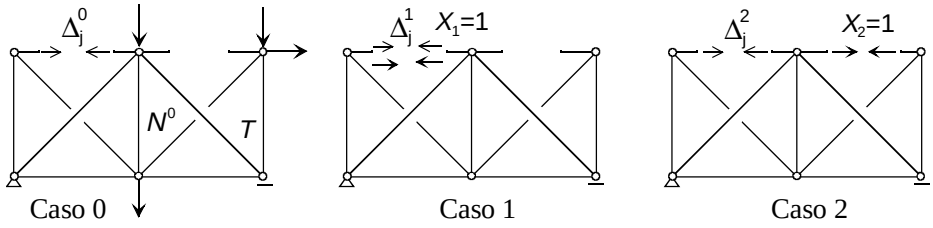


Figura 3.18

3.11 EJERCICIOS

3.11.1 Calcular los esfuerzos en la celosía de la figura 3.19. Todas las barras son del mismo material y tienen la misma área transversal *A*.

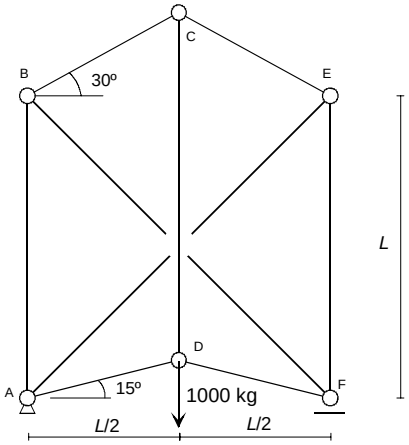


Figura 3.19

Se trata de una celosía isostática, del tipo complejo.

Barras = 9	Reacciones = 3	Ecuaciones = 12
Nudos = 6		Incógnitas = 12.

Para resolverla por el método de la barra sustituida, se sustituye la barra BF, por una barra situada entre A y C. Al efectuar esta sustitución se obtiene una celosía simple.

Los casos 1 y 2 se muestran en la figura 3.20.

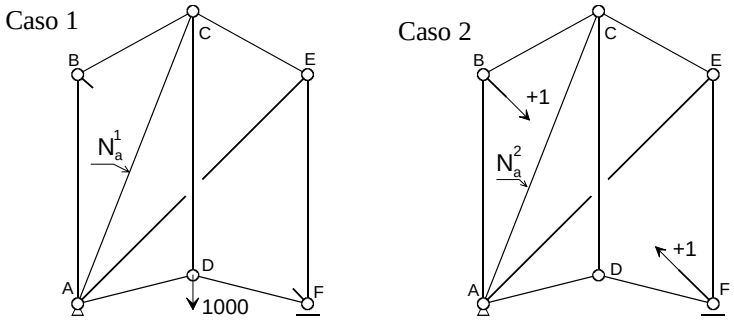


Figura 3.20

Los esfuerzos en cada uno de los dos casos se muestran en las columnas correspondientes de la tabla 3.1.

Barra	Caso 1	Caso 2	Final
AB	0.0	-1.1154	-933.
AD	0.0	-0.7321	-612.
BC	0.0	-0.8165	-683.
BF	0.0	1.0000	836.
AE	448.3	0.4641	836.
CE	-366.0	-0.3789	-683.
DF	0.0	-0.7321	-612.
AC	-876.3	1.0476	0.
EF	-500.0	-0.5176	-933.
CD	1000.0	-0.3789	683.

Tabla 3.1

El esfuerzo en la barra añadida AC es en realidad nulo, por lo que se puede poner:

$$N_{AC} = -876.3 + 1.0476 \cdot N_{BF} = 0$$

de donde se obtiene el valor del esfuerzo en la barra eliminada:

$$N_{BF} = -\frac{-876.3}{1.0476} = 836 \text{ kg}$$

Los esfuerzos en las barras restantes son:

$$N_i = N_i^1 + 836\, N_i^2 \quad \text{kg}$$

y se muestran en la última columna de la tabla 3.1.

3.11.2 Calcular los esfuerzos en las barras y las reacciones en los apoyos de la celosía espacial mostrada en la figura 3.21.

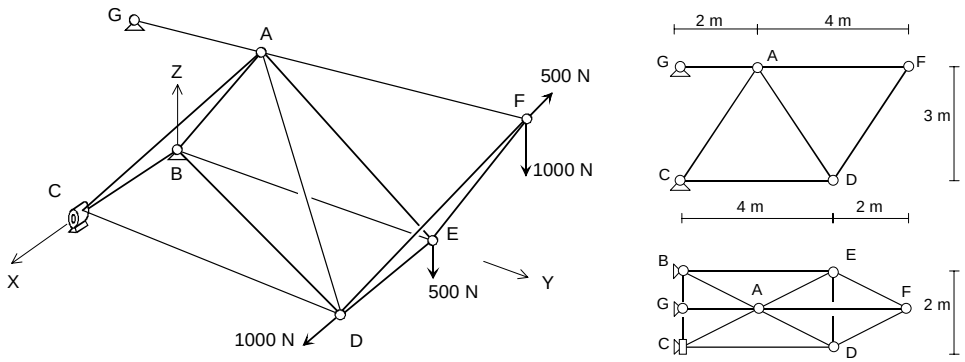


Figura 3.21

Se trata de una celosía espacial simple, construida partiendo del tetraedro básico ABCG. A él se añade el nudo D apoyándose para ello en los nudos A, B y C. A continuación se añade el nudo E, apoyándose en los A, B y D y finalmente se añade el nudo F, apoyándose en los A, D y E. Los apoyos B y G son rótulas esféricas, mientras que el apoyo C es una

articulación sobre el eje X. El número de barras es 13, y el de reacciones 8, dando un total de 21 incógnitas, que corresponden a las 21 ecuaciones de equilibrio de los 7 nudos.

La tabla 3.2 muestra los cosenos directores de las distintas barras, que son necesarios para establecer las ecuaciones de equilibrio de cada nudo. Se muestran los tres cosenos directores de cada barra en el primero de sus nudos. Los valores correspondientes al otro nudo son iguales y de signo contrario.

Barra	Nudo 1	Nudo 2	λ	μ	ν
BC	B	C	1.000	0.000	0.000
CD	C	D	0.000	1.000	0.000
BD	B	D	0.447	0.894	0.000
BE	B	E	0.000	1.000	0.000
DE	D	E	-1.000	0.000	0.000
AC	C	A	-0.267	0.534	0.802
AB	B	A	0.267	0.534	0.802
AD	D	A	-0.267	-0.534	0.802
AE	E	A	0.267	-0.534	0.802
AF	A	F	0.000	1.000	0.000
EF	E	F	0.267	0.534	0.802
DF	D	F	-0.267	0.534	0.802
AG	A	G	0.000	-1.000	0.000

Tabla 3.2

El equilibrio de los nudos se aplica de forma individual, nudo tras nudo, buscando siempre uno en el que sólo confluyan 3 barras con esfuerzos desconocidos. Los esfuerzos se calculan en Newtons.

- Nudo F. Sus ecuaciones de equilibrio son:

$$-0.267N_{FE} + 0.267N_{FD} - 500 = 0$$

$$-N_{FA} - 0.534N_{FE} - 0.534N_{FD} = 0$$

$$-0.802N_{FE} - 0.802N_{FD} - 1000 = 0$$

De donde se obtienen los esfuerzos: $N_{FA} = 667$ $N_{FD} = 312$ $N_{FE} = -1559$

- Nudo E. Las tres ecuaciones de equilibrio de este nudo, considerando ya los valores de los esfuerzos calculados anteriormente, son:

$$N_{ED} + 0.267N_{EA} + 0.267(-1559) = 0$$

$$-N_{EB} - 0.534N_{EA} + 0.534(-1559) = 0$$

$$0.802N_{EA} + 0.802(-1559) - 500 = 0$$

De donde se obtiene $N_{EB} = -2000$ $N_{ED} = -167$ $N_{EA} = 2183$

- Nudo D:

$$-0.447N_{DB} - 1(-167) - 0.267N_{DA} - 0.267(312) + 1000 = 0$$

$$-N_{DC} - 0.894N_{DB} - 0.535N_{DA} + 0.534(312) = 0$$

$$0.802N_{DA} + 0.802(312) = 0$$

De donde se obtiene $N_{DA} = -312$ $N_{DC} = -2000$ $N_{DB} = 2609$

- Nudo A.

$$0.267N_{AC} - 0.267N_{AB} + 0.267(-312) - 0.267(2183) = 0$$

$$-0.534N_{AC} - 0.534N_{AB} + 0.534(-312) + 0.534(2183) + 1(667) - N_{AG} = 0$$

$$-0.802N_{AC} - 0.802N_{AB} - 0.802(-312) - 0.802(2183) = 0$$

Los esfuerzos que se obtienen son $N_{AG} = 2667$ $N_{AC} = 312$ $N_{AB} = -2183$

- Nudo C. Sus tres ecuaciones de equilibrio son:

$$-N_{CB} - 0.267(312) = 0$$

$$(-2000) + 0.534(312) + R_{CY} = 0$$

$$0.802(312) + R_{CZ} = 0$$

Se obtienen el esfuerzo en la barra CB y las dos reacciones, en las direcciones Z e Y, en el nudo.

$$N_{CB} = -83 \qquad R_{CY} = 1833 \qquad R_{CZ} = -250$$

- Nudo B. Sus ecuaciones de equilibrio permiten hallar las 3 reacciones en él.

$$1(-83) + 0.447(2609) + 0.267(-2183) + R_{BX} = 0$$

$$0.894(2609) + 1(-2000) + 0.534(-2183) + R_{BY} = 0$$

$$0.802(-2183) + R_{BZ} = 0$$

Se obtiene $R_{BX} = -500$ $R_{BY} = 833$ $R_{BZ} = 1750$

3.11.3 Calcular los esfuerzos en la estructura de la figura 3.22. Todas las barras son del mismo material, con módulo de elasticidad *E* y tienen la misma área transversal *A*.

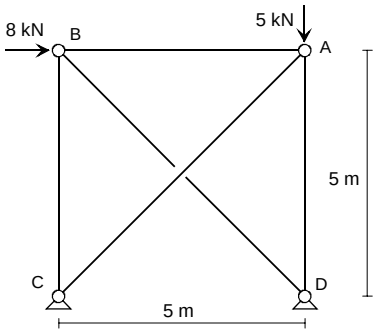


Figura 3.22

Nudos = 4, barras = 5, reacciones = 4

Incógnitas = 9, ecuaciones = 8 → Grado de hiperstaticidad = 1

Se adopta como incógnita hiperestática el esfuerzo en la barra BD.

Se plantean dos casos básicos, cuyos esfuerzos en las barras se muestran en la figura 3.23.

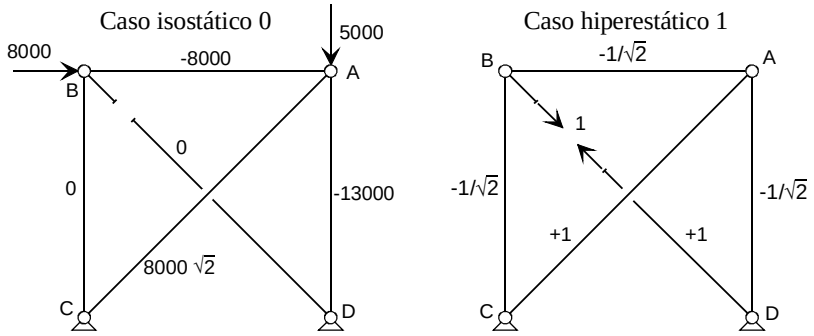


Figura 3.23

El valor de la incógnita hiperestática se obtiene directamente de la ecuación (3.39). Los distintos términos involucrados en ella son:

$$\sum N_i^0 \rho_i N_i^1 = \frac{1}{EA}\left(\frac{8000\cdot 5}{\sqrt{2}} + \frac{13000\cdot 5}{\sqrt{2}} + 8000\sqrt{2}\cdot 5\sqrt{2}\right) = \frac{154245}{EA}$$

$$\sum N_i^1 \rho_i N_i^1 = \frac{1}{EA}\left(\frac{5}{2} + \frac{5}{2} + \frac{5}{2} + 5\sqrt{2} + 5\sqrt{2}\right) = \frac{21.64}{EA}$$

$$\sum \lambda_i N_i^1 = 0$$

$$X_1 \equiv N_{BD} = -7128 \quad \text{N}$$

Los esfuerzos finales en las barras son: $N_i = N_i^0 + X_1 N_i^1$ y se indican en la tabla 3.3. En ella se observa que los esfuerzos en las barras no dependen del valor del producto *EA*.

Barra	BC	AB	AD	CA	BD
Esfuerzo *N* (N)	5039	-2960	-7960	4186	-7128

Tabla 3.3

3.11.4 Calcular la deformación horizontal del punto B en la estructura del ejercicio 3.11.3.

Se elige como incógnita hiperestática para el caso isostático virtual unitario al esfuerzo en la barra BD, que es la misma que se empleó para calcular los esfuerzos en la estructura.

El caso isostático virtual unitario se muestra en la figura 3.24.

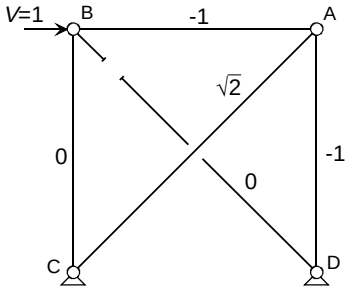


Figura 3.24

La deformación buscada se obtiene aplicando directamente la ecuación (3.50):

$$\Delta_{BX} = \sum \rho_i N_i N_i^{0V} + \sum \lambda_i N_i^{0V} = \frac{5}{EA} 2960 \cdot 1 + \frac{5}{EA} 7960 \cdot 1 + \frac{5\sqrt{2}}{EA} 4186 \cdot \sqrt{2} = \frac{96455}{EA}$$

Este valor si que es inversamente proporcional a la rigidez de las barras de la estructura.

3.11.5 Calcular los esfuerzos en las barras de la celosía de la figura 3.25. Todas las barras tienen las mismas propiedades $E = 2\ 10^6$ kg/cm^2, $A = 20$ cm^2.

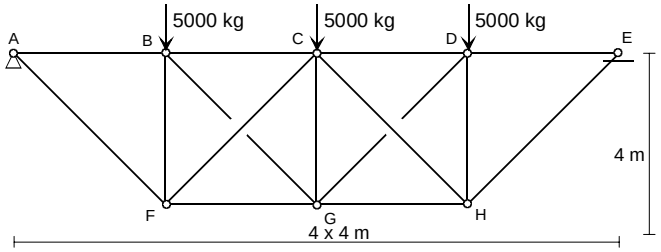


Figura 3.25

Incógnitas: 18 (15 barras y 3 reacciones). Ecuaciones: 16 (8 nudos) h=2

La hiperestaticidad está localizada en los paneles BCFG y CDGH. Las incógnitas redundantes deben elegirse entre las barras que forman dichos paneles: se adoptan los esfuerzos en las barras BG y GD.

$$X_1 \equiv N_{BG} \qquad X_2 \equiv N_{GD}$$

Los casos básicos se indican en la figura 3.26.

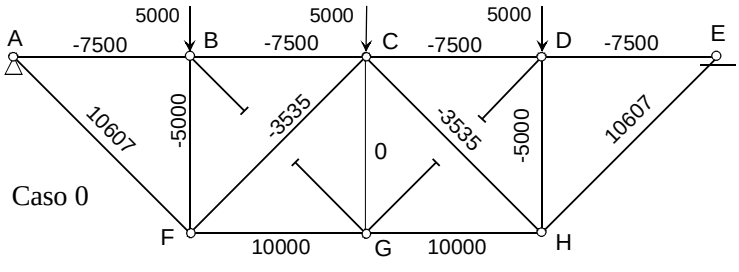


Figura 3.26

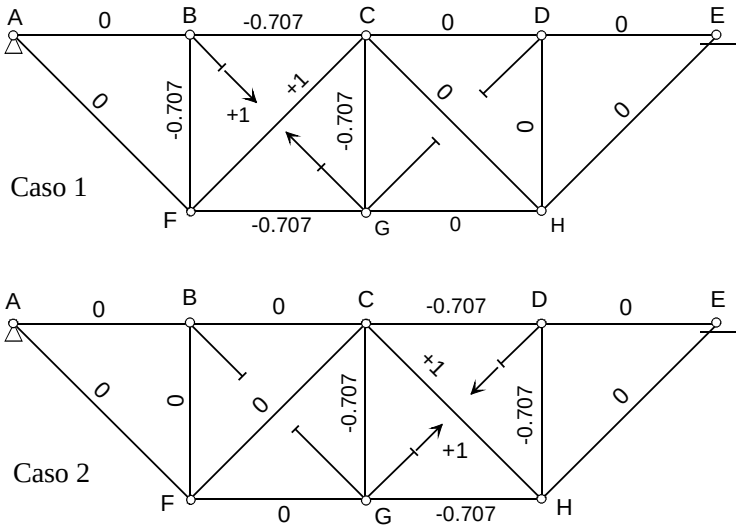


Figura 3.26 (cont)

Las dos ecuaciones de compatibilidad son:

$$X_1 \sum N_i^1 \rho_i N_i^1 + X_2 \sum N_i^1 \rho_i N_i^2 = -\sum N_i^0 \rho_i N_i^1$$

$$X_1 \sum N_i^2 \rho_i N_i^1 + X_2 \sum N_i^2 \rho_i N_i^2 = -\sum N_i^0 \rho_i N_i^2$$

Sustituyendo los valores numéricos de los distintos coeficientes se obtiene:

$$0.4824 \cdot 10^{-4} X_1 + 0.050 \cdot 10^{-4} X_2 = 0.0323$$
$$0.050 \cdot 10^{-4} X_1 + 0.4824 \cdot 10^{-4} X_2 = 0.0323$$

De las que se obtiene: $X_1 = X_2 = 606.6$ kg

Los esfuerzos finales en las barras tienen la expresión: $N_i = N_i^0 + 606.6 N_i^1 + 606.6 N_i^2$ y se muestran en la figura 3.27.

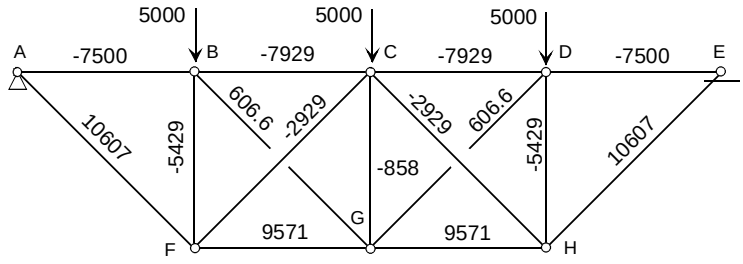


Figura 3.27

3.11.6 Calcular los esfuerzos en las barras y la deformación vertical del nudo G en la celosía del ejercicio 3.11.5, cuando se produce un calentamiento de 40 ºC en todo el cordón superior ABCDE, y no actúan las fuerzas exteriores. El coeficiente de dilatación térmica del material es 10^{-5} ºC^{-1}.

Al no haber ninguna fuerza exterior aplicada, los esfuerzos del caso 0 son todos nulos, con lo que las ecuaciones de compatibilidad, incluyendo los términos debidos a los incrementos de temperatura, son:

$$X_1 \sum N_i^1 \rho_i N_i^1 + X_2 \sum N_i^1 \rho_i N_i^2 = -\sum \lambda_i N_i^1$$
$$X_1 \sum N_i^2 \rho_i N_i^1 + X_2 \sum N_i^2 \rho_i N_i^2 = -\sum \lambda_i N_i^2$$

Los términos independientes debidos a las temperaturas son:

$$\sum \lambda_i N_i^1 = -0.707\, \alpha\, \Delta T\, L_{BC} = -0.1131 \quad \text{cm}$$
$$\sum \lambda_i N_i^2 = -0.707\, \alpha\, \Delta T\, L_{CD} = -0.1131 \quad \text{cm}$$

Nótese que sólo influye el incremento de temperatura en las barras BC y CD, pero no influye el calentamiento de AB ni de DE. Ello es debido a que estas últimas están situadas en la zona isostática de la estructura y por lo tanto no tienen influencia en los esfuerzos de origen térmico. El sistema de ecuaciones es:

$$0.4824 \cdot 10^{-4} X_1 + 0.050 \cdot 10^{-4} X_2 = 0.1131$$
$$0.050 \cdot 10^{-4} X_1 + 0.4824 \cdot 10^{-4} X_2 = 0.1131$$

Resolviendo se obtiene $X_1 = X_2 = 2123\,\text{kg}$. Los esfuerzos finales N en las barras son los indicados en la figura 3.28.

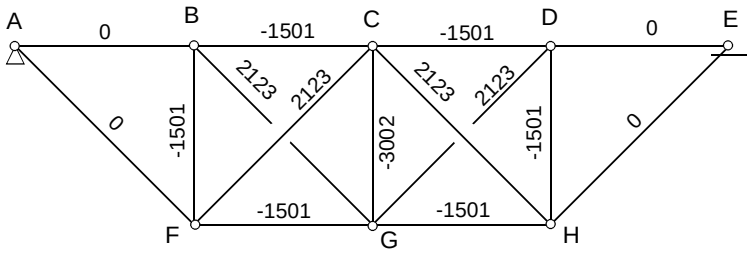


Figura 3.28

Se observa que sólo están cargadas las barras situadas en la zona hiperestática. En la zona isotática las temperaturas no producen ningún esfuerzo.

Para hallar la deformación se plantea un caso virtual unitario con una fuerza V=1 situada en G en dirección Y hacia abajo, cuyos resultados se muestran en la figura 3.29.

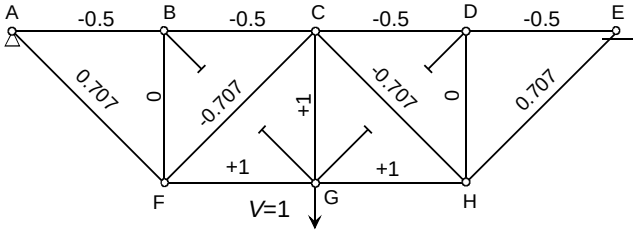


Figura 3.29

La deformación vertical del nudo G es:

$$\Delta_{GY} = \sum N \rho N^{0V} + \sum \lambda N^{0V} = -0.0875 - 0.32 = -0.4075\,\text{cm}$$

A esta deformación colaboran, por el primer sumando, todas las barras que tienen esfuerzo N no nulo (es decir las situadas en la zona hiperestática), y por el segundo sumando aquellas barras que tienen temperatura aplicada (λ no nulo) y esfuerzo no nulo en el caso 0V. A este segundo sumando colaboran las cuatro barras del cordón superior.

De este ejemplo se deduce, y la conclusión es general, que en estructuras cargadas únicamente con cargas de origen térmico, sólo aparecen esfuerzos en las zonas de la estructura que son hiperestáticas, pero no en las zonas que son isostáticas. Las deformaciones se producen en toda la estructura: en las zonas hiperestáticas la deformación producida por el esfuerzo axial (término $N\rho N^{0V}$) se suma a la deformación térmica (término λN^{0V}). En las zonas isotáticas se produce sólo deformación de origen térmico (término λN^{0V}).

3.11.7 Calcular la deformación vertical del nudo G en la estructura de la figura 3.30, cuando el apoyo F sufre un descenso conocido de valor 2 cm y sobre el nudo G actúa una fuerza P=2000 kg. Todas las barras tienen $E\,A = 2\,10^7$ kg.

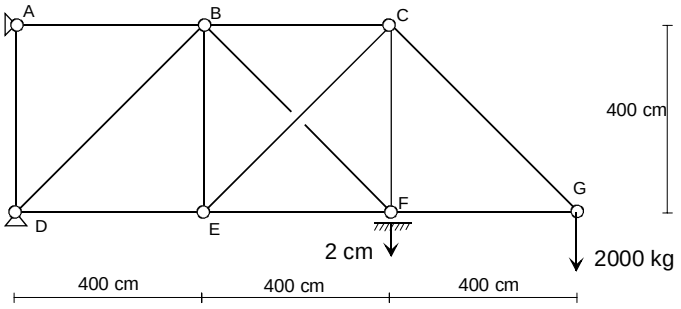


Figura 3.30

Incógnitas : 17 (12 barras y 5 reacciones), ecuaciones : 14 (7 nudos) $\rightarrow$ h=3

La barra AD está aislada del resto de la estructura y está descargada, por lo tanto su esfuerzo es nulo y se puede prescindir de ella. Con ello se disminuye en 1 el grado de hiperestaticidad. Por otra parte, la hiperestaticidad está localizada en el panel BCFE y en las reacciones en los 3 apoyos.

Como se conoce el valor de la deformación en F, se adopta precisamente la reacción vertical en F como una de las incógnitas hiperestáticas. La segunda incógnita es el esfuerzo en la barra BF, con lo que: $X_1 = R_{FY}$ $X_2 = N_{BF}$

Los 3 casos básicos se muestran en la figura 3.31, y sus resultados en la tabla 3.4.

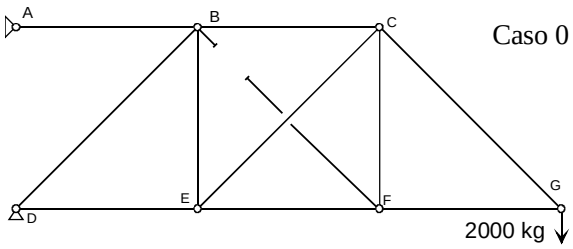


Figura 3.31

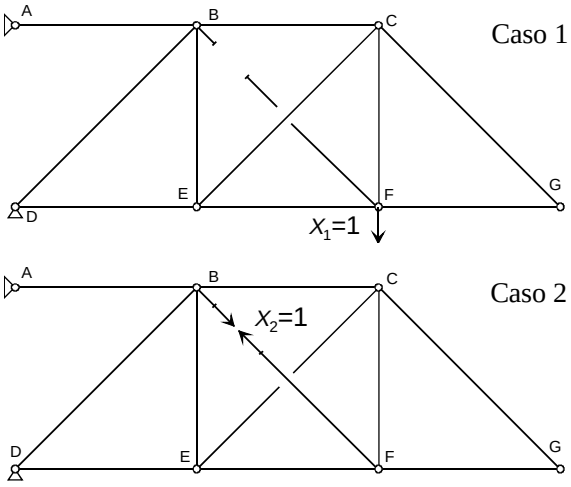


Figura 3.31 (cont)

Barra	ρ	N^0	N^1	N^2
AB	400/*EA*	3 *P*	2	0
BD	400 $\sqrt{2}$ /*EA*	-$\sqrt{2}$ *P*	-$\sqrt{2}$	0
DE	400/*EA*	-2 *P*	-1	0
BE	400/*EA*	*P*	1	-1/$\sqrt{2}$
BC	400/*EA*	2 *P*	1	-1/$\sqrt{2}$
EF	400/*EA*	- *P*	0	-1/$\sqrt{2}$
BF	400 $\sqrt{2}$ /*EA*	0	0	1
CE	400 $\sqrt{2}$ /*EA*	-$\sqrt{2}$ *P*	- $\sqrt{2}$	1
CF	400/*EA*	0	1	-1/$\sqrt{2}$
CG	400 $\sqrt{2}$ /*EA*	$\sqrt{2}$ *P*	0	0
FG	400/*EA*	- *P*	0	0

Tabla 3.4

Las dos ecuaciones de compatibilidad son:

$$\sum\left(N^0 + X_1N^1 + X_2N^2\right)\rho N^1 + \sum \lambda N^1 = \Delta_{FY}$$

$$\sum\left(N^0 + X_1N^1 + X_2N^2\right)\rho N^2 + \sum \lambda N^2 = 0$$

Sustituyendo los valores numéricos de los distintos coeficientes se obtiene:

$$13.656X_1 - 4.1213X_2 = -16.6568P + EA\Delta / 400$$
$$-4.1213X_1 + 4.8284X_2 = 3.4142P$$

Resolviendo el sistema de ecuaciones, y sustituyendo los valores de P=2000 kg y Δ=2 cm, se obtiene:

$$X_1 = -1.355P + 0.0986EA\Delta / 400 = -2710 + 9860 = 7150 \quad \text{kg}$$
$$X_2 = -0.45P + 0.0842EA\Delta / 400 = -900 + 8420 = 7520 \quad \text{kg}$$

Los esfuerzos finales en las barras tienen la expresión: $N_i = N_i^0 + 7150\,N_i^1 + 7520\,N_i^2$, y se muestran en la figura 3.32.

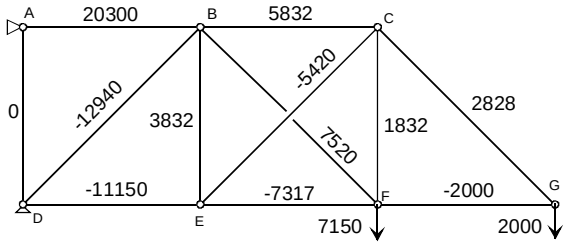


Figura 3.32

Para calcular la deformación vertical en G, se plantea un caso virtual unitario con una fuerza *V*=1 situada en G, en dirección Y hacia abajo. Este caso virtual coincide con el caso 0, pero con un valor unitario de la fuerza aplicada, en lugar de 2000 kg. Sus resultados se muestran en la figura 3.33.

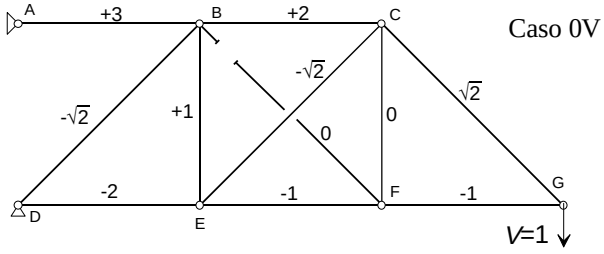


Figura 3.33

La deformación se obtiene por aplicación directa de la ecuación (3.50):

$$\Delta_{GY} = \sum N \rho N^{0V} + \sum \lambda N^{0V} = 150389 L / EA = 3.008 \text{ cm}$$

Las reacciones en los apoyos se obtienen aplicando el equilibrio a toda la estructura. La reacción vertical en el nudo F se obtuvo como incógnita hiperestática.

$$\sum M_D = 0 \qquad R_{AX} L = P 3L + R_{CY} 2L \qquad R_{AX} = 3P + 2R_{CY} = 20300 \text{ kg}$$

$$\sum F_X = 0 \qquad R_{DX} = R_{AX} = 20300 \text{ kg}$$

$$\sum F_Y = 0 \qquad R_{DY} = R_{CY} + P = 9150 \text{ kg}$$

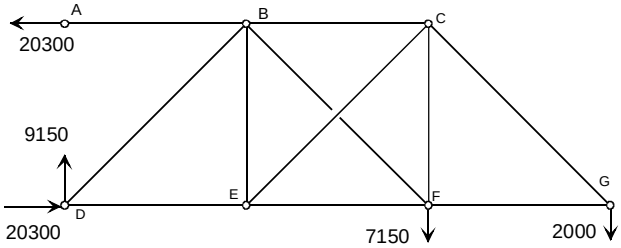


Figura 3.34

3.12 BIBLIOGRAFÍA

1. Arbabi, F., *Structural Analysis and Behavior*, McGraw-Hill, New York, 1991.
2. Argüelles Alvarez, R., *Cálculo de Estructuras - Tomo I*, Sección de Publicaciones de la Escuela Superior de Ingenieros de Montes, Madrid, 1981.
3. Argüelles Alvarez, R., y Argüelles Bustillo, R., *Análisis de Estructuras: Teoría, Problemas y Programas*, Escuela Técnica Superior de Ingenieros de Montes, Madrid, 1996.
4. Beaufait, F. W., *Basic Concepts of Structural Analysis*, Prentice-Hall, New Jersey, 1977.
5. Cremona, L., *Le figure reciproche nella statica grafica*, Milán, 1872.
6. Culmann, K., *Die graphische Statik*, Zurich, 1866.
7. Henneberg, L., *Statik der Starren Systeme*, Bergsträsser, Darmstadt, 1886.
8. Hibbeler, R. C., *Structural Analysis*, Prentice-Hall, New Jersey, 1996.
9. Hsieh, Y-Y., *Teoría Elemental de Estructuras*, Prentice-Hall Int., Bogotá, 1973.
10. Ketter, R. L., Lee, G. C., y Prawel, S. P., *Structural Analysis and Design*, McGraw-Hill, New York, 1979.
11. Maxwell, J. C., *On the Calculation of the Equilibrium and the Stiffness of Frames*, Philosophical Magazine, Vol. 27, pp. 294-299, 1864.
12. Mohr, O., *Beitrag zur Theorie der Bogenfachwerksträger*, Zeits. des Architekten und Ingenieur Vereins zu Hannover, Vol. 20, pp 223-238, 1874.
13. Norris, C. H., Wilbur, J. B., y Ytku, S., *Análisis Elemental de Estructuras*, McGraw-Hill, New York, 1982.
14. Ritter, A., *Elementare Theorie und Berechnung eiserner Dach und Brücken-constructionen*, 1862.
15. Timoshenko, S. P., y Young, D. H., *Teoría de las Estructuras*, Ed. Urmo, Bilbao, 1974.
16. Tuma, J. J., *Análisis Estructural*, Serie Schaum, McGraw-Hill, New York, 1970.
17. Wang, C. K., *Intermediate Structural Analysis*, McGraw-Hill, New York, 1983.

3.13 PROBLEMAS

3.13.1 En la estructura de la figura P3.1 se desean calcular los esfuerzos en todas las barras y la deformación horizontal del apoyo B. Todas las barras son del mismo material, con módulo de elasticidad 200 GPa. Las barras del cordón inferior tienen A=8 cm^2, las del cordón superior A=10 cm^2, las diagonales A=10 cm^2, y los montantes A=8 cm^2.

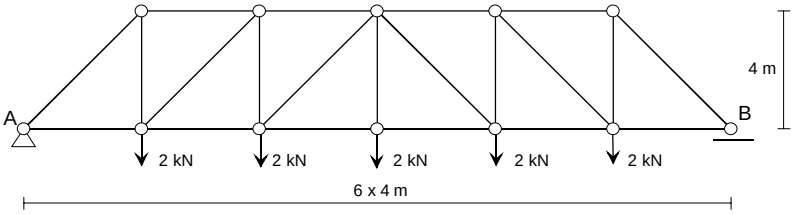


Figura P3.1

3.13.2 Calcular todos los esfuerzos internos en las barras de la estructura mostrada en la figura P3.2.

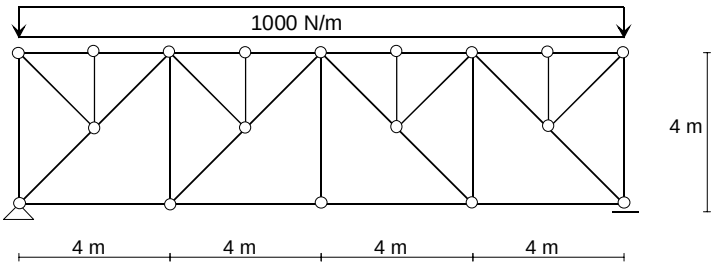


Figura P3.2

3.13.3 En la estructura de la figura P3.3 se desea calcular la deformación horizontal del apoyo B cuando todo el cordón inferior sufre un calentamiento de 20 ºC. Todas las barras son del mismo material, con E=200 GPa y $\alpha=10^{-5}$ ºC^{-1}. Las barras del cordón inferior tienen un área de 8 cm^2, las del cordón superior de 10 cm^2, las diagonales de 10 cm^2, y los montantes de 8 cm^2.

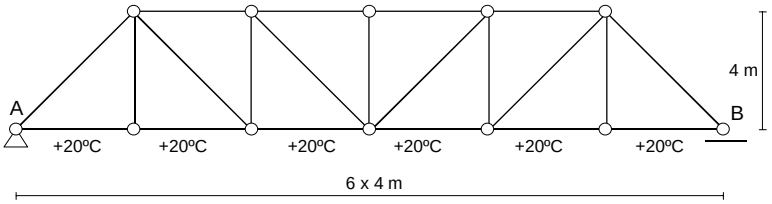


Figura P3.3

3.13.4 Calcular los esfuerzos en las barras de la celosía de la figura P3.4, para los valores del ángulo α=15º y α=30º.

Solución: Para α=15º, N_{FC} = 18.9 Tn, N_{AB} = -26.1 Tn, N_{AD} = 23.4 Tn N_{AF} = -17.2 Tn, N_{BC} = -19.1 Tn

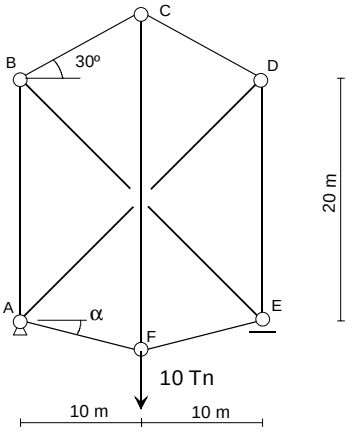


Figura P3.4

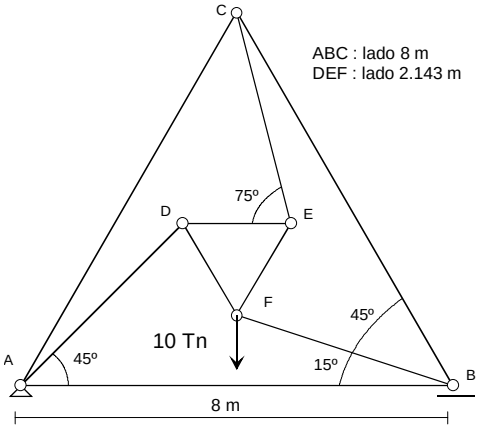


Figura P3.5

3.13.5 Calcular los esfuerzos en las barras de la estructura de la figura P3.5, así como el descenso del punto F. Todas las barras tienen el mismo valor del producto $EA = 4\ 10^6$ kg.

Solución: $N_{AD} = -4.715$ Tn, $N_{EC} = 6.44$ Tn, $N_{FB} = -1.724$ Tn, $\Delta_{FY} = 2.192\ 10^{-2}$ m.

3.13.6 En la estructura de la figura P3.6 se desean calcular las deformaciones del punto medio entre los nudos D y E. Todas las barras tienen las mismas propiedades:
$E = 2\ 10^6$ kg/cm^2 Área = 10 cm^2 Inercia = 1000 cm^4.

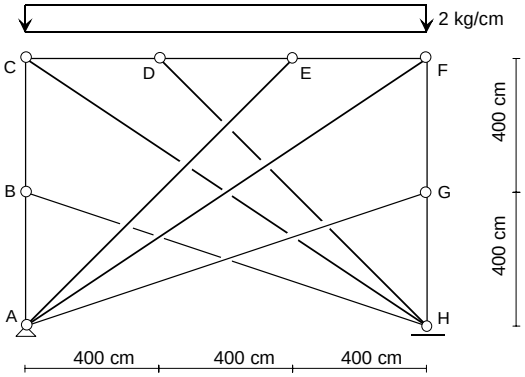


Figura P3.6

3.13.7 Calcular los esfuerzos en las barras de la celosía mostrada en la figura P3.7, así como las deformaciones del punto A. Todas las barras tienen el mismo valor del producto $E\ A$ = 21000 Tn.

Solución: $N_1 = 7.33$ Tn $N_2 = 4.94$ Tn $N_3 = -1$. $\Delta_{AX} = 9.4\ 10^{-4}$ m $\Delta_{AY} = -1.65\ 10^{-3}$ m.

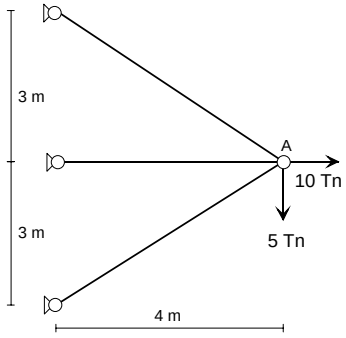


Figura P3.7

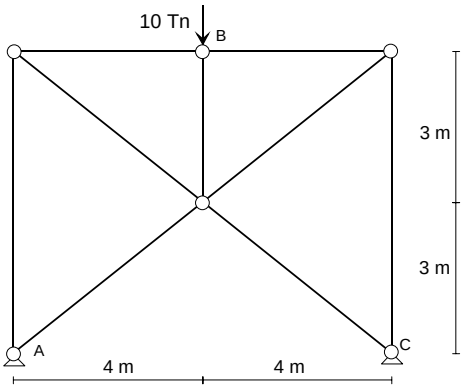


Figura P3.8

3.13.8 Calcular la deformación vertical del punto B en la estructura de la figura P3.8. Todas las barras tienen el mismo factor $E\,A$ = 21000 Tn.

Solución: Δ_{BY} = 0.0036 m (hacia abajo).

3.13.9 La celosía de la figura P3.9 se halla cargada por la fuerza de 1000 kg en el nudo B. Además la barra EC sufre un incremento de temperatura de valor +20ºC. Todas las barras son iguales, con un valor de EA=2 10^8 kg y de α=10^{-5} ºC^{-1}. Calcular los esfuerzos en todas las barras y el desplazamiento horizontal del nudo C.

Solución: N_{AB}= 8284 kg N_{AE} = -11716 kg N_{BE} = -1000 kg Δ_{CX} = 0.0966 cm.

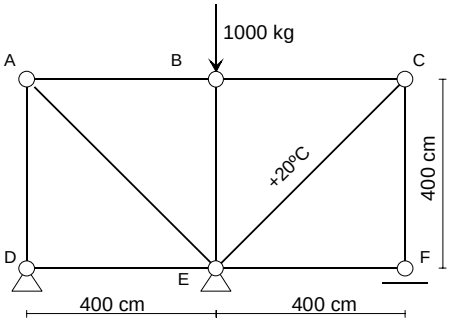


Figura P3.9

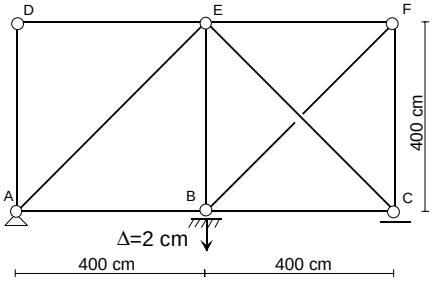


Figura P3.10

3.13.10 Calcular los esfuerzos que se producen en las barras de la estructura de la figura P3.10, cuando el nudo B sufre un descenso conocido de valor Δ=2 cm. Todas las barras tienen el mismo valor del producto EA=2 10^8 kg.

3.13.11 Calcular la deformación vertical del nudo C en la estructura de la figura P3.11, cuando sobre ella actúa la fuerza P=2000 kg y además las barras AE y FD sufren un incremento de temperatura T=20ºC. Todas las barras tienen el mismo valor de EA = 2 10^8 kg y de

α=10^{-5} ºC^{-1}. Discutir la influencia de la fuerza *P* y del incremento de temperatura *T* en los distintos resultados.

Solución: N_{AB}= 0.4714 *P* (kg) N_{BC} =0.3964 *P* (kg) N_{CF} = -0.0631 *P* (kg) Δ_{CY} = -0.04 cm

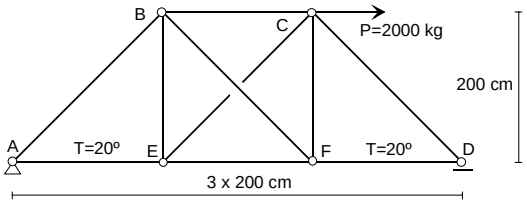


Figura P3.11

3.13.12 En la estructura de la figura P3.12 todas las barras son del mismo material, y tienen un área tal que se cumple que *A*/*L*=0.05 cm. Calcular los esfuerzos que se originan en las barras cuando el cordón superior FGH sufre un calentamiento de 20 ºC.
Datos del material: *E*=2 10^6 kg/cm^2 α=10^{-5} ºC^{-1}

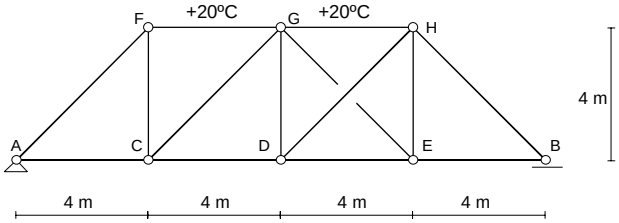


Figura P3.12

3.13.13 Calcular los esfuerzos que se originan en la estructura del problema 3.13.12, cuando en lugar del incremento de temperatura se aplica una carga vertical y hacia abajo de 8 Tn en el nudo C.

Capítulo 4

Vigas

4.1 GENERALIDADES

Las vigas son uno de los tipos de estructuras más frecuentes. Se pueden definir de manera formal de la siguiente manera:

- Son estructuras unidimensionales, en las que el material está agrupado alrededor de una línea recta, que por sencillez se toma como el eje X.
- Están sustentadas en uno o más punto, y esta sustentación puede ser del tipo apoyo simple o empotramiento.
- Están cargadas básicamente con fuerzas perpendiculares a su eje. Todas las fuerzas están contenidas en un plano que contiene también a la viga. Puede haber asimismo aplicados momentos exteriores, que deben ser perpendiculares al plano de las fuerzas.
- Se supone que el material es elástico lineal, y que las deformaciones son pequeñas, comparadas con las dimensiones de la viga sin deformar.

Bajo estas condiciones, las vigas se comportan como estructuras planas, apareciendo deformaciones transversales perpendiculares a su eje, y contenidas en el plano de las cargas, así como giros perpendiculares al plano de las cargas. No aparecen deformaciones en la dirección axial, al no haber cargas en ella.

En las condiciones anteriores las vigas están sometidas a esfuerzos internos de flexión y cortadura, pero no a esfuerzos axiales. Acumulan energía de flexión y opcionalmente de esfuerzo cortante (según la teoría empleada para su estudio), pero no de esfuerzo axial.

En el caso de haber cargas axiales, todos los efectos producidos por ellas están desacoplados de la flexión y cortadura. La demostración rigurosa de este desacoplamiento puede comprobarse en el estudio de pórticos planos (Capítulo 5). Para el estudio de vigas se ignora el esfuerzo axial y todo lo relativo a él.

4.2 CONDICIONES DE ESTABILIDAD

Como ya se ha indicado, en la viga coexisten los fenómenos de flexión y esfuerzo axial, que están desacoplados. El análisis de estabilidad debe hacerse por lo tanto para ambos efectos, por separado, incluyendo en cada uno de ellos las magnitudes que les afecten.

4.2.1 Estabilidad a flexión y cortante

De las tres ecuaciones de la estática disponibles en el plano, sólo se pueden usar dos para estudiar la estabilidad a flexión: la ecuación de equilibrio de fuerzas verticales y la ecuación de equilibrio de momentos. Sean:

- ◊ r el número de reacciones en los apoyos que afectan a la flexión. Es decir que se consideran únicamente las reacciones en dirección Y (imposibilidad de movimiento transversal) y los momentos (imposibilidad de giro),
- ◊ c el número de condiciones de construcción que afectan a la flexión. Éstas pueden ser articulaciones (condiciones de momento flector nulo) o deslizaderas verticales (esfuerzo cortante nulo).

El número de fuerzas incógnita en una viga es: cuatro para cada barra (dos fuerzas cortantes y dos momentos en cada extremo), más r incógnitas debidas a las reacciones. El número de ecuaciones de equilibrio disponibles es: $2b$ ecuaciones debidas a las b barras (una ecuación de equilibrio de fuerzas y otra de momentos), más $2(b+1)$ ecuaciones debidas a los $b+1$ nudos (una ecuación de equilibrio de fuerzas y otra de momentos), más c ecuaciones debidas a las condiciones de construcción.

La condiciones de estabilidad referentes a la flexión se obtienen comparando el número de incógnitas con el de reacciones y se resumen en la tabla siguiente:

A		$4b + r < 4b + 2 + c$	$\rightarrow$	Inestable
B	Isostática $\rightarrow$	$4b + r = 4b + 2 + c$		
C	Hiperestática $\rightarrow$	$4b + r > 4b + 2 + c$		

Estas relaciones definen la estabilidad de la viga considerándola como un todo único, en lo que a su comportamiento a flexión se refiere.

La condición A es suficiente para indicar que la viga tiene algún tipo de inestabilidad, pero sin indicar su origen interior o exterior. El número de grados de libertad de la viga es $g=2+c-r$.

Las condiciones B y C son necesarias pero no suficientes, ya que se requiere además que haya una disposición de las barras y las reacciones tal que no exista inestabilidad exterior ni interior, en ningún subconjunto de la viga. Si esta disposición es adecuada, el grado de hiperestaticidad en el caso C es $h=r-c-2$.

4.2.2 Estabilidad a esfuerzo axial

En la dirección axial sólo hay una ecuación de equilibrio estático, de las tres existentes en el plano, y es con respecto a ella con quien se comparan las incógnitas existentes. Sean:

- ◊ *ra* el número de reacciones en los apoyos que afectan al esfuerzo axial. Es decir que se consideran únicamente las reacciones en dirección X (imposibilidad de movimiento longitudinal), y
- ◊ *ca* el número de condiciones de construcción que afectan al esfuerzo axial. Estas pueden ser únicamente deslizaderas longitudinales (esfuerzo axial nulo).

La condiciones de estabilidad referentes al esfuerzo axial son las siguientes:

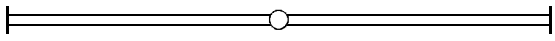
A		$ra < 1 + ca$ →	Inestable
B	Isostática →	$ra = 1 + ca$	
C	Hiperestática →	$ra > 1 + ca$	

Estas relaciones definen la condición de estabilidad de la viga en su dirección axial, considerándola como un todo único. La condición A es suficiente para indicar que la viga tiene algún tipo de inestabilidad axial, pero sin indicar su origen interior o exterior. El número de grados de libertad de la viga es *ga*=1+*ca*-*ra*.

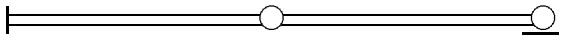
Las condiciones B y C son necesarias pero no suficientes, ya que además se requiere que haya una disposición de las barras y de las reacciones axiales tal que no exista inestabilidad exterior ni interior, en ningún subconjunto de la viga. Si esta disposición es adecuada, el grado de hiperestaticidad en el caso C es *ha*=*ra*-*ca*-1.

En todo caso, además de la aplicación de las fórmulas anteriores, se requiere normalmente un análisis visual de la estructura para su correcta clasificación.

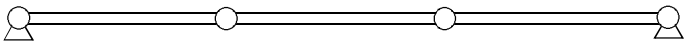
Ejemplos



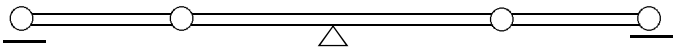
Flexión: *r=4 c=1* *r > 2+c* *h=1*
Axial: *ra=2 ca=0* *ra > 1+ca* *ha=1*



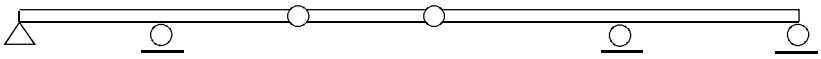
Flexión: *r=3 c=1* *r = 2+c* *isostática*
Axial: *ra=1 ca=0* *ra = 1+ca* *isostática*



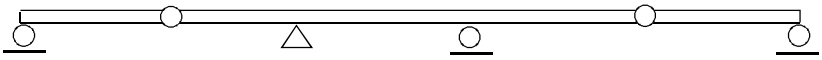
Flexión: *r=2 c=2* *r < 2+c* *inestable g=2*
Axial: *ra=2 ca=0* *ra > 1+ca* *ha=1*



Flexión: *r=3 c=2* *r < 2+c* *inestable g=1*
Axial: *ra=1 ca=0* *ra = 1+ca* *isostática*



Flexión: *r=4 c=2* *r = 2+c* *isostática*
Axial: *ra=1 ca=0* *ra = 1+ca* *isostática*



Flexión: *r=4 c=2* *r = 2+c* *isostática*
Axial: *ra=1 ca=0* *ra = 1+ca* *isostática*

4.3 TEORÍA GENERAL DE LA FLEXIÓN DE VIGAS PLANAS

La hipótesis básica en la que se basa la teoría clásica de flexión de vigas fue enunciada por Navier: las secciones rectas y perpendiculares a la fibra neutra en el estado sin deformar se mantienen rectas y también perpendiculares a la fibra neutra en el estado deformado.

Con esta hipótesis, y suponiendo pequeñas deformaciones, se cumple que el giro de una sección recta de la viga es igual a la pendiente de la curva deformada elástica. Además, al ser las deformaciones pequeñas, esta pendiente es igual al ángulo girado. Llamando v a la deformación vertical de la viga en la dirección Y, y θ al ángulo girado por la sección (figura 4.1) se cumple que:

$$\theta \approx tg\theta = \frac{dv}{dx} \tag{4.1}$$

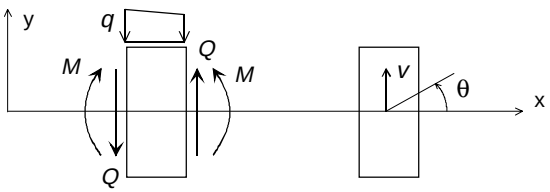


Figura 4.1

4.3.1 Campo de desplazamientos

La deformación de una sección cualquiera de la viga consiste en una traslación lateral de valor v, más una rotación θ alrededor de su centro de gravedad.

La deformación del centro de gravedad G de la sección es sencillamente la deformación lateral $v(x)$. Las deformaciones de un punto P situado a una distancia y de G (figura 4.2) son:

$$u_P = -\theta y = -\frac{dv}{dx} y \qquad\qquad v_P = v \tag{4.2}$$

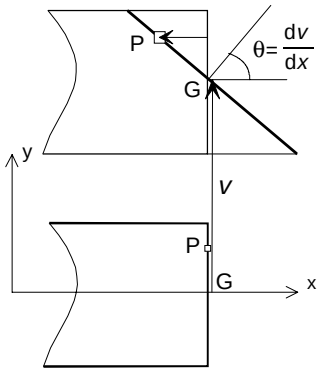


Figura 4.2

4.3.2 Deformaciones unitarias

Las deformaciones unitarias en el punto P son:

$$\varepsilon_x = \frac{\partial u_P}{\partial x} = -\frac{d^2 v}{dx^2} y$$

$$\varepsilon_y = \frac{\partial v_P}{\partial y} = 0 \qquad (4.3)$$

$$\gamma_{xy} = \frac{\partial u_P}{\partial y} + \frac{\partial v_P}{\partial x} = -\frac{dv}{dx} + \frac{dv}{dx} = 0$$

El material está en un estado unidimensional de deformación, sometido sólo a una ε_x, que en adelante se denomina simplemente ε, y que tiene una variación lineal en la sección:

$$\varepsilon = -\frac{d^2 v}{dx^2} y = -v'' y \qquad (4.4)$$

donde v" es la curvatura de la deformada de la viga, en la hipótesis de pequeñas deformaciones.

Se observa además, que la distorsión de cortadura γ_{xy} es nula, a consecuencia de la hipótesis de deformación que se ha efectuado. Evidentemente esto no es cierto y del estudio del esfuerzo cortante se sabe que si hay esfuerzo cortante en la sección, se produce una deformación unitaria vertical de cortadura. La hipótesis de Navier es por lo tanto válida solamente, en sentido estricto, para vigas sin esfuerzo cortante. No obstante las deformaciones de cortadura son normalmente de pequeña magnitud en piezas prismáticas, por lo que esta hipótesis se acepta habitualmente (ver ejercicio 4.12.10).

4.3.3 Tensiones

Suponiendo un material elástico lineal, e incluyendo el efecto de las deformaciones unitarias iniciales la tensión en el punto P vale:

$$\sigma = E(\varepsilon - \varepsilon_0) \qquad (4.5)$$

Sustituyendo la expresión de las deformaciones unitarias, se obtiene la expresión de la distribución de tensiones en la sección, que es lineal:

$$\sigma = E(-v''y - \varepsilon_0) \tag{4.6}$$

No aparece tensión cortante, al ser la deformación de cortante nula. Este hecho se explica con más detalle en el apartado 4.3.6, al introducirse el esfuerzo cortante.

4.3.4 Distribución de temperatura

Se supone una variación lineal de las temperaturas en la sección de la viga, desde un valor $+T$ en la cara superior hasta un valor $-T$ en la cara inferior.

Para el desarrollo posterior, resulta más conveniente emplear la temperatura gradiente entre las caras T_g:

$$T_g = \frac{+T-(-T)}{h} = \frac{2T}{h} \tag{4.7}$$

siendo h el canto de la viga.

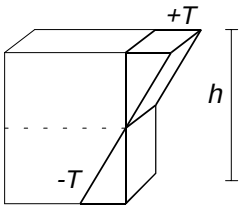


Figura 4.3

La distribución de temperaturas se puede poner como

$$T = yT_g \tag{4.8}$$

y la distribución de deformaciones unitarias térmicas es

$$\varepsilon_0 = \alpha T = \alpha y T_g \tag{4.9}$$

4.3.5 Momento flector

Se define como el momento estático de las tensiones respecto del centro de gravedad. De esta manera es estáticamente equivalente al momento de todas las fuerzas exteriores que actúan a un lado de la sección. El signo negativo en su definición es debido al criterio de signos adoptado.

$$M \equiv -\int \sigma y dA = -\int \sigma b y dy = -\int E(\varepsilon - \varepsilon_0) b y dy \tag{4.10}$$

$$M = -\int E(-v''y - \varepsilon_0) b y dy = Ev'' \int y^2 b dy + E\int \varepsilon_0 b y dy \tag{4.11}$$

siendo $b(y)$ el ancho de la sección. En la primera integral se identifica el momento de inercia I de la sección recta de la viga. Por lo tanto la relación entre el momento flector M y la deformación lateral v de la viga es:

$$M = EI\frac{d^2v}{dx^2} + E\int \varepsilon_0 b y dy \tag{4.12}$$

que es la ecuación de la elástica de la viga.

Si las deformaciones iniciales tienen una distribución lineal se obtiene:

$$M = EIv'' + E\alpha T_g \int y^2 b dy \tag{4.13}$$

donde se identifica el momento de inercia de la sección, con lo que la expresión final del momento flector *M* es:

$$M = EI\frac{d^2v}{dx^2} + EI\alpha T_g \tag{4.14}$$

que es la ecuación de la elástica cuando hay efectos térmicos. La curvatura de la deformada, en función de *M* es:

$$\frac{d^2v}{dx^2} = \frac{M}{EI} - \alpha T_g \tag{4.15}$$

4.3.6 Esfuerzo cortante

El esfuerzo cortante se define como la resultante de las tensiones cortantes verticales τ en la sección de la viga. Éstas son proporcionales a las deformaciones unitarias de cortadura γ, que como se ha visto son nulas. Por ello la resultante de las tensiones cortantes es también nula:

$$\int \tau\, dA = \int G\gamma\, dA = 0 \tag{4.16}$$

Pero realmente en la sección de la viga sí que hay un esfuerzo cortante *Q* no nulo, que es estáticamente equivalente a todas las fuerzas exteriores existentes a un lado de dicha sección. Se llega así a una aparente contradicción, producida por la hipótesis de deformación de Navier, que es la que ha originado que las deformaciones de cortadura γ sean nulas.

La realidad es que el esfuerzo cortante tiene que poder adoptar el valor que le corresponda según las ecuaciones de equilibrio, que será en general no nulo, para equilibrar las fuerzas exteriores aplicadas a un lado de la sección donde se calcule el cortante. Es por lo tanto necesario reconciliar este hecho con el valor nulo de las deformaciones cortantes. Esto puede hacerse si se piensa que el material de la viga es infinitamente rígido frente a la cortadura, es decir tiene $G=\infty$. De esta forma, aunque la deformación γ sea nula, la tensión cortante τ puede adoptar cualquier valor no nulo, al ser $\tau = G\ \gamma = \infty\ 0$, es decir cualquier valor indeterminado.

4.3.7 Relación entre la tensión y los esfuerzos

La tensión en un punto cualquiera P de la sección de la viga es:

$$\sigma = E(-v''y - \varepsilon_0) \tag{4.17}$$

Sustituyendo en ella el valor de v'' en función de *M*, para una distribución de temperaturas lineal, se obtiene:

$$\sigma = E(-\frac{M}{EI}y + \alpha y T_g - \alpha y T_g) = -\frac{My}{I} \tag{4.18}$$

que es la expresión habitual de las tensiones en una viga.

4.3.8 Ecuaciones de equilibrio

La figura 4.4 muestra un elemento diferencial de la viga con las fuerzas actuantes sobre él.

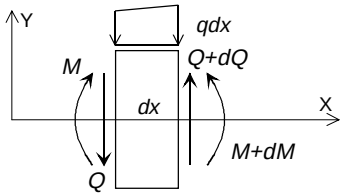


Figura 4.4

- *Equilibrio de momentos:*

$$M = (Q + dQ)\frac{dx}{2} + Q\frac{dx}{2} + M + dM \tag{4.19}$$

Despreciando el diferencial de orden superior $dxdQ$ y reordenando se obtiene

$$Q = -\frac{dM}{dx} \tag{4.20}$$

Sustituyendo el valor de M dado por (4.14) se obtiene:

$$Q = -\frac{d}{dx}\left(EI\frac{d^2v}{dx^2} + EI\alpha T_g \right) \tag{4.21}$$

- *Equilibrio vertical de fuerzas:*

$$Q + qdx = Q + dQ \tag{4.22}$$

$$q = \frac{dQ}{dx} \tag{4.23}$$

Sustituyendo el valor anterior de Q se obtiene:

$$q = -\frac{d^2}{dx^2}\left(EI\frac{d^2v}{dx^2} + EI\alpha T_g \right) \tag{4.24}$$

que es la ecuación diferencial que controla el problema de la flexión de una viga de propiedades variables, sometida a cargas térmicas. Si la viga es de propiedades uniformes y la distribución de temperaturas también lo es, la ecuación anterior queda:

$$q = -EI\frac{d^4v}{dx^4} \tag{4.25}$$

que es la conocida ecuación diferencial de equilibrio de una viga de propiedades uniformes.

4.3.9 Densidad de energía elástica

La expresión de la densidad de energía complementaria es:

$$U_o^* = \int_0^\sigma \varepsilon d\sigma = \int_0^\sigma \left(\frac{\sigma}{E} + \varepsilon_0 \right) d\sigma = \frac{\sigma^2}{2E} + \varepsilon_0\sigma \tag{4.26}$$

Sustituyendo la expresión (4.18) de las tensiones en función de los esfuerzos, se obtiene:

$$U_0^* = \frac{M^2 y^2}{2EI^2} - \frac{\varepsilon_0 My}{I} \tag{4.27}$$

que permite hallar la densidad de energía en un punto P cualquiera, en función de los esfuerzos en la viga y de la distribución de temperaturas.

4.3.10 Energía de deformación por unidad de longitud

La energía de deformación por unidad de longitud U_L^* se obtiene integrando la expresión de la densidad de energía en el área de la sección:

$$U_L^* = \int_A U_o^* dA = \int_A U_o^* b(y) dy \tag{4.28}$$

Sustituyendo la expresión (4.27) de la densidad de energía se obtiene:

$$U_L^* = \int \frac{M^2 y^2}{2EI^2} b dy - \int \varepsilon_0 \frac{My}{I} b dy \tag{4.29}$$

Las magnitudes E, I, M no dependen de la coordenada y, por lo que salen fuera de las integrales. En la primera integral se identifica el momento de inercia I de la sección, con lo que se obtiene:

$$U_L^* = \frac{M^2}{2EI} - \frac{M}{I} \int \varepsilon_0 y b dy \tag{4.30}$$

Expresión práctica particular para T lineal

Sustituyendo la expresión de la deformación unitaria térmica lineal en la coordenada y, dada por (4.9), se obtiene

$$U_L^* = \frac{M^2}{2EI} - \frac{M\alpha T_g}{I} \int y^2 b dy \tag{4.31}$$

La integral del segundo término define el momento de inercia, con lo que:

$$U_L^* = \frac{M^2}{2EI} - M\alpha T_g \tag{4.32}$$

Esta es la expresión de la energía acumulada por unidad de longitud de viga, en función del momento flector M en cada punto de la viga, y del campo lineal de temperaturas definido por T_g.

4.3.11 Energía de deformación

Integrando la energía por unidad de longitud a lo largo de toda la viga, se obtiene el valor de la energía elástica total acumulada:

$$U^* = \int_V U_o^* dv = \int_L \left[\int_A U_o^* dA \right] dx = \int_L U_L^* dx \tag{4.33}$$

$$U^* = \int_L \frac{\mu M^2}{2} dx - \int_L M \alpha T_g dx \qquad (4.34)$$

donde el coeficiente μ define la flexibilidad de la viga $\mu = 1/EI$.

La expresión de la energía así obtenida es general, estando sólo limitada a una distribución de temperatura lineal en el canto de la viga.

4.4 DIAGRAMAS DE ESFUERZOS

Los esfuerzos internos en una viga son normalmente variables a lo largo de ella, y esta variación se expresa algebraicamente mediante una función de la coordenada *x*, que define la posición de cada sección de la viga: *M(x)* o *Q(x)*. El diagrama de un esfuerzo cualquiera es sencillamente una representación gráfica de esta función.

Estos diagramas no son en general continuos, sino que pueden mostrar discontinuidades en los puntos de aplicación de las cargas. En el caso de manejarse funciones algebraicas, éstas tienen expresiones diferentes en los distintos tramos entre puntos de aplicación de cargas.

Los diagramas de esfuerzos se representan gráficamente sobre la propia viga, empleando el sistemas de ejes X,Y de la viga. Con este criterio, los diagramas de solicitaciones tienen un aspecto diferente según cual sea el sistema de ejes que adoptado para cada barra.

Para los diagramas de momentos flectores se suele emplear tradicionalmente otro sistema de representación, que consiste en llevar la ordenada del diagrama de momentos en cada sección, en la dirección de la cara donde estén las tracciones (figura 4.5). Este criterio, que se suele denominar ingenieril, tiene la ventaja de que el diagrama de flectores es único, con independencia de la orientación adoptada para los ejes de cada barra.

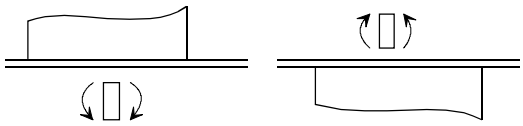


Figura 4.5

4.5 RELACIÓN ENTRE CARGA, ESFUERZO CORTANTE Y MOMENTO FLECTOR

Existen una serie de relaciones entre las cargas aplicadas, el esfuerzo cortante y el momento flector en una viga, que son muy útiles para dibujar los diagramas de solicitaciones.

Caso general

Las dos ecuaciones fundamentales de equilibrio de un elemento diferencial permiten establecer algunas relaciones importantes.

- La pendiente del diagrama de esfuerzo cortante es igual a la carga distribuida aplicada.

$$q = \frac{dQ}{dx} \tag{4.35}$$

Integrando esta expresión entre dos puntos *a* y *b* de la viga se obtiene la siguiente relación útil.

- La variación del esfuerzo cortante entre dos puntos de una viga es igual a la resultante, es decir la integral definida, de las cargas distribuidas aplicadas entre ambos puntos.

$$Q_b - Q_a = \int_a^b q dx \tag{4.36}$$

- La pendiente del diagrama de momento flector es igual al diagrama de cortante, con signo cambiado.

$$Q = -\frac{dM}{dx} \tag{4.37}$$

Integrando entre dos puntos *a* y *b* se obtiene la relación siguiente.

- La variación del momento flector entre dos puntos es igual al área del diagrama de esfuerzo cortante entre ambos puntos, cambiada de signo:

$$M_b - M_a = -\int_a^b Q dx \tag{4.38}$$

Estas relaciones son generales y valen para cualquier tipo de carga distribuida. Para ciertos tipos particulares de cargas pueden establecerse relaciones más sencillas, como casos particulares de ellas.

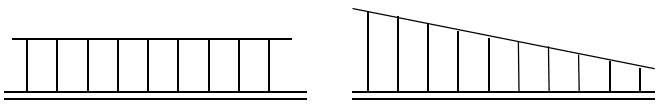
Segmento de viga sin carga aplicada

Aplicando las ecuaciones anteriores con q=0 se obtiene:

$$\frac{dQ}{dx} = 0 \qquad Q = Cte \tag{4.39}$$

$$\frac{dM}{dx} = -Q \qquad M = M_a - Qx \tag{4.40}$$

En un segmento sin carga el diagrama de cortantes es constante, y el de flectores es una línea recta de pendiente igual al valor del cortante, con signo cambiado.



Esfuerzo cortante Momento flector

Figura 4.6

Segmento bajo carga distribuida uniforme

En este caso q es constante, y se obtiene:

- Diagrama de esfuerzo cortante: bajo una carga uniforme el diagrama de cortante es una línea recta de pendiente *q*, como se muestra en la figura 4.7.

$$Q = Q_a + qx \tag{4.41}$$

- Diagrama de momento flector: bajo una carga uniforme, el diagrama del momento flector es una parábola cuya concavidad es –*q*, como muestra la figura 4.7.

$$\frac{dM}{dx} = -Q_a - qx \qquad M = M_a - Q_a x - qx^2 / 2 \tag{4.42}$$

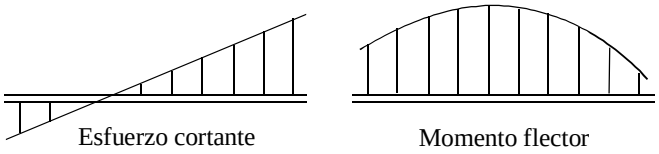


Figura 4.7

Segmento bajo una carga puntual

- Diagrama de cortantes: se produce una discontinuidad en el esfuerzo cortante de valor igual a la carga aplicada (figura 4.8).

$$Q_d = Q_i + P \tag{4.43}$$

- Diagrama de momentos flectores: es continuo, pero tiene un cambio en su pendiente, de valor igual a la fuerza aplicada, cambiada de signo (figura 4.8).

$$\left(\frac{dM}{dx}\right)_i = -Q_i \qquad \left(\frac{dM}{dx}\right)_d = -Q_d \tag{4.44}$$

$$\left(\frac{dM}{dx}\right)_d - \left(\frac{dM}{dx}\right)_i = -Q_d + Q_i = -P$$

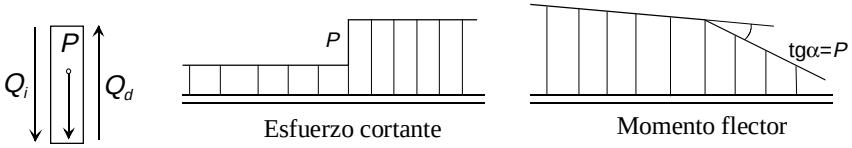


Figura 4.8

Segmento con un momento aplicado

- Diagrama de flectores: se produce una discontinuidad de valor igual al momento aplicado (M_P) cambiado de signo. La pendiente del diagrama de flectores es la misma a ambos lados de la discontinuidad (figura 4.9).

$$M_d - M_i = -M_P \tag{4.45}$$

- Diagrama de cortantes: es continuo, así como su derivada.

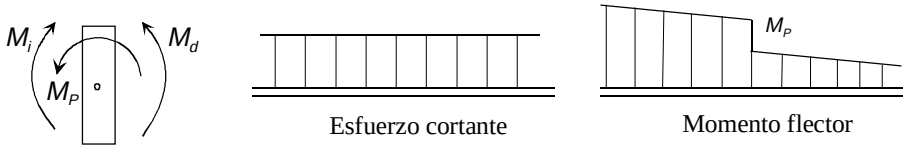


Figura 4.9

Valores máximos

Dado que el esfuerzo cortante es la derivada del momento flector, los momentos flectores máximo y mínimo ocurren en aquellos puntos donde el diagrama de cortantes tiene un valor nulo.

Si el cortante pasa de negativo a positivo, el momento flector tiene un máximo, y si pasa de positivo a negativo, el flector tiene un mínimo.

Viga sometida sólo a fuerzas concentradas

En este caso el diagrama de flectores es una línea quebrada, y el de cortantes está formado por una serie de segmentos horizontales entre los puntos de aplicación de las distintas fuerzas aplicadas, incluidas las reacciones. El máximo absoluto del momento flector está siempre en el punto de aplicación de alguna fuerza, o reacción, pues el cambio de signo del cortante, de negativo a positivo, se produce forzosamente en alguno de ellos.

4.6 TEOREMAS DE MOHR

Los dos Teoremas de Mohr son integrales primera y segunda de la ecuación de la elástica, por lo que son aplicables en el mismo contexto que ella. En todo caso su sencillez y facilidad de aplicación los hace de utilización universal.

Primer Teorema de Mohr

> *El ángulo que forman las tangentes en dos puntos de la deformada elástica es igual al área del diagrama de M/EI comprendida entre ambos puntos.*

Deducción

La ecuación de la elástica se puede poner como:

$$\frac{d\theta}{dx} = \frac{M}{EI} \quad \text{siendo} \quad \theta = \frac{dv}{dx}$$

Integrando entre dos puntos A y B se obtiene:

$$\theta_B - \theta_A = \int_A^B \frac{M}{EI}\,dx \tag{4.46}$$

que es la expresión matemática del primer teorema. Este teorema es aplicable entre dos puntos entre los cuales el giro θ de la viga es continuo, es decir que entre ellos no puede haber articulaciones, ya que éstas introducen una discontinuidad en el giro.

Segundo Teorema de Mohr

La distancia desde un punto B de la deformada elástica, hasta la tangente a dicha deformada en otro punto A, es igual al momento estático respecto a B, del diagrama de M/EI comprendido entre A y B.

Deducción

A cada elemento diferencial *dx* le corresponde un giro $d\theta$, cuya contribución a la flecha es $d\lambda = \bar{x}d\theta$ (figura 4.10), siendo $\bar{x}$ una coordenada medida desde B.

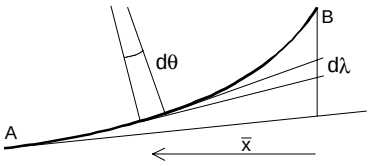


Figura 4.10

Sustituyendo $d\theta$ por su valor se obtiene

$$d\lambda = \bar{x}\frac{M}{EI}dx \tag{4.47}$$

La distancia desde B a la tangente en A se obtiene integrando entre los puntos A y B:

$$\delta_{B/A} = \int_A^B d\lambda = \int_A^B \bar{x}\frac{M}{EI}dx \tag{4.48}$$

que es la expresión matemática del segundo teorema. Este teorema es aplicable entre dos puntos entre los cuales la flecha *v* de la viga es continua, es decir que entre ellos no puede haber deslizaderas, ya que éstas introducen una discontinuidad en la flecha.

La figura 4.11 resume los dos teoremas.

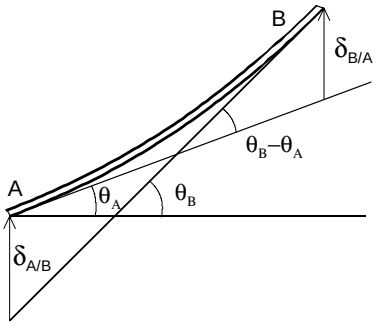


Figura 4.11

4.7 CÁLCULO DE ESFUERZOS EN VIGAS HIPERESTÁTICAS

Se describen a continuación varios métodos prácticos para el cálculo de esfuerzos en vigas hiperestáticas. Todos ellos se basan en la aplicación combinada del principio de superposición y de las condiciones de compatibilidad de deformaciones.

4.7.1 Método de integración de la deformada elástica

La ecuación diferencial de la elástica proporciona un método para el cálculo de los esfuerzos en una viga hiperestática. Los pasos a seguir son los siguientes:

- Determinar el grado de hiperestaticidad *h* de la viga y seleccionar un conjunto de *h* incógnitas hiperestáticas X_j. Sustituirlas por fuerzas y momentos de valor desconocido. Se obtiene así una viga isostática cargada con las fuerzas exteriores y las incógnitas hiperestáticas.
- Determinar el diagrama de momentos flectores de la viga, que depende de las fuerzas exteriores aplicadas y de las incógnitas hiperestáticas $M(x, X_j)$.
- Integrar la ecuación diferencial de la elástica, y obtener la ecuación de la deformada de la viga. Esta integración se hace por independiente para los distintos segmentos de la viga donde el diagrama de flectores tenga una expresión diferente, o entre los que haya una discontinuidad (apoyo, articulación). En ella aparecen dos constantes de integración por cada segmento, además de las incógnitas hiperestáticas desconocidas.
- Aplicar las condiciones de contorno a la expresión de la deformada de la viga. Estas son de dos tipos:
  - ◊ Condiciones de contorno debidas a las condiciones de apoyo de la viga.
  - ◊ Condiciones debidas a la igualdad de flechas y giros entre los distintos segmentos en que se ha dividido la viga para la integración. En general hay dos de ellas para cada segmento.
  - ◊ Otras condiciones asociadas a las incógnitas hiperestáticas, que corresponden a condiciones de flecha o giro nulos, de acuerdo con la naturaleza de la incógnita correspondiente.
- Sustituyendo todas estas condiciones en la ecuación de la deformada de la viga se obtiene un sistema de ecuaciones cuya solución son las constantes de integración y las incógnitas hiperestáticas buscadas.

4.7.2 Empleo de los teoremas de Mohr

Los teoremas de Mohr proporcionan un método muy sencillo y cómodo para la resolución de vigas hiperestáticas. El proceso a seguir es:

- Determinar el grado de hiperestaticidad *h* de la viga y seleccionar un conjunto de *h* incógnitas hiperestáticas X_j. Sustituirlas por fuerzas y momentos de valor desconocido. Se obtiene así una viga isostática cargada con las fuerzas exteriores y las incógnitas hiperestáticas.
- Determinar el diagrama de momentos flectores de la viga, que depende de las fuerzas exteriores aplicadas y de las incógnitas hiperestáticas $M(x, X_j)$.
- Aplicar los teoremas de Mohr tantas veces como incógnitas hiperestáticas haya, a fin de obtener otras tantas ecuaciones. Estas ecuaciones se obtienen a base de imponer las condiciones de contorno de flecha o giro nulos asociadas a las incógnitas hiperestáticas elegidas. En estas ecuaciones intervienen el área o el momento del diagrama de

momentos previamente hallado, que a su vez depende de las incógnitas hiperestáticas $M(x, X_j)$. Resolviendo estas ecuaciones se obtienen las h incógnitas X_j, que permiten conocer todos los esfuerzos internos en la viga.

Este método es de más fácil empleo que el de integración de la ecuación de la elástica, ya que no requiere efectuar ninguna integral, pues las dos integraciones ya están hechas por los teoremas de Mohr.

4.7.3 Fórmula de los tres momentos

Para el análisis de vigas continuas con muchos vanos, los teoremas de Mohr pueden ser engorrosos de aplicar, por la gran cantidad de condiciones de compatibilidad que hay que imponer. En estos casos la fórmula de los tres momentos es una alternativa muy práctica, que se puede aplicar a vigas continuas de dos o más vanos, que no tengan ninguna articulación intermedia, y cuyos extremos pueden estar apoyados o empotrados.

La fórmula de los tres momentos fue presentada por los ingenieros franceses Clapeyron (1857) y Bertot (1855). La idea básica consiste en tomar como incógnitas hiperestáticas los momentos en los apoyos de la viga, y efectuar un análisis de dos vanos consecutivos cualesquiera de ella, con el fin de obtener una relación entre los tres momentos en los tres apoyos consecutivos.

Se consideran por lo tanto dos vanos consecutivos 1 y 2, que unen tres apoyos A, B y C. Al haberse empleado los momentos en A, B y C como incógnitas hiperestáticas, los dos vanos han quedado reducidos a dos vigas biapoyadas (figura 4.12).

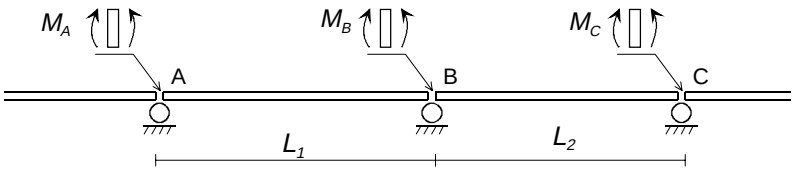


Figura 4.12

Empleando el principio de superposición, el análisis consta de los casos siguientes:

- *Caso 0*

En él actúan sólo las cargas exteriores (figura 4.13). Los giros del apoyo B en el vano 1 y en el vano 2, se obtienen aplicando el segundo teorema de Mohr entre B y A, y entre B y C:

$$\delta_{A/B} = L_1\alpha_1 = \frac{A_1 x_1}{E_1 I_1} \qquad \delta_{C/B} = -L_2\alpha_2 = \frac{A_2 x_2}{E_2 I_2} \tag{4.49}$$

donde se han empleado las siguientes variables: A_1 es el área del diagrama de flectores del vano 1; A_2 es la misma área para el vano 2; x_1 es la distancia desde el centro de gravedad del diagrama de flectores del vano 1 al apoyo A; y x_2 es la misma distancia para el vano 2 respecto a B.

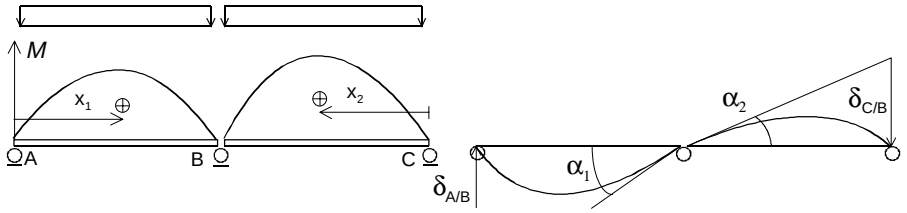


Figura 4.13

- *Caso 1*

Se aplica un momento de valor M_A en el apoyo A, y se calculan los dos giros en el apoyo B, por la izquierda y por la derecha (figura 4.14).

$$\beta_1 = \frac{M_A L_1}{6E_1 I_1} \qquad \beta_2 = 0 \tag{4.50}$$

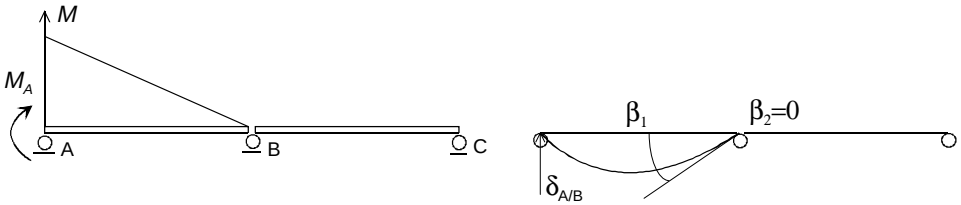


Figura 4.14

- *Caso 2*

Se aplica un momento de valor M_B en B y se calculan los dos giros en ese nudo (figura 4.15).

$$\gamma_1 = \frac{M_B L_1}{3E_1 I_1} \qquad \gamma_2 = -\frac{M_B L_2}{3E_2 I_2} \tag{4.51}$$

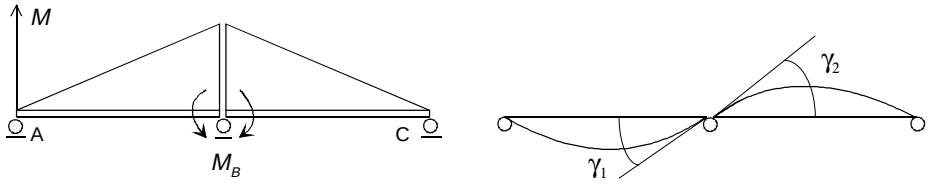


Figura 4.15

- *Caso 3*

Se aplica un momento M_C en C, y se calculan los giros en B (figura 4.16).

$$\theta_1 = 0 \qquad \theta_2 = -\frac{M_C L_2}{6E_2 I_2} \tag{4.52}$$

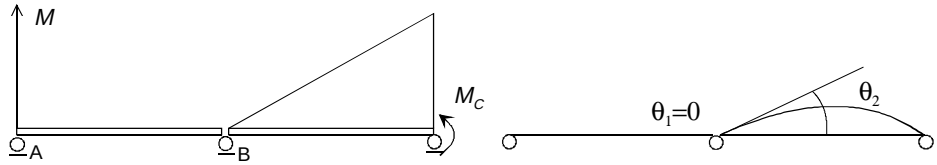


Figura 4.16

La condición de compatibilidad del giro de B es:

$$\alpha_1 + \beta_1 + \gamma_1 + \theta_1 = \alpha_2 + \beta_2 + \gamma_2 + \theta_2 \tag{4.53}$$

Sustituyendo y reagrupando se obtiene

$$\frac{M_A L_1}{E_1 I_1} + 2M_B\left(\frac{L_1}{E_1 I_1} + \frac{L_2}{E_2 I_2}\right) + \frac{M_C L_2}{E_2 I_2} = -6\left(\frac{m_i}{E_1 I_1} + \frac{m_d}{E_2 I_2}\right) \tag{4.54}$$

Esta ecuación es la denominada fórmula de los tres momentos, que no es otra cosa más que la condición de compatibilidad de giros en un apoyo cualquiera B, pero expresada en función de los momentos en los dos vanos que confluyen en dicho apoyo.

Las constantes:

$$m_i = \frac{A_1 x_1}{L_1} \qquad\qquad m_d = \frac{A_2 x_2}{L_2} \tag{4.55}$$

son los momentos estáticos del diagrama de momentos flectores del caso 0 (isostático) de los vanos 1 y 2, respecto a los extremos izquierdo y derecho respectivamente, divididos por su luz. Sus valores están tabulados para la mayor parte de las cargas utilizadas en la práctica. El Anejo A contiene los valores más habituales.

En el caso de material uniforme en ambos vanos la expresión anterior se simplifica:

$$M_A L_1 + 2M_B(L_1 + L_2) + M_C L_2 = -6(m_i + m_d) \tag{4.56}$$

Para calcular una viga de *n* vanos, se aplica la ecuación anterior a cada pareja de vanos sucesivamente, es decir a (*n*-1) parejas de vanos, y se obtienen (*n*-1) ecuaciones con (*n*-1) incógnitas, que son los momentos a los *n*-1 apoyos interiores (de los *n*+1 apoyos que tiene la viga).

Si un extremo de la viga está empotrado se aplica la fórmula anterior considerando que hay un vano ficticio, de luz cero $L_1 = 0$ y sin carga $m_{i1} = 0$. El momento que se obtenga en B, es el correspondiente al empotramiento.

4.7.4 Método general de flexibilidad

El método general de flexibilidad, ya explicado para celosías, se puede aplicar a las vigas como se describe a continuación.

- Se determina el grado de hiperestaticidad *h* de la viga.
- Se identifica un conjunto de *h* incógnitas hiperestáticas X_j, que pueden ser reacciones exteriores en los apoyos (fuerzas o momentos), o esfuerzos internos en la viga

(momentos flectores o esfuerzos cortantes). Se eliminan de la viga, para obtener así una viga isostática.

- Se aplica el principio de superposición y se descompone el comportamiento real de la viga en suma de 1+*h* casos. En todos ellos se han eliminado las incógnitas hiperestáticas, por lo que pueden calcularse con facilidad, al ser isostáticos.
  - ◊ Caso 0, en el que actúan solamente las fuerzas exteriores. Los momentos flectores que aparecen sobre la viga se denominan M^0.
  - ◊ Casos 1 a *h*, o casos de hiperestática unitaria o simplemente casos unitarios, en cada uno de los cuales se aplica un valor unitario de la incógnita hiperestática X_j y cero en todas las demás. En la viga aparecen unos momentos denominados M^j, $j = 1,h$.
- El momento flector real en la viga es la combinación lineal de los 1+*h* casos básicos.

$$M = M^O + \sum_j X_j M^j \tag{4.57}$$

- Se aplican las *h* condiciones de compatibilidad correspondientes a las *h* incógnitas hiperestáticas, empleando el segundo teorema de Engesser:

$$\frac{\partial U^*}{\partial X_j} = 0 \qquad j = 1,h \tag{4.58}$$

Sustituyendo el valor de la energía complementaria dado por (4.34) se tiene:

$$\int 2M \frac{\mu}{2} \frac{\partial M}{\partial X_j} dx - \int \alpha T_g \frac{\partial M}{\partial X_j} dx = 0 \qquad j = 1,h \tag{4.59}$$

Derivando en la expresión (4.57) del momento flector se obtiene:

$$\frac{\partial M}{\partial X_j} = M^j \tag{4.60}$$

con lo que las ecuaciones de compatibilidad quedan:

$$\int M \mu M^j dx - \int \alpha T_g M^j dx = 0 \qquad j = 1,h \tag{4.61}$$

Se llega de esta forma a un sistema de *h* ecuaciones cuyas incógnitas son las incógnitas hiperestáticas, que se hallan incluidas en la expresión de los momentos *M*. Para ponerlas de manifiesto se sustituye *M* por su valor según (4.57)

$$\int \left(M^0 + \sum_k X_k M^k \right) \mu M^j dx - \int \alpha T_g M^j dx = 0 \qquad j = 1,h \tag{4.62}$$

Cambiando de orden los sumatorios este sistema de ecuaciones se puede poner como:

$$\sum_k X_k \int \mu M^j M^k dx = -\int M^0 \mu M^j dx + \int \alpha T_g M^j dx \qquad j = 1,h \tag{4.63}$$

cuya solución son las incógnitas hiperestáticas X_j.

El sistema se ecuaciones se puede poner en forma matricial como:

$$\mathbf{fX} = \mathbf{D} \tag{4.64}$$

donde **f** es la matriz de flexibilidad de la viga. Es una matriz simétrica, de tamaño *h*, y siempre tiene inversa si las incógnitas hiperestáticas son independientes. Sus coeficientes valen:

$$f_{jk} = \int \mu M^j M^k dx \tag{4.65}$$

El término independiente **D** tiene dos términos: el primero es debido a las fuerzas exteriores que actúan sobre la viga y el segundo es debido a las variaciones de temperaturas existentes en ella.

$$D_j = -\int M^0 \mu M^j dx + \int \alpha T_g M^j dx \tag{4.66}$$

El significado físico de estos términos es el ya indicado en el apartado 3.10.

4.7.5 Método de las deformaciones compatibles

Este método es equivalente al método general de flexibilidad ya descrito, pero efectuando un planteamiento en deformaciones en lugar de en esfuerzos. En efecto, en lugar de efectuar un cálculo de los esfuerzos y luego imponer las condiciones de compatibilidad como derivadas de la energía respecto a las incógnitas hiperestáticas, se presupone ahora que se pueden calcular con facilidad las deformaciones de una viga isostática, empleando algún método simple, y que las condiciones de compatibilidad se pueden imponer directamente a dichas deformaciones. Resulta por lo tanto muy práctico cuando se dispone de un método para calcular dichos valores de la deformación de una viga isostática (teoremas de Mohr, valores tabulados, …). Los pasos a seguir para su aplicación son:

- Determinar el grado de hiperestaticidad *h* de la viga e identificar un conjunto de *h* incógnitas hiperestáticas X_j. Eliminarlas, para obtener así una viga isostática.
- Aplicar el principio de superposición y descomponer el comportamiento real de la viga en suma de *1+h* casos, todos ellos isotáticos.
    - ◊ Caso 0, en el que actúan solamente las fuerzas exteriores. Se calculan las deformaciones en los puntos de aplicación de la incógnitas hiperestáticas, a las que se denomina Δ_j^0. Si la incógnita hiperestática es un esfuerzo interior (flector o cortante) dicha deformación es la deformación relativa entre las dos caras donde se aplica la fuerza interior.
    - ◊ Casos 1 a *h*, en cada uno de los cuales aplica un valor unitario de la incógnita hiperestática X_j y cero en todas las demás. Las deformaciones que aparecen en los puntos de aplicación de las incógnitas hiperestáticas se denominan:

$$\Delta_j^k = \delta_j^k X_k \tag{4.67}$$

Siendo δ_j^k la deformación en la dirección de la hiperestática *j* al aplicarse un valor unidad a la hiperestática *k*. Nuevamente, si la incógnita hiperestática es un

esfuerzo interior (flector o cortante) dicha deformación es la deformación relativa entre las dos caras donde se aplica la fuerza interior.

- Aplicar las condiciones de compatibilidad geométrica asociadas a las incógnitas hiperestáticas. Estas deformaciones son la suma de las obtenidas en los *h*+1 casos isostáticos, es decir:

$$\Delta_j^0 + \sum_k \delta_j^k X_k = 0 \quad j = 1,h \tag{4.68}$$

Se obtiene así un sistema de *h* ecuaciones con *h* incógnitas X_k, donde la matriz del sistema contiene las deformaciones δ_j^k y el término independiente contiene las deformaciones en la fase 0 según las incógnitas hiperestáticas, con signo cambiado.

Comparando la ecuación (4.68) con las obtenidas por el método general de flexibilidad ((4.63) a (4.66)) se observa que los coeficientes f_{jk} (que son función de los momentos flectores en los casos 1 a *h*) son las deformaciones δ_j^k . Asimismo se observa que el vector **D** coincide con el vector -$\mathbf{\Delta}^0$, es decir que los coeficientes D_j son las deformaciones Δ_j^0 del caso 0, cambiadas de signo. Por lo tanto este método es en realidad el método general de flexibilidad, pero empleando valores tabulados, o precalculados, de los coeficientes de flexibilidad *f*. Este análisis pone de manifiesto, además, el significado físico de los coeficientes de flexibilidad para el caso de las vigas.

4.7.6 Método de la viga conjugada

La idea fundamental de este método es transformar el problema de cálculo de deformaciones, en uno de cálculo de esfuerzos (flectores y cortantes), que normalmente es más fácil de manejar, para una viga diferente de la viga real. Para desarrollarlo, se consideran dos relaciones fundamentales que se cumplen en toda viga.

◊ Relación entre el giro y el momento flector. Se parte de la ecuación de la elástica que es:

$$\frac{d^2v}{dx^2} = \frac{d\theta}{dx} = \frac{M}{EI} \tag{4.69}$$

Integrando se obtiene:

$$\theta = \theta_0 + \int \frac{M}{EI} dx \tag{4.70}$$

◊ Relación entre la flecha y el momento flector. Integrando nuevamente la ecuación (4.70) se obtiene

$$v = v_0 + \theta_0 x + \int \left(\int \frac{M}{EI} dx \right) dx \tag{4.71}$$

Se define una nueva una viga, llamada *viga conjugada* de la viga real, que tiene la misma luz que ella, y una carga aplicada, denominada *carga conjugada* q^*, cuyo valor es igual al diagrama de *M/EI* de la viga real:

$$q^* = \frac{M}{EI} \tag{4.72}$$

Esta viga conjugada tiene un momento flector M^* y un esfuerzo cortante Q^* que cumplen asimismo las relaciones fundamentales:

◊ Relación entre el cortante conjugado y la carga aplicada conjugada:

$$\frac{dQ^*}{dx} = q^* \tag{4.73}$$

Integrando y sustituyendo la carga conjugada por su valor se obtiene:

$$Q^* = Q_0^* + \int \frac{M}{EI}\,dx \tag{4.74}$$

◊ Relación entre momento flector conjugado y esfuerzo cortante conjugado:

$$\frac{dM^*}{dx} = -Q^* \tag{4.75}$$

Integrando y sustituyendo el cortante conjugado por su valor (4.74) se obtiene:

$$M^* = M_0^* - Q_0^* x - \int \left(\int \frac{M}{EI}\,dx \right) dx \tag{4.76}$$

Comparando las cuatro ecuaciones anteriores: (4.70) con (4.74) y (4.71) con (4.76), se deduce que, con unas condiciones de contorno adecuadas, se pueden establecer las siguientes relaciones entre las magnitudes de la viga real y de la viga conjugada:

- El esfuerzo cortante en la viga conjugada Q^* es igual al giro θ de la viga real.
- El momento flector M^* de la viga conjugada es igual a la flecha v de la viga real, cambiada de signo.

Estas dos relaciones permiten determinar la flecha y el giro de la viga real, sin más que hallar el momento flector y el esfuerzo cortante de la viga conjugada.

A fin de que las relaciones anteriores sean válidas, las condiciones de apoyo de la viga conjugada deben ser las adecuadas para que los flectores y cortantes conjugados en estos apoyos estén de acuerdo con las flechas y giros en los apoyos de la viga real. Las condiciones de apoyo conjugadas se muestran en la tabla 4.1 para los tipos de apoyos más comunes.

Al transformar una viga en su conjugada, pueden ocurrir dos casos, en función de como sea la viga original.

- *Viga original isostática.* Su viga conjugada es también isostática. En este caso lo más sencillo es calcular los esfuerzos en la viga real directamente, aplicando las ecuaciones de la estática. El método de la viga conjugada sirve en este caso para calcular las deformaciones en la viga real, a base de hallar los flectores y cortantes conjugados.
- *Viga original hiperestática.* En este caso la viga conjugada es inestable, y tiene tantos grados de libertad como grado de hiperestaticidad tenga la viga real. Además ocurre que la viga conjugada está en equilibrio inestable bajo la acción de la carga distribuida q^*

que actúa sobre ella. Precisamente las condiciones de equilibrio estático de la viga conjugada bajo la carga q^* pueden utilizarse como ecuaciones extra para calcular alguna incógnita hiperestática de la viga real.

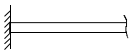
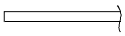
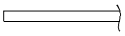
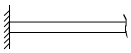
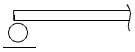
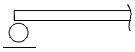
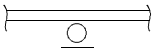
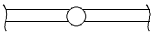
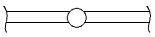
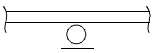
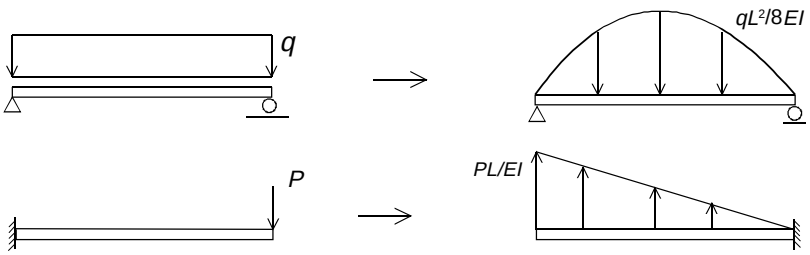
Viga real	$v \approx M^*$	$\theta \approx Q^*$	Viga conjugada
	0	0	
	cualquier valor	cualquier valor	
	0	cualquier valor	
	0	cualquier valor	
	cualquier valor	Discontinuo	

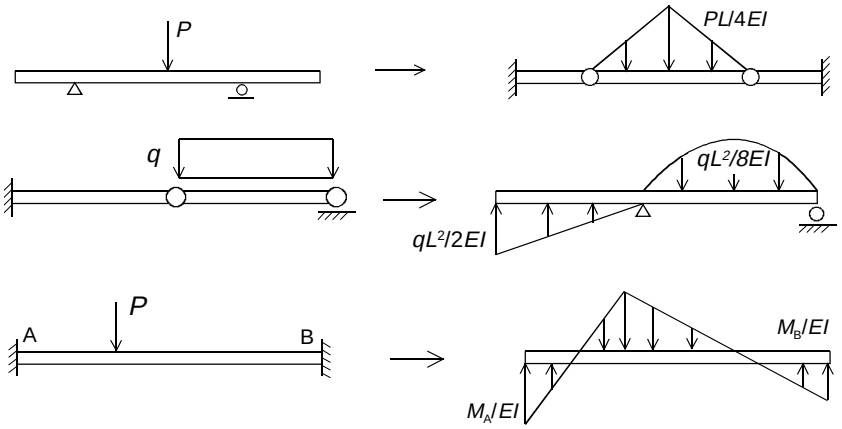
Tabla 4.1

El proceso a seguir para calcular una viga hiperestática empleando la viga conjugada es:

- ◊ Determinar el grado de hiperestaticidad h de la viga y seleccionar un conjunto de h incógnitas hiperestáticas X_j. Sustituirlas por fuerzas y momentos de valor desconocido. Se obtiene así una viga isostática cargada con las fuerzas exteriores y las incógnitas hiperestáticas.
- ◊ Determinar el diagrama de momentos flectores de la viga, que depende de las fuerzas exteriores aplicadas y de las incógnitas hiperestáticas: $M(x, X_j)$.
- ◊ Conjugar la viga y aplicar sobre ella la carga conjugada, igual al diagrama de momentos dividido por EI, y que por lo tanto depende de las incógnitas hiperestáticas.
- ◊ Aplicar las condiciones de equilibrio estático de la viga conjugada. Se obtienen así tantas ecuaciones como grados de libertad tiene la viga conjugada, es decir como grado de hiperestaticidad tiene la viga real. Su solución proporciona los valores de las incógnitas hiperestáticas.

Ejemplos





4.8 CÁLCULO DE DEFORMACIONES EN VIGAS

El cálculo de deformaciones en vigas requiere el cálculo previo de los diagramas de momentos flectores, por cualquiera de los métodos ya descritos. De hecho algunos de los métodos de cálculo de esfuerzos en vigas hiperestáticas proporcionan a la vez las deformaciones. Por ejemplo, cuando se emplea el método de la integración de la ecuación de la elástica para el cálculo de los esfuerzos en la viga, se obtiene además la curva deformada elástica de la viga, por lo que no es necesario ningún cálculo extra.

Otros métodos, como el de la viga conjugada están específicamente orientados al cálculo de deformaciones en la viga, por lo que su aplicación es inmediata. Los teoremas de Mohr pueden emplearse asimismo para calcular cualquier deformación deseada, una vez conocidos los diagramas de momentos.

Método general de flexibilidad

Cuando se emplea el método de flexibilidad en su formulación general, el cálculo de una deformación requiere un proceso posterior específico.

Sea una viga, isostática o hiperestática, en la que se han calculado los momentos flectores M. Se desea calcular la deformación Δ_r en un punto y una dirección dados; se trata por lo tanto de una magnitud escalar, que puede ser un desplazamiento vertical o un giro. Para determinarla se emplea el método de la fuerza virtual unitaria.

- Se añade a la estructura real ya calculada, un caso virtual (caso V), en el que actúa únicamente una fuerza (o momento) virtual V en la dirección del desplazamiento (o giro) buscados, como se indica en la figura 4.17. El caso suma se denomina caso RV.
- Se resuelve el caso virtual para un valor unitario de la fuerza (o momento) virtual V=1, y se calculan los momentos que aparecen sobre la viga, que se denominan M^V. Su cálculo requiere la resolución de una viga igual a la original.

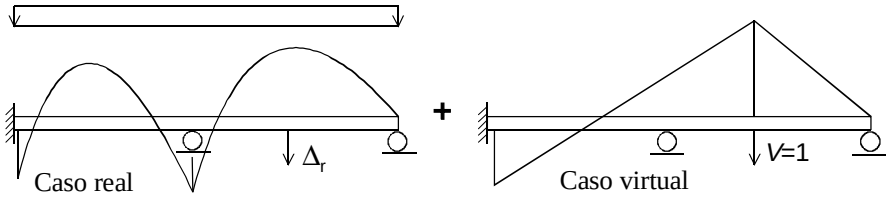


Figura 4.17

- Bajo la acción conjunta de las cargas reales y la fuerza (o momento) virtual *V*, el momento flector en la viga vale:

$$M^{RV} = M + M^{V}V \tag{4.77}$$

- La energía complementaria que se acumula es:

$$U^{*RV} = \int \frac{M^{RV^2}\mu}{2} dx - \int M^{RV}\alpha T_g dx \tag{4.78}$$

La deformación buscada se obtiene empleando el teorema de Crotti-Engesser, considerando que la fuerza virtual no existe:

$$\Delta_r = \left(\frac{\partial U^{*RV}}{\partial V} \right)_{V=0} \tag{4.79}$$

$$\Delta_r = \left(\int \frac{2M^{RV}\mu}{2} \frac{\partial M^{RV}}{\partial V} dx - \int \alpha T_g \frac{\partial M^{RV}}{\partial V} dx \right)_{V=0} \tag{4.80}$$

pero de acuerdo con el valor de M^{RV}, la derivada es:

$$\frac{\partial M^{RV}}{\partial V} = M^{V} \tag{4.81}$$

con lo que se obtiene:

$$\Delta_r = \int M\mu M^{V} dx - \int \alpha T_g M^{V} dx \tag{4.82}$$

Esta expresión puede aplicarse directamente para hallar la deformación buscada. Su uso requiere hallar los esfuerzos en el caso virtual unitario, cuyo cálculo implica resolver una vez más la viga cargada con una sola fuerza *V*=1. Si la viga es isostática este cálculo extra no plantea ninguna dificultad, pues el caso V es también isotático.

Vigas hiperestáticas.

La aplicación de la expresión anterior para el cálculo de deformaciones resulta compleja para vigas hiperestáticas, pues requiere calcular los esfuerzos en el caso virtual unitario, que es a su vez hiperestático. Por ello resulta de interés desarrollar más la ecuación (4.82), con objeto de obtener expresiones de utilización más simple. Para ello se efectúa el cálculo de los esfuerzos en el caso virtual unitario, empleando el método general de análisis descrito en 4.7.4.

Al ser el caso virtual unitario hiperestático de grado *h*, se identifican en él *h* incógnitas hiperestáticas, que pueden ser las mismas que se utilizaron para calcular los esfuerzos en la viga o no. Se descompone el caso virtual unitario en 1+*h* casos:

◊ Caso 0V (o caso isostático virtual), en el que actúan sólo las fuerzas exteriores, que ahora es solamente la fuerza (o momento) virtual unitaria *V*=1 (figura 4.18). Los esfuerzos en este caso se denominan M^{0V}.

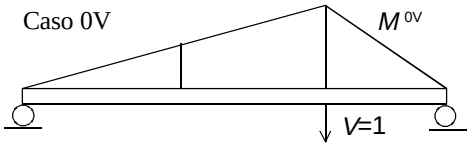


Figura 4.18

◊ Casos 1 a *h*, en los que se aplica un valor unitario de la incógnita hiperestática X_j y cero en todas las demás: estos casos son exactamente iguales a los que se emplearon para resolver la viga (figura 4.19) y los momentos en ellos son M^j.

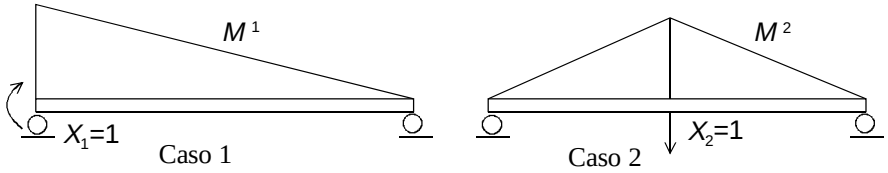


Figura 4.19

Los esfuerzos en el caso V son:

$$M^V = M^{0V} + \sum_{j=1,h} X_j M^j \tag{4.83}$$

Sustituyendo este valor en la expresión (4.82) de la deformación se obtiene

$$\Delta_r = \int M\mu \left(M^{0V} + \sum_j X_j M^j \right) dx - \int \alpha T_g \left(M^{0V} + \sum_j X_j M^j \right) dx \tag{4.84}$$

y reordenando los sumatorios:

$$\Delta_r = \int M\mu M^{0V} dx - \int \alpha T_g M^{0V} dx + \sum_j X_j \left(\int M\mu M^j dx - \int \alpha T_g M^j dx \right) \tag{4.85}$$

Pero la expresión entre paréntesis del tercer sumando es siempre nula pues se trata de la condición de compatibilidad para la incógnita hiperestática *j* (ecuación (4.61)). La expresión final de la deformación es:

$$\Delta_r = \int M\mu M^{0V} dx - \int \alpha T_g M^{0V} dx \tag{4.86}$$

Esta ecuación permite obtener la deformación en un punto y dirección cualquiera de una viga hiperestática, en la que se conocen los momentos flectores *M*. No se requiere la resolución del caso con la fuerza virtual unitaria (que es hiperestático), sino solamente la de un caso isostático cargado con dicha fuerza *V=1*, lo cual simplifica mucho los cálculos.

Nótese la similitud entre esta expresión y la inicial, que se diferencian únicamente en el uso de los esfuerzos M^{0V} en lugar de los M^{V}.

4.9 FLEXIÓN DE VIGAS CON ENERGÍA DE ESFUERZO CORTANTE

La teoría clásica de flexión de vigas se basa en la hipótesis de Navier de que las secciones rectas permanecen rectas y perpendiculares a la fibra neutra en el estado deformado. Ello conlleva que la deformación unitaria de cortadura en la sección es nula, y por lo tanto también lo son la tensión cortante y la energía asociada a ellas.

El no considerar la deformación debida al esfuerzo cortante (o la energía a él asociada) es una limitación para el empleo de la teoría clásica, que es válida únicamente para piezas prismáticas cuya área transversal es mucho menor que su longitud.

La teoría de flexión de vigas introducida por Timoshenko en 1951 trata de dar una solución a este problema, y para ello emplea una hipótesis diferente a la de la teoría clásica, con lo que consigue incluir en el análisis la deformación unitaria de cortante y la energía asociada a ella. Se obtiene además una teoría cuyo campo de aplicación es más amplio que la teoría clásica, en particular para vigas de menor luz, en las que la deformación originada por el esfuerzo cortante no es despreciable.

La hipótesis básica sobre la deformación en la teoría de flexión de vigas de Timoshenko es que las secciones rectas y perpendiculares a la fibra neutra en el estado sin deformar se mantienen rectas en el estado deformado, aunque *no perpendiculares* a la fibra neutra.

Como consecuencia de esta hipótesis se genera una distorsión de cortadura y se acumula energía debida al esfuerzo cortante. Se suponen, como es habitual, pequeñas deformaciones y un material elástico lineal.

4.9.1 Campo de desplazamientos

Si se denomina *v*(x) a la deformación vertical del centro de gravedad G de la sección, las deformaciones de un punto P situado a una distancia *y* de G son:

$$u_P = -y\tan\theta \approx -y\theta \qquad\qquad v_P = v \qquad\qquad (4.87)$$

donde θ es el ángulo girado por la sección, que es diferente a la tangente φ a la curva deformada, como se muestra en la figura 4.20.

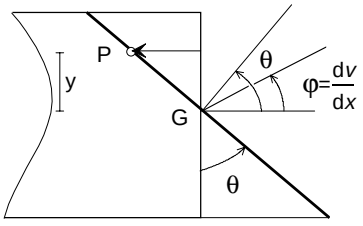


Figura 4.20

4.9.2 Deformaciones unitarias

Las deformaciones unitarias en el punto P son:

$$\varepsilon_x = \frac{\partial u_P}{\partial x} = -\frac{d\theta}{dx} y \tag{4.88}$$

$$\varepsilon_y = \frac{\partial v_P}{\partial y} = 0 \tag{4.89}$$

$$\gamma_{xy} = \frac{\partial u_P}{\partial y} + \frac{\partial v_P}{\partial x} = -\theta + \frac{dv}{dx} \tag{4.90}$$

El material está en un estado plano de deformación, sometido a las siguientes deformaciones:

- Deformación unitaria axial ε_x, que en adelante se llamará simplemente ε:

$$\varepsilon = -\frac{d\theta}{dx} y \tag{4.91}$$

  La hipótesis de deformación origina que la variación de ε en la sección sea lineal.

- Deformación de cortante γ, que es igual a la diferencia entre el giro de la sección θ y la pendiente a la deformada elástica φ:

$$\gamma = -\theta + \frac{dv}{dx} = -\theta + \varphi \tag{4.92}$$

Se observa que la deformación de cortante es uniforme en toda la sección (no depende de *y*), cuando en realidad se sabe, del estudio exacto del esfuerzo cortante en una viga, que la distribución de deformaciones unitarias real es muy variable con *y*, de acuerdo con la ley:

$$\gamma^R = \frac{Q\overline{A}}{GIb} \tag{4.93}$$

siendo

Q el esfuerzo cortante,

$\overline{A}$ el momento estático de la sección entre el punto donde se calcula la deformación y el exterior de la sección,

I el momento de inercia de toda la sección,

b la anchura de la sección en el punto considerado.

Así pues la teoría de Timoshenko es también una aproximación a la distribución real de tensiones cortantes. Para resolver este problema se introduce un factor de corrección *k*, de tal forma que la distribución real de deformaciones γ^R, se sustituye por la distribución uniforme γ predicha por esta teoría, pero afectándola de dicho factor de corrección:

$$\gamma^R = \frac{\gamma}{k} \tag{4.94}$$

4.9.3 Estado de tensiones

Suponiendo un material elástico lineal las dos tensiones que aparecen en el material son:

$$\sigma = E(\varepsilon - \varepsilon_0) \qquad \tau = G\gamma \tag{4.95}$$

Sustituyendo la expresión de las deformaciones unitarias se obtiene la expresión de las tensiones en el punto P:

$$\sigma = E(-\frac{d\theta}{dx}y - \varepsilon_0) \qquad \tau = G\left(-\theta + \frac{dv}{dx}\right) \tag{4.96}$$

Al igual que con las deformaciones unitarias, se observa que la tensión cortante es uniforme, en contra de lo obtenido por el estudio exacto del esfuerzo cortante.

4.9.4 Momento flector

El valor del momento flector es ahora:

$$M \equiv -\int \sigma y dA = -\int \sigma b y dy = -\int E(\varepsilon - \varepsilon_0) b y dy$$

$$M = E\frac{d\theta}{dx}\int y^2 b dy + E\int \varepsilon_0 b y dy = E\frac{d\theta}{dx} I + E\int \varepsilon_0 b y dy \tag{4.97}$$

Con lo que queda

$$M = EI\frac{d\theta}{dx} + E\int \varepsilon_0 b y dy \tag{4.98}$$

Si las deformaciones iniciales tienen una distribución lineal queda

$$M = EI\frac{d\theta}{dx} + E\alpha T_m \int b y dy + E\alpha T_g \int y^2 b dy \tag{4.99}$$

La segunda integral es nula, con lo que la expresión final de M es:

$$M = EI\frac{d\theta}{dx} + EI\alpha T_g \tag{4.100}$$

Esta es la ecuación de la elástica en la teoría de flexión de vigas cuando se considera la deformación debida al esfuerzo cortante, y hay efectos térmicos. La curvatura de la deformada, en función de M es:

$$\frac{d\theta}{dx} = \frac{M}{EI} - \alpha T_g \tag{4.101}$$

4.9.5 Esfuerzo cortante

Se define como la resultante de las tensiones cortantes reales en la sección. Considerando el factor de corrección introducido para la deformación unitaria cortante, su valor es:

$$Q \equiv \int \tau^R dA = \int G\gamma^R dA = \frac{G\gamma A}{k} \tag{4.102}$$

Se define el área equivalente a cortadura A' de la sección:

$$A' = \frac{A}{k} \tag{4.103}$$

con lo que el valor del esfuerzo cortante es:

$$Q = \tau A' = \gamma G A' = \left(-\theta + \frac{dv}{dx} \right) G A' \tag{4.104}$$

4.9.6 Expresión de la tensión en función de las fuerzas

La tensión axial en un punto cualquiera es:

$$\sigma = E(-\frac{d\theta}{dx} y - \varepsilon_0) \tag{4.105}$$

Sustituyendo en ella los valores de la curvatura en función de *M*, para una distribución de temperaturas lineal, se obtiene:

$$\sigma = E(-\frac{M}{EI} + \alpha y T_g - \alpha y T_g) = -\frac{My}{I} \tag{4.106}$$

que es la misma expresión obtenida en la teoría clásica. Por su parte, la tensión cortante es uniforme en la sección y vale:

$$\tau = \frac{Q}{A'} \tag{4.107}$$

4.9.7 Energía

Densidad de energía

La expresión de la densidad de energía complementaria es:

$$U_o^* = \int_0^\sigma \varepsilon d\sigma + \int_0^\tau \gamma d\tau = \int_0^\sigma \left(\frac{\sigma}{E} + \varepsilon_0 \right) d\sigma + \int_0^\tau \frac{\tau}{G} d\tau = \frac{\sigma^2}{2E} + \varepsilon_0 \sigma + \frac{\tau^2}{2G} \tag{4.108}$$

Sustituyendo las expresiones (4.106) y (4.107) de las tensiones, en función de los esfuerzos internos, se obtiene:

$$U_0^* = \frac{M^2 y^2}{2EI^2} - \frac{\varepsilon_0 My}{I} + \frac{Q^2}{2GA'^2} \tag{4.109}$$

Esta expresión permite hallar la densidad de energía en un punto cualquiera de la viga, en función de los esfuerzos en ella. Los dos primeros términos corresponden a la densidad de energía asociada a la flexión y son iguales que los de la teoría clásica, mientras que el último corresponde a la densidad de energía asociada al esfuerzo cortante.

Energía de deformación por unidad de longitud

La energía por unidad de longitud U_L^* se obtiene integrando la expresión de la densidad de energía (4.109) en el área de la sección:

$$U_L^* = \int \frac{M^2 y^2}{2EI^2} bdy - \int \varepsilon_0 \frac{My}{I} bdy + \int \frac{Q^2}{2GA'^2} dA' \tag{4.110}$$

En esta expresión, las dos primeras integrales corresponden a la energía de flexión, y se han integrado al área real de la viga A, mientras que la tercera integral corresponde al esfuerzo cortante y se ha integrado al área equivalente a cortadura A'. En esta tercera integral se toma el cociente Q/A' como constante en la sección pues corresponde a la tensión cortante media, por lo que sale fuera de la integral. Además, las magnitudes E, I, M no dependen de la coordenada y, por lo que también salen fuera de las integrales. Con todo esto se obtiene:

$$U_L^* = \frac{M^2}{2EI} - \frac{M}{I} \int \varepsilon_0 y bdy + \frac{Q^2}{2GA'} \tag{4.111}$$

Expresión práctica particular para T lineal

Sustituyendo en (4.111) la expresión de la deformación unitaria térmica lineal en la coordenada y se obtiene:

$$U_L^* = \frac{M^2}{2EI} - \frac{M\alpha T_g}{I} \int y^2 bdy + \frac{Q^2}{2GA'} \tag{4.112}$$

La integral del segundo término define el momento de inercia, con lo que queda:

$$U_L^* = \frac{M^2}{2EI} - M\alpha T_g + \frac{Q^2}{2GA'} \tag{4.113}$$

Esta es la expresión de la energía acumulada por unidad de longitud de viga, en función del momento flector M, del campo lineal de temperaturas definido por T_g y del esfuerzo cortante Q.

Energía de deformación

La energía total acumulada en la viga se obtiene integrando la energía por unidad de longitud, a lo largo de toda su longitud:

$$U^* = \int_L U_L^* dx = \int_L \frac{\mu M^2}{2} dx - \int_L M\alpha T_g dx + \int_L \frac{\eta Q^2}{2} dx \tag{4.114}$$

Esta expresión de la energía es general, estando sólo limitada a una distribución de temperatura lineal en el canto de la viga. Es la misma expresión (4.34) obtenida en la teoría clásica de flexión de vigas, añadiendo un nuevo término debido al esfuerzo cortante. Este nuevo término tiene una expresión similar a los restantes términos de la energía, empleando la flexibilidad a cortante η de la sección, definida como:

$$\eta = \frac{1}{GA'} = \frac{k}{GA} \tag{4.115}$$

Factor de corrección de cortante k

La expresión exacta de la energía debida al cortante, empleando la distribución de tensiones reales, es:

$$U^* = \frac{1}{2}\int_L \tau^R \gamma^R dV = \frac{1}{2}\int_L \frac{Q\overline{A}}{IbG} G \frac{Q\overline{A}}{IbG} dV = \frac{1}{2}\int_L \frac{Q^2}{GA}\left[\frac{A}{I^2}\int \frac{\overline{A}^2}{b^2} dA\right] dx \qquad (4.116)$$

Comparando esta expresión con la ecuación (4.114), se deduce que el factor de corrección por cortante *k* vale:

$$k = \left[\frac{A}{I^2}\int \frac{\overline{A}^2}{b^2} dA\right] \qquad (4.117)$$

Por lo tanto, si el factor de corrección por cortante *k* se calcula mediante esta expresión, la hipótesis de Timoshenko evalúa la energía de cortante de forma consistente con su valor exacto.

La ecuación (4.117) puede resolverse para las secciones más típicas. Así, para una sección rectangular, el factor de corrección resulta *k*=6/5, lo cual indica que el área equivalente a cortadura *A*' es 5/6 del área real de la sección. Para una sección circular maciza, el valor del factor es *k*=10/9, y para una sección en I, es igual a la relación entre el área total de la sección y el área del alma.

4.9.8 Ecuaciones diferenciales de equilibrio

Las ecuaciones diferenciales de equilibrio se obtienen considerando el equilibrio de un elemento diferencial.

- *Equilibrio vertical*

  La ecuación de equilibrio vertical de fuerzas es la misma que en la teoría clásica:

  $$dQ = q dx \qquad (4.118)$$

  Considerando el valor de *Q* dado por la ecuación (4.104) y derivando respecto a *x* se obtiene:

  $$\frac{dQ}{dx} = \left(-\frac{d\theta}{dx} + \frac{d^2 v}{dx^2}\right) GA' \qquad (4.119)$$

  y sustituyendo la (4.118) se llega a la ecuación diferencial de equilibrio vertical:

  $$\frac{q}{GA'} = \frac{d^2 v}{dx^2} - \frac{d\theta}{dx} \qquad (4.120)$$

- *Equilibrio de momentos*

  También la ecuación de equilibrio de momentos es la misma que en la teoría clásica:

  $$Q = -\frac{dM}{dx} \qquad (4.121)$$

  Sustituyendo los valores de *Q* y *M* dados por (4.104) y (4.100) se obtiene, en ausencia de temperatura, la siguiente ecuación diferencial para el equilibrio de momentos:

$$(-\theta + \frac{dv}{dx})GA' = -EI\frac{d^2\theta}{dx^2} \tag{4.122}$$

Se observa que el problema está controlado por dos ecuaciones diferenciales, (4.120) y (4.122), de orden 2 en las dos incógnitas θ y v, a diferencia de la flexión de vigas bajo la hipótesis de Navier, que está controlada por una ecuación de orden cuatro en la única incógnita v.

4.10 TEOREMAS DE MOHR CON ENERGÍA DE ESFUERZO CORTANTE

Para la deducción de los teoremas de Mohr se parte de la ecuación diferencial de equilibrio vertical (4.120) y se sustituye en ella el valor de la derivada del giro θ de la sección, dada por la expresión (4.101):

$$\frac{q}{GA'} - \frac{M}{EI} = \frac{d^2v}{dx^2}$$

El valor de la derivada segunda de la flecha es:

$$\frac{d^2v}{dx^2} = \frac{d\varphi}{dx} \tag{4.123}$$

Reordenando se obtiene la siguiente expresión de la pendiente a la deformada:

$$d\varphi = \frac{q}{GA'}dx + \frac{M}{EI}dx \tag{4.124}$$

Primer Teorema de Mohr

Integrando la expresión de $d\varphi$ se obtiene la expresión:

$$\varphi_B - \varphi_A = \int_A^B \frac{M}{EI}dx + \int_A^B \frac{q}{GA'}dx \tag{4.125}$$

> *La diferencia entre la pendiente a la deformada elástica en dos puntos A y B es igual al área del diagrama de M/EI entre A y B, más el área del diagrama de cargas q/GA' entre A y B.*

El primer término coincide con la expresión habitual de este teorema para vigas sin energía de esfuerzo cortante, y el segundo es el término añadido por este esfuerzo.

Segundo Teorema de Mohr

El diferencial de la distancia λ de un punto A hasta la tangente en otro B vale $d\lambda = \bar{x}d\varphi$, como se muestra en la figura 4.10. Sustituyendo la expresión de $d\varphi$ dada por la ecuación (4.124) e integrando se obtiene:

$$\delta_{B/A} = \int_A^B d\lambda = \int_A^B \frac{M}{EI}\bar{x}dx + \int_A^B \frac{q}{GA'}\bar{x}dx \tag{4.126}$$

La distancia desde un punto A hasta la pendiente a la deformada elástica en otro punto B, es igual al momento estático del diagrama de M/EI entre A y B, más el momento estático del diagrama de cargas q/GA' entre A y B.

Al igual que en el primer teorema, se añade un nuevo término debido al cortante.

4.11 MÉTODO DE FLEXIBILIDAD CON ENERGÍA DE CORTANTE

La aplicación del método de flexibilidad a vigas en las que se emplea la teoría de Timoshenko, es exactamente igual que para la teoría clásica de la flexión. La única diferencia está en que ahora hay que incluir, en la expresión de la energía, el nuevo sumando debido a la energía de esfuerzo cortante.

Las incógnitas hiperestáticas que pueden elegirse son las mismas: reacciones exteriores, esfuerzos cortantes y momentos flectores.

El principio de superposición se aplica exactamente igual, descomponiendo la estructura real en suma de 1+*h* casos. En cada uno de ellos hay que calcular, además de los momentos flectores, también los esfuerzos cortantes. En el caso 0, actúan solamente las fuerzas exteriores, y los esfuerzos en la viga son M^0 y Q^0. En los casos 1 a *h* se aplican valores unitarios de las incógnitas hiperestáticas, y aparecen unos esfuerzos M^j y Q^j.

Los esfuerzos reales en la estructura tienen por lo tanto el valor:

$$M = M^0 + \sum_j X_j M^j \qquad\qquad Q = Q^0 + \sum_j X_j Q^j \tag{4.127}$$

Ecuaciones de compatibilidad

Empleando la expresión (4.114) de la energía, las ecuaciones de compatibilidad quedan:

$$\int M\mu M^j dx - \int \alpha T_g M^j dx + \int Q\eta Q^j dx = 0 \qquad j = 1, h \tag{4.128}$$

donde los coeficientes $\mu = 1/EI$ y $\eta = 1/GA'$ definen la flexibilidad de la viga.

Las condiciones de compatibilidad de deformaciones resultan ser las mismas que en la teoría clásica de la flexión, pero añadiendo un nuevo término que define la colaboración de la energía de esfuerzo cortante.

Sustituyendo las expresiones (4.127) de *M* y *Q*, desarrollando los sumatorios, y despejando las incógnitas hiperestáticas *X*, se obtiene el sistema de ecuaciones:

$$\mathbf{fX} = \mathbf{D} \tag{4.129}$$

donde los coeficientes de la matriz de flexibilidad **f** valen:

$$f_{ij} = \int \mu M^i M^j dx + \int \eta Q^i Q^j dx \tag{4.130}$$

y los coeficientes del término independiente **D** son:

$$D_i = -\int M^0 \mu M^i dx + \int \alpha T_g M^i dx - \int Q^0 \eta Q^i dx \tag{4.131}$$

Se observa que ambos coeficientes son similares a los obtenidos en la teoría clásica de flexión, pero añadiendo un nuevo término que es debido a la energía de cortante y a las deformaciones por ella generadas.

Deformaciones

Efectuando el mismo desarrollo que en el caso de la teoría clásica, se obtiene la expresión de la deformación en un punto y en una dirección cualquiera de la estructura:

$$\Delta_r = \int M\mu M^{0V} dx - \int \alpha T_g M^{0V} dx + \int Q\eta Q^{0V} dx \qquad (4.132)$$

donde las magnitudes con superíndice ^{0V} corresponden a los esfuerzos en la viga reducida a un caso isostático cualquiera, y cargada únicamente con una fuerza virtual unitaria en la dirección *r*.

La expresión de la deformación de un punto es la misma que en la teoría clásica de la flexión, añadiendo un nuevo término que es la colaboración a dicha deformación de la flexibilidad debida a la energía de esfuerzo cortante.

4.12 EJERCICIOS RESUELTOS

4.12.1 Calcular el diagrama de momentos flectores en la viga de dos vanos de la figura 4.21, sometida a una carga uniforme *q*.

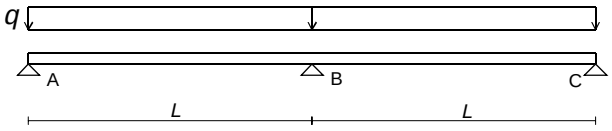


Figura 4.21

La viga es hiperestática *h*=1 a flexión. Se adopta como fuerza redundante el momento en el apoyo central B: $X_1 = M_B$. Con ello la estructura isostática queda reducida a dos vigas simplemente apoyadas, independientes, que comparten el apoyo B. Los distintos casos básicos se muestran en la figura 4.22:

Caso 0:

$$M^0_{AB} = \frac{qLx}{2} - \frac{qLx^2}{2} \quad 0 < x < L$$

$$M^0_{BC} = \frac{qLx}{2} - \frac{qLx^2}{2} \quad 0 < x < L$$

Caso 1:

$$M^1_{AB} = \frac{x}{L} \quad 0 < x < L$$

$$M^1_{BC} = \frac{L-x}{L} \quad 0 < x < L$$

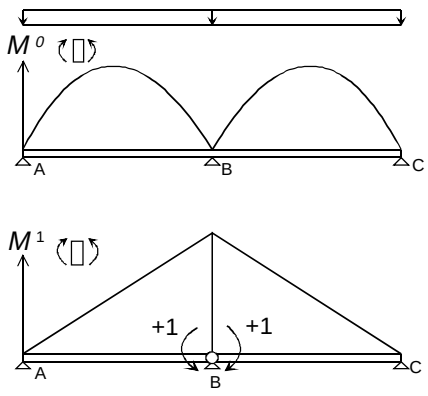


Figura 4.22

El coeficiente de flexibilidad (ecuación (4.65)) vale:

$$f_{11} = \int M^1 \mu M^1 dx = \int \frac{x}{L} \mu \frac{x}{L} dx + \int \frac{L-x}{L} \mu \frac{L-x}{L} dx = \frac{2\mu L}{3}$$

y término independiente (ecuación (4.63)):

$$D_1 = -\int M^0 \mu M^1 dx = -\int \left(\frac{qLx}{2} - \frac{qx^2}{2} \right) \mu \frac{x}{L} dx - \int \left(\frac{qLx}{2} - \frac{qx^2}{2} \right) \mu \frac{x}{L} dx = -\frac{q\mu L^3}{12}$$

La ecuación de compatibilidad queda:

$$\frac{2\mu L}{3} X_1 = -\frac{q\mu L^3}{12} \qquad \rightarrow \qquad X_1 = -\frac{qL^2}{8}$$

Por lo tanto la distribución de momentos flectores tiene la siguiente expresión analítica:

$$M_{AB} = M^0_{AB} + M^1_{AB} X_1 = \frac{3qLx}{8} - \frac{qx^2}{2} \qquad 0 < x < L$$

$$M_{BC} = M^0_{BC} + M^1_{BC} X_1 = \frac{5qLx}{8} - \frac{qx^2}{2} - \frac{qL^2}{8} \qquad 0 < x < L$$

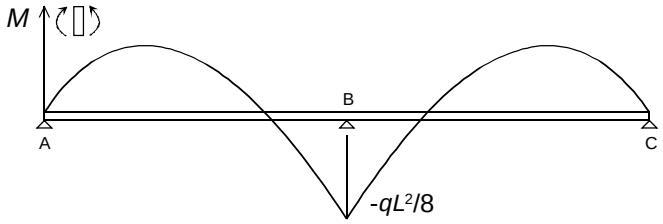


Figura 4.23

4.12.2 Calcular el giro en el apoyo A en la viga del ejercicio 4.12.1.

Se plantea un caso isostático virtual cargado con un momento unidad en A. Se emplea la misma incógnita redundante empleada para calcular los momentos flectores, es decir el momento en el apoyo B.

El caso 0V y su diagrama de momentos flectores se muestra en la figura 4.24.

$$M^{0V}_{AB} = \frac{L-x}{L} \qquad 0 < x < L$$

$$M^{0V}_{BC} = 0$$

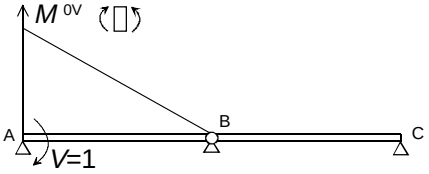


Figura 4.24

El giro buscado vale (ecuación (4.86)):

$$\theta_A = \int M \mu M^{0V} dx = \int \left(\frac{3qLx}{8} - \frac{qx^2}{2} \right) \mu \left(\frac{L-x}{x} \right) dx = \frac{qL^3}{48EI}$$

4.12.3 Calcular el momento en el empotramiento y el giro en el apoyo de la viga empotrada - apoyada de la figura 4.25, sometida a una carga uniforme *q*. Emplear el método de la viga conjugada.

La viga es hiperestática de grado *h*=1. Se adopta el momento en el empotramiento como incógnita redundante, con lo que la viga puede descomponerse en suma de dos casos básicos. En el caso 0 la viga está simplemente apoyada y sometida a la carga distribuida, con lo que la distribución de momentos que se origina en ella es parabólica. En el caso 1 la viga está sometida a un momento M_A en el apoyo A, de magnitud desconocida, con lo que la distribución de flectores es lineal (figura 4.25).

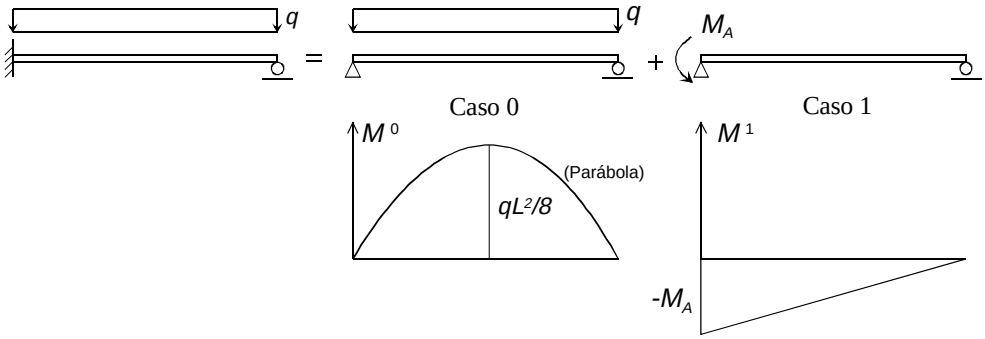


Figura 4.25

La viga conjugada es una viga que está libre en el apoyo izquierdo A, y articulada en el apoyo derecho B. Se trata por lo tanto de una viga inestable, que tiene un grado de libertad que corresponde al giro respecto al punto B. Esta viga está sometida a dos cargas distribuidas, correspondientes a las dos componentes del momento flector en la viga real: una carga con variación parabólica y otra con variación triangular. La carga parabólica actúa hacia abajo (dirección positiva según la figura 4.1) pues corresponde a una distribución de momentos positivos. La carga triangular actúa hacia arriba al corresponder a una distribución de momentos negativos.

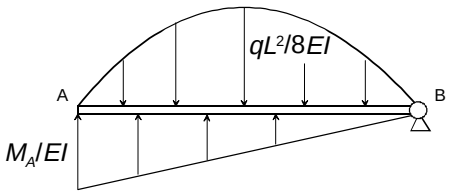


Figura 4.26

La viga conjugada inestable se halla en equilibrio bajo la acción de las dos cargas aplicadas sobre ella. Para que se satisfaga este equilibrio inestable, se tiene que cumplir que la suma de momentos conjugados respecto de B debe ser nula, de donde se obtiene M_A:

$$\sum M_B^* = 0 \quad \rightarrow \quad \frac{2}{3} L \frac{qL^2}{8EI} \frac{L}{2} - \frac{1}{2} \frac{M_A}{EI} L \frac{2L}{3} = 0 \quad \rightarrow \quad M_A = \frac{qL^2}{8}$$

El esfuerzo cortante conjugado en el punto B se obtiene aislando el tramo AB y aplicando la condición de equilibrio vertical:

$$Q_B^* = \frac{2}{3} L \frac{qL^2}{8EI} - \frac{1}{2} L \frac{M_A}{EI} = \frac{2}{3} L \frac{qL^2}{8EI} - \frac{1}{2} L \frac{qL^2}{8EI} = \frac{qL^3}{48EI}$$

Este valor corresponde al giro en el apoyo B en la viga real:

$$\theta_B = Q_B^* = \frac{qL^3}{48EI}$$

4.12.4 Calcular las deformaciones en los puntos B y C de la viga de la figura 4.27, empleando el método de la viga conjugada. Todos los vanos tienen las mismas propiedades: E= 2 10^5 MPa, I = 2 10^{-4} m^4.

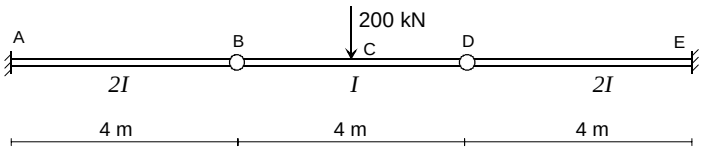


Figura 4.27

Se trata de una viga isostática, por lo que su diagrama de momentos flectores puede obtenerse mediante las ecuaciones de la estática, y se muestra en la figura 4.28.

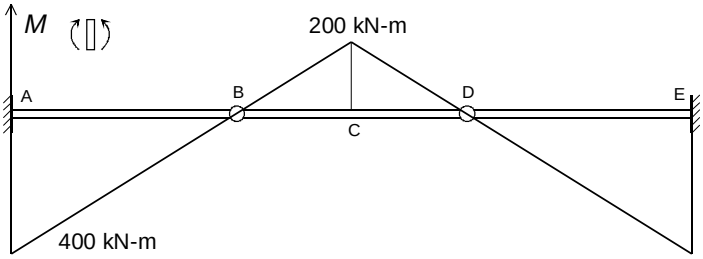


Figura 4.28

La viga conjugada de la original es una viga con dos apoyos en los puntos B y D, y dos voladizos AB y DE. Está sometida a una carga distribuida triangular, de magnitud igual al diagrama de flectores de la viga real, dividido por el producto EI de cada vano (figura 4.29). Las reacciones de la viga conjugada son:

$$R_B^* = R_D^* = \frac{1}{2}\left(\frac{4 \cdot 0.005}{2} - 2 \frac{4 \cdot 0.005}{2} \right) = -0.005$$

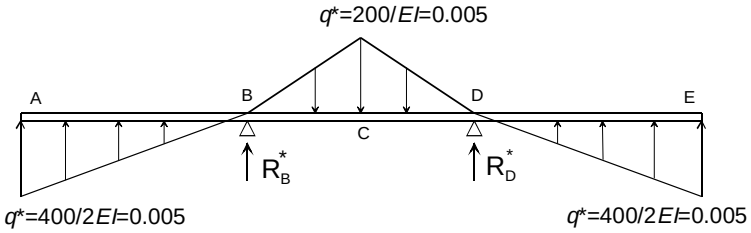


Figura 4.29

Las distintas deformaciones se pueden obtener con gran sencillez calculando los esfuerzos cortantes y los momentos flectores de esta viga.

Giro a la izquierda de B: es igual al cortante a la izquierda de B de la viga conjugada. Éste se obtiene con sencillez aislando el tramo AB (figura 4.30):

$$\theta_{Bi} = Q^*_{Bi} = -\frac{0.005 \cdot 4}{2} = -0.01 \text{ rad}$$

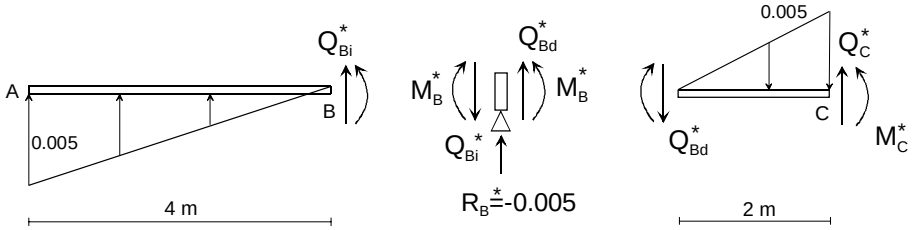


Figura 4.30

Giro a la derecha de B: es igual al cortante a la derecha de B, que se obtiene aplicando el equilibrio del nudo B (figura 4.30).

$$\theta_{Bd} = Q^*_{Bd} = Q^*_{Bi} - R^*_B = -0.01 - (-0.005) = -0.005 \text{ rad}$$

Flecha en B: es igual al momento en B, cambiado de signo, que se obtiene aislando el tramo AB y tomando momentos desde B.

$$\Delta_B = -M^*_B = -\left(\frac{4 \cdot 0.005}{2}\frac{2}{3}4\right) = -0.0267 \text{ m}$$

Flecha en C: es igual al momento en C, que se obtiene aislando el tramo BC y aplicando equilibrio de momentos respecto a C.

$$M^*_C = M^*_B - Q^*_{Bd}\,2 - \frac{0.005 \cdot 2}{2}\frac{2}{3} = 0.0267 + 0.005 \cdot 2 - \frac{0.005 \cdot 2}{3} = 0.0333$$

$$\Delta_C = -M_C = -0.0333 \text{ m}$$

Giro en C: es igual al cortante en C, que se obtiene del equilibrio vertical de BC.

$$\theta_C = Q^*_C = Q^*_{Bd} + \frac{0.005 \cdot 2}{2} = -0.005 + 0.005 = 0$$

Tiene valor nulo, debido a la simetría de la viga.

4.12.5 Calcular la deformada de una viga simplemente apoyada, sometida a una distribución de temperaturas uniforme en toda su longitud, con temperatura gradiente T_g (figura 4.31).

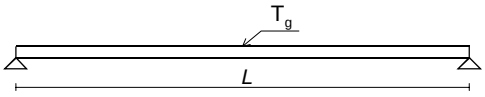


Figura 4.31

Por equilibrio estático, las reacciones en los apoyos son nulas, y por lo tanto el momento flector en cualquier sección de la viga es también nulo. La ecuación de la elástica es:

$$EIv'' + EI\alpha T_g = M = 0$$

Que integrada dos veces proporciona:

$$v = -\alpha T_g \frac{x^2}{2} + Ax + B$$

Las condiciones de contorno son:

$$v(x=0) = 0 \quad \rightarrow \quad B = 0$$

$$v(x=L) = 0 \quad \rightarrow \quad A = \alpha T_g L / 2$$

Con lo que la deformada queda:

$$v = -\alpha T_g \frac{x^2}{2} + \alpha T_g \frac{L}{2}$$

La viga se deforma según una parábola, que tiene la concavidad hacia abajo para un T_g>0, como se muestra en la figura 4.32. La deformación no depende de las propiedades de rigidez (*EI*) de la viga. La flecha en el centro de la viga es:

$$v(x = L/2) = \alpha T_g L^2 / 8$$

y el giro en el extremo:

$$\theta_0 = v'(x=0) = \alpha T_g L / 2$$

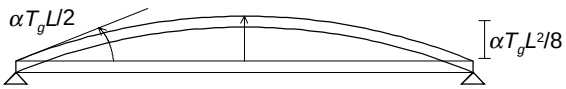


Figura 4.32

La energía acumulada en la viga es:

$$U^* = \int \frac{M^2 \mu}{2} dx - \int M \alpha T_g dx = 0$$

4.12.6 Calcular la deformada de una viga empotrada en sus dos extremos, sometida a una distribución de temperaturas uniforme en toda su longitud, con temperatura gradiente T_g (figura 4.33).

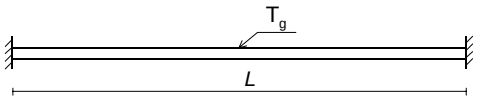


Figura 4.33

La viga es hiperestática h=2 a flexión. Además es h=1 a esfuerzo axial, pero como no hay cargas axiales aplicadas, el esfuerzo axial N es nulo. Se adopten como fuerzas redundantes la reacción vertical y el momento en el apoyo B: $X_1 = R_{BY}$, $X_2 = M_B$. Los distintos casos básicos se muestran en la figura 4.34.

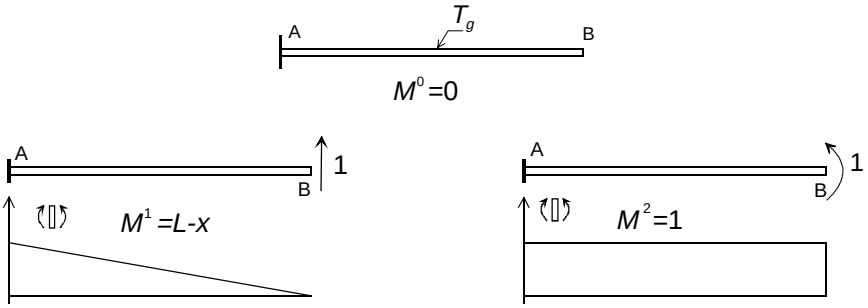


Figura 4.34

Los distintos coeficientes de flexibilidad valen:

$$f_{11} = \int M^1 \mu M^1 dx = \int (L-x)^2 \mu dx = \frac{\mu L^3}{3}$$

$$f_{22} = \int M^2 \mu M^2 dx = \int 1^2 \mu dx = \mu L$$

$$f_{12} = \int M^1 \mu M^2 dx = \int (L-x) \mu dx = \frac{\mu L^2}{2}$$

Los valores del término independiente son:

$$D_1 = -\int M^0 \mu M^1 dx + \int \alpha T_g M^1 dx = \alpha T_g \frac{L^2}{2}$$

$$D_2 = -\int M^0 \mu M^2 dx + \int \alpha T_g M^2 dx = \alpha T_g L$$

Las ecuaciones de compatibilidad quedan:

$$\mu \frac{L^3}{3} X_1 + \mu \frac{L^2}{2} X_2 = \alpha T_g \frac{L^2}{2}$$

$$\mu \frac{L^2}{2} X_1 + \mu L X_2 = \alpha T_g L$$

de donde se obtiene: $X_1 = R_{BY} = 0$ $X_2 = M_B = EI\alpha T_g$.

Por lo tanto no existen fuerzas laterales sobre la viga, y la distribución de momentos flectores es uniforme:

$$M = M^0 + M_1 X_1 + M_2 X_2 = EI\alpha T_g$$

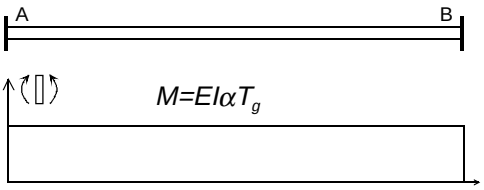


Figura 4.35

La deformada de la viga se obtiene integrando la ecuación de la elástica:

$$M = EIv'' + EI\alpha T_g = EI\alpha T_g \qquad \rightarrow \qquad v'' = 0$$

$$v = Ax + B$$

Las condiciones de contorno son:

$$v(x=0) = 0 \qquad \rightarrow \qquad B = 0$$
$$v'(x=0) = 0 \qquad \rightarrow \qquad A = 0$$

Por lo tanto la deformada de la viga es toda ella nula v=0.

La energía que se acumula en la viga es:

$$U^* = \int \frac{M^2 \mu}{2} dx - \int M\alpha T_g dx = -\frac{EI\alpha^2 T_g^2 L}{2}$$

La distribución de tensiones en una sección cualquiera de la viga es:

$$\sigma = -\frac{My}{I} = -E\alpha T_g y$$

mientras que las deformaciones unitarias son nulas:

$$\varepsilon = -v'' y = 0$$

En la gráfica σ/ε mostrada en la figura 4.36, un punto cualquiera de una sección de la viga se halla en un punto como el A, en el que existe tensión, pero la deformación unitaria es nula. El área del triángulo rayado corresponde a la densidad de energía de deformación, que integrada a todo el volumen proporciona el valor de la energía hallado antes.

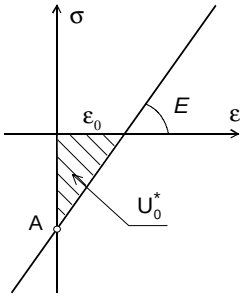


Figura 4.36

4.12.7 Calcular el diagrama de momentos flectores de la viga de la figura 4.37, sometida a una carga puntual de 2 kN en el extremo del voladizo. Todos los vanos tienen las mismas propiedades resistentes *EI*.

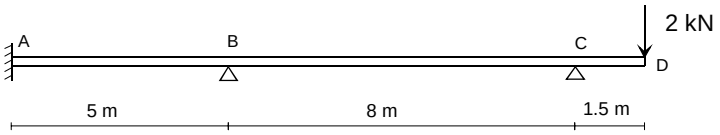


Figura 4.37

La viga es hiperestática h=2 a flexión. Se adoptan como fuerzas redundantes las reacciones en los dos apoyos B y C: $X_1 = R_B$, $X_2 = R_C$. Con ello la estructura isostática queda reducida a un voladizo de 14.5 m de luz. Los distintos casos básicos, incluyendo el diagrama de flectores de cada uno de ellos, se muestran en las figuras 4.38 a 4.40.

Caso 0

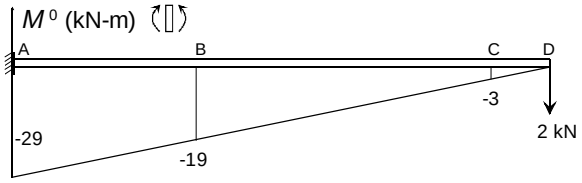


Figura 4.38

$$M^0 = -29 + 2x \qquad 0 < x < 14.5$$

Caso 1

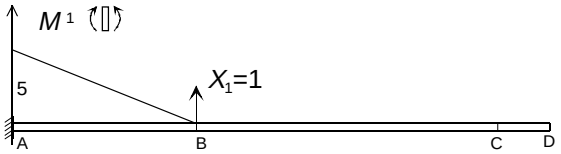


Figura 4.39

$$M^1 = 5 - x \qquad 0 < x < 5$$

Caso 2

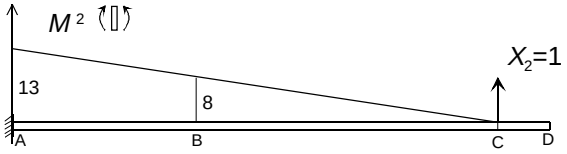


Figura 4.40

$$M^2 = 13 - x \qquad 0 < x < 13$$

Una vez efectuada esta descomposición en casos básicos isostáticos, es posible aplicar diferentes métodos de resolución. En todos ellos se trata de imponer dos condiciones de compatibilidad geométrica, de forma más o menos directa, de tal manera que se obtengan dos ecuaciones de las que se puedan obtener las dos incógnitas redundantes.

A. Resolución mediante los teoremas de Mohr

Dado que el punto B está fijo, se puede aplicar el segundo teorema entre los puntos B y A: la distancia de B a la tangente en A es nula. Por lo tanto, el momento estático respecto de B del diagrama *M/EI* entre A y B es nulo:

$$\Delta_{B/A} = -\frac{19\cdot 5\cdot 5}{2EI} - \frac{5\cdot 10}{2EI}\frac{2\cdot 5}{3} + \frac{5\cdot 5\cdot X_1}{2EI}\frac{2\cdot 5}{3} + \frac{5\cdot 8X_2}{2EI} + \frac{5\cdot 5X_2}{2EI}\frac{2\cdot 5}{3} = 0$$

$$41.66X_1 + 141.66X_2 = 320.83$$

Dado que el punto C está fijo, se puede aplicar el segundo teorema entre los puntos C y A: la distancia de C a la tangente en A es nula. Por lo tanto, el momento estático respecto de C del diagrama *M/EI* entre A y C es nulo:

$$\Delta_{C/A} = -\frac{3\cdot 13\cdot 13}{2EI} - \frac{26\cdot 13}{2EI}\frac{2\cdot 13}{3} + \frac{5\cdot 5\cdot X_1}{2EI}\left(8 + \frac{2\cdot 5}{3}\right) + \frac{13\cdot 13X_2}{2EI}\frac{2\cdot 13}{3} = 0$$

$$141.66X_1 + 732.3X_2 = 1718.16$$

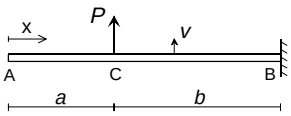
De estas ecuaciones se obtienen los valores de las reacciones buscadas.

B. Resolución por el método de las deformaciones compatibles

En este caso la compatibilidad de deformaciones se impone directamente sobre las deformaciones de B y C, que se calculan en función de las deformaciones en los tres casos básicos:

$$\Delta_B = \Delta_B^0 + \Delta_B^1 + \Delta_B^2 = 0 \qquad \Delta_C = \Delta_C^0 + \Delta_C^1 + \Delta_C^2 = 0$$

Para calcular cada una de las seis deformaciones necesarias pueden emplearse cualquiera de los métodos conocidos, por ejemplo integración de la ecuación de la elástica, teoremas de Mohr, etc. En este caso los casos básicos son muy simples, pues corresponden a una viga en voladizo con una fuerza puntual en un extremo, por lo que se emplea la solución tabulada siguiente:

> La deformada de una viga en voladizo sometida a una carga puntual *P* a una distancia *a* del extremo libre y *b* del empotramiento viene dada por las expresiones:
>
> $$v_{AC} = \frac{Pb^2}{6EI}(3(L-x)-b)$$
>
> $$v_{CB} = \frac{P(L-x)^2}{6EI}(2b-a+x)$$
>
> 
>
>
> **Figura 4.41**

Empleando esta expresión con los valores adecuados de las distintas variables, se obtiene:

$$\Delta_B^0 = \frac{-2}{6EI}(14.5-9.5)^2(2\cdot 14.5-0+9.5) = \frac{-320.83}{EI}$$

$$\Delta_C^0 = \frac{-2}{6EI}(14.5-1.5)^2(2\cdot 14.5-0+1.5) = \frac{-1718.16}{EI}$$

$$\Delta_B^1 = \frac{X_1 5^3}{3EI} = \frac{41.66X_1}{EI}$$

$$\Delta_C^1 = \frac{X_1 5^2}{6EI}(3\cdot(14.5-1.5)-5) = \frac{141.66X_1}{EI}$$

$$\Delta_B^2 = \frac{X_2}{6EI}(14.5-9.5)^2(2\cdot 13-1.5+9.5) = \frac{141.66X_2}{EI}$$

$$\Delta_C^2 = \frac{X_2 13^3}{3EI} = \frac{732.3X_2}{EI}$$

Con lo que las ecuaciones finales son:

$$\frac{-320.83}{EI} + \frac{41.66X_1}{EI} + \frac{141.66X_2}{EI} = 0$$
$$\frac{-1718.16}{EI} + \frac{141.66X_1}{EI} + \frac{732.3X_2}{EI} = 0$$

que son las mismas que se obtienen por empleo de los teoremas de Mohr.

C. Resolución por el método general de flexibilidad

Las ecuaciones de compatibilidad (ecuación (4.64)) son:

$$f_{11}X_1 + f_{12}X_2 = D_1$$
$$f_{21}X_1 + f_{22}X_2 = D_2$$

Los coeficientes de flexibilidad valen:

$$f_{11} = \int M^1 \mu M^1 dx = \int_0^5 (5-x)^2 \mu dx = 41.66\mu$$

$$f_{22} = \int M^2 \mu M^2 dx = \int_0^{13} (13-x)^2 \mu dx = 732.33\mu$$

$$f_{12} = \int M^1 \mu M^2 dx = \int_0^5 (5-x)(13-x)\mu dx = 141.66\mu$$

Los valores del término independiente son:

$$D_1 = -\int M^0 \mu M^1 dx = -\int_0^5 (-29+2x)(5-x)\mu dx = 320.83\mu$$

$$D_2 = -\int M^0 \mu M^2 dx = -\int_0^{13} (-29+2x)(13-x)\mu dx = 1718.2\mu$$

Nuevamente se obtienen las mismas ecuaciones que con los dos métodos anteriores.

D. Resolución por el método de la viga conjugada

La conjugada de la viga original es una viga con dos articulaciones en B y C, estando libre en A y empotrada en D. Por lo tanto es inestable y tiene dos grados de libertad, que son los dos giros respecto de B y C. Está sometida a tres cargas distribuidas diferentes, correspondientes a las tres componentes distintas en que se ha descompuesto el diagrama de

flectores de la viga original. Dos de dichas cargas dependen de las incógnitas hiperestáticas (figura 4.42).

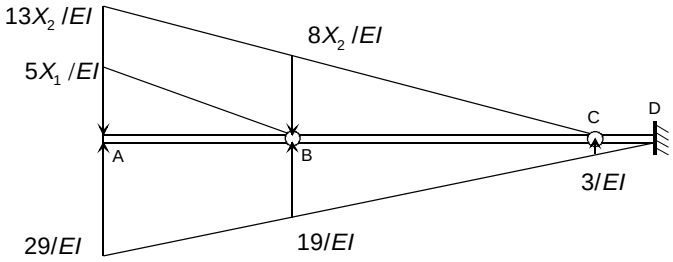


Figura 4.42

Las dos ecuaciones necesarias para resolver el problema se obtienen en este caso imponiendo las dos condiciones de equilibrio estático de la viga, bajo la acción de las cargas aplicadas sobre ella.

Equilibrio de momentos respecto de B del tramo AB:

$$\sum M_B^* = -\frac{19\cdot 5\cdot 5}{2EI} - \frac{5\cdot 10}{2EI}\frac{2\cdot 5}{3} + \frac{5\cdot 5\cdot X_1}{2EI}\frac{2\cdot 5}{3} + \frac{5\cdot 8X_2}{2EI} + \frac{5\cdot 5X_2}{2EI}\frac{2\cdot 5}{3} = 0$$

$$41.66X_1 + 141.66X_2 = 320.83$$

Equilibrio de momentos respecto de C del tramo ABC:

$$\sum M_C^* = -\frac{3\cdot 13\cdot 13}{2EI} - \frac{26\cdot 13}{2EI}\frac{2\cdot 13}{3} + \frac{5\cdot 5\cdot X_1}{2EI}\left(8 + \frac{2\cdot 5}{3}\right) + \frac{13\cdot 13X_2}{2EI}\frac{2\cdot 13}{3} = 0$$

$$141.66X_1 + 732.3X_2 = 1718.16$$

Nótese que se obtienen exactamente las mismas ecuaciones que aplicando los teoremas de Mohr.

Resultados

Los cuatro métodos empleados han llevado a las mismas ecuaciones de compatibilidad. Resolviéndolas se obtienen los siguientes valores de las incógnitas hiperestáticas:

$$X_1 \equiv R_B = -0.809 \text{ kN} \qquad X_2 \equiv R_C = 2.502 \text{ kN}$$

con lo que los momentos en los apoyos son:

$$M_A = -29 + 5X_1 + 13X_2 = -0.5106 \text{ kN}\cdot\text{m}$$

$$M_B = -19 + 0X_1 + 8X_2 = 1.021 \text{ kN}\cdot\text{m}$$

$$M_C = -3 + 0X_1 + 0X_2 = -3 \text{ kN}\cdot\text{m}$$

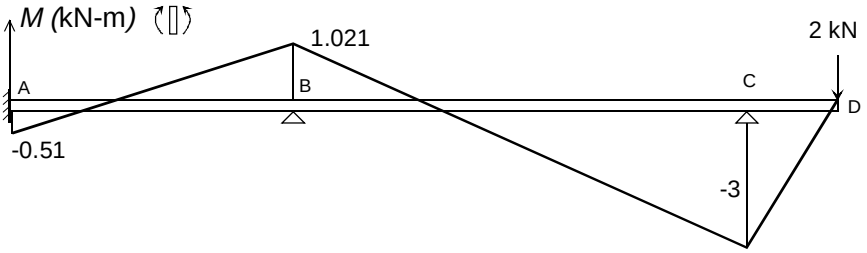


Figura 4.43

4.12.8 Calcular la viga del ejercicio 4.12.7 empleando la fórmula de los 3 momentos.

Al existir un extremo empotrado, se añade un vano ficticio de longitud nula, sin carga y con cualquier rigidez, pues ésta no influye en el cálculo. El voladizo CD se sustituye por el momento equivalente en C. De esta forma la viga equivalente es la indicada en la figura 4.44.

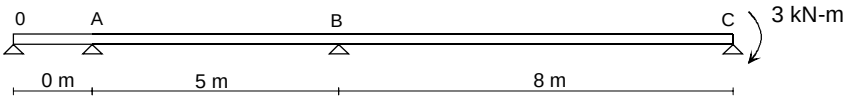


Figura 4.44

Al ser la viga de propiedades uniformes, se puede emplear la expresión simplificada de la fórmula de los 3 momentos. Aplicándola a los vanos 0A y AB se obtiene:

$$M_0 \cdot 0 + 2M_A \cdot (0+5) + M_B \cdot 5 = 0$$

y aplicándola a los vanos AB y BC:

$$M_A \cdot 5 + 2M_B \cdot (5+8) + M_C \cdot 8 = 0$$

Sustituyendo el valor conocido del momento en el apoyo C, M_C = -3, queda un sistema de dos ecuaciones con dos incógnitas, que permite obtener los valores de los momentos en los apoyos. Éstos resultan ser: M_A = -0.51 kN·m, M_B = 1.021 kN·m.

4.12.9 Calcular la deformación vertical en el extremo D de la viga del ejemplo 4.12.7, empleando el método general de flexibilidad.

La expresión de la deformación es:

$$\Delta_{DY} = \int M \mu M^{0V} dx$$

Para el caso isotático virtual se emplean las mismas incógnitas hiperestáticas que para la resolución de la estructura. El caso 0V se muestra en la figura 4.45.

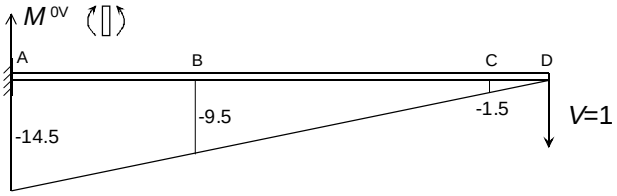


Figura 4.45

El momento flector en este caso vale:

$$M^{0V} = -14.5 + x \qquad 0 < x < 14.5$$

La expresión del momento flector es: $M = M^0 + X_1 M^1 + X_2 M^2$. Dado que los momentos M^1 y M^2 tienen expresiones diferentes en los distintos vanos de la viga, hay que separar la integral que proporciona la deformación en tres tramos distintos:

$$\Delta_{DY} = \int_0^5 (-29 + 2x - 0.809(5-x) + 2.502(13-x))\mu(-14.5+x)dx \quad +$$

$$\int_5^{13} (-29 + 2x + 2.502(13-x))\mu(-14.5+x)dx \quad +$$

$$\int_{13}^{14.5} (-29 + 2x)\mu(-14.5+x)dx \quad = \frac{12.767}{EI}$$

Nótese que la expresión de la deformación puede ponerse en la forma:

$$\Delta_{DY} = \int M\mu M^{0V} dx = -\int_0^{14.5} \bar{M}\mu(14.5-x)dx = \int_0^{14.5} \bar{M}\mu\bar{x}d\bar{x}$$

donde se ha definido la coordenada $\bar{x} = 14.5 - x$ que es una coordenada medida desde el punto D hacia la izquierda. La expresión así obtenida de la deformación vertical de D no es otra cosa que el momento estático del diagrama de momentos M de la viga respecto al punto D, es decir el segundo teorema de Mohr aplicado a la deformación de D con respecto a la tangente en A.

4.12.10 Calcular las deformaciones en el extremo de una viga en voladizo sometida a una carga distribuida, considerando la energía debida al esfuerzo cortante.

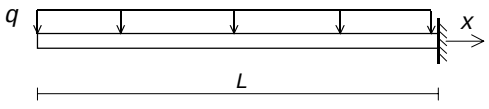


Figura 4.46

Las solicitaciones en la viga son: $M = -\frac{qx^2}{2}$ $\qquad Q = qx$

Las ecuaciones de equilibrio son por lo tanto (ecuaciones (4.100) y (4.104)):

$$-\frac{qx^2}{2} = EI\frac{d\theta}{dx} \qquad\qquad \frac{qx}{GA'} = -\theta + \frac{dv}{dx}$$

Integrando la primera se obtiene el valor del giro:

$$\theta = -\frac{qx^3}{6EI} + C_1$$

Sustituyendo en la segunda este valor e integrando se obtiene la deformada:

$$v = \frac{qx^2}{2GA'} - \frac{qx^4}{24EI} + C_1 x + C_2$$

Las condiciones de contorno son:

$$x = L \quad \theta = 0 \quad \rightarrow \quad C_1 = \frac{qL^3}{6EI}$$

$$x = L \quad v = 0 \quad \rightarrow \quad C_2 = -\frac{qL^4}{8EI} - \frac{qL^2}{2GA'}$$

La deformada de la viga es:

$$\theta = -\frac{qx^3}{6EI} + \frac{qL^3}{6EI}$$

$$v = -\frac{q}{24EI}\left(x^4 - 4L^3 x + 3L^4\right) - \frac{q}{2GA'}\left(L^2 - x^2\right)$$

Los valores de la flecha y el giro en el extremo libre son:

$$v(x=0) = -\frac{qL^4}{8EI} - \frac{qL^2}{2GA'} \qquad \theta(x=0) = \frac{qL^3}{6EI} \qquad \left(\frac{dv}{dx}\right)_{x=0} = \frac{qL^3}{6EI}$$

El primer sumando de la flecha corresponde a la deformación de flexión, y el segundo a la deformación de cortadura. Nótese que en esta sección coinciden los valores del giro de la sección y de la pendiente de la deformada, al no haber en ella esfuerzo cortante.

El giro de la sección y la pendiente de la deformada en el extremo empotrado son:

$$\theta(x=L) = 0 \qquad \left(\frac{dv}{dx}\right)_{x=L} = \frac{qL}{GA'}$$

La relación entre la flecha en el extremo debida al esfuerzo cortante v_Q, y la debida al momento flector v_M es:

$$\frac{v_Q}{v_M} = \frac{qL_2 / (2GA')}{qL^4 / (8EI)} \propto \frac{I}{AL^2} \propto \frac{bh^3}{bhL^2} \propto \left(\frac{h}{L}\right)^2$$

que es proporcional al cuadrado de la relación *h/L*. Por lo tanto en vigas cortas (*h/L* grande) la deformación debida al cortante cobra importancia frente a la deformación debida a la flexión. Por ejemplo, para *h/L*=1/10, la flecha v_Q es sólo el 1% de v_M, pero para *h/L*=1/4, dicha proporción ya es del 6%.

4.12.11 Calcular las deformaciones en el extremo de una viga en voladizo sometida a una carga puntual, considerando la energía debida al esfuerzo cortante.

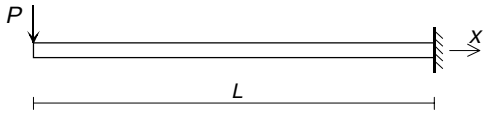


Figura 4.47

Las solicitaciones en la viga son: $M = -Px$ $Q = P$

Con lo que las ecuaciones de equilibrio resultan ser:

$$-Px = EI\frac{d\theta}{dx} \qquad \frac{P}{GA'} = -\theta + \frac{dv}{dx}$$

De la primera se obtiene el valor del giro:

$$\theta = -\frac{Px^2}{2EI} + C_1$$

Sustituyendo en la segunda este valor e integrando se llega a:

$$v = \frac{Px}{GA'} - \frac{Px^3}{6EI} + C_1 x + C_2$$

Las condiciones de contorno son:

$$x = L \quad \theta = 0 \quad \rightarrow \quad C_1 = \frac{PL^2}{2EI}$$

$$x = L \quad v = 0 \quad \rightarrow \quad C_2 = -\frac{PL^3}{3EI} - \frac{PL}{GA'}$$

La deformada de la viga es:

$$\theta = -\frac{Px^2}{2EI} + \frac{PL^2}{2EI}$$

$$v = \frac{Px}{GA'} - \frac{Px^3}{6EI} + \frac{PL^2 x}{2EI} - \frac{PL^3}{3EI} - \frac{PL}{GA'}$$

Los valores de la flecha y el giro en el extremo libre son

$$v(x=0) = -\frac{PL^3}{3EI} - \frac{PL}{GA'} \qquad \theta(x=0) = \frac{PL^2}{2EI} \qquad \left(\frac{dv}{dx}\right)_{x=0} = \frac{P}{GA'} + \frac{PL^2}{2EI}$$

El primer sumando de la flecha corresponde a la deformación de flexión y el segundo a la deformación de cortadura. En esta sección de la viga, la diferencia entre los valores del giro de la sección θ y de la pendiente de la deformada, es P / GA', que es la deformación debida a la fuerza cortante P.

La relación entre la flecha en el extremo debida al esfuerzo cortante v_Q, y la debida al momento flector v_M es, en este caso:

$$\frac{v_Q}{v_M} = \frac{PL/(GA')}{PL^3/(3I)} \propto \frac{I}{AL^2} \propto \frac{bh^3}{bhL^2} \propto \left(\frac{h}{L}\right)^2$$

Son aplicables las mismos consideraciones que en el ejemplo 4.12.10.

4.13 BIBLIOGRAFÍA

1. Argüelles Alvarez, R., y Argüelles Bustillo, R., *Análisis de Estructuras: Teoría, Problemas y Programas*, Escuela Técnica Superior de Ingenieros de Montes, Madrid, 1996.
2. Beaufait, F. W., *Basic Concepts of Structural Analysis*, Prentice-Hall, New Jersey, 1977.
3. Gere, J. M., y Timoshenko, S. P., *Mechanics of Materials*, 3ª edición, Chapman & Hall, London, 1991.
4. Hibbeler, R. C., *Structural Analysis*, Prentice-Hall, New Jersey, 1996.
5. Hsieh, Y-Y., *Teoría Elemental de Estructuras*, Prentice-Hall Int., Bogotá, 1973.
6. Ketter, R. L., Lee, G. C., y Prawel, S. P., *Structural Analysis and Design*, McGraw-Hill, New York, 1979.
7. Mohr, O., *Beitrag zur Theorie der Holz und Eisen-Constructionen*, Zeits. des Architekten und Ingenieur Vereins zu Hannover, Vol. 14, pp. 19-51, 1868.
8. Navier L. M. H., *Résumé des Leçons de Mécanique*, Paris, 1826.
9. Norris, C. H., Wilbur, J. B., y Ytku, S., *Análisis Elemental de Estructuras*, McGraw-Hill, New York, 1982.
10. Ortiz Berrocal, L., *Resistencia de Materiales*, McGraw-Hill Interamericana, Madrid, 1991.
11. Timoshenko, S. P., y Young, D. H., *Teoría de las Estructuras*, Ed. Urmo, Bilbao, 1974.
12. Tuma, J. J., *Análisis Estructural*, Serie Schaum, McGraw-Hill, New York, 1970.
13. Vázquez, M., *Resistencia de Materiales*, Ed. Noela, Madrid, 1994.
14. Wang, C. K., *Intermediate Structural Analysis*, McGraw-Hill, New York, 1983.

4.14 PROBLEMAS

4.14.1 Calcular la deformada de una viga empotrada en un extremo y apoyada en el otro, sometida a una distribución de temperaturas uniforme en toda su longitud, con temperatura gradiente T_g (figura P4.1).

Solución: $M_A = 3EI\alpha T_g / 2$, $v = \alpha T_g x^2/4 - \alpha T_g x^3/(4L)$, $\theta_B = -\alpha L T_g/4$.

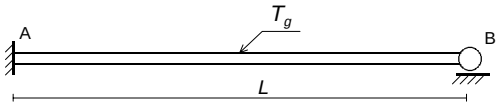


Figura P4.1

4.14.2 Empleando el método de la viga conjugada, calcular los momentos en los empotramientos de una viga empotrada en sus dos extremos, sometida a una carga uniforme (figura P4.2).

4.14.3 Calcular las deformaciones en el extremo libre de una viga en voladizo, sometida a una carga uniforme sobre una distancia *a*, empleando el método de la viga conjugada (figura P4.3).

Solución: $\Delta_B = -\dfrac{qa^3(4L-a)}{24EI}$, $\theta_B = -\dfrac{qa^3}{6EI}$

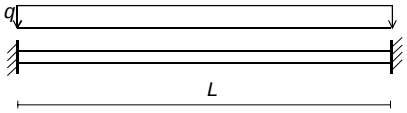


Figura P4.2

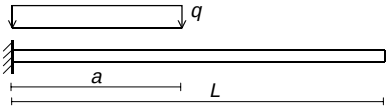


Figura P4.3

4.14.4 Empleando el método de la viga conjugada, calcular la deformación vertical en el extremo libre de una viga en voladizo de longitud *L*, apoyada sobre un muelle de constante *K* en dicho extremo libre, y sometida a una carga uniforme *q* (figura P4.4).

Solución: $\Delta_B = -\dfrac{qL/8}{K/3 + EI/L^3}$

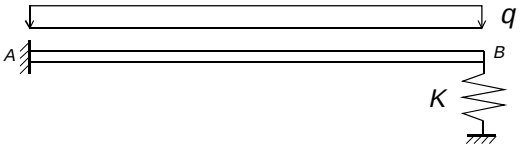


Figura P4.4

4.14.5 Calcular la distribución de momentos flectores en la viga de la figura P4.5, empleando la fórmula de los tres momentos. Datos: E = 2 10^5 MPa, I_1 = 8000 cm^4, I_2 = 5000 cm^4.

Solución: M_A = -2.0 kN m , M_B = -2.82 kN m, M_C = -2.59 kN m.

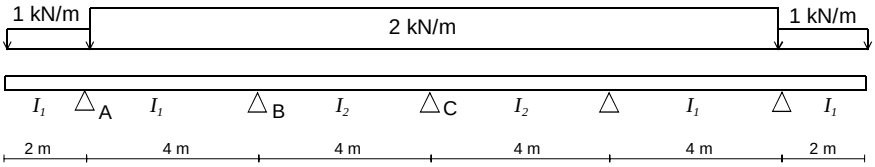


Figura P4.5

4.14.6 Calcular el diagrama de momentos flectores en la viga del ejercicio 4.12.7, empleando el método general de flexibilidad, y eligiendo como incógnitas redundantes los momentos en los apoyos B y C. Demostrar que las ecuaciones obtenidas coinciden con las que resultan de aplicar la fórmula de los tres momentos (véase el ejercicio 4.12.8).

Capítulo 5

Pórticos

5.1 INTRODUCCIÓN

Un pórtico es una estructura reticular formada por elementos conectados entre sí de forma rígida, y que está destinada a transmitir las fuerzas exteriores aplicadas sobre ella por medio de esfuerzos axiales, cortantes y de flexión o torsión, en función de su disposición.

El modelo estructural idealizado de un pórtico se basa en las siguientes suposiciones:

- Los elementos son piezas prismáticas, también denominadas barras, cuya sección transversal es despreciable frente a su longitud y cuyo eje geométrico es recto. Pueden absorber esfuerzos axiales, cortantes y de flexión o torsión. En algunos casos pueden existir también elementos curvos, que se estudian en el capítulo 6.
- Las barras están dispuestas formando una retícula, y su unión con los nudos se efectúa normalmente mediante uniones rígidas (empotramientos) que transmiten esfuerzos axiales y cortantes, así como momentos de flexión y torsión. También pueden existir uniones de otros tipos, que transmiten sólo algunos de los esfuerzos anteriores: la más frecuente es la articulación, que impide la transmisión de un momento.

La disposición espacial de los pórticos puede ser plana o tridimensional. Para que un pórtico sea plano se deben cumplir además las siguientes condiciones:

- ◊ Los ejes geométricos de todas las barras están contenidos en un mismo plano, que es el plano de la estructura, y de ordinario se toma como el plano XY.
- ◊ Las fuerzas exteriores aplicadas están contenidas en el propio plano de la estructura, mientras que los momentos aplicados son perpendiculares a él. Las reacciones en los apoyos están contenidas asimismo en el plano de la estructura. Las cargas exteriores pueden estar aplicadas sobre los nudos o sobre las barras.

◊ Bajo las condiciones anteriores el pórtico adopta una deformada plana, teniendo cada punto dos desplazamientos contenidos en su plano y un giro perpendicular a él. Cada barra del pórtico está sometida a esfuerzos axiales, cortantes y de flexión, y acumula energía axial y de flexión y opcionalmente de esfuerzo cortante (según la teoría empleada para su estudio).

Si no se cumplen las condiciones anteriores el pórtico es espacial: las fuerzas pueden tener cualquier orientación y la deformación de un punto está formada por tres desplazamientos y tres giros. Las barras pueden estar sometidas a esfuerzos axiales, momentos de flexión en dos planos, fuerzas cortantes en dos planos y un momento de torsión.

Se considera que el material es elástico lineal, y que las deformaciones son pequeñas, comparadas con las dimensiones de la estructura sin deformar

Como caso particular de los pórticos están otros tipos de estructuras: si todas las uniones entre barras y nudos en un pórtico plano son articuladas éste se convierte en una celosía plana; si todas las uniones son articulaciones esféricas, un pórtico tridimensional se convierte en una celosía espacial y si todas las vigas están alineadas y las cargas son perpendiculares a ellas el pórtico se convierte en una viga.

5.2 CONDICIONES DE ESTABILIDAD

En los pórticos la mayor parte de las barras están empotradas entre sí, por lo que no suelen presentarse problemas de estabilidad, y el grado de indeterminación estática suele ser muy alto. Se denomina r al número de reacciones en los apoyos, c al número de condiciones de construcción, b al número de barras y n al número de nudos.

5.2.1 Pórticos planos

En este caso las reacciones pueden ser dos fuerzas en las direcciones X e Y, y un momento en la dirección Z. Las condiciones de construcción pueden ser articulaciones (condiciones de momento flector nulo), o deslizaderas en sentido axial o transversal a cada barra (fuerza axial o cortante nula).

El número de ecuaciones de la estática que pueden plantearse es 3 por cada nudo y 3 más por cada barra, que unidas a las c condiciones de construcción dan $3n+3b+c$ ecuaciones. Por otro lado el número de fuerzas incógnita es de 6 por cada barra, más las r reacciones exteriores, dando $6b+r$ incógnitas.

Con estas magnitudes, la condiciones de estabilidad del pórtico se resumen en la tabla siguiente:

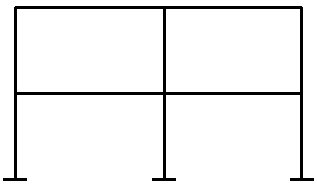
A			$6b + r < 3n + 3b + c$	$\rightarrow$	Inestable
B	Isostático	$\rightarrow$	$6b + r = 3n + 3b + c$		
C	Hiperestático	$\rightarrow$	$6b + r > 3n + 3b + c$		

La condición A es suficiente para indicar que el pórtico es inestable, pero sin indicar el origen de esta inestabilidad. El número de grados de libertad $g=3n-3b+c-r$.

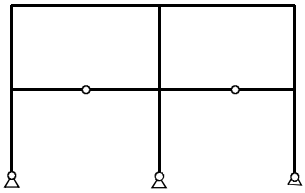
Las condiciones B y C son necesarias pero no suficientes, ya que se requiere además que haya una disposición de las barras y las reacciones tal que no exista inestabilidad exterior del pórtico en su conjunto, ni interior en ningún subconjunto del mismo.

Si la disposición de las barras es adecuada para que no haya inestabilidad, el grado de hiperestaticidad en el caso C es $h=3b-3n+r-c$.

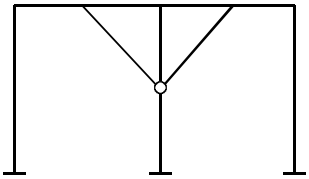
Ejemplos



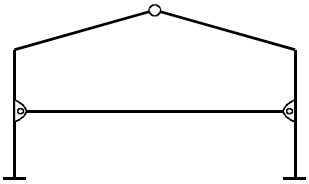
b=10 n=9 r=9 c=0 h=12



b=12 n=11 r=6 c=2 h=7



b=10 n=9 r=9 c=3 h=9



b=7 n=7 r=6 c=3 h=3

5.2.2 Pórticos espaciales

En los pórticos espaciales las reacciones en los apoyos pueden ser tres fuerzas y tres momentos. Las condiciones de construcción pueden ser articulaciones (condiciones de momento flector o torsor nulo) o deslizaderas (fuerza axial o fuerza cortante nula).

El número de ecuaciones de la estática que pueden plantearse es 6 por cada nudo y 6 más por cada barra, que unidas a las c condiciones de construcción dan un total de $6n+6b+c$ ecuaciones. Por otro lado el número de fuerzas incógnita es de 12 por cada barra (6 en cada extremo), más las r reacciones exteriores, dando $12b+r$ incógnitas.

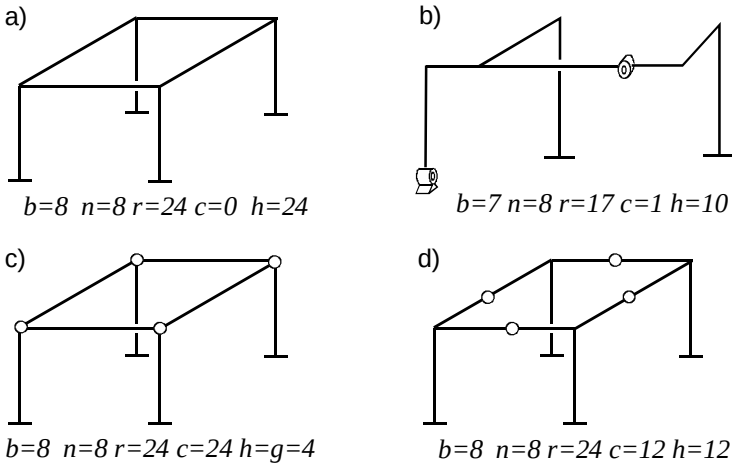
Con estas magnitudes, la condiciones de estabilidad del pórtico se resumen en la tabla siguiente:

A			$12b + r < 6n + 6b + c$	$\rightarrow$	Inestable
B	Isostático	$\rightarrow$	$12b + r = 6n + 6b + c$		
C	Hiperestático	$\rightarrow$	$12b + r > 6n + 6b + c$		

Al igual que en el caso plano la condición A es suficiente para indicar que el pórtico tiene algún tipo de inestabilidad, pero sin indicar su origen interior o exterior. El número de grados de libertad es $g=6n-6b+c-r$.

Las condiciones B y C son necesarias pero no suficientes, ya que se requiere además que la disposición de las barras y las reacciones sea tal que no se produzca inestabilidad exterior ni interior en ningún subconjunto del pórtico. Si esta disposición es adecuada, el grado de hiperestaticidad en el caso C es $h=6b-6n+r-c$.

Ejemplos



En el caso c la estructura es a la vez hiperestática de grado 4, e inestable con 4 grados de libertad. La hiperestaticidad está localizada en el esfuerzo axial de las cuatro barras horizontales con rótulas esféricas en los dos extremos. La inestabilidad está localizada en el momento torsor en dichas cuatro barras, que queda indeterminado: las barras pueden girar sobre su eje sin fuerza alguna. Nótese que el número de condiciones de construcción en este caso viene dado por la liberación de seis momentos en cada uno de los nudos con rótula esférica.

En el caso d el número de nudos, barras, etc. es el mismo que en el caso c, pero la disposición de las rótulas hace que no se produzca el fenómeno anterior.

5.3 ESTUDIO DE LA BARRA PRISMÁTICA EN EL PLANO

A continuación se estudia el comportamiento estructural de una de las barras prismáticas que forman el pórtico. Se considera un sistema de ejes local a la barra, tal que su eje X coincide con su eje geométrico, y se emplea el criterio de signos indicado en la figura 5.1.

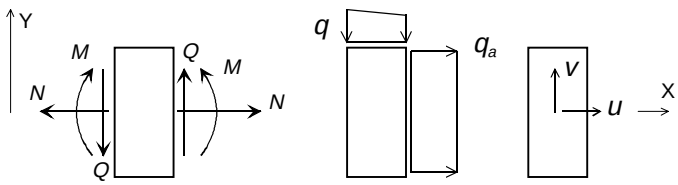


Figura 5.1

Las hipótesis básicas para el estudio de la pieza prismática en el plano son:

- Con respecto a la flexión, se acepta la hipótesis básica de la teoría clásica de flexión de vigas (hipótesis de Navier): las secciones rectas y perpendiculares a la fibra neutra en el estado sin deformar se mantienen rectas y perpendiculares a la fibra neutra en el estado deformado. Con esta hipótesis y suponiendo pequeñas deformaciones, se cumple que el

giro que sufre una sección recta de la viga es igual a la pendiente de la curva deformada elástica:

$$\theta \approx tg\,\theta = \frac{dv}{dx} \tag{5.1}$$

- No se considera la energía debida al esfuerzo cortante, aunque como ya se sabe del estudio de las vigas esto es una consecuencia de la hipótesis de Navier. La consideración de esta energía se estudiará en el apartado 5.7.

5.3.1 Campo de desplazamientos

La deformación del centro de gravedad de la sección G tiene dos componentes: una axial $u(x)$ y otra lateral $v(x)$, asociada a la flexión. Las deformaciones de un punto P situado a una distancia *y* de G se indican en la figura 5.2, y su valor es:

$$u_P = u - \theta y = u - \frac{dv}{dx} y \qquad\qquad v_P = v \tag{5.2}$$

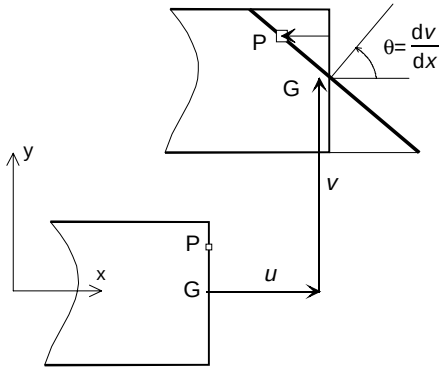


Figura 5.2

5.3.2 Deformaciones unitarias

Las deformaciones unitarias en el punto P son:

$$\varepsilon_x = \frac{\partial u_P}{\partial x} = \frac{du}{dx} - \frac{d^2 v}{dx^2} y \tag{5.3}$$

$$\varepsilon_y = \frac{\partial v_P}{\partial y} = 0 \tag{5.4}$$

$$\gamma_{xy} = \frac{\partial u_P}{\partial y} + \frac{\partial v_P}{\partial x} = -\frac{dv}{dx} + \frac{dv}{dx} = 0 \tag{5.5}$$

El material está en un estado unidimensional de deformación, sometido sólo a una ε_x, que en adelante se denomina simplemente ε, y cuyo valor es:

$$\varepsilon = \frac{du}{dx} - \frac{d^2 v}{dx^2} y = \varepsilon_G - v'' y \tag{5.6}$$

donde ε_G es la deformación unitaria del centro de gravedad G, y v'' es la curvatura de la sección. La variación de ε en la sección es lineal, y a consecuencia de la hipótesis de Navier no existe deformación de cortadura γ_{xy}.

5.3.3 Ecuación constitutiva

Suponiendo un material elástico lineal, la relación entre la tensión y la deformación unitaria es:

$$\sigma = E(\varepsilon - \varepsilon_0) \tag{5.7}$$

Sustituyendo la expresión de las deformaciones unitarias se obtiene la expresión de la tensión axial en el punto P:

$$\sigma = E(\varepsilon_G - v''y - \varepsilon_0) \tag{5.8}$$

No aparece tensión cortante τ alguna, al no haber deformación de cortante γ. Como ya se ha indicado en el estudio de vigas, esto es una contradicción originada en la hipótesis de Navier.

5.3.4 Distribución de temperatura

Se supone una variación lineal de la temperatura en la sección de la viga, desde un valor T_S en la cara superior hasta un valor T_I en la cara inferior (figura 5.3).

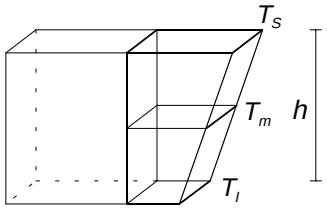


Figura 5.3

En lugar de estas temperaturas resulta más conveniente emplear la temperatura media T_m y el gradiente entre las caras T_g:

$$T_m = \frac{T_S + T_I}{2} \tag{5.9}$$

$$T_g = \frac{T_S - T_I}{h} \tag{5.10}$$

siendo h el canto de la viga.

La distribución de temperaturas queda entonces como:

$$T = T_m + yT_g \tag{5.11}$$

Con esto la distribución de deformaciones unitarias térmicas se puede poner como:

$$\varepsilon_0 = \alpha T = \alpha T_m + \alpha y T_g \tag{5.12}$$

5.3.5 Esfuerzo axial

Se define como la resultante de las tensiones en la cara de la viga. De esta manera es estáticamente equivalente a las fuerzas exteriores que actúan a un lado de la sección. Llamando *b(y)* al ancho de la sección:

$$N \equiv \int \sigma dA = \int \sigma b dy = \int E(\varepsilon - \varepsilon_0) b dy \tag{5.13}$$

$$N = \int E\varepsilon_G b dy - Ev'' \int y b dy - E\int \varepsilon_0 b dy = E\varepsilon_G \int b dy - 0 - E\int \varepsilon_0 b dy \tag{5.14}$$

Luego queda

$$N = EA\varepsilon_G - E\int \varepsilon_0 b dy \tag{5.15}$$

Si las deformaciones iniciales tienen una distribución lineal se obtiene la siguiente expresión para el esfuerzo axial:

$$N = EA\varepsilon_G - E\alpha T_m \int b dy - E\alpha T_g \int y b dy \tag{5.16}$$

La tercera integral es nula, con lo que la expresión final de *N* es

$$N = EA\varepsilon_G - EA\alpha T_m \tag{5.17}$$

La deformación unitaria del punto G, en función de *N*, es

$$\varepsilon_G = \frac{du}{dx} = \frac{N}{EA} + \alpha T_m \tag{5.18}$$

Nótese que estas expresiones son iguales a las obtenidas para las celosías, empleando la temperatura media. El comportamiento de la barra, en lo referente al esfuerzo axial, es por lo tanto igual que una barra de una celosía.

5.3.6 Momento flector

Se define como el momento estático de las tensiones respecto del centro de gravedad. De esta manera es estáticamente equivalente al momento de las fuerzas exteriores que actúan a un lado de la sección. El signo negativo empleado en su definición es debido al criterio de signos adoptado para el momento *M* y para las tensiones.

$$M \equiv -\int \sigma y dA = -\int \sigma b y dy = -\int E(\varepsilon - \varepsilon_0) b y dy \tag{5.19}$$

$$M = -E\varepsilon_G \int b y dy + Ev'' \int y^2 b dy + E\int \varepsilon_0 b y dy = 0 + Ev''I + E\int \varepsilon_0 b y dy \tag{5.20}$$

La primera integral es nula, y la segunda corresponde al momento de inercia *I* de la sección, con lo que queda:

$$M = EI\frac{d^2v}{dx^2} + E\int \varepsilon_0 b y dy \tag{5.21}$$

Si las deformaciones iniciales tienen una distribución lineal la expresión es:

$$M = EIv'' + E\alpha T_m \int b y dy + E\alpha T_g \int y^2 b dy \tag{5.22}$$

La segunda integral es nula, con lo que la expresión final del momento flector *M* es

$$M = EI\frac{d^2v}{dx^2} + EI\alpha T_g \tag{5.23}$$

que es la ecuación de la deformada elástica de una pieza prismática cuando hay efectos térmicos. La curvatura de la deformada, en función del momento flector *M*, es

$$\frac{d^2v}{dx^2} = \frac{M}{EI} - \alpha T_g \tag{5.24}$$

Esta expresión es igual a la obtenida para las vigas planas, empleando la temperatura gradiente. De ella han desaparecido todos los términos que dependen del esfuerzo axial y de la temperatura media, pues la flexión está desacoplada del esfuerzo axial.

5.3.7 Esfuerzo cortante

El esfuerzo cortante se define como la resultante de las tensiones cortantes verticales en la sección de la barra, y su valor resulta ser:

$$\int \tau dA = \int G\gamma dA = 0 \tag{5.25}$$

Como ya se indicó en el estudio de la flexión de vigas planas, la hipótesis de Navier hace que el esfuerzo cortante sea nulo (ver apartado 4.3.6). Sin embargo, para respetar el equilibrio se considera que en la sección hay un esfuerzo cortante vertical *Q*, no nulo, que es equivalente a las cargas exteriores situadas a un lado de ella, aunque no haya deformaciones de cortante.

5.3.8 Relación entre la tensión y los esfuerzos

La tensión en un punto cualquiera es:

$$\sigma = E(\varepsilon_G - v''y - \varepsilon_0) \tag{5.26}$$

Sustituyendo en ella los valores de ε_G y de *v*'' en función de *M* y *N*, y el valor de ε_0 para una distribución de temperaturas lineal, se obtiene:

$$\sigma = E(\frac{N}{EA} + \alpha T_m - \frac{M}{EI} + \alpha y T_g - \alpha T_m - \alpha y T_g) = \frac{N}{A} - \frac{My}{I} \tag{5.27}$$

que es la conocida expresión de las tensiones en una pieza prismática en el plano.

5.3.9 Ecuaciones de equilibrio

Se obtienen aislando un elemento diferencial como el indicado en la figura 5.4.

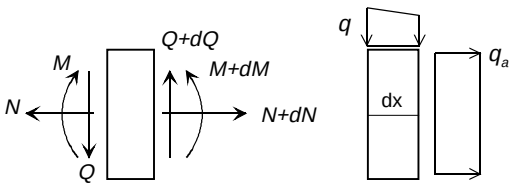


Figura 5.4

- *Equilibrio de momentos*

$$Q = -\frac{dM}{dx} \tag{5.28}$$

Sustituyendo el valor de *M* se obtiene:

$$Q = -\frac{d}{dx}\left(EI\frac{d^2v}{dx^2} + EI\alpha T_g \right) \tag{5.29}$$

- *Equilibrio vertical de fuerzas*

$$q = \frac{dQ}{dx} \tag{5.30}$$

Sustituyendo el valor de Q se obtiene:

$$q = -\frac{d^2}{dx^2}\left(EI\frac{d^2v}{dx^2} + EI\alpha T_g \right) \tag{5.31}$$

Si la viga es de propiedades uniformes y la temperatura gradiente no depende de x, queda:

$$q = -EI\frac{d^4v}{dx^4} \tag{5.32}$$

que es la ecuación diferencial que controla la flexión de una viga.

- *Equilibrio horizontal*

$$\frac{dN}{dx} = -q_a \tag{5.33}$$

Sustituyendo el valor de N se obtiene la ecuación que controla la deformación axial:

$$\frac{d}{dx}\left(EA\frac{du}{dx} - EA\alpha T_m \right) = -q_a \tag{5.34}$$

Se observa que sobre la barra ocurren dos fenómenos: el de flexión, cuya incógnita primaria es v, y el de deformación axial, cuya incógnita primaria es u. Ambos fenómenos están desacoplados, estando la flexión controlada por una ecuación diferencial de orden 4 (ecuación (5.32)) y el esfuerzo axial por una de orden 2 (ecuación (5.34)).

5.3.10 Densidad de energía elástica

La expresión de la densidad de energía complementaria es:

$$U_o^* = \int_0^\sigma \varepsilon d\sigma = \int_0^\sigma \left(\frac{\sigma}{E} + \varepsilon_0 \right) d\sigma = \frac{\sigma^2}{2E} + \varepsilon_0\sigma \tag{5.35}$$

Sustituyendo la expresión de las tensiones en función de los esfuerzos internos (ecuación (5.27)), se obtiene:

$$U_0^* = \frac{1}{2E}\left(\frac{N^2}{A^2} - \frac{2NMy}{AI} + \frac{M^2y^2}{I^2} \right) + \varepsilon_0\left(\frac{N}{A} - \frac{My}{I} \right) \tag{5.36}$$

que permite hallar la densidad de energía en un punto cualquiera de la viga, en función de los esfuerzos en la viga y de la distribución de temperaturas.

5.3.11 Energía de deformación por unidad de longitud

La energía elástica por unidad de longitud U_L^* resulta de integrar la expresión de la densidad de energía en el área de la sección:

$$U_L^* = \int_A U_o^* \, dA = \int U_o^* \, b(y) \, dy \tag{5.37}$$

Sustituyendo el valor de la densidad de energía dada por (5.36) se obtiene:

$$U_L^* = \int \frac{N^2}{2EA^2} b dy - \int \frac{NMy}{EAI} b dy + \int \frac{M^2 y^2}{2EI^2} b dy + \int \varepsilon_0 \frac{N}{A} b dy - \int \varepsilon_0 \frac{My}{I} b dy \tag{5.38}$$

Las magnitudes E, A, I, N, M no dependen de la coordenada y, por lo que salen fuera de las integrales; además la segunda integral es nula pues corresponde al momento estático de la sección respecto de su centro de gravedad. En la primera integral se identifica el área y en la tercera el momento de inercia de la sección, con lo que se obtiene:

$$U_L^* = \frac{N^2}{2EA} + \frac{M^2}{2EI} + \frac{N}{A} \int \varepsilon_0 b dy - \frac{M}{I} \int \varepsilon_0 y b dy \tag{5.39}$$

Expresión práctica particular para distribución de temperatura lineal

Sustituyendo en (5.39) la expresión de la deformación unitaria térmica lineal en la coordenada y, se obtiene

$$U_L^* = \frac{N^2}{2EA} + \frac{M^2}{2EI} + \frac{N\alpha T_m}{A} \int b dy - \frac{M\alpha T_m}{I} \int b y dy + \frac{N\alpha T_g}{A} \int b y dy - \frac{M\alpha T_g}{I} \int y^2 b dy \tag{5.40}$$

Las integrales del cuarto y quinto términos son nulas, pues corresponden al momento estático de la sección respecto al centro de gravedad. La integral del tercer término define el área de la sección y la del sexto término el momento de inercia, con lo que se obtiene:

$$U_L^* = \frac{N^2}{2EA} + \frac{M^2}{2EI} + N\alpha T_m - M\alpha T_g \tag{5.41}$$

Esta es la expresión de la energía acumulada por unidad de longitud de viga, en función del esfuerzo axial N, del momento flector M y del campo lineal de temperaturas definido por T_m y T_g.

5.3.12 Energía de deformación

La energía acumulada en toda la barra U_b^* se obtiene integrando la energía por unidad de longitud a lo largo de toda su longitud:

$$U_b^* = \int_V U_o^* dv = \int_L \left[\int_A U_o^* dA \right] dx = \int_L U_L^* dx \tag{5.42}$$

$$U_b^* = \int_L \frac{N^2}{2EA} dx + \int_L \frac{M^2}{2EI} dx + \int_L N\alpha T_m dx - \int_L M\alpha T_g dx \tag{5.43}$$

Esta expresión es general, estando sólo limitada a una distribución de temperatura lineal en el canto de la viga. Nótese que la temperatura media T_m sólo se acopla con el esfuerzo axial N (que tiene que ver con la tensión media en la sección), y el gradiente de temperatura T_g sólo se acopla con el momento flector M (que tiene que ver con el gradiente de tensión en la sección).

La energía acumulada en toda la estructura es la suma de la energía de todas sus barras. Su expresión es la misma anterior, pero ampliando los límites de integración a toda la estructura, lo cual se indica con el dominio e para las integrales:

$$U^* = \sum U_b^* = \int_e \frac{N^2}{2EA} dx + \int_e \frac{M^2}{2EI} dx + \int_e N\alpha T_m dx - \int_e M\alpha T_g dx \tag{5.44}$$

Caso particular de barra de propiedades uniformes

Si el esfuerzo axial N, el producto EA y la temperatura media T_m son constantes a lo largo de la barra, como es habitual, la expresión (5.44) se simplifica:

$$U_b^* = \frac{N^2 L}{2EA} + \int_L \frac{M^2}{2EI} dx + N\alpha T_m L - \int_L M\alpha T_g dx \tag{5.45}$$

Finalmente la energía acumulada en toda la estructura se obtiene sumando la energía de cada barra:

$$U^* = \sum_i \frac{N_i^2 L_i}{2E_i A_i} + \int_e \frac{M^2}{2EI} dx + \sum_i N_i \alpha_i T_{mi} L_i - \int_e M\alpha T_g dx \tag{5.46}$$

donde el subíndice i indica la barra, y las integrales están extendidas a lo largo de toda la estructura (dominio e).

5.3.13 Errores en la forma de las barras

Es posible introducir en el análisis los errores que pueda haber en la forma de las barras, que se originan por la diferencia entre la geometría del elemento y las dimensiones de su ubicación en la estructura. Su consideración se efectúa a base de incluir un valor de la deformación unitaria inicial ε_0 que cuantifica el error en la forma de la barra.

Lo más habitual es suponer que el error en la forma de la barra se puede representar mediante una variación de las deformaciones unitarias iniciales que es lineal en el canto de la barra y constante a lo largo de su longitud:

$$\varepsilon_0 = \varepsilon_{0m} + y\varepsilon_{0g} \tag{5.47}$$

Nótese que con esta suposición existe un paralelismo total con las deformaciones iniciales térmicas:

$$\varepsilon_{0m} \leftrightarrow \alpha T_m \qquad \varepsilon_{0g} \leftrightarrow \alpha T_g \tag{5.48}$$

por lo que pueden utilizarse todas las expresiones anteriores, haciendo la sustitución correspondiente.

Ejemplo. *Cuantificar el valor de las deformaciones unitarias iniciales para una barra que es ΔL más larga que su longitud de montaje.*

En este caso la distribución de ε_0 *en la sección es constante, y su valor es:*

$$\varepsilon_{0m} = \frac{\Delta L}{L} \qquad \varepsilon_{0g} = 0$$

Ejemplo. *Cuantificar el valor de las deformaciones unitarias iniciales para una barra de longitud L, que tiene una curvatura inicial de radio R, siendo R mucho mayor que L.*

El alargamiento de la fibra superior vale:

$$\Delta L_S = (R + \frac{h}{2})\theta$$

siendo θ *el ángulo que forma la viga curva, y que en pequeñas deformaciones se puede poner como:*

$$\theta \approx \tan\theta = L / R$$

Luego la deformación unitaria de la fibra superior es:

$$\varepsilon_S = \frac{\left(R + \frac{h}{2}\right)\theta - L}{L} = \frac{\left(R + \frac{h}{2}\right)\frac{L}{R} - L}{L} = \frac{h}{2R}$$

Análogamente la deformación unitaria en la fibra inferior es:

$$\varepsilon_I = -\frac{h}{2R}$$

con lo que el gradiente resulta ser:

$$\varepsilon_{0g} = \frac{\varepsilon_S - \varepsilon_I}{h} = \frac{1}{R}$$

5.4 MÉTODO DE FLEXIBILIDAD EN PÓRTICOS PLANOS

5.4.1 Incógnitas hiperestáticas

En el análisis de pórticos se pueden emplear las siguientes incógnitas hiperestáticas:

- Reacciones exteriores en los apoyos, que pueden ser fuerzas, o momentos en los empotramientos.
- Esfuerzos interiores, que pueden ser esfuerzos axiales, esfuerzos cortantes o momentos flectores (figura 5.5).

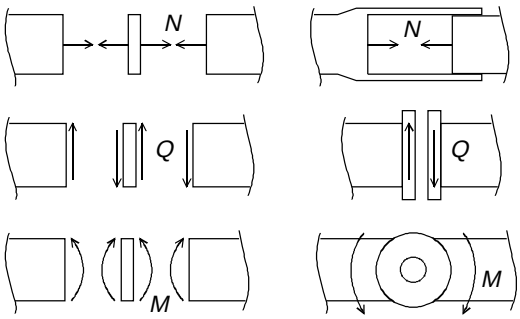


Figura 5.5

Al conjunto de las *h* incógnitas hiperestáticas se le denomina genéricamente $X_j \; j = 1, h$, y su elección es uno de los pasos críticos en el análisis de los pórticos hiperestáticos. Se debe efectuar considerando que las incógnitas hiperestáticas deben ser linealmente independientes, y que si se eliminan de la estructura, ésta se debe convertir en una estructura isostática y estable.

En general existen varios conjuntos distintos válidos de incógnitas hiperestáticas, y su elección debe hacerse por inspección, en base a la experiencia. El método habitualmente empleado consiste en ir eliminado del pórtico, uno tras otro, una serie de esfuerzos interiores o de reacciones, hasta llegar a una estructura que se pueda identificar como isostática, por ejemplo un voladizo o una celosía. De esta manera se obtienen a la vez el valor del grado de hiperestaticidad y un conjunto de incógnitas hiperestáticas.

5.4.2 Ecuaciones de compatibilidad

Las condiciones de compatibilidad a introducir en el análisis pueden ser de dos tipos, según la naturaleza de la incógnita hiperestática.

- Si la incógnita hiperestática es una reacción en un apoyo, la condición de compatibilidad geométrica es que la deformación en la dirección de la reacción es conocida. Normalmente esta deformación es nula, pero en otros casos tiene un valor dato conocido. Por el teorema de Crotti-Engesser la deformación del apoyo es:

$$\frac{\partial U^*}{\partial X_j} = \Delta_j \tag{5.49}$$

  siendo X_j la incógnita hiperestática y Δ_j la deformación conocida.

- Si la incógnita hiperestática es un esfuerzo interno en una barra, la condición de compatibilidad geométrica a emplear es la igualdad de las deformaciones de las dos caras en el punto donde se ha cortado la barra, denominadas habitualmente caras izquierda (*i*) y derecha (*d*). Esta condición puede expresarse en todos los casos (figura 5.6) como:

$$\Delta_i = \Delta_d \tag{5.50}$$

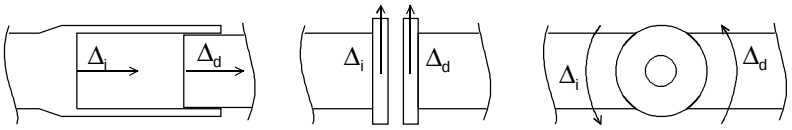


Figura 5.6

Sin embargo es mucho más simple expresar esta ecuación en base al segundo teorema de Engesser:

$$\frac{\partial U^*}{\partial X_j} = 0 \qquad (5.51)$$

Se observa que ambas ecuaciones de compatibilidad (5.49) y (5.51) tienen expresiones similares, con la única diferencia de que la ecuación está igualada a cero si se trata de un esfuerzo interno, y está igualada al desplazamiento conocido si se trata de una reacción en un apoyo.

5.4.3 Proceso general de resolución

La resolución de un pórtico empleando el método de flexibilidad se basa en la aplicación del principio de superposición y de las condiciones de compatibilidad geométrica. Los pasos a seguir son los siguientes:

- Determinar el grado de hiperestaticidad del pórtico *h*, y seleccionar un conjunto de *h* incógnitas hiperestáticas de acuerdo con los criterios indicados antes. Eliminarlas del pórtico, con lo que se obtiene una estructura isostática (figura 5.7).

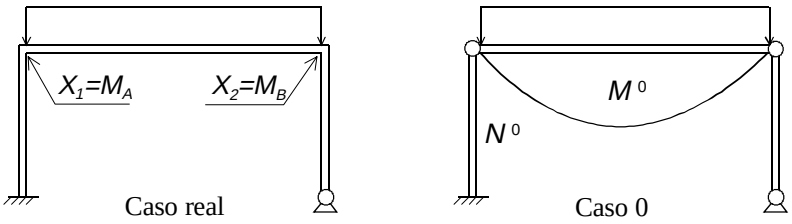


Figura 5.7

- Aplicar el principio de superposición y descomponer el comportamiento real de la estructura en suma de 1+*h* casos. En todos ellos se han eliminado las incógnitas hiperestáticas, por lo que pueden calcularse empleando las ecuaciones de equilibrio estático.

  ◊ Caso 0, en el que actúan solamente las fuerzas exteriores (fig. 5.7). Los esfuerzos que aparecen en las barras son: esfuerzos axiales N^0 y momentos flectores M^0. También aparecen esfuerzos cortantes, pero sólo es necesario calcularlos si se considera la energía de esfuerzo cortante (ver apartado 5.7), pues de lo contrario no intervienen en el desarrollo posterior.

◊ Casos 1 a *h*, (figura 5.8), en los que se aplica un valor unitario de la incógnita hiperestática X_j y cero en todas las demás. Los esfuerzos que aparecen en las barras para el caso *j* son: esfuerzo axial N^j y momento flector M^j.

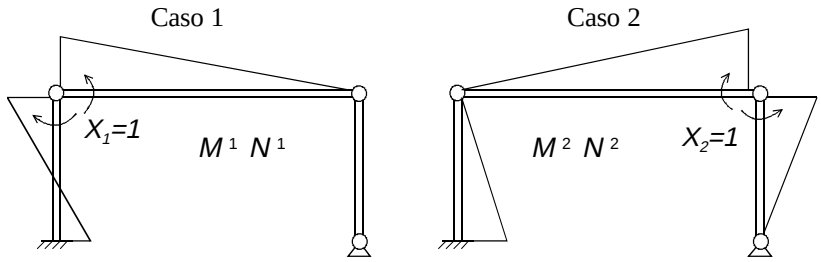


Figura 5.8

- Los esfuerzos finales en las barras son la combinación lineal de los 1+*h* casos básicos:

$$N = N^0 + \sum_j X_j N^j \qquad M = M^0 + \sum_j X_j M^j \tag{5.52}$$

- Sustituyendo el valor de la energía acumulada en toda la estructura (ecuación (5.44)) en las ecuaciones de compatibilidad, se obtiene:

$$\int N\gamma \frac{\partial N}{\partial X_j} dx + \int \alpha T_m \frac{\partial N}{\partial X_j} dx + \int M\mu \frac{\partial M}{\partial X_j} dx - \int \alpha T_g \frac{\partial M}{\partial X_j} dx = 0 \qquad j = 1, h \tag{5.53}$$

donde las integrales están extendidas a todo el pórtico, y se han empleado los coeficientes γ y μ que definen la flexibilidad de cada elemento:

$$\gamma = 1/EA \qquad \mu = 1/EI \tag{5.54}$$

Derivando en las expresiones (5.52) de los esfuerzos en las barras se obtiene:

$$\frac{\partial N}{\partial X_j} = N^j \qquad \frac{\partial M}{\partial X_j} = M^j \tag{5.55}$$

con lo que las ecuaciones de compatibilidad quedan:

$$\int N\gamma N^j dx + \int \alpha T_m N^j dx + \int M\mu M^j dx - \int \alpha T_g M^j dx = 0 \qquad j = 1, h \tag{5.56}$$

Se obtienen así *h* ecuaciones independientes con *h* incógnitas - las incógnitas hiperestáticas - que están incluidas en la expresión de los esfuerzos.

Caso particular de barra de propiedades uniformes

Si N, EA, α, T_m, T_g son constantes en cada una de las vigas, como es el caso habitual, la expresión (5.56) queda simplificada:

$$\sum_i N_i \rho_i N_i^j + \sum_i \lambda_{mi} N_i^j + \int M\mu M^j dx - \alpha T_g \int M^j dx = 0 \qquad j = 1, h \tag{5.57}$$

Donde se han empleado los mismos parámetros que en el estudio de celosías:

$\rho_i = L_i / E_i A_i$ es la flexibilidad axial de la barra *i*,

$\lambda_{mi} = \alpha_i T_{mi} L_i$ es el alargamiento de la barra *i* debido a la temperatura media.

Para poner de manifiesto las incógnitas hiperestáticas se sustituyen en las ecuaciones (5.57) los valores de N_i y de M dados por (5.52):

$$\begin{aligned}&\sum_i \left(N_i^0 + \sum_k X_k N_i^k \right) \rho N_i^j + \sum_i \lambda_{mi} N_i^j + \\ &+ \int \left(M^0 + \sum_k X_k M^k \right) \mu M^j dx - \alpha T_g \int M^j dx = 0 \qquad j = 1, h\end{aligned} \tag{5.58}$$

Cambiando de orden los sumatorios este sistema de ecuaciones se puede poner en la forma:

$$\begin{aligned}&\sum_k \left(\int \mu M^j M^k dx + \sum_i \rho_i N_i^j N_i^k \right) X_k = \\ &= -\sum_i N_i^0 \rho_i N_i^j - \int M^0 \mu M^j dx - \sum_i \lambda_{mi} N_i^j + \int \alpha T_g M^j dx \qquad j = 1, h\end{aligned} \tag{5.59}$$

cuya solución son las incógnitas hiperestáticas *X* y que se puede poner en forma matricial como:

$$\mathbf{fX} = \mathbf{D} \tag{5.60}$$

La matriz **f** es la matriz de flexibilidad del pórtico: es simétrica, de tamaño *h*, y siempre tiene inversa si las incógnitas hiperestáticas son independientes. Sus términos tienen dos sumandos, uno debido a la flexibilidad a flexión y otro debido a la flexibilidad a esfuerzo axial:

$$f_{jk} = \int \mu M^j M^k dx + \sum_i \rho_i N_i^j N_i^k \tag{5.61}$$

estando la integral extendida a toda la estructura y el sumatorio a todas las barras que la forman. Cada coeficiente es el desplazamiento que se produce en el caso *j* en la dirección de la incógnita hiperestática *k*, como se demostró en el estudio del sentido físico del método de flexibilidad en el capítulo 3.

El término independiente **D** tiene cuatro sumandos, como puede verse en (5.59): los dos primeros son debidos a las fuerzas exteriores que actúan sobre la estructura y los dos últimos son debidos a las variaciones de temperatura existentes en ella. El término *j* de este vector es el desplazamiento que se produce en el caso 0 en la dirección de la incógnita hiperestática *j*.

5.5 CÁLCULO DE DEFORMACIONES EN PÓRTICOS PLANOS

Cuando se emplea el método de flexibilidad, el cálculo de una deformación requiere la determinación previa de los esfuerzos en la estructura, seguida de un proceso posterior específico, que se explica a continuación, y que es similar al empleado para celosías y vigas.

Sea un pórtico, isostático o hiperestático, en el que ya se han calculado los esfuerzos axiales y los momentos flectores. Se desea calcular la deformación en un punto y una dirección dados, que se denomina Δ_r. Se trata por lo tanto de una magnitud escalar, que puede ser indistintamente un desplazamiento o un giro. Para determinarla se emplea el método de la fuerza virtual unitaria:

- Se añade al pórtico real ya calculado, un caso virtual (caso V), en el que actúa únicamente una fuerza virtual V en la dirección del desplazamiento buscado. Si éste es un giro, se aplica un momento virtual en su dirección (figura 5.9).

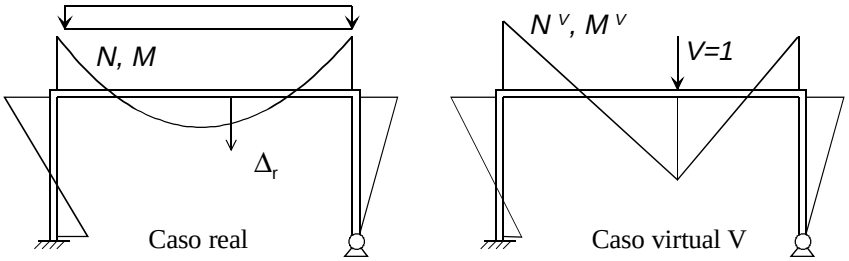


Figura 5.9

- Se resuelve el caso virtual para un valor unitario de la fuerza virtual V=1, y se calculan los esfuerzos y momentos que aparecen, que se denominan N^V y M^V. Su cálculo requiere la resolución de un pórtico igual al original.
- Bajo la acción conjunta de las cargas reales y de la fuerza virtual V, los momentos flectores y los esfuerzos axiales en el pórtico valen:

$$M^{RV} = M + M^V V \qquad N^{RV} = N + N^V V \tag{5.62}$$

- La energía complementaria que se acumula es:

$$U^{*RV} = \int_e \frac{N^{RV^2}}{2EA} dx + \int_e \frac{M^{RV^2}}{2EI} dx + \int_e N^{RV} \alpha T_m dx - \int_e M^{RV} \alpha T_g dx \tag{5.63}$$

La deformación buscada se obtiene empleando el teorema de Crotti-Engesser, considerando que la fuerza virtual no existe:

$$\Delta_r = \left(\frac{\partial U^{*RV}}{\partial V} \right)_{V=0} \tag{5.64}$$

$$\Delta_r = \left(\int_e \frac{N^{RV}}{EA} \frac{\partial N^{RV}}{\partial V} dx + \int_e \frac{M^{RV}}{EI} \frac{\partial M^{RV}}{\partial V} dx + \int_e \frac{\partial N^{RV}}{\partial V} \alpha T_m dx - \int_e \frac{\partial M^{RV}}{\partial V} \alpha T_g dx \right)_{V=0} \tag{5.65}$$

El valor de las derivadas es:

$$\frac{\partial M^{RV}}{\partial V} = M^V \qquad \frac{\partial N^{RV}}{\partial V} = N^V \tag{5.66}$$

con lo que se obtiene:

$$\Delta_r = \int_e N\gamma N^V dx + \int_e M\mu M^V dx + \int_e N^V \alpha T_m dx - \int_e M^V \alpha T_g dx \qquad (5.67)$$

Esta expresión puede aplicarse directamente para hallar la deformación buscada. Su uso requiere hallar los esfuerzos en el caso virtual unitario, cuyo cálculo implica resolver una vez más la estructura con una sola fuerza *V=1*.

Pórticos hiperestáticos

La aplicación de la expresión anterior para el cálculo de deformaciones resulta sencilla sólo si el pórtico es isostático, pero es muy compleja para casos hiperestáticos, pues requiere calcular los esfuerzos en el caso virtual unitario, que es a su vez hiperestático. Por esta razón resulta de interés desarrollar la expresión anterior, con objeto de obtener expresiones de utilización más simple. Para ello se efectúa el cálculo de los esfuerzos en el caso virtual unitario, empleando el método general descrito en 5.4.3.

El caso virtual unitario *V*=1 es hiperestático de grado *h*: se identifican en él *h* incógnitas hiperestáticas, que pueden ser las mismas que se utilizaron para calcular los esfuerzos en la estructura o no. Se descompone el caso virtual unitario en 1+*h* casos:

◊ Caso 0V, en el que actúan sólo las fuerzas exteriores, que en este caso es la fuerza virtual unitaria *V*=1 (figura 5.10). Los esfuerzos en este caso son N^{0V}, M^{0V}.

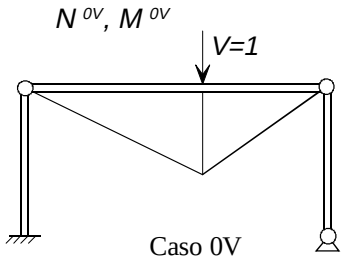


Figura 5.10

◊ Casos 1 a *h*, en los que se aplica un valor unitario de la incógnita hiperestática X_j y cero en todas las demás. Los esfuerzos que aparecen en la estructura se denominan N^j y M^j. Estos casos son exactamente iguales a los que se emplearon para calcular los esfuerzos en el pórtico (figura 5.8).

Los esfuerzos en el caso *V*=1 son:

$$M^V = M^{0V} + \sum_{j=1,h} X_j M^j \qquad N^V = N^{0V} + \sum_{j=1,h} X_j N^j \qquad (5.68)$$

Sustituyendo este valor en la expresión de la deformación:

$$\Delta_r = \int M\mu \left(M^{0V} + \sum_j X_j M^j \right) dx - \int \alpha T_g \left(M^{0V} + \sum_j X_j M^j \right) dx$$

$$+ \int N\gamma \left(N^{0V} + \sum_j X_j N^j \right) dx + \int \alpha T_m \left(N^{0V} + \sum_j X_j N^j \right) dx \qquad (5.69)$$

Reordenando los sumatorios se obtiene:

$$\Delta_r = \int_e N\gamma N^{0V} dx + \int_e M\mu M^{0V} dx + \int_e N^{0V}\alpha T_m dx - \int_e M^{0V}\alpha T_g dx$$
$$+ \sum_{j=1,h} X_j \left(\int N\gamma N^j dx + \int \alpha T_m N^j dx + \int M\mu M^j dx - \int \alpha T_g M^j dx \right) \qquad (5.70)$$

Pero la expresión entre paréntesis del último sumando es siempre nula, pues se trata de la condición de compatibilidad para la incógnita hiperestática *j*, con lo que queda:

$$\Delta_r = \int_e N\gamma N^{0V} dx + \int_e M\mu M^{0V} dx + \int_e N^{0V}\alpha T_m dx - \int_e M^{0V}\alpha T_g dx \qquad (5.71)$$

Esta ecuación permite obtener la deformación en un punto y dirección cualquiera de un pórtico hiperestático cuyos momentos flectores son *M* y cuyos esfuerzos axiales son *N*. No se requiere la resolución del caso con la fuerza virtual unitaria (que es hiperestático), sino solamente la de un caso isostático cargado con dicha fuerza *V*=1, lo cual simplifica mucho los cálculos. Nótese la similitud entre esta expresión y la inicial (5.67), que se diferencian únicamente en el uso de los esfuerzos N^{0V}, M^{0V} en lugar de los N^V, M^V.

Caso particular de barra de propiedades uniformes

Si las barras son de propiedades resistentes uniformes, y las temperaturas también son uniformes, las magnitudes N, EA, α, T_m, T_g son constantes y salen fuera de las integrales. Repitiendo el desarrollo anterior se obtiene la siguiente expresión para la deformación:

$$\Delta_r = \sum_i N_i \rho_i N_i^{0V} + \int_e M\mu M^{0V} dx + \sum_i N_i^{0V} \alpha_i T_{mi} L_i - \int_e M^{0V}\alpha T_g dx \qquad (5.72)$$

5.6 ESTUDIO DE LA BARRA PRISMÁTICA EN EL ESPACIO

Se considera una pieza prismática, referida a un sistema de ejes local, tal que su eje X coincide con el eje geométrico de la pieza y cuyos ejes Y y Z son los ejes principales de inercia de la sección recta. Esta pieza se estudia a flexión, cortante y esfuerzo axial, dejándose para más adelante las consideraciones sobre torsión. Se emplea el criterio de signos indicado en la figura 5.11.

5.6.1 Campo de desplazamientos

La deformación del centro de gravedad de la sección G tiene tres componentes: una axial $u(x)$, y dos laterales $v(x), w(x)$, que están asociadas a la flexión. Se aceptan las mismas hipótesis que en el caso plano: las secciones rectas y perpendiculares a la fibra neutra en el estado sin deformar se mantienen rectas y perpendiculares a la fibra neutra en el estado deformado, con lo que se cumple que los giros de una sección recta de la viga son iguales a las pendientes de la curva deformada elástica:

$$\theta_z \approx tg\theta_z = \frac{dv}{dx} \qquad \theta_y \approx tg\theta_y = -\frac{dw}{dx} \qquad (5.73)$$

Las deformaciones de un punto P de la sección recta, situado a distancias *y*,*z* de G, son:

$$u_P = u - \theta_z y + \theta_y z = u - \frac{dv}{dx} y - \frac{dw}{dx} z \qquad v_P = v \qquad w_P = w \tag{5.74}$$

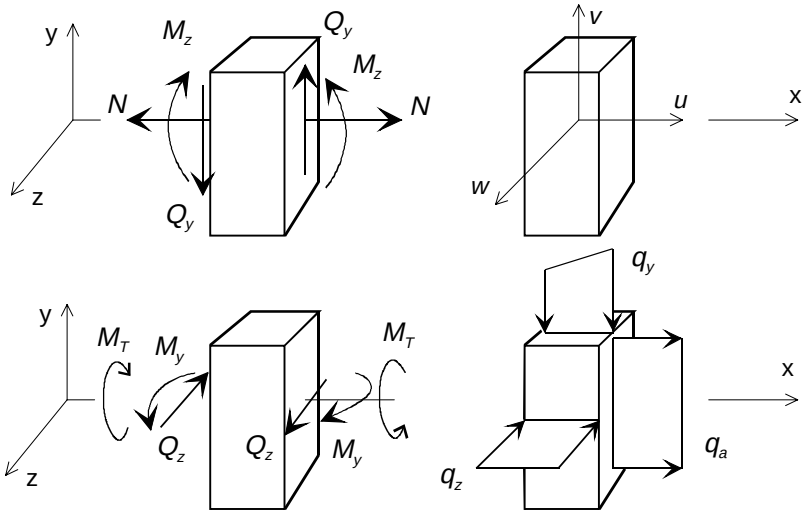


Figura 5.11

5.6.2 Deformaciones unitarias

Las deformaciones unitarias en el punto P son:

$$\varepsilon_x = \frac{\partial u_P}{\partial x} = \frac{du}{dx} - \frac{d^2v}{dx^2} y - \frac{d^2w}{dx^2} z \tag{5.75}$$

$$\varepsilon_y = \frac{\partial v_P}{\partial y} = 0 \tag{5.76}$$

$$\varepsilon_z = \frac{\partial w_P}{\partial z} = 0 \tag{5.77}$$

$$\gamma_{xy} = \frac{\partial u_P}{\partial y} + \frac{\partial v_P}{\partial x} = -\frac{dv}{dx} + \frac{dv}{dx} = 0 \tag{5.78}$$

$$\gamma_{yz} = \frac{\partial v_P}{\partial z} + \frac{\partial w_P}{\partial y} = 0 \tag{5.79}$$

$$\gamma_{zx} = \frac{\partial w_P}{\partial x} + \frac{\partial u_P}{\partial z} = \frac{\partial w}{\partial x} - \frac{\partial w}{\partial x} = 0 \tag{5.80}$$

Al igual que en el caso plano, el material está en un estado unidimensional de deformación unitaria ε, cuya variación en las dos coordenadas de la sección es lineal.

$$\varepsilon = \frac{du}{dx} - \frac{d^2v}{dx^2} y - \frac{d^2w}{dx^2} z = \varepsilon_G - v'' y - w'' z \tag{5.81}$$

donde ε_G es la deformación unitaria del centro de gravedad G, y v'', w'' son las dos curvaturas de la sección.

Al igual que en el caso plano, no existen deformaciones de cortadura en la viga, como consecuencia de la hipótesis de deformación empleada.

5.6.3 Ecuación constitutiva

La relación entre la tensión y la deformación unitaria es la misma que en el caso plano. Sólo existe una tensión axial según el eje X, de valor:

$$\sigma = E(\varepsilon_G - v''y - w''z - \varepsilon_0) \tag{5.82}$$

5.6.4 Distribución de temperatura

Se supone una variación lineal de las temperaturas en la sección de la viga, desde unos valores T_{Sy} T_{Sz} en las esquinas de la cara superior hasta unos valores T_{Iy} T_{Iz} en la cara inferior. En lugar de estas temperaturas resulta más conveniente emplear la temperatura media T_m y los gradientes entre las caras en las direcciones Y,Z: T_{gy} T_{gz}. Con esto la ley de distribución de temperaturas puede ponerse como:

$$T = T_m + yT_{gy} + zT_{gz} \tag{5.83}$$

5.6.5 Esfuerzos internos

Sobre la sección recta de la viga aparecen seis esfuerzos, que son estáticamente equivalentes a las tensiones que existen en dicha sección.

Esfuerzo axial

Se define, igual que en el caso plano, como la resultante de las tensiones:

$$N \equiv \int \sigma dA = \int E(\varepsilon - \varepsilon_0)dA \tag{5.84}$$

Operando como en el caso plano se llega a la misma expresión:

$$N = EA\varepsilon_G - E\int \varepsilon_0 dA \tag{5.85}$$

Si las deformaciones iniciales tienen una distribución lineal queda la misma expresión para el esfuerzo axial que en el caso plano:

$$N = EA\varepsilon_G - EA\alpha T_m \tag{5.86}$$

Momentos flectores

Se definen como los momentos estáticos de las tensiones respecto de los ejes Y,Z:

$$M_z \equiv -\int \sigma y dA = -\int E(\varepsilon - \varepsilon_0)y dy dz \qquad M_y \equiv -\int \sigma z dA = -\int E(\varepsilon - \varepsilon_0)z dy dz \tag{5.87}$$

Sustituyendo el valor de la deformación unitaria según (5.81) y operando se obtiene:

$$M_z = EI_z \frac{d^2v}{dx^2} + E\int \varepsilon_0 y dy dz \qquad M_y = EI_y \frac{d^2w}{dx^2} + E\int \varepsilon_0 z dy dz \tag{5.88}$$

donde I_y e I_z son los momentos de inercia de la sección respecto de los ejes Y, Z. Si las deformaciones unitarias iniciales corresponden a una distribución lineal de temperatura, según (5.83), la última integral se puede efectuar y resulta:

$$M_z = EI_z \frac{d^2v}{dx^2} + EI_z \alpha T_{gy} \qquad M_y = EI_y \frac{d^2w}{dx^2} + EI_y \alpha T_{gz} \tag{5.89}$$

Esfuerzos cortantes

Los esfuerzos cortantes se definen como las fuerzas resultantes de las tensiones cortantes transversales en la sección de la barra. Éstas son proporcionales a las deformaciones unitarias de cortadura, por lo tanto dichas resultantes son:

$$\int \tau_{xy} dA = \int G\gamma_{xy} dA = 0 \qquad \int \tau_{xz} dA = \int G\gamma_{xz} dA = 0 \tag{5.90}$$

Al igual que en el caso plano, la hipótesis de Navier implica que los esfuerzos cortantes son nulos, en evidente contradicción con la realidad. No obstante se considera que en la sección existen los dos esfuerzos cortantes en las direcciones Y,Z, que son estáticamente equivalentes a las cargas exteriores situadas a un lado de la sección. Estos esfuerzos cortantes crean una distribución de tensiones cortantes y unas distorsiones de cortante, tal y como se estudia en Resistencia de Materiales, y que no son predichas por la hipótesis de Navier.

Momento de torsión

Este momento es la resultante de todas las tensiones de torsión existentes en la sección. Al igual que para los esfuerzos cortantes, la hipótesis de Navier no predice estas tensiones cortantes, que deben calcularse de acuerdo con la teoría específica de torsión de piezas prismáticas. En todo caso se considera aquí que sobre la sección existe un momento torsor M_T que es el necesario para mantener el equilibrio frente a las fuerzas exteriores.

5.6.6 Relación entre la tensión y los esfuerzos

Sustituyendo en la expresión de la tensión (5.82) el valor de la deformación unitaria en función del esfuerzo axial dado por (5.86) y el valor de las curvaturas en función de los momentos flectores dado por (5.89), que suponen una distribución de temperaturas lineal, se obtiene la expresión habitual de las tensiones axiales en una pieza prismática en el espacio:

$$\sigma = \frac{N}{A} - \frac{M_z y}{I_z} - \frac{M_y z}{I_y} \tag{5.91}$$

5.6.7 Ecuaciones de equilibrio

Se obtienen aislando un elemento diferencial, como se indica en la figura 5.12.

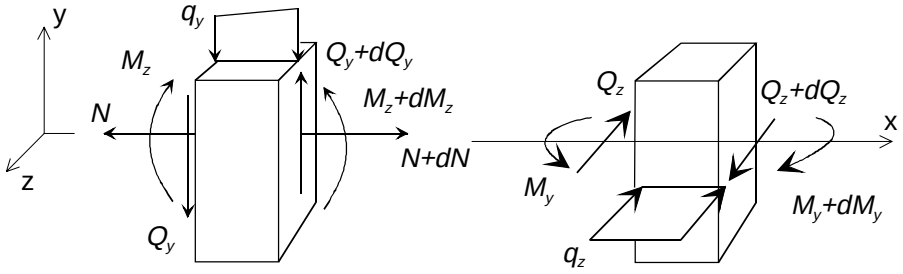


Figura 5.12

- *Equilibrio de momentos según el eje Z*

$$Q_y = -\frac{dM_z}{dx} \tag{5.92}$$

Sustituyendo el valor del momento según (5.89) se obtiene:

$$Q_y = -\frac{d}{dx}\left(EI_z \frac{d^2v}{dx^2} + EI_z \alpha T_{gy} \right) \tag{5.93}$$

- *Equilibrio de momentos según el eje Y*

$$Q_z = -\frac{dM_y}{dx} \tag{5.94}$$

Sustituyendo el valor del momento según (5.89) se obtiene:

$$Q_z = -\frac{d}{dx}\left(EI_y \frac{d^2w}{dx^2} + EI_y \alpha T_{gz} \right) \tag{5.95}$$

- *Equilibrio de fuerzas según el eje Y*

$$q_y = \frac{dQ_y}{dx} \tag{5.96}$$

Sustituyendo el valor de Q_y según (5.93) se obtiene:

$$q_y = -\frac{d^2}{dx^2}\left(EI_z \frac{d^2v}{dx^2} + EI_z \alpha T_{gy} \right) \tag{5.97}$$

Si la viga es de propiedades uniformes y la temperatura gradiente no depende de *x*, queda:

$$q_y = -EI_z \frac{d^4v}{dx^4} \tag{5.98}$$

que es la ecuación diferencial que controla el problema de la flexión en el plano XY.

- *Equilibrio de fuerzas según el eje Z*

$$q_z = \frac{dQ_z}{dx} \tag{5.99}$$

Sustituyendo el valor de Q_z según (5.95) se obtiene:

$$q_z = -\frac{d^2}{dx^2}\left(EI_y \frac{d^2 w}{dx^2} + EI_y \alpha T_{gz} \right) \tag{5.100}$$

Si la viga es de propiedades uniformes y la temperatura gradiente no depende de *x*, queda:

$$q_z = -EI_y \frac{d^4 w}{dx^4} \tag{5.101}$$

que es la ecuación diferencial que controla el problema de la flexión en el plano XZ.

- *Equilibrio de fuerzas según el eje X*

Se obtiene la misma ecuación que en el caso plano:

$$\frac{dN}{dx} = -q_a \tag{5.102}$$

Se observa que sobre la barra ocurren tres fenómenos: el de deformación axial, cuya incógnita primaria es *u*, y los dos de flexión en los planos XY, XZ cuyas incógnitas primarias son *v*, *w*. Todos ellos están desacoplados.

5.6.8 Energía elástica de flexión y esfuerzo axial

La expresión de la densidad de energía complementaria, puesta en función de los esfuerzos internos y de las deformaciones unitarias de origen térmico, es:

$$U_0^* = \frac{1}{2E}\left(\frac{N^2}{A^2} - \frac{2NM_z y}{AI_z} - \frac{2NM_y z}{AI_y} + \frac{M_z^2 y^2}{I_z^2} + \frac{2yzM_y M_z}{I_y I_z} + \frac{M_y^2 z^2}{I_y^2} \right) +$$
$$+\varepsilon_0 \left(\frac{N}{A} - \frac{M_z y}{I_z} - \frac{M_y z}{I_y} \right) \tag{5.103}$$

La energía de deformación por unidad de longitud es:

$$U_L^* = \int U_0^* dA = \int U_o^* dydz \tag{5.104}$$

Sustituyendo la expresión de la densidad de energía (5.103) y efectuando las integrales se obtiene:

$$U_L^* = \frac{N^2}{2EA} + \frac{M_z^2}{2EI_z} + \frac{M_y^2}{2EI_y} + \frac{N}{A}\int \varepsilon_0 \, dydz - \frac{M_z}{I_z}\int \varepsilon_0 y dydz - \frac{M_y}{I_y}\int \varepsilon_0 z dydz \tag{5.105}$$

Sustituyendo la expresión de la deformación unitaria térmica correspondiente a la distribución lineal y efectuando las integrales se obtiene:

$$U_L^* = \frac{N^2}{2EA} + \frac{M_z^2}{2EI_z} + \frac{M_y^2}{2EI_y} + N\alpha T_m \; - M_z \alpha T_{gy} - M_y \alpha T_{gz} \tag{5.106}$$

que es la expresión de la energía acumulada por unidad de longitud de viga, en función del esfuerzo axial, de los momentos flectores y del campo lineal de temperaturas.

Integrando a lo largo de la barra se obtiene la energía acumulada en toda ella:

$$U_b^* = \int \frac{N^2}{2EA}dx + \int \frac{M_z^2}{2EI_z}dx + \int \frac{M_y^2}{2EI_y}dx + \int N\alpha T_m dx - \int M_z \alpha T_{gy} dx - \int M_y \alpha T_{gz} dx \quad (5.107)$$

Esta expresión es general, estando sólo limitada a una distribución de temperatura lineal en el canto de la viga. Se observa que la temperatura media T_m sólo se acopla con el esfuerzo axial N, el gradiente de temperatura T_{gy} sólo se acopla con el momento flector M_z, y el gradiente T_{gz} sólo con el flector M_y.

Si el esfuerzo axial N, el producto EA y la temperatura media T_m son constantes a lo largo de la barra, como es habitual, la expresión anterior se simplifica:

$$U_b^* = \frac{N^2 L}{2EA} + \int \frac{M_z^2}{2EI_z}dx + \int \frac{M_y^2}{2EI_y}dx + N\alpha T_m L - \int M_z \alpha T_{gy} dx - \int M_y \alpha T_{gz} dx \quad (5.108)$$

5.6.9 Errores en la forma de las barras

Se tratan de la misma forma que en el caso plano, a base de incluir un valor de la deformación unitaria inicial ε_0 que cuantifique el error en la forma de la barra. Se supone una variación de las deformaciones unitarias iniciales que es lineal en la sección recta de la barra y uniforme a lo largo de su longitud:

$$\varepsilon_0 = \varepsilon_{0m} + y\varepsilon_{0gy} + z\varepsilon_{0gz} \quad (5.109)$$

Estas deformaciones unitarias iniciales se tratan igual que las deformaciones iniciales térmicas.

5.7 ENERGÍA DE ESFUERZO CORTANTE

La problemática de la consideración de la energía debida al esfuerzo cortante en la flexión se estudia en detalle en el apartado 4.9. De dicho estudio se concluye que la energía debida al cortante puede tenerse en cuenta en una pieza prismática a flexión incluyendo en la energía elástica un término como el indicado en la ecuación (4.115).

Por lo tanto la energía debida al esfuerzo cortante en uno cualquiera de los elementos de un pórtico plano puede calcularse mediante la expresión:

$$U^{*C} = \int \frac{Q^2 \eta}{2} dx \quad (5.110)$$

siendo η la flexibilidad de la viga a cortante, dada por la ecuación (4.116).

Para un pórtico espacial existe un término similar en la energía para cada uno de los dos esfuerzos cortantes:

$$U^{*C} = \int \frac{Q_y^2 \eta_y}{2} dx + \int \frac{Q_z^2 \eta_z}{2} dx \quad (5.111)$$

siendo la flexibilidad a cortante en cada dirección:

$$\eta_z = \frac{k_z}{GA} = \frac{1}{GA'_z} \qquad \eta_y = \frac{k_y}{GA} = \frac{1}{GA'_y} \tag{5.112}$$

y estando los factores de corrección en cada dirección definidos por expresiones similares a la (4.118):

$$k_z = \frac{A}{I_z^2}\int \frac{\overline{A}_z^2}{b_z^2} dA \qquad k_y = \frac{A}{I_y^2}\int \frac{\overline{A}_y^2}{b_y^2} dA \tag{5.113}$$

5.8 TORSIÓN

El estudio de la torsión de una pieza prismática muestra que en ella aparece una distribución de deformaciones unitarias y de tensiones cortantes cuya distribución es muy compleja y depende del tipo y forma de la sección. Sin embargo, la energía acumulada por estas tensiones puede siempre ponerse en la forma:

$$U^{*T} = \int \frac{M_T^2}{2GJ} dx = \int \frac{\omega M_T^2}{2} dx \tag{5.114}$$

siendo M_T el momento torsor, J la rigidez a torsión de la sección y $\omega = 1/GJ$ la constante de flexibilidad a torsión. La expresión detallada de J depende del tipo de sección y es en general de compleja evaluación salvo para secciones de forma simple.

5.9 MÉTODO DE FLEXIBILIDAD PARA PÓRTICOS ESPACIALES

En el análisis de pórticos espaciales se pueden emplear las mismas incógnitas hiperestáticas que en los pórticos planos (esfuerzos axiales o cortantes o momentos flectores), y además se pueden utilizar los momentos torsores en las barras.

El proceso general de resolución es igual que en el caso plano. En cada uno de los 1+h casos en que se descompone el análisis de la estructura se deben calcular todos los esfuerzos que intervienen en la expresión de la energía. Así en el caso más general en que se incluyan todas las componentes de la energía se deben calcular los 6 esfuerzos en las vigas:

$$N = N^0 + \sum_j X_j N^j \qquad M_z = M_z^0 + \sum_j X_j M_z^j \qquad M_y = M_y^0 + \sum_j X_j M_y^j$$
$$M_T = M_T^0 + \sum_j X_j M_T^j \qquad Q_z = Q_z^0 + \sum_j X_j Q_z^j \qquad Q_y = Q_y^0 + \sum_j X_j Q_y^j \tag{5.115}$$

Las condiciones de compatibilidad son de la misma naturaleza que en el caso plano, en base al teorema de Engesser, aunque su expresión detallada es más compleja dado que la energía tiene más términos. Efectuando el mismo desarrollo que en el caso plano las ecuaciones de compatibilidad quedan:

$$\int N\gamma N^j dx + \int \alpha T_m N^j dx + \int M_z \mu_z M_z^j dx - \int \alpha T_{gy} M_z^j dx + \int M_y \mu_y M_y^j dx - \int \alpha T_{gz} M_y^j dx$$
$$+ \int M_T \omega M_T^j dx + \int Q_y \eta_y Q_y^j dx + \int Q_z \eta_z Q_z^j dx = 0 \qquad j = 1, h \tag{5.116}$$

estando las integrales extendidas a toda la estructura y siendo:

$$\mu_z = \frac{1}{EI_z} \qquad \mu_y = \frac{1}{EI_y} \tag{5.117}$$

Si las barras son de propiedades uniformes, las magnitudes N, EA, α, T_m, T_g son constantes en cada viga, y la expresión anterior queda simplificada:

$$\sum_i N_i \rho_i N_i^j + \sum_i \lambda_{mi} N_i^j + \int M_z \mu_z M_z^j dx - \alpha T_{gy} \int M_z^j dx + \int M_y \mu_y M_y^j dx - \alpha T_{gz} \int M_y^j dx$$
$$+ \int M_T \omega M_T^j dx + \int Q_y \eta_y Q_y^j dx + \int Q_z \eta_z Q_z^j dx = 0 \qquad j = 1, h \tag{5.118}$$

Sustituyendo los valores de los esfuerzos según (5.115) y operando se llega a un sistema final de ecuaciones, que se puede poner en forma matricial como:

$$\mathbf{fX} = \mathbf{D} \tag{5.119}$$

Los términos de matriz de flexibilidad **f** del pórtico tienen ahora seis sumandos, debidos a las diferentes flexibilidades:

$$f_{jk} = \sum \rho_i N_i^j N_i^k + \int \mu_z M_z^j M_z^k dx + \int \mu_y M_y^j M_y^k dx +$$
$$+ \int Q_y^j \eta_y Q_y^k dx + \int Q_z^j \eta_z Q_z^k dx + \int M_T^j \omega M_T^k dx \tag{5.120}$$

estando las integrales extendidas a toda la estructura y el sumatorio a todas las barras.

El término independiente **D** tiene asimismo varios sumandos, debidos a los distintos esfuerzos y a las variaciones de temperatura existentes:

$$D_j = -\sum_i N_i^0 \rho_i N_i^j - \int M_z^0 \mu_z M_z^j dx - \int M_y^0 \mu_y M_y^j dx - \sum \lambda_{mi} N_i^j + \int \alpha T_{gy} M_z^j dx$$
$$+ \int \alpha T_{gz} M_y^j dx - \int Q_z^0 \eta_z Q_z^j dx - \int Q_y^0 \eta_y Q_y^j dx - \int M_T^0 \omega M_T^j dx \tag{5.121}$$

5.10 CÁLCULO DE DEFORMACIONES EN PÓRTICOS ESPACIALES

El cálculo de deformaciones en una estructura aporticada espacial sigue los mismos pasos que en una estructura plana. Aplicando el método de la fuerza virtual unitaria se obtiene la siguiente expresión para la deformación Δ_r en un punto y una dirección determinadas.

$$\Delta_r = \int N \gamma N^{0V} dx + \int M_z \mu_z M_z^{0V} dx + \int M_y \mu_y M_y^{0V} dx - \int M_z^{0V} \alpha T_{gy} dx - \int M_y^{0V} \alpha T_{gz} dx$$
$$+ \int N^{0V} \alpha T_m dx + \int M_T \omega M_T^{0V} dx + \int Q_y \eta_y Q_y^{0V} dx + \int Q_z \eta_z Q_z^{0V} dx \tag{5.122}$$

donde las magnitudes con el superíndice ^{0V} corresponden a la solución de una estructura isostática cargada con una fuerza virtual unidad en la dirección cuya deformación se desea. La expresión anterior incluye la deformación debida a todos los efectos posibles como torsión, energía de cortante, temperaturas, etc. Las integrales en ella indicadas están extendidas a toda la estructura.

Si las barras son de propiedades resistentes uniformes, las temperaturas también y no hay fuerzas en la dirección axial, las magnitudes N, EA, α, T_m, T_g son constantes y salen fuera de las integrales. Repitiendo el mismo desarrollo que en el caso plano se obtiene la siguiente expresión final para la deformación:

$$\Delta_r = \sum N_i \rho_i N_i^{0V} + \int M_z \mu_z M_z^{0V} dx + \int M_y \mu_y M_y^{0V} dx - \alpha T_{gy} \int M_z^{0V} dx - \alpha T_{gz} \int M_y^{0V} dx$$
$$+ \sum N_i^{0V} \lambda_{mi} + \int M_T \omega M_T^{0V} dx + \int Q_y \eta_y Q_y^{0V} dx + \int Q_z \eta_z Q_z^{0V} dx \qquad (5.123)$$

5.11 MUELLES

Son elementos estructurales discretos, que acumulan energía elástica en base a una deformación relativa entre sus dos extremos. En la modelización de su comportamiento estructural se prescinde de la manera en que acumulan la energía elástica, y se caracterizan únicamente por una constante que cuantifica globalmente su comportamiento. Están sometidos a dos esfuerzos iguales y de sentido contrario en ambos extremos, que se denominan genéricamente *S*. Pueden presentarse dos tipos de muelles, que explican a continuación.

Muelles a esfuerzo axial.

Son los más habituales (figura 5.13). Generan una fuerza axial *F* proporcional al desplazamiento relativo entre sus dos extremos:

$$F = K(\Delta_2 - \Delta_1) \qquad (5.124)$$

siendo *K* la constante de rigidez del muelle. Pueden materializarse como una sencilla barra sometida a esfuerzo axial, en cuyo caso *K=EA/L*; o mediante una espiral, en cuyo caso la energía se acumula como energía de torsión y *K* es más compleja de evaluar.



Figura 5.13

Muelles al giro

Estos elementos conectan sus extremos a dos giros de la estructura y generan un momento *M* proporcional al giro relativo entre ambos extremos (figura 5.14):

$$M = K(\theta_2 - \theta_1) \qquad (5.125)$$

Sólo transmiten el momento, y no afectan para nada a la transmisión de fuerzas entre las dos barras que unen: se supone que las barras unidas por el muelle al giro tienen los mismos desplazamientos y que por lo tanto hay una perfecta transmisión de fuerzas entre ellas. Únicamente los giros son distintos, y el muelle aplica un momento proporcional a su diferencia.

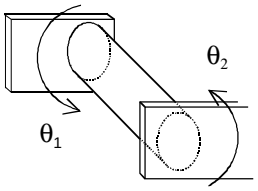


Figura 5.14

Pueden materializarse de forma sencilla como una barra de torsión, en cuyo caso la constante de rigidez vale $K=GJ/L$, siendo G es el módulo de elasticidad en cortadura y J el momento polar de inercia, o mediante un muelle en espiral plana. Se suele emplear para ellos la representación simplificada de la figura 5.15.

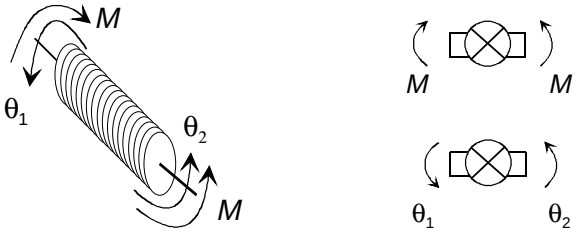


Figura 5.15

5.11.1 Ecuación de equilibrio

Sea cual sea el tipo de muelle, su ecuación de equilibrio se puede poner siempre en la forma genérica siguiente:

$$S = K(\Delta - \Delta_0) \tag{5.126}$$

siendo

- ◊ S el esfuerzo aplicado en ambos extremos del muelle, que es una fuerza para muelles de esfuerzo axial y un momento para muelles al giro (figura 5.16),
- ◊ K la constante de rigidez del muelle, cuyas dimensiones son F/L para muelles de esfuerzo axial y FL para muelles al giro,
- ◊ Δ la deformación relativa entre sus dos extremos, que vale $\Delta = \Delta_2 - \Delta_1$ para muelles de esfuerzo axial, o $\Delta = \theta_2 - \theta_1$ para muelles al giro,
- ◊ Δ_0 la deformación relativa inicial entre los extremos del muelle.

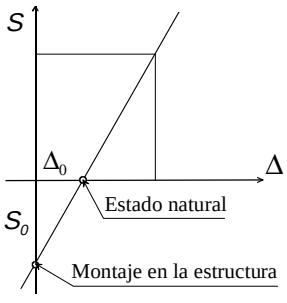


Figura 5.16

La deformación relativa inicial Δ_0 se origina en el hecho de que muchas veces la longitud natural del muelle L_{nat} (la longitud sin carga) no coincide con la distancia entre los nudos donde se monta en la estructura L_{mont} (longitud de montaje), como se indica en la figura 5.17. A consecuencia de esto es necesario aplicar sobre el muelle algún esfuerzo extra para poderlo montar, llamado esfuerzo de montaje o pretensión inicial de montaje.

Para los muelles al giro la deformación relativa inicial se origina porque los extremos del muelle están girados uno respecto al otro un ángulo θ_{nat} en el estado descargado del muelle, que no coincide con el ángulo entre sus extremos en el montaje θ_{mont}, y por ello hay que aplicar al muelle un momento para poderlo montar.

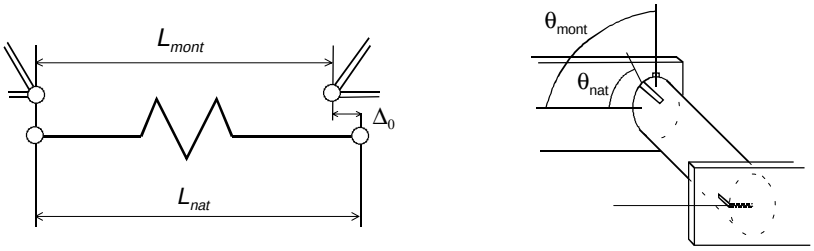


Figura 5.17

El valor de Δ_0 es en todo caso un dato, que se calcula como:

Muelles a esfuerzo axial: $\Delta_0 = L_{nat} - L_{mont}$ (5.127)

Muelles al giro: $\Delta_0 = \theta_{nat} - \theta_{mont}$ (5.128)

La ecuación de equilibrio (5.126) puede ponerse también como:

$$S = K\Delta + S_0 \tag{5.129}$$

siendo

$$S_0 = -K\Delta_0 \tag{5.130}$$

Este es el esfuerzo de pretensión inicial o de montaje, que hay que aplicar en el muelle para poderlo montar sobre la estructura, es decir el esfuerzo para pasar de la situación natural a la de montaje.

5.11.2 Energía acumulada

La energía complementaria acumulada en el muelle es:

$$U_m^* = \int_0^S \Delta dS = \int_0^S \frac{S + K\Delta_0}{K} dS \tag{5.131}$$

$$U_m^* = \frac{f S^2}{2} + \Delta_0 S \tag{5.132}$$

donde se ha empleado la *flexibilidad del muelle* $f = 1/K$.

5.11.3 Consideración de muelles en el método de flexibilidad

Los muelles se consideran en el método de flexibilidad como cualquier otro elemento estructural. A continuación se describe el proceso a seguir para un muelle. Si hay varios de ellos en la estructura, se debe sumar su efecto.

Superposición de esfuerzos

Los esfuerzos en el muelle se calculan como suma de los esfuerzos en los 1+h casos en que se descompone el análisis:

$$S = S^0 + \sum_{j=1,h} X_j S^j \tag{5.133}$$

siendo S^0 el esfuerzo en el muelle en el caso 0, y S^j el esfuerzo en el caso j, para un valor unitario de la incógnita X_j.

Contribución a las ecuaciones de compatibilidad

La energía acumulada en toda la estructura se puede poner como:

$$U^* = U^*_{resto} + U^*_{muelle} \tag{5.134}$$

donde U^*_{resto} es la energía acumulada por el resto de los elementos de la estructura. Las ecuaciones de compatibilidad se pueden poner como:

$$\frac{\partial U^*}{\partial X_j} = \frac{\partial U^*_{resto}}{\partial X_j} + SfS^j + \Delta_0 S^j = 0 \qquad j = 1,h \tag{5.135}$$

Cada muelle aporta a las condiciones de compatibilidad dos términos nuevos, que puede comprobarse son del mismo tipo que los aportados por el esfuerzo axial de los elementos.

Contribución a las deformaciones

Para calcular una deformación en método de flexibilidad (ver apartados 5.5 y 5.10) se emplea el método de la fuerza virtual unitaria, añadiendo a la estructura real ya calculada, un caso virtual, en el que actúa únicamente una fuerza virtual V en la dirección del desplazamiento buscado. Al resolver el caso virtual para un valor unitario de la fuerza virtual V=1, aparece un esfuerzo S^V en el muelle.

Bajo la acción de las cargas reales y de la fuerza virtual V, el esfuerzo en el muelle vale:

$$S^{RV} = S + S^V V \tag{5.136}$$

y la energía complementaria que se acumula es:

$$U^{*RV} = U^{*RV}_{resto} + \frac{fS^{RV^2}}{2} + \Delta_0 S^{RV} \tag{5.137}$$

La deformación buscada se obtiene empleando el teorema de Crotti-Engesser, considerando que la fuerza virtual no existe:

$$\Delta_r = \left(\frac{\partial U^{*RV}}{\partial V} \right)_{V=0} = \left(\frac{\partial U^{*RV}_{resto}}{\partial V} + fS^{RV} \frac{\partial S^{RV}}{\partial V} + \Delta_0 \frac{\partial S^{RV}}{\partial V} \right)_{V=0} \tag{5.138}$$

Pero el valor de la derivada es:

$$\frac{\partial S^{RV}}{\partial V} = S^V \tag{5.139}$$

con lo que se obtiene:

$$\Delta_r = \Delta_{resto} + SfS^V + \Delta_0 S^V \tag{5.140}$$

Se observa que la presencia del muelle se manifiesta en dos nuevos sumandos en la deformación, que son debidos a su flexibilidad. Al igual que en el caso general la expresión anterior sólo es de interés práctico si el caso V es isostático.

Para el caso de estructuras hiperestáticas se desarrolla más la expresión anterior a base de descomponer el caso virtual unitario en 1+*h* casos:

- ◊ Caso 0V, en el que actúa sólo la fuerza virtual unitaria V=1. El esfuerzo en el muelle es S^{0V}.
- ◊ Casos 1 a *h*, en los cuales se aplica un valor unitario de la incógnita hiperestática X_j y cero en todas las demás. Los esfuerzos que aparecen en el muelle son S^j.

Los esfuerzos en el caso V=1 son:

$$S^V = S^{0V} + \sum_{j=1,h} X_j S^j \tag{5.141}$$

Sustituyendo este valor en la expresión (5.140) de la deformación y reordenando los sumatorios se obtiene:

$$\Delta_r = \Delta_{resto} + SfS^{0V} + \Delta_0 S^{0V} + \sum_{j=1,h} X_j \left(SfS^j + \Delta_0 S^j \right) \tag{5.142}$$

En el último término se identifica la contribución del muelle a la condición de compatibilidad de la hiperestática *j* (ecuación (5.135)). Esta contribución, unida a la del resto de los elementos estructurales es siempre nula, por lo que el valor de la deformación se puede poner como:

$$\Delta_r = \Delta_{resto} + SfS^{0V} + \Delta_0 S^{0V} \tag{5.143}$$

Los dos últimos términos de esta ecuación son la contribución del muelle a la deformación en la dirección *r*, uno debido a su flexibilidad y el otro debido a su esfuerzo de pretensión.

5.12 INTERPRETACIÓN FÍSICA DEL MÉTODO DE FLEXIBILIDAD

La interpretación física del método de flexibilidad en pórticos es la misma ya explicada para las celosías en el apartado 3.10, y sólo se resume aquí. El coeficiente de flexibilidad f_{jk} corresponde a la deformación que se produce en la dirección de la incógnita hiperestática *j* al actuar únicamente la incógnita hiperestática *k*, es decir en el caso de cargas *k*.

$$f_{jk} = \Delta_j^k \tag{5.144}$$

La figura 5.18 muestra la situación para dos incógnitas hiperestáticas, indicando los distintos coeficientes de flexibilidad involucrados.

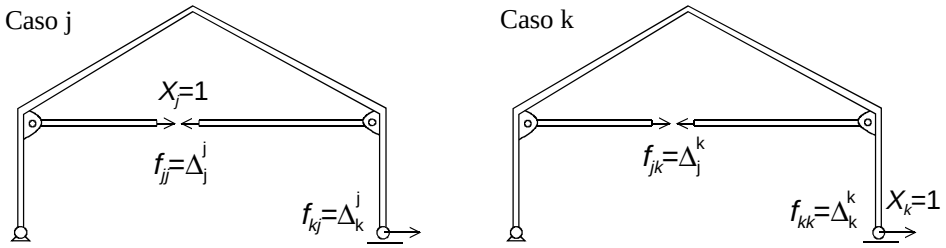


Figura 5.18

El término independiente D_j de las ecuaciones de compatibilidad corresponde a la deformación que se produce en la dirección de la incógnita hiperestática j en el caso 0, cambiada de signo: $D_j = -\Delta_j^0$. La figura 5.19 muestra la situación para la misma estructura considerada en la figura 5.18.

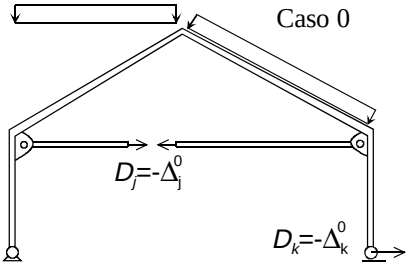


Figura 5.19

La ecuación de compatibilidad asociada a la incógnita hiperestática j es sencillamente la condición de compatibilidad de deformaciones en la dirección de dicha incógnita hiperestática. Esto se puede comprobar de forma muy sencilla sustituyendo en la ecuación de compatibilidad (5.59) los coeficientes f y D por de sus valores en función de las deformaciones.

$$\sum_k f_{jk} X_k = D_j \qquad \rightarrow \qquad \sum_k \Delta_j^k X_k + \Delta_j^0 = 0 \tag{5.145}$$

5.13 EJERCICIOS RESUELTOS

5.13.1 Calcular los esfuerzos internos en la estructura de la figura 5.20.

Propiedades de las barras: $E = 2\ 10^6$ kg/cm^2, $A = 200$ cm^2, $I = 4\ 10^4$ cm^4.

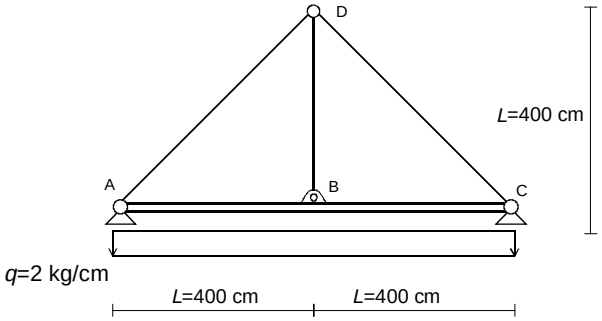


Figura 5.20

La estructura es hiperestática de grado 2. Las barras AB y BC, que están articuladas al suelo en ambos extremos, forman una zona hiperestática. Es por lo tanto necesario adoptar como una de las incógnitas hiperestáticas a uno de los esfuerzos axiales en dichas barras o a una de las reacciones horizontales en A o en C.

Se adoptan como fuerzas redundantes: $X_1=N_{BD}$ $X_2=R_{CX}$

Otros posibles conjuntos de incógnitas redundantes son:

$X_1=N_{AD}$ $X_2=N_{AB}$ -- $X_1=N_{BD}$ $X_2=N_{BC}$ -- $X_1=N_{DC}$ $X_2=R_{AX}$ -- $X_1=M_B$ $X_2=R_{CX}$

Caso 0: Los esfuerzos en el caso 0 se indican en la figura 5.21. Todos los esfuerzos axiales son nulos, y sólo hay momento flector en la barra ABC, de valor:

$$M^0 = qLx - \frac{qx^2}{2} \qquad 0 < x < 2L$$

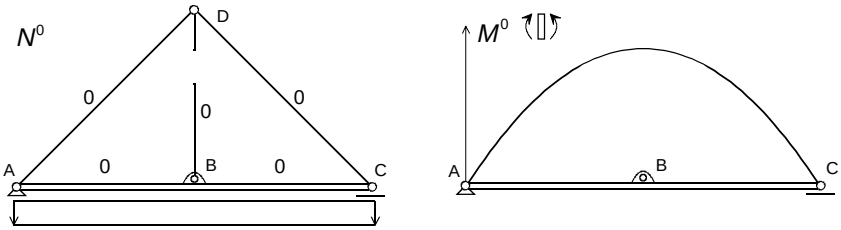


Figura 5.21

Caso 1: Los esfuerzos en este caso se indican en la figura 5.22. El diagrama de flectores es:

$$M^1 = -x/2 \qquad 0 < x < L \qquad\qquad M^1 = (x-2L)/2 \qquad L < x < 2L$$

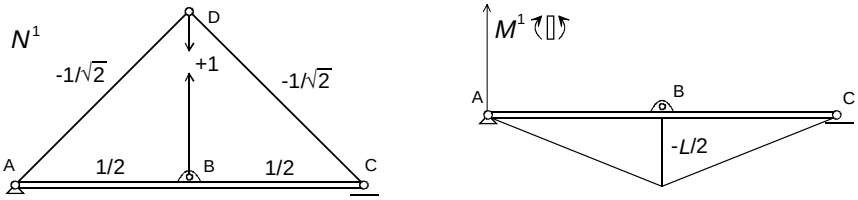


Figura 5.22

Caso 2: En este caso sólo existe esfuerzo axial en la barra ABC y no hay momento flector (figura 5.23).

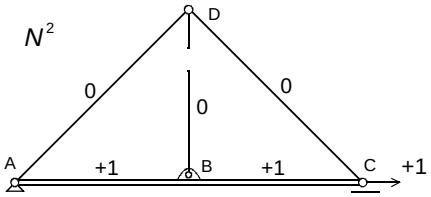


Figura 5.23

Los coeficientes de flexibilidad son (ecuación (5.61)):

$$f_{11} = \sum N^1 \rho N^1 + \int \mu M^1 M^1 dx = \frac{(\sqrt{2}+3/2)L}{EA} + \frac{L^3}{6EI} = 1.3625 \cdot 10^{-4}$$

$$f_{12} = \sum N^1 \rho N^2 + \int \mu M^1 M^2 dx = \frac{L}{2EA} + \frac{L}{2EA} = \frac{L}{EA} = 10^{-6}$$

$$f_{22} = \sum N^2 \rho N^2 + \int \mu M^2 M^2 dx = \frac{L}{EA} + \frac{L}{EA} = \frac{2L}{EA} = 2 \cdot 10^{-6}$$

Los términos independientes son (ecuación (5.59)):

$$D_1 = -\sum N^0 \rho N^1 - \int \mu M^0 M^1 dx = \frac{5qL^4}{24EI} = 0.1333$$

$$D_2 = -\sum N^0 \rho N^2 - \int \mu M^0 M^2 dx = 0$$

El sistema de ecuaciones de compatibilidad es:

$$1.3625 \cdot 10^{-4} X_1 + 10^{-6} X_2 = 0.13333$$
$$10^{-6} X_1 + 2 \cdot 10^{-6} X_2 = 0$$

Los valores de las incógnitas redundantes son: $X_1 = N_{BD} = 982$ kg $\quad X_2 = R_{CX} = -491$ kg.

Los esfuerzos finales en las barras son:

$N = 982\ N^1 - 491\ N^2$

Nótese que las barras AB y BC no están sometidas a fuerza axial, como desde un principio se podía haber intuido, al estar situadas entre dos puntos fijos y no tener aplicada ninguna fuerza axial (figura 5.24).

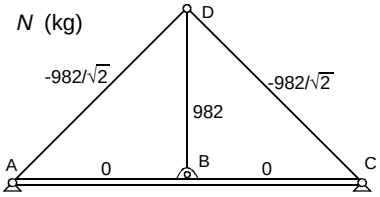


Figura 5.24

El diagrama de momentos se calcula como $M = M^0 + 982\ M^1$ y su expresión analítica es:

$$M_{AB} = qLx - \frac{qx^2}{2} + 982\left(\frac{-x}{2}\right) \qquad 0 < x < 400$$

$$M_{BC} = qLx - \frac{qx^2}{2} + 982\left(\frac{x-2L}{2}\right) \qquad 400 < x < 800$$

La figura 5.25 muestra su representación gráfica.

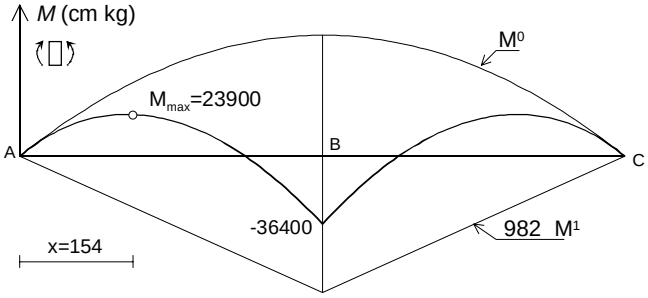


Figura 5.25

5.13.2 Calcular los esfuerzos internos en la estructura aporticada de la figura 5.26. Propiedades de las barras: $E = 2\ 10^6$ kg/cm^2, $A = 100$ cm^2, $I = 10000$ cm^4.

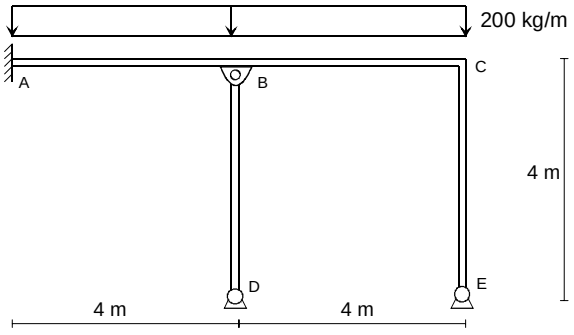


Figura 5.26

La estructura es hiperestática de grado 3. Posibles conjuntos de incógnitas redundantes son:

$X_1=N_{BD}$ $X_2=M_C$ $X_3=M_A$

$X_1=M_A$ $X_2=M_B$ $X_3=M_C$

$X_1=N_{BD}$ $X_2=R_{EX}$ $X_3=R_{EY}$

$X_1=M_A$ $X_2=R_{AX}$ $X_3= R_{AY}$

Se adoptan como esfuerzos redundantes los siguientes: $X_1=N_{BD}$ $X_2=M_C$ $X_3=M_A$

La estructura isostática queda reducida al dintel ABC apoyado en la columna biarticulada CE. Las propiedades de flexibilidad para todas las barras, que se emplean más adelante, son: $\gamma = 0.5\ 10^{-8}$ kg^{-1} $\mu = 0.5\ 10^{-6}$ 1/(kg m^2).

- Caso 0. Los esfuerzos en este caso se indican en la figura 5.27. Solamente existe esfuerzo axial en la barra CE, y sólo hay momento flector en la barra ABC, de valor:

$$M^0_{ABC} = 800x - 100x^2 \quad \text{m kg} \qquad 0 < x < 8 \text{ m}$$

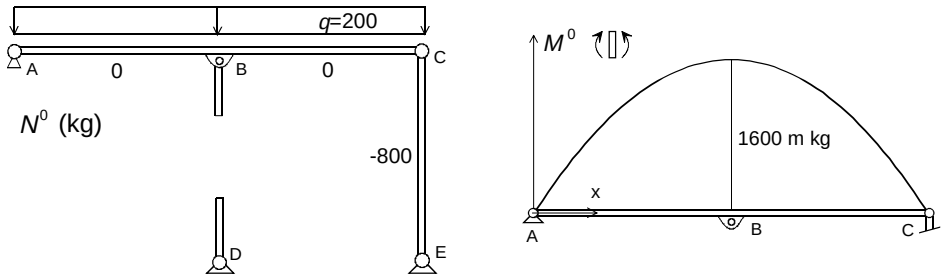


Figura 5.27

- Caso 1. Se aplica un valor unidad al esfuerzo axial en la barra BD, como se indica en la figura 5.28, lo cual origina un esfuerzo de compresión de valor -1/2 en la barra CE, y una distribución de momentos lineal en ABC:

$M^1 = x/2 \qquad 0 < x < 4\ \text{m} \qquad\qquad M^1 = 4 - x/2 \qquad 4 < x < 8\ \text{m}$

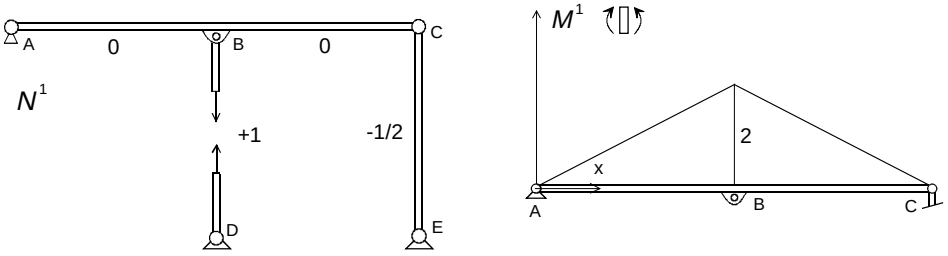


Figura 5.28

- Caso 2. Se aplica un valor unidad al momento flector en el nudo C, con lo que se originan esfuerzos axiales de tracción en las barras ABC y CE, así como una distribución lineal de momentos flectores en dichas barras (figura 5.29).

$M^2_{ABC} = x/8 \qquad 0 < x < 8\ \text{m} \qquad\qquad M^2_{CE} = -x/4 \qquad 0 < x < 4\ \text{m}$

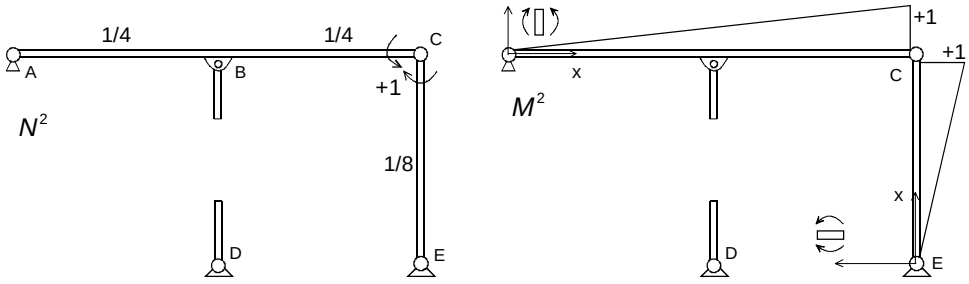


Figura 5.29

- Caso 3. Se aplica un valor unidad al momento flector en el apoyo A, con lo que se originan esfuerzos axiales de tracción en la barra CE, así como una distribución lineal de momentos flectores en la barra ABC (figura 5.30).

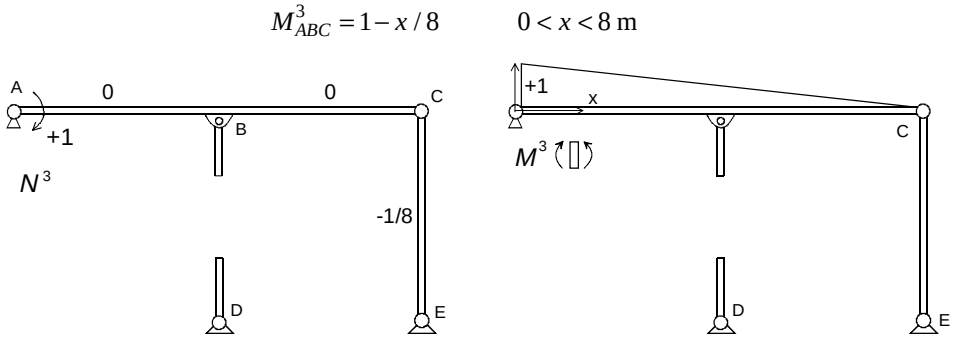


Figura 5.30

Los coeficientes de flexibilidad son:

$$f_{11} = \left(-\frac{1}{2}\right)^2 4\gamma + (1)^2 4\gamma + \int_0^4 \left(\frac{x}{2}\right)^2 \mu dx + \int_4^8 \left(4 - \frac{x}{2}\right)^2 \mu dx = 5\gamma + \frac{32\mu}{3}$$

$$f_{12} = \left(-\frac{1}{2}\right)4\gamma\left(\frac{1}{8}\right) + \int_0^4 \frac{x}{2}\mu\frac{x}{8}dx + \int_4^8 \left(4 - \frac{x}{2}\right)\mu\frac{x}{8}dx = -\frac{\gamma}{4} + 4\mu$$

$$f_{13} = \left(-\frac{1}{2}\right)4\gamma\left(-\frac{1}{8}\right) + \int_0^4 \frac{x}{2}\mu\left(1 - \frac{x}{8}\right)dx + \int_4^8 \left(4 - \frac{x}{2}\right)\mu\left(1 - \frac{x}{8}\right)dx = \frac{\gamma}{4} + 4\mu$$

$$f_{22} = \left(\frac{1}{4}\right)^2 4\gamma + \left(\frac{1}{4}\right)^2 4\gamma + \left(\frac{1}{8}\right)^2 4\gamma + \int_0^8 \left(\frac{x}{8}\right)^2 \mu dx + \int_0^4 \left(-\frac{x}{4}\right)^2 \mu dx = \frac{9\gamma}{16} + 4\mu$$

$$f_{23} = \left(\frac{1}{8}\right)4\gamma\left(-\frac{1}{8}\right) + \int_0^8 \left(\frac{x}{8}\right)\mu\left(1 - \frac{x}{8}\right)dx = -\frac{\gamma}{16} + \frac{4\mu}{3}$$

$$f_{33} = \left(\frac{1}{8}\right)^2 4\gamma + \int_0^8 \left(1 - \frac{x}{8}\right)^2 \mu dx = \frac{\gamma}{16} + \frac{8\mu}{3}$$

Al no haber cargas térmicas, los términos independientes tienen la expresión:

$$D_j = -\sum_i N_i^0 \rho_i N_i^j - \int M^0 \mu M^j dx$$

y los distintos valores son:

$$D_1 = -(-800)4\gamma\left(-\frac{1}{2}\right) - \int_0^4 (800x - 100x^2)\mu\frac{x}{2}dx - \int_0^4 (800x - 100x^2)\mu\left(4 - \frac{x}{2}\right)dx$$

$$D_1 = -1600\gamma - \frac{32000\mu}{3}$$

$$D_2 = -(-800)4\gamma\left(\frac{1}{8}\right) - \int_0^8 (800x - 100x^2)\mu\frac{x}{8}dx = 400\gamma - \frac{12800\mu}{3}$$

$$D_3 = -(-800)4\gamma\left(-\frac{1}{8}\right) - \int_0^8 (800x - 100x^2)\mu\left(1 - \frac{x}{8}\right)dx = -400\gamma - \frac{12800\mu}{3}$$

El sistema de ecuaciones de compatibilidad resulta ser:

$$10^{-5}\begin{bmatrix} 0.5358 & 0.1999 & 0.2001 \\ 0.1999 & 0.2003 & 0.0666 \\ 0.2001 & 0.0666 & 0.1334 \end{bmatrix}\begin{Bmatrix} X_1 \\ X_2 \\ X_3 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} -0.005341 \\ -0.002131 \\ -0.002135 \end{Bmatrix}$$

y los valores de las incógnitas redundantes son:

$X_1=N_{BD}$= -853.55 kg $\quad X_2 = M_C$ = -126.87 m kg $\quad X_3 = M_A$ = -256.90 m kg

Los esfuerzos axiales finales en las barras son: $N = N^0 - 853.55\ N^1 - 126.87\ N^2 - 256.90\ N^3$

Sus valores numéricos se indican en la figura 5.31.

El diagrama de momentos en cada barra es: $M = M^0 - 853.55\ M^1 - 126.87\ M^2 - 256.90\ M^3$

$$M_{AB} = 800x - 100x^2 - 853.55\frac{x}{2} - 126.87\frac{x}{8} - 256.90\left(1 - \frac{x}{8}\right) \qquad 0 < x < 4$$

$$M_{BC} = 800x - 100x^2 - 853.55\left(4 - \frac{x}{2}\right) - 126.87\frac{x}{8} - 256.90\left(1 - \frac{x}{8}\right) \qquad 4 < x < 8$$

$$M_{EC} = 126.87\frac{x}{4} \qquad 0 < x < 4$$

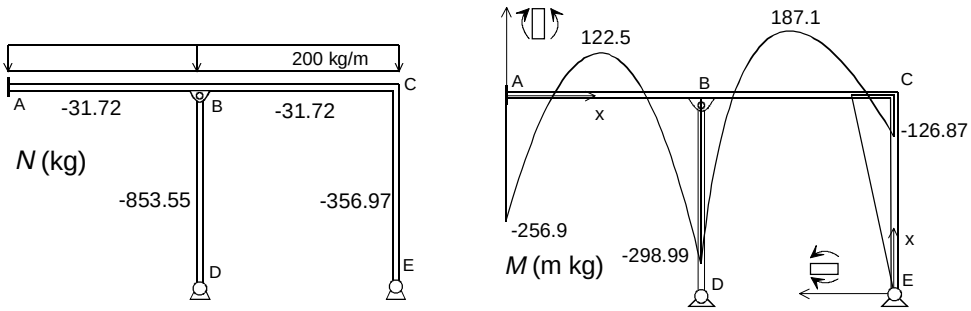


Figura 5.31

5.13.3 Calcular la deformación horizontal del punto medio de la barra CE, en la estructura del ejercicio 5.13.2.

Empleando el método de la fuerza virtual unitaria, se aplica una fuerza horizontal V=1 en el punto F, situado en la mitad entre C y E, y se calculan los esfuerzos en un caso isostático cargado con esta fuerza virtual. Para resolver este caso isostático virtual se adoptan las mismas incógnitas hiperestáticas empleadas para el cálculo de la estructura.

Los esfuerzos en el caso 0V se muestran en la figura 5.32. Sólo hay esfuerzo axial en la barra ABC y sólo hay flector en la barra CE.

$$M^{0V} = x/2 \qquad 0 < x < 2 \text{ m}$$
$$M^{0V} = (4-x)/2 \qquad 2 < x < 4 \text{ m}$$

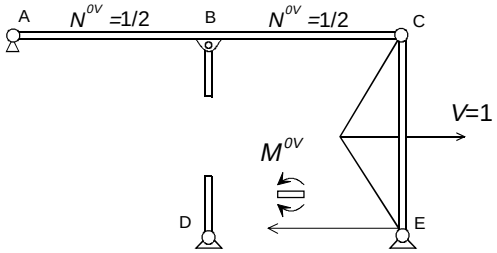


Figura 5.32

La deformación buscada viene dada por la ecuación (5.72):

$$\Delta_{FX} = \sum N\rho N^{0V} + \int M\mu M^{0V} dx = N_{AB} 4\gamma N_{AB}^{0V} + N_{BC} 4\gamma N_{BC}^{0V} + \int_0^4 M_{CE}\mu M_{CE}^{0V} dx$$

$$\Delta_{FX} = -31.72\ 4\gamma \frac{1}{2} - 31.72\ 4\gamma \frac{1}{2} + \int_0^2 \left(-X_2 \frac{x}{4}\right)\mu \frac{x}{2} dx + \int_2^4 \left(-X_2 \frac{x}{4}\right)\mu \left(\frac{4-x}{2}\right) dx$$

$$\Delta_{FX} = 6.28\,10^{-5} \quad \text{m}$$

5.13.4 Calcular el giro del nudo C en la estructura del ejercicio 5.13.2.

Se aplica un momento unidad V=1 en el punto C, y se calculan los esfuerzos en un caso isostático cargado con este momento virtual.

Para el caso isostático virtual se adoptan unas incógnitas hiperestáticas diferentes a las empleadas para el cálculo de la estructura, con objeto de simplificar los cálculos. Se emplean el esfuerzo axial en la barra BD y las dos reacciones en el apoyo E: X_1=N_{BD} X_2=R_{EX} X_3=R_{EY}. De esta forma el caso isostático virtual queda reducido a un voladizo empotrado en A.

Los esfuerzos en el caso 0V se muestran en la figura 5.33. No aparecen esfuerzos axiales y sólo hay un momento flector constante en la barra ABC.

$$M_{ABC}^{0V} = 1 \qquad 0 < x < 8 \text{ m}$$

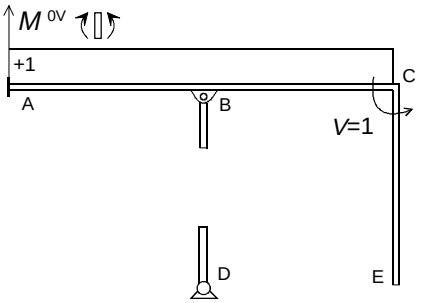


Figura 5.33

Al haber sólo momento flector, la expresión de la deformación buscada es:

$$\theta_C = \int M\mu M^{0V} dx = \int_0^4 M_{AB}\mu\, 1\, dx + \int_4^8 M_{BC}\mu\, 1\, dx = 8.490\ \ 10^{-5} \text{ rad}$$

Nótese que esta expresión corresponde sencillamente a la aplicación del primer teorema de Mohr entre los puntos A y C en la viga ABC.

5.13.5 **La estructura de la figura 5.34 está sometida a la fuerza de 12000 kg indicada y además todas sus barras sufren un calentamiento con una temperatura media T_m=+20 ºC y un gradiente T_g=200 ºC/m. Calcular los esfuerzos internos en las barras.**
Todas las barras son del mismo material, con: E=2 10^6 kg/cm^2, α=10^{-5} ºC^{-1}. Las barras AB y EF tienen A=40 cm^2, I=20000 cm^4, las restantes barras tienen A/2, I/2.

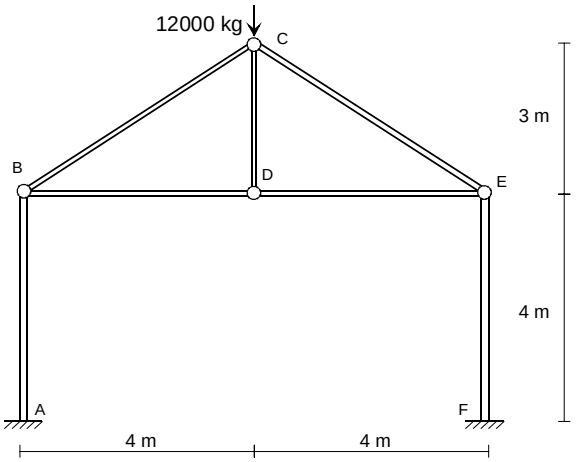


Figura 5.34

La estructura es hiperestática de grado 1. Algunas posibles incógnitas redundantes son:

$X_1=M_A$ $X_1=Q_{BA}$ $X_1=M_F$ $X_1=Q_{EF}$ $X_1=N_{BD}$

Se adopta como fuerza redundante el esfuerzo axial en la barra BD $X_1=N_{BD}$

Se definen los coeficientes de flexibilidad para las barras AB y EF como:

$\gamma = 1/(EA) = 1.25\ 10^{-8}$ kg^{-1} $\mu = 1/(EI) = 2.5\ 10^{-7}$ 1/(kg m^2)

Las barras restantes tienen la mitad de área y de inercia, luego su flexibilidad es 2γ y 2μ.

Los esfuerzos en el caso 0 se muestran en la figura 5.35.

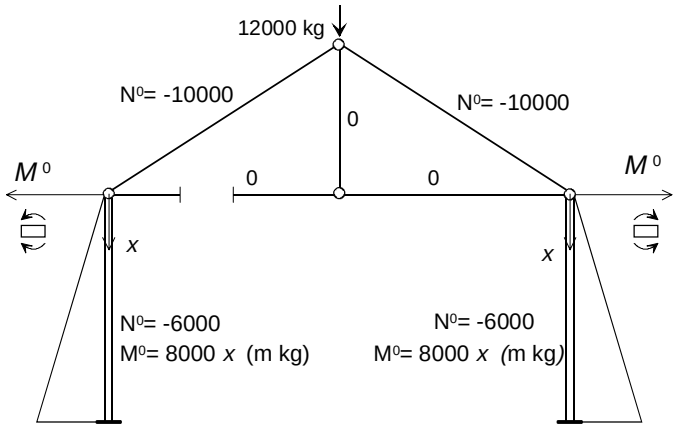


Figura 5.35

En el caso 1 se aplica un valor unidad al esfuerzo axial en la barra BD, que se transmite a la DE y origina una distribución de momentos lineal en AB y EF, como se muestra en la figura 5.36. La parte superior de la estructura, que es isostática, no trabaja en este caso.

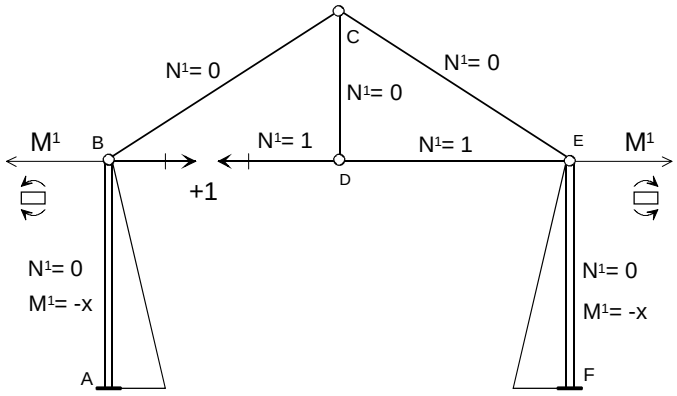


Figura 5.36

El coeficiente de flexibilidad es:

$$f_{11} = (1)(4\cdot 2\gamma)(1) + (1)(4\cdot 2\gamma)(1) + \int_0^4 (-x)\mu(-x)dx + \int_0^4 (-x)\mu(-x)dx$$

$$f_{11} = 16\gamma + \frac{128}{3}\mu = 1.0867\cdot 10^{-5} \quad \text{m / kg}$$

El término independiente tiene la expresión:

$$D_1 = -\sum N_i^0 \rho_i N_i^1 - \int M^0 \mu M^1 dx - \sum \alpha_i T_{mi} L_i N_i^1 + \int \alpha T_g M^1 dx$$

Desarrollando los términos no nulos se obtiene:

$$D_1 = -\int M_{BA}^0 \mu M_{BA}^1 dx - \int M_{EF}^0 \mu M_{EF}^1 dx$$

$$-\alpha T_m L_{BD} N_{BD}^1 - \alpha T_m L_{DE} N_{DE}^1 + \int \alpha T_g M_{BA}^1 dx + \int \alpha T_g M_{EF}^1 dx$$

$$D_1 = -\int_0^4 (8000x)\mu(-x)dx - \int_0^4 (8000x)\mu(-x)dx$$

$$-\alpha T_m 4\cdot 1 - \alpha T_m 4\cdot 1 + \int_0^4 \alpha T_g (-x)dx + \int_0^4 \alpha T_g (-x)dx = 0.05173 \quad \text{m}$$

El valor de la incógnita redundante es:

$$X_1 = N_{BD} = \frac{D_1}{f_{11}} = 4760.7 \quad \text{kg}$$

Los esfuerzos axiales finales en las barras son: $N = N^0 + 4760.7\ N^1$.

El momento flector en las barras BA y EF es: $M = M^0 + 4760.7\ M^1 = 3240\ x \quad (0<x<4)$

Sus valores numéricos se indican en la figura 5.37.

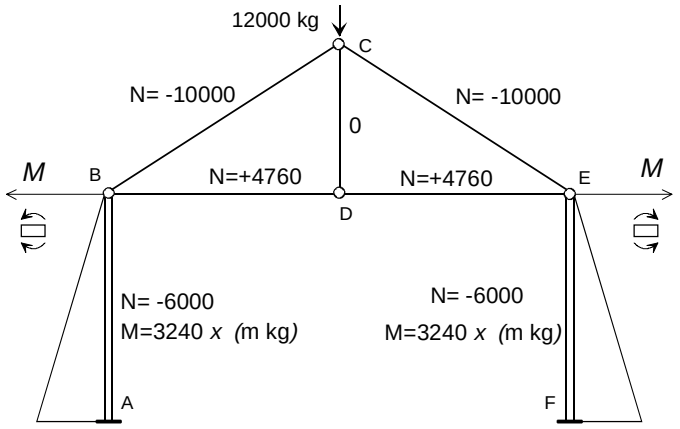


Figura 5.37

5.13.6 Calcular la deformación vertical del punto C en la estructura del ejemplo 5.13.5.

Se aplica una fuerza virtual unitaria en el punto C, en dirección vertical hacia abajo, y se calculan los esfuerzos en el caso isostático, que se muestran en la figura 5.38. Este caso isostático coincide con el caso 0 antes calculado (figura 5.35), cambiando la escala de la fuerza aplicada.

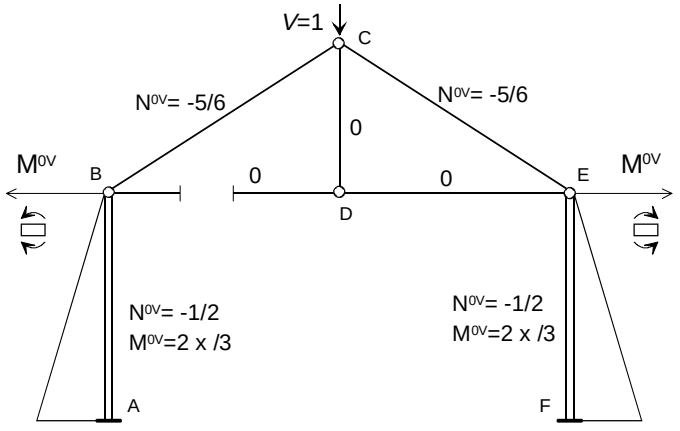


Figura 5.38

La expresión de la deformación buscada es:

$$\Delta_{CY} = \sum N\rho N^{0V} + \int M\mu M^{0V} dx + \sum \alpha T_m L N^{0V} - \int \alpha T_g M^{0V} dx$$

Desarrollando sólo los términos no nulos, y agrupándolos cada uno con su simétrico se obtiene:

$$\Delta_{CY} = 2\left[(-10000)\,5\cdot 2\gamma\left(-\frac{5}{6}\right) + (-6000)\,4\cdot\gamma\left(-\frac{1}{2}\right)\right] + 2\left[\int_0^4 (3240x)\mu\left(\frac{2x}{3}\right)dx\right] +$$

$$+2\left[\alpha T_m 5\left(-\frac{5}{6}\right)+\alpha T_m 4\left(-\frac{1}{2}\right)\right]-2\left[\int_0^4 \alpha T_g\left(\frac{2x}{3}\right)dx\right]$$

$$\Delta_{CY} = 0.0024 + 0.023 - 0.0025 - 0.0213 = 0.0016 \text{ m}$$

El primer sumando corresponde a la deformación provocada por el esfuerzo axial existente en AB (-10000 kg) y BC (-6000 kg). El segundo sumando es la deformación producida por la flexión de AB, que arrastra el punto B hacia la izquierda, y hace descender a C. El tercer sumando es la deformación producida por la dilatación de AB y BC, debida a su temperatura media: al ser ésta positiva trata de hacer subir a C, por lo que este término sale negativo. El cuarto término se debe a la deformación lateral de B producida por el gradiente térmico en AB, que le hace curvarse en el sentido de desplazar B hacia la derecha y por lo tanto obliga a C a subir.

5.13.7 Calcular los esfuerzos axiales y los momentos flectores en todos los elementos de la estructura de la figura 5.39. El apoyo A tiene una rigidez al giro de valor 1000 m Tn/rad.
Propiedades de las barras: $E = 2\ 10^6$ kg/cm^2 $A = 100$ cm^2 $I = 10000$ cm^4.

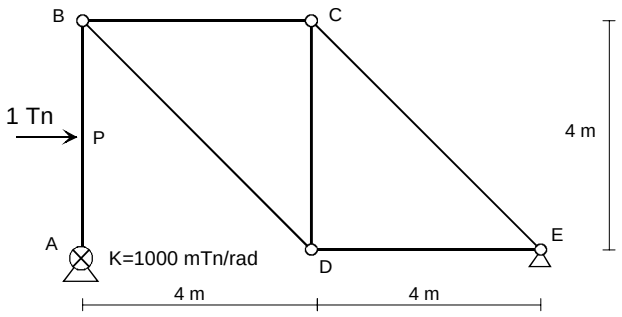


Figura 5.39

El grado de hiperestaticidad de la estructura es *h*=1. Se adopta como incógnita redundante el esfuerzo cortante en la parte superior de la barra AB, junto al nudo B, como se indica en la figura 5.40.

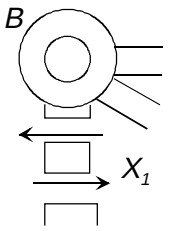


Figura 5.40

El caso 0 se muestra en la figura 5.41. En él la celosía de la parte derecha de la estructura está simplemente apoyada en el extremo superior de la columna AB. Esta columna se mantiene estable precisamente por la presencia del muelle de torsión situado en A.

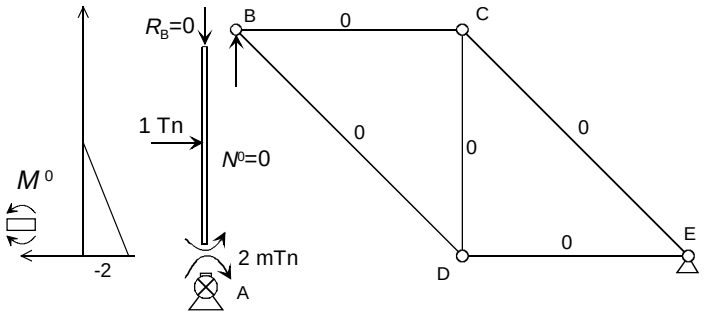
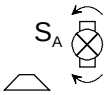


Figura 5.41

Los esfuerzos en el caso 0 son:

Esfuerzos axiales	$N_i^0 = 0$
Momento flector en AB:	$M_{AB}^0 = -2 + x$ mTn $\quad 0 < x < 2$
Esfuerzo en el muelle	$S_A^0 = -2$ mTn

El criterio de signos empleado para el esfuerzo en el muelle es:



Caso 1: se aplica un valor unitario al cortante en B, como se indica en la figura 5.42, lo cual genera una flexión en la barra AB.

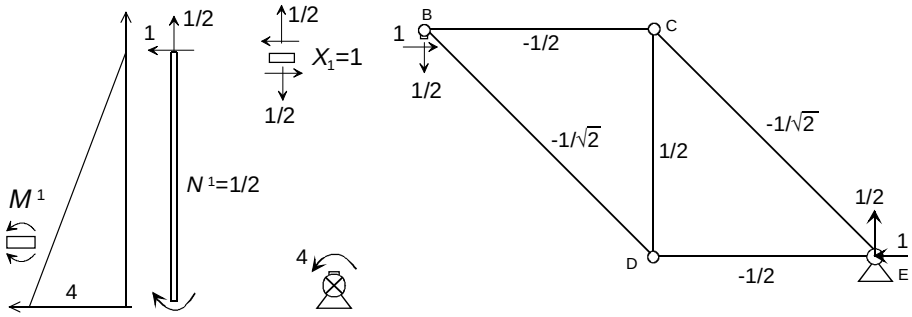


Figura 5.42

Momento flector en AB:	$M_{AB}^1 = 4 - x$ mTn $\quad 0 < x < 4$
Esfuerzo en el muelle:	$S_A^1 = 4$ mTn

La ecuación de compatibilidad es:

$$\left[\sum N^1 \rho N^1 + \int M^1 \mu M^1 dx + S^1 f S^1\right] X_1 = -\sum N^0 \rho N^1 - \int M^0 \mu M^1 dx - S^0 f S^1$$

y los distintos términos que en ella aparecen valen:

$$\sum N^0 \rho N^1 = 0$$

$$\sum N^1 \rho N^1 = (4 + 4\sqrt{2}) / EA$$

$$\int M^0 \mu M^1 dx = \int_0^2 (-2+x)\mu(4-x)dx = -20/3EI$$

$$\int M^1 \mu M^1 dx = \int_0^4 (4-x)\mu(4-x)dx = 64/3EI$$

Por lo tanto la ecuación queda:

$$X_1\left[\frac{4+4\sqrt{2}}{EA}+\frac{64}{3EI}+\frac{4\cdot 4}{K_A}\right]=0-\left(-\frac{20}{3EI}\right)-\frac{(-2)\cdot 4}{K_A}$$

Las distintas constantes involucradas en ella valen:

Rigidez del muelle $K_A = 1000$ mTn / rad

Rigidez axial $EA = 2\cdot 10^6 \cdot 100 = 2\cdot 10^8$ kg $= 2\cdot 10^5$ Tn

Rigidez a flexión $EI = 2\cdot 10^6 \cdot 10^4 = 2\cdot 10^{10}$ kg cm^2 $= 2\cdot 10^3$ Tn m^2

Con lo que se obtiene : $X_1 = 0.4242$ Tn $\equiv Q_B$

El esfuerzo final en el muelle es:

$$S_A = S_A^0 + X_1 S_A^1 = -2 + 0.4242\cdot 4 = -0.303 \quad \text{Tn}$$

Los esfuerzos axiales en las barras son:

$$N = N^0 + X_1 N^1 = 0 + X_1 N^1 = 0.4242\, N^1 \quad \text{Tn}$$

El momento flector en la barra AB es:

$$M_{AP} = (-2+x) + 0.4242(4-x) \quad \text{mTn} \qquad 0 < x < 2$$

$$M_{PB} = 0.4242(4-x) \quad \text{mTn} \qquad 2 < x < 4$$

La figura 5.43 resume todos los esfuerzos en las barras.

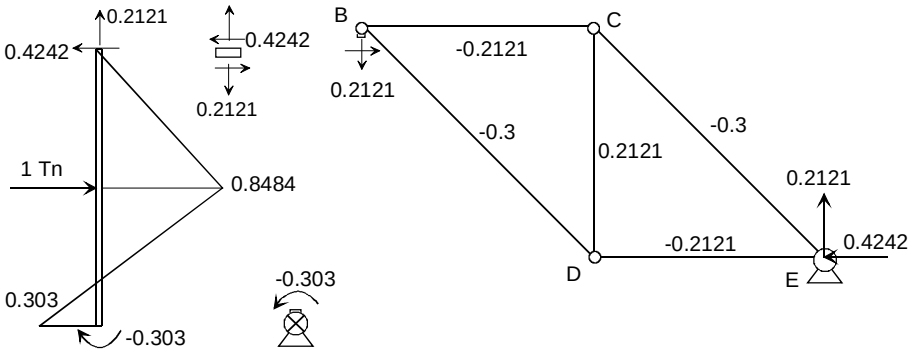


Figura 5.43

5.13.8 Calcular la deformación horizontal del punto P de aplicación de la carga en la estructura del ejercicio 5.13.7.

Se plantea un caso isostático virtual cargado con la fuerza virtual unitaria *V*=1 en el punto P, y se adopta la misma incógnita hiperestática que en el ejercicio 5.13.7, es decir el cortante en el punto B. De esta forma el caso isostático virtual coincide con el caso 0 antes calculado, como se muestra en la figura 5.44.

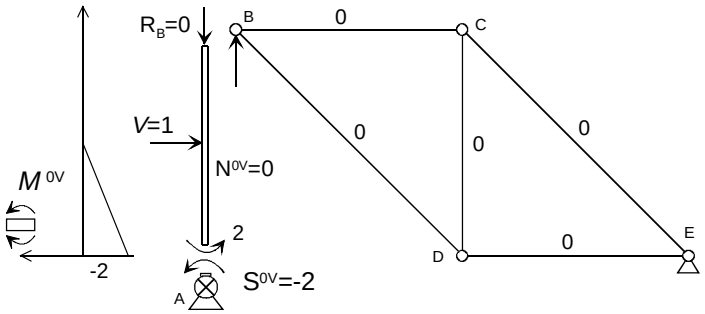


Figura 5.44

Esfuerzos en las barras: son todos nulos $N_i^{0V} = 0$

Esfuerzo en el muelle: $S^{0V} = -2$

Momento flector en AB: $M_{AP}^{0V} = -2 + x \qquad 0 < x < 2$

La deformación horizontal de P es :

$$\Delta_{PX} = \sum N \rho N^{0V} + \int M \mu M^{0V} dx + S f S^{0V}$$

$$\Delta_{PX} = \int_0^2 ((-2+x) + 0.4242(4-x)) \mu (-2+x) dx + (-0.303)\frac{1}{K_A}(-2) = 5.25 \cdot 10^{-4} \quad \text{m}$$

Nótese que el primer término de esta ecuación corresponde al segundo Teorema de Mohr aplicado entre A y P, mientras que el segundo término corresponde al giro en el muelle A.

5.13.9 Calcular la deformación vertical del punto D en la estructura del ejercicio 5.13.7.

Para el caso isostático virtual se elige la misma incógnita hiperestática anterior y se carga la estructura con una fuerza virtual *V*=1 en dirección vertical en el punto D.

En esta situación el esfuerzo en el muelle es nulo $S^{0V} = 0$, al igual que el momento flector en la barra AB.

Los esfuerzos axiales en las barras se muestran en la figura 5.45.

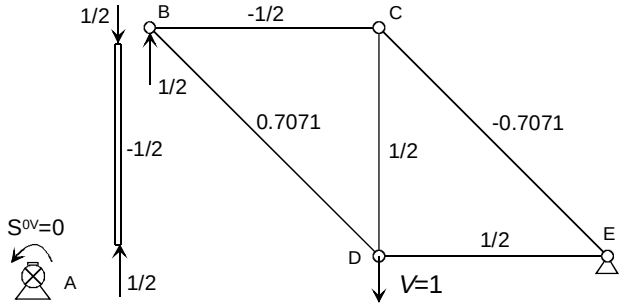


Figura 5.45

La deformación vertical de D es:

$$\Delta_{DX} = \sum N\rho N^{0V} + \int M\mu M^{0V} dx + SfS^{0V} = \sum N\rho N^{0V} = 0$$

que resulta ser nula, para la hipótesis de carga empleada. La confirmación de este resultado puede hacerse por consideraciones geométricas, teniendo en cuenta la cinemática de la deformación de las distintas barras, y se deja como ejercicio al lector.

5.13.10 Resolver la estructura del ejercicio 5.13.7 empleando como incógnita hiperestática el momento flector en la base de la barra AB.

Se emplea como incógnita hiperestática el momento flector en el punto de conexión entre la viga AB y el muelle, que es igual al momento en el muelle. La figura 5.46 muestra un detalle de los distintos esfuerzos en el nudo A.

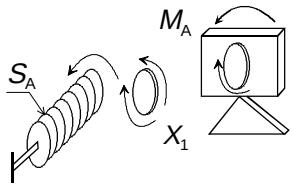


Figura 5.46

El caso 0 se muestra en la figura 5.47.

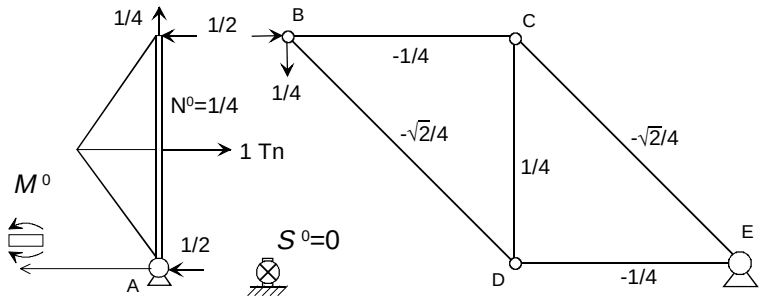


Figura 5.47

El esfuerzo en el muelle es nulo: $S_A^0 = 0$, y la distribución de momentos flectores en AB es:

$$M_{AP}^0 = x/2 \quad \text{mTn} \qquad 0 < x < 2$$

$$M_{PB}^0 = 2 - x/2 \quad \text{mTn} \qquad 2 < x < 4$$

Los esfuerzos en el caso 1 se muestran en la figura 5.48.

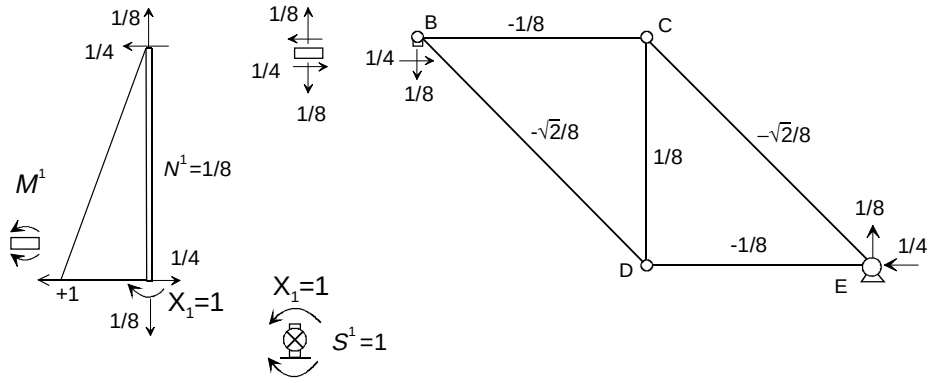


Figura 5.48

El momento flector en AB vale : $M^1_{AB} = (4-x)/4$ mTn $\quad 0 < x < 4$

El esfuerzo en el muelle es: $S^1_A = 1$ mTn

El resto de los cálculos se efectúan de la forma indicada anteriormente y se dejan como ejercicio para el lector.

5.14 BIBLIOGRAFÍA

1. Argüelles Alvarez, R., *Cálculo de Estructuras - Tomo I*, Sección de Publicaciones de la Escuela Superior de Ingenieros de Montes, Madrid, 1981.
2. Argüelles Alvarez, R., y Argüelles Bustillo, R., *Análisis de Estructuras: Teoría, Problemas y Programas*, Escuela Técnica Superior de Ingenieros de Montes, Madrid, 1996.
3. Beaufait, F. W., *Basic Concepts of Structural Analysis*, Prentice-Hall, New Jersey, 1977.
4. Hibbeler, R. C., *Structural Analysis*, Prentice-Hall, New Jersey, 1996.
5. Hsieh, Y-Y., *Teoría Elemental de Estructuras*, Prentice-Hall Int., Bogotá, 1973.
6. Norris, C. H., Wilbur, J. B., y Ytku, S., *Análisis Elemental de Estructuras*, McGraw-Hill, New York, 1982.
7. Timoshenko, S. P., y Young, D. H., *Teoría de las Estructuras*, Ed. Urmo, Bilbao, 1974.
8. Tuma, J. J., *Análisis Estructural*, Serie Schaum, McGraw-Hill, New York, 1970.
9. Wang, C. K., *Intermediate Structural Analysis*, McGraw-Hill, New York, 1983.

5.15 PROBLEMAS

5.15.1 La estructura de la figura P5.1 está sometida a la fuerza horizontal de 5000 kg. Todas las barras tienen las mismas propiedades: $E = 2\ 10^6$ kg/cm^2, $A = 200$ cm^2, $I = 50000$ cm^4. Se desea calcular el momento flector en A y la deformación horizontal de D.

Solución: $M_A =$ 14315 cm kg, $\Delta_{DX} =$ 0.0602 cm

5.15.2 Calcular los esfuerzos en todas las barras de la estructura de la figura P5.2, bajo la acción de la carga de 1 Tn. Datos para todas las barras: E=2 10^6 kg/cm^2 A=10 cm^2 I=2000 cm^4

Solución: $N_{BF} = 2468$ kg, $N_{AD}=N_{DC} = -1745$ kg, $M_E = 1872$ m kg

5.15.3 Calcular la deformación vertical del punto G en la estructura del problema 5.15.2.

Solución: $\Delta_{GY} = 9.76$ cm.

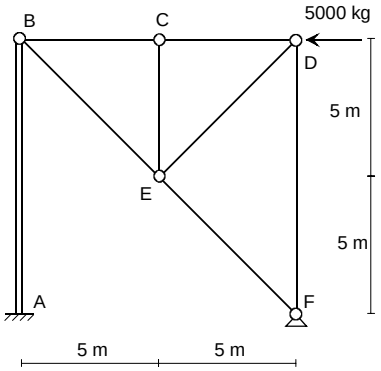


Figura P5.1

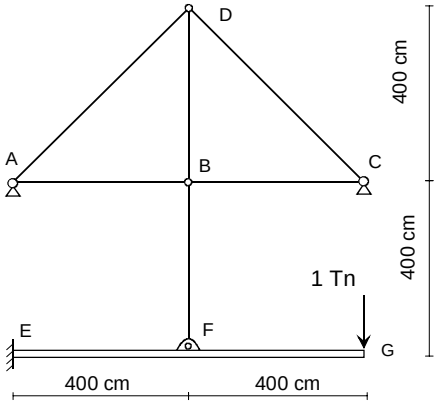


Figura P5.2

5.15.4 En la estructura de la figura P5.3 la barra DB tiene área 10 cm^2. La barra ABC tiene área infinita comparada con la anterior y momento de inercia 2000 cm^4. Calcular los esfuerzos en la estructura, bajo la acción de la carga de 1 Tn situada en el extremo del voladizo, así como la flecha vertical en el punto de aplicación de dicha carga. El material tiene un módulo de elasticidad E=2 10^6 kg/cm^2.

Solución: $N_{DB} =$ 3498.4 kg, $N_{AB} =$ -2473.8 kg, $M_A =$ 189505 cm kg,
$M_B =$ -400000 cm kg, $\Delta_{CY} = 9.683$ cm

5.15.5 Repetir el problema 5.15.4 suponiendo que la barra ABC tiene un área de 40 cm^2.

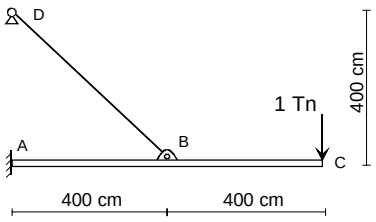


Figura P5.3

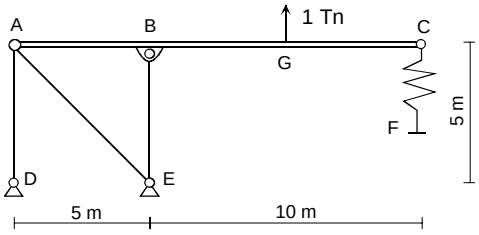


Figura P5.4

5.15.6 En la estructura de la figura P5.4 se desea hallar el esfuerzo en el muelle CF y el máximo momento flector en la barra ABC. Las propiedades de las barras son: E=2.1 10^6 kg/cm^2 A=10 cm^2 I=2140 cm^4. La rigidez del muelle es K=100 Tn/cm.

Solución: S_{CF} = +375 kg. Momento máximo = 1878.3 m kg en G

5.15.7 Calcular el diagrama de momentos flectores en la estructura de la figura P5.5. Los dos muelles tiene la misma rigidez al giro: 1000 mTn/rad. Además el muelle situado en C tiene un esfuerzo de pretensión inicial de valor 10 m Tn, como se indica en la figura. Todas las barras tienen las mismas propiedades: E=2 10^6 kg/cm^2 A=100 cm^2 I=10^4 cm^4

Solución: M_{AB} = 1.85 M_{BA} = 1.682 M_{BC} = -2.266 M_C = -3.138 M_D = -4.01 mTn

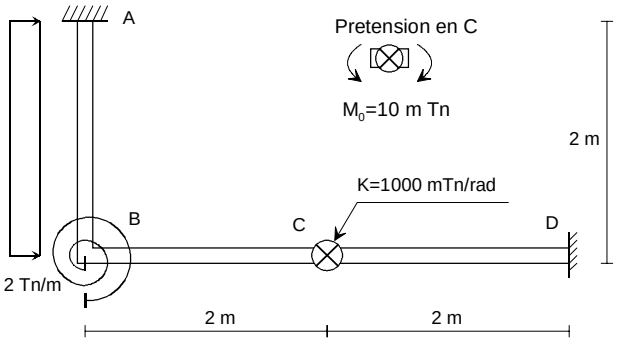


Figura P5.5

5.15.8 Calcular los esfuerzos en los elementos de la estructura de la figura P5.6, así como la deformación vertical en E y el giro del nudo B. Todas las barras tienen las mismas propiedades: E=2 10^6 kg/cm^2 A=100 cm^2 I=10000 cm^4.

Solución: N_{AB} = -95 kg, N_{BD} = 469 kg, N_{BC} = -327 kg, N_{CE} = 545 kg, N_{DE} = -436 kg.
M_{BD} = 0.11863 mTn, M_D = -0.3458 mTn, M_{BC} = -0.1084 mTn

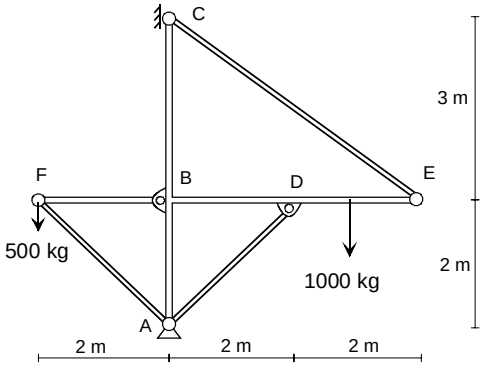


Figura P5.6

5.15.9 Calcular los diagramas de momentos flectores, esfuerzos cortantes y esfuerzos axiales para la estructura de la figura P5.7. Además de las fuerzas indicadas en la figura, la barra DE sufre un calentamiento uniforme de +50 ºC. Todas las barras son de sección rectangular, con canto 20 cm. y ancho 10 cm.
El material tiene $E = 2.1\ 10^6$ kg/cm^2, $\alpha = 6\ 10^{-6}$ ºC^{-1}

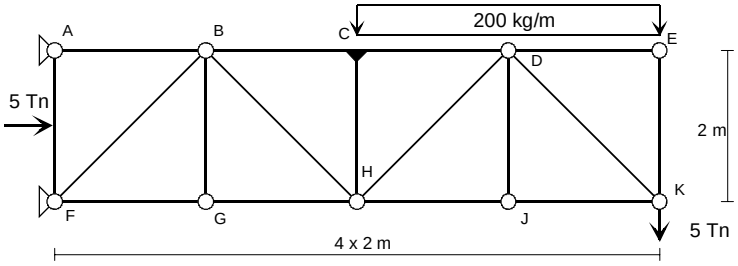
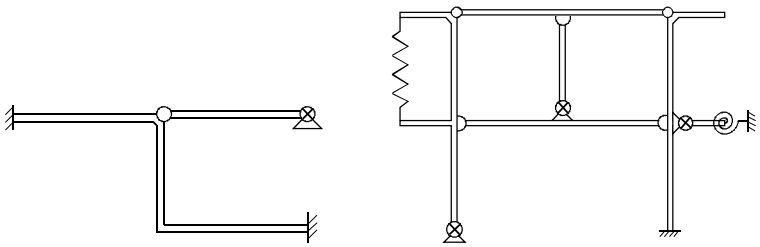


Figura P5.7

5.15.10 Determinar el grado de hiperestaticidad *h*, y seleccionar un conjunto de incógnitas hiperestáticas para los pórticos mostrados en la figura P5.8. Dibujar la estructura isostática que se obtiene al eliminarlas.



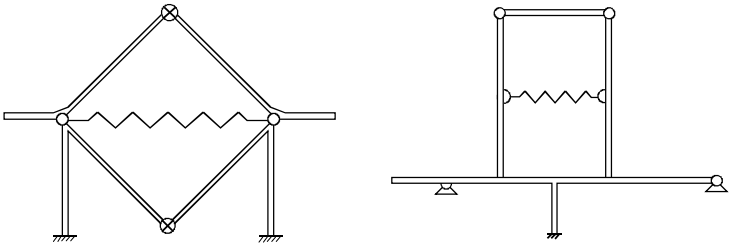


Figura P5.8

5.15.11 En la estructura de la figura P5.9 se desea calcular el diagrama de momentos de la barra AC. La estructura está sometida a las cargas representadas en la figura y al descenso de 1 cm del apoyo B. Además la barra CD tiene una longitud natural de 302 cm.
Datos para todas las barras: A= 10 cm^2 I= 2000 cm^4 E= 2 10^6 kg/cm^2

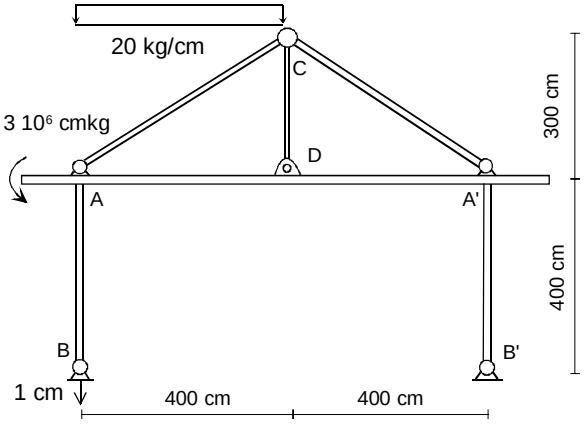


Figura P5.9

5.15.12 Determinar los esfuerzos en la estructura de la figura P5.10. Todas las barras son del mismo material, con E=2 10^6 kg/cm^2, y tienen el mismo momento de inercia I=10000 cm^4. El área de todas ellas es infinita, salvo la barra CE, que tiene A=10 cm^2.
El muelle BE tiene una rigidez de 100 Tn/cm, y además su longitud natural es 4 cm más larga que su longitud teórica de montaje. La unión entre las barras en el nudo C es flexible, y tiene una rigidez al giro de valor 1000 mTn/rad.

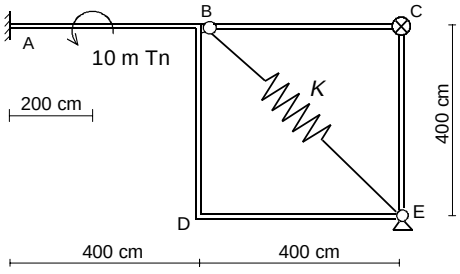


Figura P5.10

5.15.13 Calcular el diagrama de momentos flectores de la estructura de la figura P5.11, empleando una descomposición en casos simétrico y antisimétrico (ver capítulo 9). Todas las barras tienen: E=2 10^6 kg/cm^2 α=10^{-6} $^oC^{-1}$ I=10000 cm^4 A=10 cm^2 Canto=20 cm.

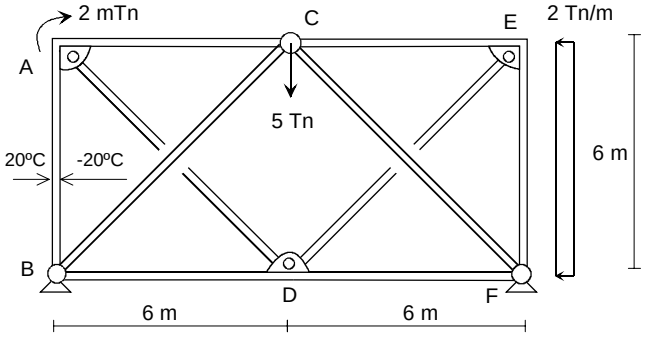


Figura P5.11

5.15.14 Calcular el diagrama de momentos flectores de la estructura de la figura P5.12. Por un error de fabricación, la barra AB mide 402 cm, y asimismo la barra DF es 1 cm más corta que su longitud de montaje. El muelle situado en C tiene una rigidez de 100 mTn/rad, y una pretensión inicial de 5 mTn, como se indica en la figura.
Las propiedades de todas las barras son: A= 50 cm^2 I= 10^4 cm^4 E=2 10^6 kg/cm^2

5.15.15 En la estructura de la figura P5.13 el peso de 10 Tn, cuelga de un cable inextensible que pasa por las poleas situadas en J y E, para engancharse en el extremo del voladizo de BG. Las poleas no tienen rozamiento y su radio es de 1 m. La barra ABCD está sometida a un calentamiento de +100 ºC en su cara derecha y de +20ºC en su cara izquierda. Calcular los esfuerzos en las barras y el descenso del punto J. Todas las barras tienen las mismas propiedades: A=100 cm^2 I=10000 cm^4 Canto=20 cm E= 2 10^6 kg/cm^2 α= 10^{-6} ºC^{-1}

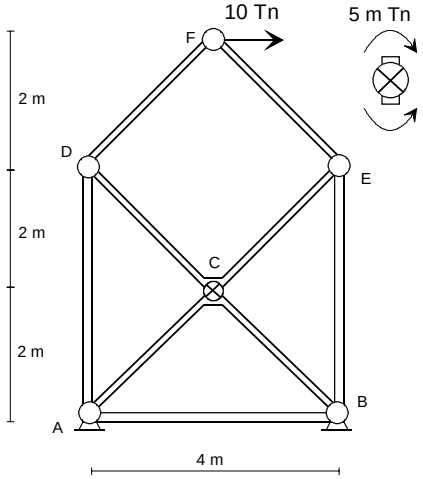


Figura P5.12

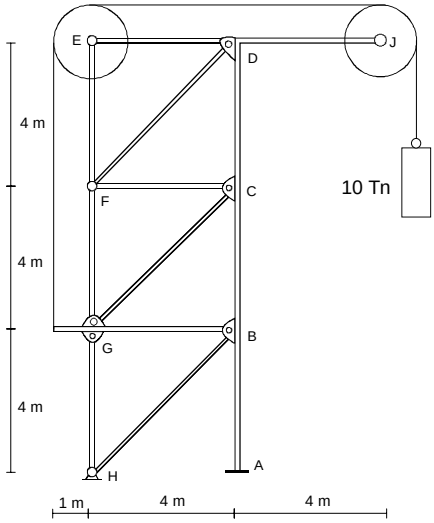


Figura P5.13

Capítulo 6

Arcos

6.1 INTRODUCCIÓN

Un arco es una estructura plana constituida por un elemento curvo de sección transversal despreciable frente a su longitud, y cuya curvatura es pequeña comparada con su sección transversal. Los dos puntos extremos pueden estar sustentados de distintas formas y las cargas exteriores son habitualmente verticales.

Los arcos son una de las estructuras más utilizadas desde la antigüedad. Ello es debido a que, si su geometría es adecuada, soportan grandes cargas transversales y las transmiten a los apoyos extremos trabajando básicamente a compresión, con muy poco esfuerzo de flexión. Esto permite utilizar en su construcción materiales que no soportan bien la tracción, como el hormigón en masa o sencillamente ladrillos o bloques de piedra independientes, adosados unos a otros.

La figura 6.1 muestra las disposiciones más habituales de los arcos.

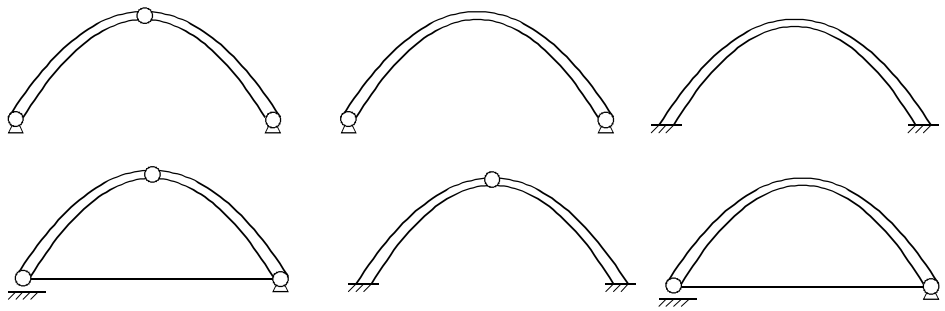
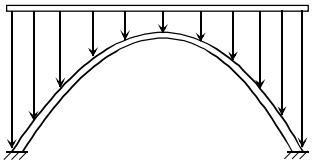


Figura 6.1

Los arcos están normalmente sometidos a fuertes cargas verticales, aplicadas bien desde la parte superior del arco o desde la inferior (figura 6.2), así como a cargas horizontales

debidas a empujes de viento, frenado, etc. Son también frecuentes las cargas térmicas o las debidas a los asientos de los apoyos, que pueden ser importantes en arcos de gran tamaño.



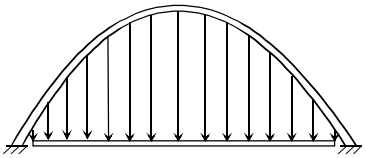


Figura 6.2

Es posible encontrar también arcos formando parte de otras estructuras planas más complejas, del tipo celosía o pórtico (figura 6.3).

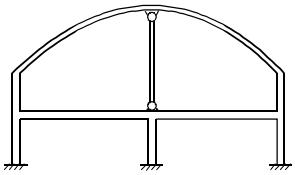


Figura 6.3

6.2 GENERALIDADES

6.2.1 Hipótesis fundamentales

La hipótesis fundamental para el estudio de los arcos es que su curvatura es pequeña en comparación con las dimensiones transversales de su sección o lo que es lo mismo, que el radio de curvatura es mucho mayor que el canto de la sección. Esta simplificación es aplicable normalmente si la relación entre el radio de curvatura y el canto es superior a 10.

La suposición de pequeña curvatura hace que no sea necesario aplicar una teoría especial de piezas curvas, sino que es directamente aplicable la teoría convencional de flexión de vigas, considerando únicamente que el dominio de la estructura es curvo. Los primeros trabajos sobre arcos empleando estas hipótesis se deben a Navier (1826) y a Bresse (1854).

La energía acumulada en un arco tiene la misma expresión que para un pórtico plano, pero sustituyendo la coordenada longitudinal x por la longitud del arco s.

$$U^* = \int \frac{N^2}{2EA} ds + \int \frac{M^2}{2EI} ds + \int N\alpha T_m ds - \int M\alpha T_g ds \qquad (6.1)$$

siendo N el esfuerzo axial y M el momento flector en una sección cualquiera del arco. La variación de temperatura a lo largo de la sección del arco se supone lineal, definida por sus valores medio T_m y gradiente T_g. Tanto el esfuerzo axial como el momento flector son en general variables a lo largo de la directriz. El canto normalmente también es variable.

Habitualmente no se considera la energía debida al esfuerzo cortante pues, por su propia definición, los arcos son esbeltos, con lo que la energía de cortante no es significativa. En muchos casos también se desprecia la energía de esfuerzo axial, como se ve más adelante.

6.2.2 Ecuaciones de equilibrio

Para hallar las ecuaciones de equilibrio se aísla un elemento Δs que corresponde a un ángulo $\Delta\varphi$, tal y como se muestra en la figura 6.4.

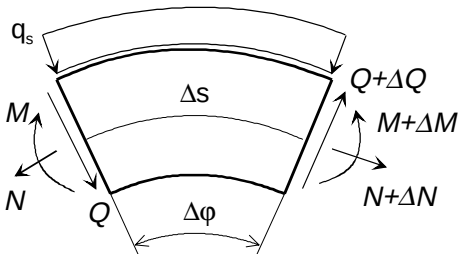


Figura 6.4

- Equilibrio radial de fuerzas

$$(Q+\Delta Q)\cos\frac{\Delta\varphi}{2}-Q\cos\frac{\Delta\varphi}{2}-(N+\Delta N)\sin\frac{\Delta\varphi}{2}-N\sin\frac{\Delta\varphi}{2}-q_s\Delta s=0 \qquad (6.2)$$

Cuando Δs tiende a cero el ángulo $\Delta\varphi$ también lo hace, y el seno y el coseno del mismo tienden a:

$$\cos\frac{\Delta\varphi}{2}\to 1 \qquad \sin\frac{\Delta\varphi}{2}\to\frac{\Delta\varphi}{2}=\frac{\Delta s}{2R} \qquad (6.3)$$

siendo R el radio de curvatura de la sección. Sustituyendo estos valores, dividiendo por Δs y tomando el límite cuando $\Delta s\to 0$ la ecuación de equilibrio radial queda:

$$\frac{dQ}{ds}=q_s+\frac{N}{R} \qquad (6.4)$$

Esta ecuación es equivalente a la de las vigas rectas, con la diferencia de que en ella hay un nuevo término en el que intervienen el esfuerzo axial N y el radio de curvatura R. Si este radio de curvatura tiende a infinito, la ecuación anterior coincide con la habitual de las vigas rectas.

- Equilibrio de momentos

Tomando momentos en el elemento diferencial respecto a su lado derecho se obtiene:

$$(M+\Delta M)-M+q_s\Delta s\left(R\sin\frac{\Delta\varphi}{2}\right)+Q\cos\frac{\Delta\varphi}{2}2R\sin\frac{\Delta\varphi}{2}+N\sin\frac{\Delta\varphi}{2}2R\sin\frac{\Delta\varphi}{2}=0 \qquad (6.5)$$

Procediendo igual que con la ecuación de equilibrio de fuerzas se llega a:

$$\frac{dM}{ds}=-Q \qquad (6.6)$$

que es la ecuación equivalente a la de flexión de vigas rectas.

6.3 ARCO TRIARTICULADO

Se trata de una estructura isostática, cuya disposición geométrica general puede verse en la figura 6.5. No se especifica en principio su forma, sino sólo la posición de los apoyos A, B y de la clave C.

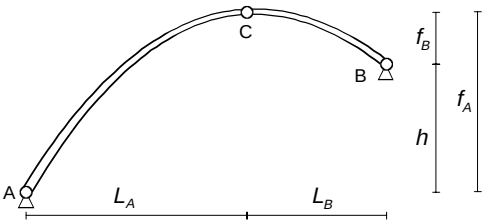


Figura 6.5

Las reacciones en las articulaciones se pueden hallar aislando los dos elementos AC y CB, como se indica en la figura 6.6. Tomando momentos respecto de A en el elemento AC, y respecto de B en el elemento CB, se obtiene:

$$-C_x f_A + C_y L_A + M_A^{extAC} = 0 \tag{6.7}$$

$$C_x f_B + C_y L_B + M_B^{extCB} = 0 \tag{6.8}$$

donde:

M_A^{extAC} es el momento respecto de A de las fuerzas exteriores comprendidas entre A y C, y

M_B^{extCB} es el momento respecto de B de las fuerzas exteriores entre C y B.

Ambos momentos se consideran positivos en sentido antihorario. De las dos ecuaciones anteriores se obtienen las reacciones en la clave C.

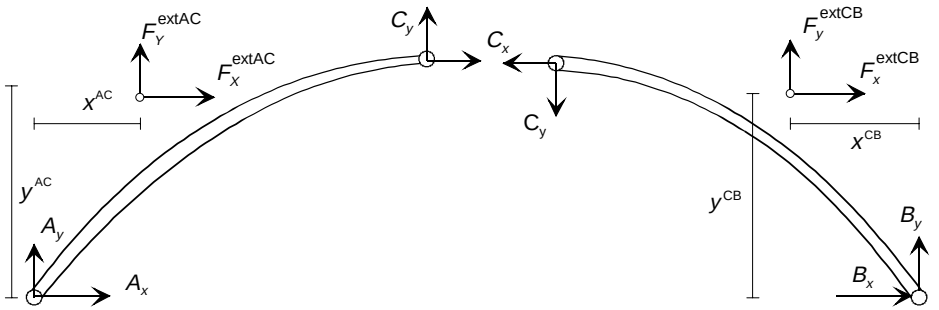


Figura 6.6

Las reacciones en los apoyos se obtienen del equilibrio de fuerzas horizontal y vertical de cada tramo:

$$A_x = -C_x - F_x^{extAC} \qquad A_y = -C_y - F_y^{extAC} \tag{6.9}$$

$$B_x = C_x - F_x^{extCB} \qquad B_y = C_y - F_y^{extCB} \tag{6.10}$$

6.3.1 Esfuerzos internos

Los esfuerzos en el interior del arco se obtienen aislando un tramo AP, donde P es un punto cualquiera situado entre A y B (figura 6.7). El origen del sistema de coordenadas se sitúa en A, con lo que las coordenadas de P son *x*,*y*.

El momento flector *M* se obtiene tomando momentos respecto de P:

$$M = A_y x - A_x y - M_P^{extAP} \qquad (6.11)$$

donde M_P^{extAP} es el momento respecto de P de las fuerzas exteriores aplicadas entre A y P. Se considera positivo en sentido antihorario.

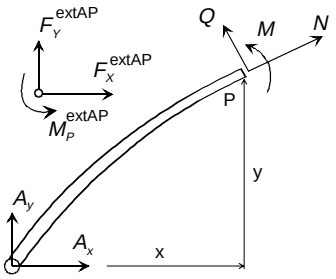


Figura 6.7

Los esfuerzos axial *N* y cortante *Q* se obtienen aplicando el equilibrio de fuerzas en las direcciones X e Y:

$$N\cos\alpha - Q\sin\alpha + A_x + F_x^{extAP} = 0 \qquad (6.12)$$

$$N\sin\alpha + Q\cos\alpha + A_y + F_y^{extAP} = 0 \qquad (6.13)$$

donde F_x^{extAP}, F_y^{extAP} son las resultantes, según X e Y, de las fuerzas exteriores aplicadas entre A y P. El valor que se obtiene para el esfuerzo axial es:

$$N = -(A_x + F_x^{extAP})\cos\alpha - (A_y + F_y^{extAP})\sin\alpha \qquad (6.14)$$

6.3.2 Deformación en la clave

La deformación vertical en la clave C se obtiene aplicando el método de la fuerza virtual unitaria. La figura 6.8. muestra el caso virtual.

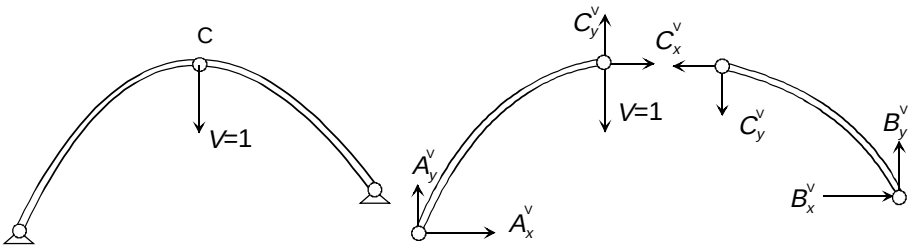


Figura 6.8

Tomando momentos respecto de A en AC, y respecto de B en CB se obtiene:

$$C_x^V f_A + 1L_A - C_y^V L_A = 0 \qquad (6.15)$$

$$C_x^V f_B + C_y^V L_B = 0 \qquad (6.16)$$

de donde se calculan las reacciones en la clave en el caso virtual:

$$C_x^V = \frac{L_A L_B}{f_A L_B + f_B L_A} \qquad C_y^V = \frac{-L_A f_B}{f_A L_B + f_B L_A} \tag{6.17}$$

Las reacciones en los apoyos son:

$$A_x^V = -C_x^V = \frac{-L_A L_B}{f_A L_B + f_B L_A} \qquad A_y^V = 1 - C_y^V = \frac{2L_A f_B + f_A L_B}{f_A L_B + f_B L_A} \tag{6.18}$$

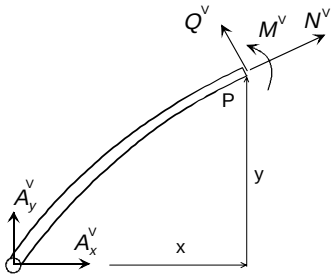
$$B_x^V = C_x^V = \frac{L_A L_B}{f_A L_B + f_B L_A} \qquad B_y^V = C_y^{0V} = \frac{-L_A f_B}{f_A L_B + f_B L_A} \tag{6.19}$$

Los esfuerzos en el caso virtual se indican en la figura 6.9.

- Tramo AC

$$M^V = A_y^V x - A_x^V y \tag{6.20}$$

$$N^V = -A_x^V \cos\alpha - A_y^V \sin\alpha \tag{6.21}$$



- Tramo CB

$$M^V = A_y^V x - A_x^V y - 1(x - L_A) \tag{6.22}$$

$$N^V = -A_x^V \cos\alpha - A_y^V \sin\alpha + 1\sin\alpha \tag{6.23}$$

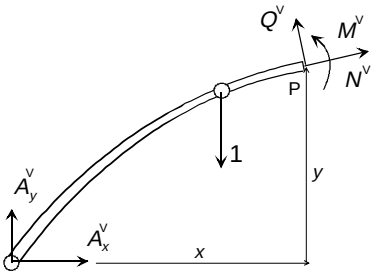


Figura 6.9

La deformación en la clave se obtiene aplicando el teorema de Crotti-Engesser, con la expresión de la energía dada por la ecuación (6.1):

$$\Delta_{CY} = \left(\frac{\partial U^*}{\partial V}\right)_{V=0} = \int N\gamma N^V ds + \int M\mu M^V ds + \int \alpha T_m N^V ds - \int \alpha T_g M^V ds \tag{6.24}$$

6.3.3 Arco sin momento flector

Sea un arco triarticulado simétrico, cargado con una carga distribuida uniforme *q*, como se muestra en la figura 6.10. Se desea determinar qué forma debe tener el arco para que no aparezcan momentos en él.

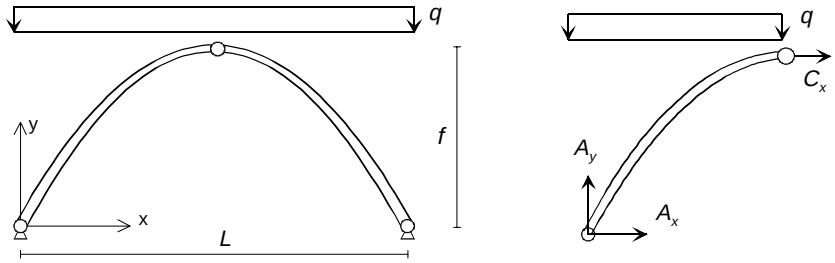


Figura 6.10

La reacción vertical en la clave es nula por simetría (ver capítulo 9). Aislando el tramo AC se obtienen las restantes reacciones:

$$C_x = -\frac{qL^2}{8f} \qquad C_y = 0 \qquad A_x = \frac{qL^2}{8f} \qquad A_y = \frac{qL}{2} \tag{6.25}$$

El momento flector en un punto P situado en unas coordenadas *x*,*y* es (figura 6.11):

$$M = \frac{qL}{2}x - \frac{qL^2}{8f}y - \frac{qx^2}{2} \tag{6.26}$$

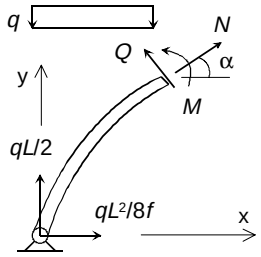


Figura 6.11

Imponiendo la condición *M*=0 y despejando la coordenada *y* en función de la *x* se obtiene la ecuación de la forma del arco, que es una parábola simétrica con la concavidad hacia abajo:

$$y = \frac{4f}{L^2}(Lx - x^2) \tag{6.27}$$

- El esfuerzo axial es:

$$N = qx\sin\alpha - \frac{qL}{2}\sin\alpha - \frac{qL^2}{8f}\cos\alpha \tag{6.28}$$

- El esfuerzo cortante es:

$$Q = qx\cos\alpha + \frac{qL^2}{8f}\sin\alpha - \frac{qL}{2}\cos\alpha \tag{6.29}$$

Teniendo en cuenta la relación geométrica

$$\frac{\sin\alpha}{\cos\alpha} = tg\alpha = \frac{dy}{dx} = \frac{4f}{L^2}(L - 2x) \tag{6.30}$$

se obtiene:

$$Q = qx\cos\alpha + \frac{qL^2}{8f}\frac{4f}{L^2}(L-2x)\cos\alpha - \frac{qL}{2}\cos\alpha = 0 \qquad (6.31)$$

Es decir que el arco está sometido únicamente a un esfuerzo axial, sin flexión ni cortante. Este resultado explica el interés de usar arcos de directriz parabólica para soportar cargas verticales, pues se pueden utilizar materiales que no soportan la tracción ni el esfuerzo cortante, o incluso elementos aislados, ya que éstos se sujetan unos a otros por rozamiento al estar el arco siempre a compresión.

6.4 ARCO BIARTICULADO

Este arco es hiperestático de grado *h*=1 (figura 6.12). Para su análisis se elige como incógnita redundante la reacción horizontal en el apoyo izquierdo A_x.

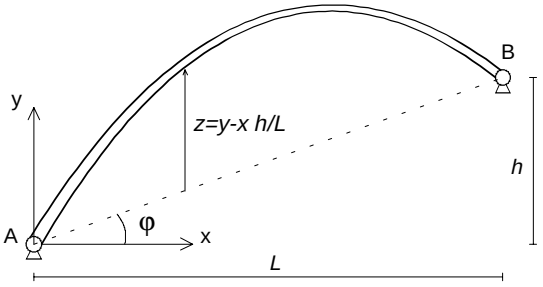


Figura 6.12

Por superposición, los valores del esfuerzo axial *N* y del momento flector *M* son:

$$N = N^0 + A_x N^1 \qquad M = M^0 + A_x M^1 \qquad (6.32)$$

- Caso 0 (figura 6.13).

La reacción vertical en A se obtiene tomando momentos respecto de B de todo el arco:

$$A_y^0 = \frac{-M_B^{extAB}}{L} \qquad (6.33)$$

Los esfuerzos axial y cortante y el momento flector valen:

$$N^0 = A_y^0 \sin\alpha - F_x^{extAP}\cos\alpha - F_y^{extAP}\sin\alpha \qquad (6.34)$$

$$Q^0 = -A_y^0 \cos\alpha - F_y^{extAP}\sin\alpha + F_x^{extAP}\cos\alpha \qquad (6.35)$$

$$M^0 = A_y^0 x + M_P^{extAP} \qquad (6.36)$$

donde el superíndice ^{extAP} se refiere a todas las fuerzas exteriores actuantes entre A y P.

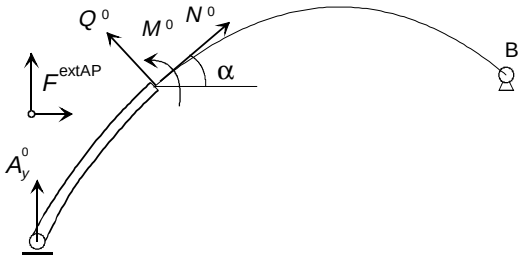


Figura 6.13

- Caso 1 (figura 6.14).

La reacción vertical en A se obtiene, como en el caso 0, tomando momentos respecto de B de todo el arco:

$$A_y^1 = \frac{h}{L} \tag{6.37}$$

Los esfuerzos axial y cortante y el momento flector valen:

$$N^1 = -\cos\alpha - \frac{h}{L}\sin\alpha \tag{6.38}$$

$$Q^1 = \sin\alpha - \frac{h}{L}\cos\alpha \tag{6.39}$$

$$M^1 = \frac{h}{L}x - y = -z \tag{6.40}$$

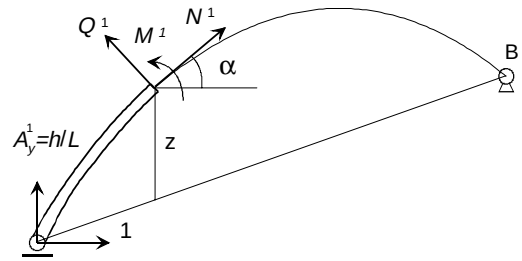


Figura 6.14

- La condición de compatibilidad se obtiene aplicando el segundo teorema de Engesser a la energía complementaria dada por la expresión (6.1):

$$\int N\gamma N^1 ds + \int M\mu M^1 ds + \int \alpha T_m N^1 ds - \int \alpha T_g M^1 ds = 0 \tag{6.41}$$

Sustituyendo en la ecuación anterior el valor de los distintos esfuerzos y despejando, se obtiene el valor de la reacción hiperestática:

$$A_x = -\frac{\int N^0\gamma N^1 ds + \int M^0\mu M^1 ds + \int \alpha T_m N^1 ds - \int \alpha T_g M^1 ds}{\int N^1\gamma N^1 ds + \int M^1\mu M^1 ds} \tag{6.42}$$

- Los esfuerzos finales en el arco son:

$$M = M^0 + A_x\left(\frac{hx}{L} - y\right) = M^0 - A_x z \tag{6.43}$$

$$N = N^0 + A_x\left(-\cos\alpha + \frac{h}{L}\sin\alpha\right) \tag{6.44}$$

Arco rígido axialmente, sin cargas térmicas

Una simplificación muy frecuente es despreciar la energía de esfuerzo axial, empleando γ=0. Suponiendo que no hay cargas térmicas sobre el arco y sustituyendo el valor de $M^1 = -z$ en la expresión de la reacción se obtiene:

$$A_x = \frac{\int M^0 \mu z\, ds}{\int z^2 \mu\, ds} \tag{6.45}$$

El momento flector es:

$$M = M^0 - z\,\frac{\int M^0 \mu z ds}{\int z^2 \mu ds} \tag{6.46}$$

que es una expresión también muy habitual en el diseño de arcos.

Arco de inercia variable según la ley de la secante

En muchas ocasiones se diseña la sección transversal del arco de tal forma que su rigidez a flexión varíe según la ley:

$$EI = (EI)_0 \sec\alpha \qquad\qquad \mu = \mu_0 \cos\alpha \tag{6.47}$$

donde $(EI)_0$ es la rigidez a flexión en la clave del arco y μ_0 es la flexibilidad correspondiente. Esta ley de variación no es excesivamente complicada de obtener y simplifica mucho los cálculos posteriores. En efecto, las integrales extendidas a la longitud del arco se pueden poner como:

$$\int_S \mu f(x) ds = \int_S \mu_0 f(x)\cos\alpha\, ds = \mu_0 \int_L f(x) dx \tag{6.48}$$

con lo cual basta con integrar en la coordenada *x*, que es mucho más sencillo.

Arco simétrico con carga vertical

Muchas veces los arcos se diseñan para minimizar el momento flector y para ello se da a su directriz una forma que coincide con el polígono funicular de las fuerzas exteriores. En arcos simétricos diseñados de esta manera y sometidos solamente a cargas verticales, se cumple que la componente horizontal del esfuerzo axial se mantiene constante. Además esta componente horizontal es igual a la reacción horizontal en el apoyo *A*, al haber sólo cargas verticales.

$$N\cos\alpha = -A_x = C^{te} \tag{6.49}$$

Con esta simplificación los esfuerzos en el caso 1 son:

$$N^1 = -\cos\alpha \qquad M^1 = -y \tag{6.50}$$

La ecuación de compatibilidad (6.41) queda:

$$\int N\gamma(-\cos\alpha)ds + \int (M^0 - A_x y)\mu(-y)ds + \int \alpha T_m(-\cos\alpha)ds - \int \alpha T_g(-y)ds = 0 \tag{6.51}$$

En la primera integral se identifica el valor de la reacción horizontal en *A*:

$$\int A_x\gamma ds + \int (-M^0 + A_x y)\mu y ds - \int \alpha T_m \cos\alpha ds + \int \alpha T_g y ds = 0 \tag{6.52}$$

Al ser A_x constante, se obtiene:

$$A_x = \frac{\int M^0 \mu y ds + \int \alpha T_m dx - \int \alpha T_g y ds}{\int \gamma ds + \int y^2 \mu ds} \tag{6.53}$$

Esta fórmula es también muy utilizada para el cálculo práctico de arcos, si el diseño de su directriz se efectúa tal y como se ha indicado antes.

6.5 ARCO BIARTICULADO ATIRANTADO

Es frecuente el empleo de un tirante de sujeción entre los dos apoyos, con objeto de eliminar la componente horizontal de la reacción en un apoyo. De hecho, si todas las cargas son verticales este arco no produce ninguna reacción horizontal sobre el terreno.

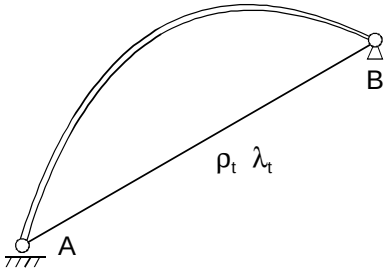


Figura 6.15

Se supone que el tirante tiene una flexibilidad axial de valor ρ_t y que en él hay un esfuerzo de pretensión inicial N_{0t} definido por un alargamiento equivalente λ_t:

$$\lambda_t = -N_{0t}\rho_t \tag{6.54}$$

El arco es hiperestático de grado 1, y para su análisis se adopta como incógnita redundante *X* el esfuerzo en el tirante. Se identifica con el subíndice *a* al esfuerzo axial del arco y con *t* al del tirante.

- Caso 0

Este caso (figura 6.16) es igual que el caso 0 del arco biarticulado, por lo tanto los esfuerzos son los mismos que en él. El esfuerzo en el tirante es nulo.

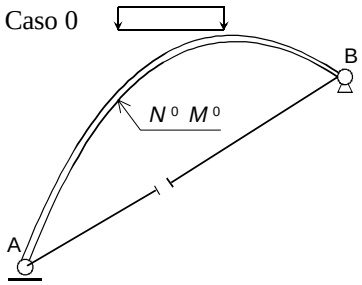


Figura 6.16

- Caso 1. Se aplica un valor unidad al esfuerzo en el tirante, como se observa en la figura 6.17. Los esfuerzos que se producen son:

$$N_a^1 = -\cos\alpha\cos\varphi - \sin\alpha\sin\varphi = -\cos(\alpha-\varphi) \qquad N_t^1 = 1 \qquad M^1 = -z' \tag{6.55}$$

donde se ha empleado la coordenada z' medida perpendicularmente desde el tirante al arco.

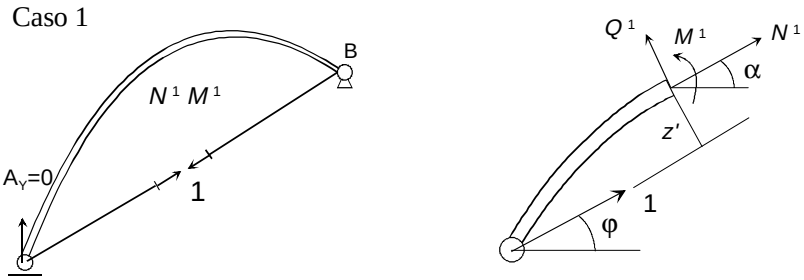


Figura 6.17

- Los esfuerzos finales en el arco y en el tirante son:

$$N_a = N_a^0 + X N_a^1 \qquad N_t = N_t^0 + X N_t^1 = 0 + X = X \tag{6.56}$$

- La energía acumulada en la estructura es la suma de la del arco y la del tirante:

$$U^* = U_a^* + U_t^* = U_a^* + \frac{N_t^2 \rho_t}{2} + N_t \lambda_t \tag{6.57}$$

- La ecuación de compatibilidad se obtiene aplicando el segundo teorema de Engesser:

$$\int N_a \gamma N_a^1 ds + N_t \rho_t N_t^1 + \int M \mu M^1 ds + \int \alpha T_m N_a^1 ds - \int \alpha T_g M^1 ds + \lambda_t N_t^1 = 0 \tag{6.58}$$

Despejando el valor del esfuerzo en el tirante se obtiene:

$$X = -\frac{\int N_a^0 \gamma N_a^1 ds + \int M^0 \mu M^1 ds + \int \alpha T_m N_a^1 ds - \int \alpha T_g M^1 ds + \lambda_t N_t^1}{\int \gamma N_a^1 N_a^1 ds + \int M^1 \mu M^1 ds + \rho_t N_t^1 N_t^1}$$

$$X = -\frac{-\int N_a^0 \gamma \cos(\alpha-\varphi)ds - \int M^0 \mu z'\, ds - \int \alpha T_m \cos(\alpha-\varphi)ds + \int \alpha T_g z'\, ds + \lambda_t}{\int \gamma \cos^2(\alpha-\varphi)ds + \int \mu z'^2\, ds + \rho_t} \qquad (6.59)$$

- Los esfuerzos finales son:

$$M = M^0 - Xz' \qquad N_a = N_a^0 - X\cos(\alpha-\varphi) \qquad N_t = X \qquad (6.60)$$

Caso particular. Arco rígido axialmente

Despreciando la energía de esfuerzo axial acumulada en el arco y considerando que no hay variaciones de temperatura, se obtiene la siguiente expresión del esfuerzo en el tirante:

$$X = \frac{\int M^0 \mu z'\, ds - \lambda_t}{\int \mu z'^2\, ds + \rho_t} \qquad (6.61)$$

6.6 ARCO BIEMPOTRADO

El arco biempotrado (figura 6.18) es hiperestático de grado 3, y para su estudio se consideran como incógnitas hiperestáticas los tres esfuerzos en el apoyo A: A_x, A_y, M_A.

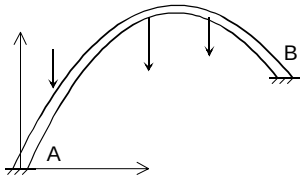
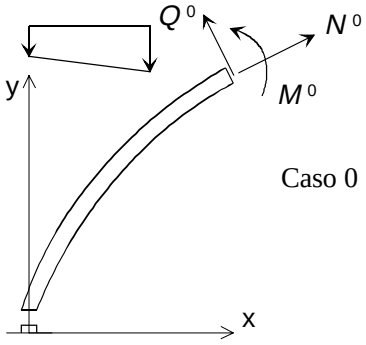
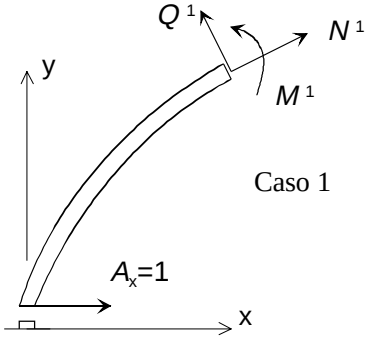


Figura 6.18

- Caso 0. Los esfuerzos en este caso dependen de las cargas exteriores y son: N^0, M^0, Q^0.
- Caso 1. Se aplica un valor unitario de la reacción horizontal, y los esfuerzos son:

$$M^1 = -y \qquad N^1 = -\cos\alpha \qquad (6.62)$$





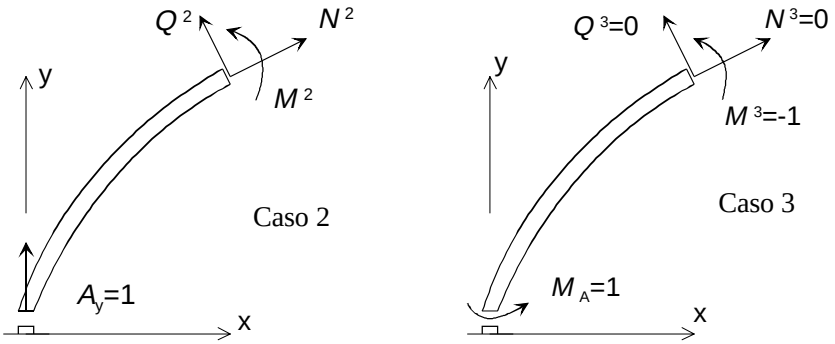


Figura 6.19

- Caso 2. Se aplica un valor unidad de la reacción vertical y los esfuerzos son:

$$M^2 = x \qquad N^2 = -\sin\alpha \tag{6.63}$$

- Caso 3. Al aplicar un valor unidad al momento los esfuerzos que se producen son:

$$M^3 = -1 \qquad N^3 = 0 \tag{6.64}$$

Las tres condiciones de compatibilidad son:

$$\int N\gamma N^j ds + \int M\mu M^j ds + \int \alpha T_m N^j ds - \int \alpha T_g M^j ds = 0 \qquad j = 1{,}3 \tag{6.65}$$

siendo:

$$M = M^0 - yA_x + xA_y - M_A \qquad N = N^0 - A_x\cos\alpha - A_y\sin\alpha \tag{6.66}$$

Sustituyendo el valor de *M*, pero no el de *N*, y desarrollando se llega a un sistema de tres ecuaciones y tres incógnitas, que se puede poner de forma matricial como:

$$\begin{bmatrix} I_{02} & -I_{11} & I_{01} \\ -I_{11} & I_{20} & -I_{10} \\ I_{01} & -I_{10} & I_{00} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} A_x \\ A_y \\ M_A \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \int N\gamma\cos\alpha ds + \int \alpha T_m \cos\alpha\, ds - \int \alpha T_g y ds + \int M^0 \mu y ds \\ \int N\gamma\sin\alpha ds + \int \alpha T_m \sin\alpha\, ds - \int \alpha T_g x ds - \int M^0 \mu x ds \\ -\int \alpha T_g ds + \int M^0 \mu ds \end{Bmatrix} \tag{6.67}$$

donde la matriz del sistema es la matriz de flexibilidad del arco en el apoyo A, cuyos términos valen:

$$I_{mn} = \int x^m y^n \mu ds \tag{6.68}$$

Estos coeficientes representan las propiedades geométricas de una sección plana, cuya directriz es una curva con la forma del arco, y cuyo espesor corresponde a la flexibilidad a flexión μ.

El sistema de ecuaciones anterior no puede resolverse, pues contiene el valor de *N* en el término independiente. Sustituyendo dicho valor de *N*, y desarrollando se obtiene:

$$\begin{bmatrix} I_{02}+J_{02} & -I_{11}+J_{11} & I_{01} \\ -I_{11}+J_{11} & I_{20}+J_{20} & -I_{10} \\ I_{01} & -I_{10} & I_{00} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} A_x \\ A_y \\ M_A \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \int N^0 \gamma \cos\alpha\, ds + \int \alpha T_m \cos\alpha\, ds - \int \alpha T_g y ds + \int M^0 \mu y ds \\ \int N^0 \gamma \sin\alpha\, ds + \int \alpha T_m \sin\alpha\, ds - \int \alpha T_g x ds - \int M^0 \mu x ds \\ -\int \alpha T_g ds + \int M^0 \mu ds \end{Bmatrix} \quad (6.69)$$

Los coeficientes J_{mn} son los términos de la matriz de flexibilidad debidos al esfuerzo axial, cuyo valor es:

$$J_{mn} = \int \gamma \sin^m \alpha \, \cos^n \alpha \, ds \quad (6.70)$$

El sistema de ecuaciones anterior permite hallar las tres reacciones en A, y a partir de ellas se pueden calcular los diagramas de flectores y de axiales, empleando las ecuaciones (6.66). Sin embargo, es posible efectuar algunas simplificaciones que facilitan su resolución, como las que se indican a continuación.

Arco rígido axialmente

En este caso la flexibilidad axial es nula, γ=0, con lo cual los coeficientes J_{mn} son también nulos y las ecuaciones que proporcionan las reacciones en A se simplifican:

$$\begin{bmatrix} I_{02} & -I_{11} & I_{01} \\ -I_{11} & I_{20} & -I_{10} \\ I_{01} & -I_{10} & I_{00} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} A_x \\ A_y \\ M_A \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \int \alpha T_m \cos\alpha ds - \int \alpha T_g y ds + \int M^0 \mu y ds \\ \int \alpha T_m \sin\alpha ds - \int \alpha T_g x ds - \int M^0 \mu x ds \\ -\int \alpha T_g ds + \int M^0 \mu ds \end{Bmatrix} \quad (6.71)$$

Arco simétrico con cargas verticales

Si un arco simétrico, sometido únicamente a cargas simétricas y verticales, se diseña con una directriz que corresponda al polígono funicular de las cargas, ocurre que la componente horizontal del esfuerzo axial es constante e igual a la reacción horizontal en los apoyos.

$$N\cos\alpha = -A_x = C^{te} \qquad \rightarrow \qquad N = -A_x / \cos\alpha \quad (6.72)$$

Sustituyendo en la ecuación (6.67) y reagrupando términos se obtiene:

$$\begin{bmatrix} I_{02}+\int \gamma ds & -I_{11} & I_{01} \\ -I_{11} & I_{20} & -I_{10} \\ I_{01} & -I_{10} & I_{00} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} A_x \\ A_y \\ M_A \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \int \alpha T_m \cos\alpha ds - \int \alpha T_g y ds + \int M^0 \mu y ds \\ -\int \alpha T_g x ds - \int M^0 \mu x ds \\ -\int \alpha T_g ds + \int M^0 \mu ds \end{Bmatrix} \quad (6.73)$$

donde se ha tenido en cuenta que las integrales del tipo sinα y tanα son nulas por ser el arco simétrico.

6.7 ARCO BIEMPOTRADO. CENTRO ELÁSTICO

Tradicionalmente se ha efectuado el estudio de los arcos biempotrados mediante el empleo del llamado *centro elástico*. Esta técnica se basa en el método de flexibilidad, tal y como se ha presentado en el apartado anterior, y trata únicamente de simplificar el proceso de cálculo, evitando la resolución del sistema final de tres ecuaciones con tres incógnitas.

Para el empleo de este método se define una sección plana equivalente al arco, cuya directriz es una curva con la forma de la directriz del arco y cuyo espesor corresponde a la flexibilidad a flexión μ. Se considera asimismo que el arco es infinitamente rígido a esfuerzo axial γ=0.

Se define el centro elástico del arco como un punto E, situado en el centro de gravedad de la sección plana equivalente al arco. Con esta definición sus coordenadas son:

$$x_E = \frac{\int x\mu ds}{\int \mu ds} = \frac{I_{10}}{I_{00}} \qquad y_E = \frac{\int y\mu ds}{\int \mu ds} = \frac{I_{01}}{I_{00}} \tag{6.74}$$

Además, se define un sistema de ejes ξ,η situado en el punto E, de tal manera que sean los ejes principales de inercia de la sección plana equivalente (figura 6.20a). El ángulo φ que forman estos ejes con el sistema inicial X,Y viene dado por la expresión:

$$\tan 2\varphi = \frac{2I_{11}}{I_{20} - I_{02}} \tag{6.75}$$

Una vez definido este sistema de ejes, se traslada el empotramiento del apoyo A hasta el punto E, a base de conectar A con E mediante un elemento infinitamente rígido tanto a flexión como axialmente, y que por lo tanto no acumula energía alguna (figura 6.20.b). Con esta sustitución el arco se comporta de la misma forma, y sólo varían las reacciones, que son distintas en A y en E.

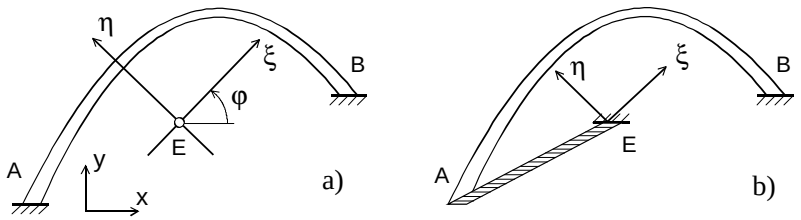


Figura 6.20

A continuación se procede a efectuar el análisis del arco tomando como incógnitas hiperestáticas las tres reacciones en el empotramiento situado en E. Este análisis se descompone en los cuatro casos que se muestran en la figura 6.21.

- Caso 0. Los esfuerzos en este caso dependen de las cargas exteriores y son N^0, M^0, Q^0.
- Caso 1. Los esfuerzos son:

$$M^1 = -\eta \qquad N^1 = -\cos\beta \tag{6.76}$$

donde se ha denominado β al ángulo que forma la tangente al arco con el eje ξ. Por lo tanto se cumple que $\beta = \alpha - \varphi$.

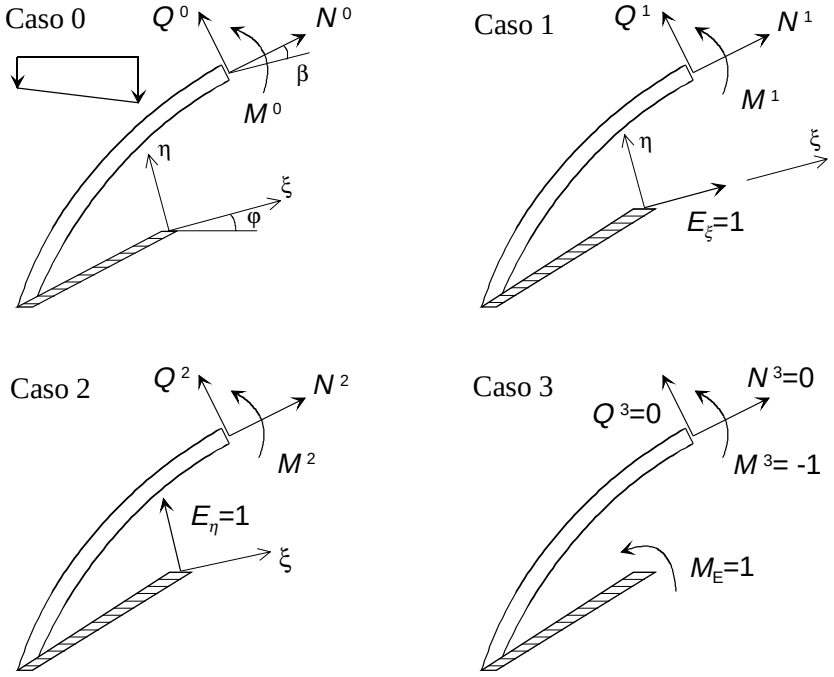


Figura 6.21

- Caso 2. Los esfuerzos son:

$$M^2 = \xi \qquad N^2 = -\sin\beta \tag{6.77}$$

- Caso 3. Los esfuerzos son:

$$M^3 = -1 \qquad N^3 = 0 \tag{6.78}$$

Obsérvese que las expresiones analíticas de los esfuerzos en los casos 1 a 3 son iguales que las obtenidas en el apartado 6.6, cambiando sólo las coordenadas x,y por las ξ,η y el ángulo α por el β. Los momentos flectores y esfuerzos axiales en el caso 0 son también los mismos que en dicho apartado, aunque sus expresiones analíticas serán asimismo diferentes.

- Las tres condiciones de compatibilidad son:

$$\int M\mu M^j ds + \int \alpha T_m N^j ds - \int \alpha T_g M^j ds = 0 \qquad j = 1,3 \tag{6.79}$$

siendo:

$$M = M^0 + M^1 E_\xi + M^2 E_\eta + M^3 \tag{6.80}$$

Sustituyendo M y desarrollando las ecuaciones de compatibilidad se obtiene:

$$\begin{bmatrix} I_{02}^e & 0 & 0 \\ 0 & I_{20}^e & 0 \\ 0 & 0 & I_{00} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} E_\xi \\ E_\eta \\ M_E \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \int \alpha T_m \cos\beta\, ds - \int \alpha T_g \eta\, ds + \int M^0 \mu\eta\, ds \\ \int \alpha T_m \sin\beta\, ds - \int \alpha T_g \xi\, ds - \int M^0 \mu\xi\, ds \\ -\int \alpha T_g ds + \int M^0 \mu\, ds \end{Bmatrix} \tag{6.81}$$

En estas ecuaciones ya se han tenido en cuenta las propiedades del arco respecto de los ejes ξ,η, por ser principales de inercia de la sección equivalente:

$$\int \xi\mu ds = 0 \qquad \int \eta\mu ds = 0 \qquad \int \xi\eta\mu ds = 0 \tag{6.82}$$

y se han definido los momentos de segundo orden respecto de estos ejes principales:

$$I_{20}^e = \int \xi^2 \mu ds \qquad I_{02}^e = \int \eta^2 \mu ds \tag{6.83}$$

Las tres ecuaciones (6.81) están desacopladas, por lo que se pueden calcular con facilidad las tres reacciones en el centro elástico. Conocidas éstas, los valores del momento flector y del esfuerzo axial en un punto cualquiera del arco son:

$$M = M^0 - \eta E_\xi + \xi E_\eta - M_E \qquad N = N^0 - E_\xi \cos\beta - E_\eta \sin\beta \tag{6.84}$$

La relación entre las reacciones en A y en E se obtiene estableciendo el equilibrio del segmento rígido AE. Empleado para las reacciones en A el mismo criterio de signos que en la figura 6.19. se obtiene:

$$\begin{aligned} E_\xi &= A_x \cos\varphi + A_y \sin\varphi \\ E_\eta &= A_y \cos\varphi - A_x \sin\varphi \\ M_E &= M_A + A_y (x_A - x_E) - A_x (y_A - y_E) \end{aligned} \tag{6.85}$$

Como puede observarse, el método del centro elástico lo único que hace es aplicar un cambio de ejes de tal forma que las ecuaciones de compatibilidad (6.71) queden desacopladas en los nuevos ejes, para facilitar su resolución por separado.

6.8 ANALOGÍA DE LA COLUMNA

Se supone un arco infinitamente rígido a esfuerzo axial, cargado de forma arbitraria pero sin variaciones de temperatura. La expresión del momento flector en un punto cualquiera se puede calcular empleando el método del centro elástico. Para ello se resuelven las tres ecuaciones (6.81) y se sustituyen los resultados en la (6.84). Al no haber variaciones de temperatura se obtiene el siguiente valor del momento flector:

$$M = M^0 - \eta \frac{\int M^0 \mu\eta ds}{I_{02}^e} - \xi \frac{\int M^0 \mu\xi ds}{I_{20}^e} - \frac{\int M^0 \mu ds}{I_{00}} \tag{6.86}$$

Para crear una analogía entre el arco y una columna, se supone una columna de material perfectamente rígido, cuya sección transversal coincide con la directriz del arco y cuyo espesor es igual al valor de la flexibilidad a flexión e=μ. La columna se supone apoyada en su base en un suelo también rígido, como se muestra en la figura 6.22.

Se carga la columna en su parte superior con una carga distribuida vertical q, cuyo valor corresponde al momento flector en el arco en el caso 0, es decir: $q=M^0$. Esta carga se supone positiva cuando actúa hacia abajo, comprimiendo la columna. Como reacción aparece una distribución de presiones en la base de la columna, que se denomina p y se considera positiva cuando actúa hacia arriba.

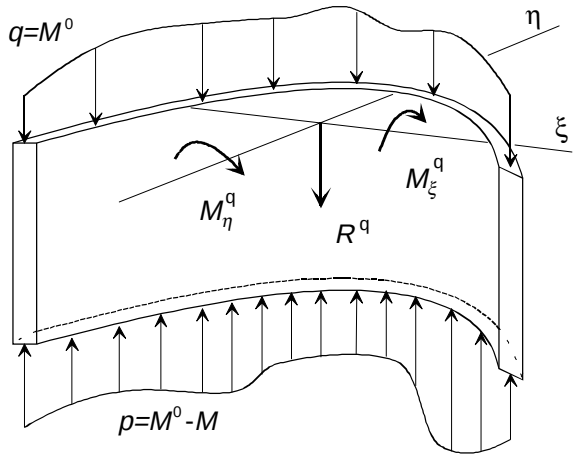


Figura 6.22

El valor de la presión en un punto cualquiera, situado en la base de la columna, y cuyas coordenadas son ξ,η, es:

$$p = \eta \frac{M_\xi^q}{I_\xi} + \xi \frac{M_\eta^q}{I_\eta} + \frac{R^q}{A} \tag{6.87}$$

siendo:

R^q la resultante de la carga distribuida:

$$R^q = \int q dA = \int M^0 \mu ds \tag{6.88}$$

M_ξ^q, M_η^q los momentos de la carga distribuida exterior q, respecto de los ejes ξ,η:

$$M_\xi^q = \int q\eta \, dA = \int M^0 \eta\mu \, ds \qquad M_\eta^q = \int q\xi \, dA = \int M^0 \xi\mu \, ds \tag{6.89}$$

A el área de la sección de la columna:

$$A = \int dA = \int e ds = \int \mu ds = I_{00} \tag{6.90}$$

I_ξ, I_η los momentos de inercia de la sección de la columna respecto de los ejes ξ,η. Estos momentos de inercia coinciden con I_{02}^e, I_{20}^e respectivamente:

$$I_\xi = \int \eta^2 \mu ds = I_{02}^e \qquad I_\eta = \int \xi^2 \mu ds = I_{20}^e \tag{6.91}$$

Sustituyendo los valores de las distintas magnitudes en la expresión (6.87) de la presión en la base se obtiene:

$$p = \eta \frac{\int M^0 \mu \eta ds}{I^e_{02}} + \xi \frac{\int M^0 \mu \xi ds}{I^e_{20}} + \frac{\int M^0 \mu ds}{I_{00}} \tag{6.92}$$

Comparando esta expresión de la presión en la base de la columna con la del momento flector en un punto del arco (6.86), se observa que son iguales, a diferencia del signo menos y de la ausencia del momento isostático. Se puede poner por lo tanto que:

$$M = M^0 - p \tag{6.93}$$

Esta expresión permite establecer una analogía entre el diagrama de momentos flectores del arco *M*, y la presión en la base de la columna *p*, que son iguales a diferencia del momento isostático, según la ecuación anterior.

La analogía de la columna brinda un método sencillo e intuitivo para la determinación del momento flector en un arco en las condiciones establecidas, pues basta con calcular el diagrama de momentos isostáticos y aplicar la analogía con las presiones en la base de la columna para obtener el momento flector real.

6.9 EJERCICIOS RESUELTOS

6.9.1 Calcular los esfuerzos internos en un arco biarticulado simétrico, con directriz parabólica definida por su flecha *f* y su luz *L*, y que está sometido a una carga uniforme hacia abajo *q*. Despreciar la energía de esfuerzo axial, y suponer que la rigidez a flexión varía según la ley de la secante.

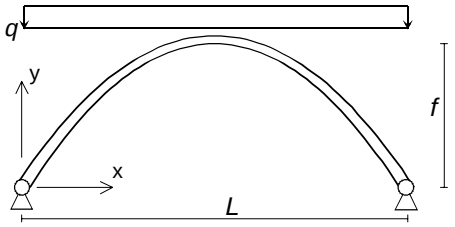


Figura 6.23

La directriz del arco es:

$$y = \frac{4f}{L^2}(Lx - x^2) \qquad\qquad \frac{dy}{dx} = \frac{4f}{L^2}(L - 2x)$$

La flexibilidad a flexión sigue la ley $\mu = \mu_0 \cos\alpha$, donde μ_0 es la flexibilidad en la clave.

Tomando como incógnita hiperestática la reacción horizontal en el apoyo izquierdo (figura 6.24), el diagrama de flectores del caso 0 es:

$$M^0 = \frac{q}{2}(Lx - x^2)$$

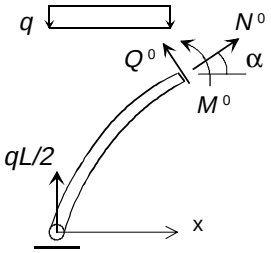


Figura 6.24

La reacción en el apoyo izquierdo viene dada por la ecuación (6.45):

$$A_x = \frac{\int M^0 \mu z ds}{\int z^2 \mu ds} = \frac{\int M^0 \mu_0 \cos\alpha\, y ds}{\int y^2 \mu ds} = \frac{\int M^0 \mu_0 y dx}{\int y^2 \mu ds} = \frac{\frac{qf\mu_0 L^3}{15}}{\frac{8\mu_0 f^2 L}{15}} = \frac{qL^2}{8f}$$

Esta es la misma reacción que aparece en un arco triarticulado de la misma directriz, con carga uniforme. El diagrama de momentos flectores viene dado por la ecuación (6.46):

$$M = M^0 - yA_x = \frac{q}{2}(Lx - x^2) - \frac{4f}{L^2}(Lx - x^2)\frac{qL^2}{8f} = 0$$

No aparecen momentos flectores, al igual que ocurre en el arco triarticulado. En realidad esto es debido a que se ha considerado el arco rígido axialmente; si no se hace esta suposición sí que aparecen momentos flectores.

Los esfuerzos axiales y cortantes (figura 6.25) valen:

$$N = qx\sin\alpha - \frac{qL}{2}\sin\alpha - \frac{qL^2}{8f}\cos\alpha$$

$$Q = qx\cos\alpha + \frac{qL^2}{8f}\sin\alpha - \frac{qL}{2}\cos\alpha$$

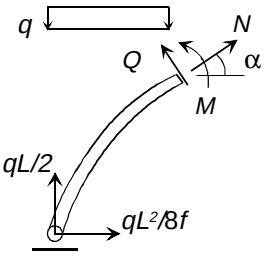


Figura 6.25

Teniendo en cuenta la relación

$$\frac{\sin\alpha}{\cos\alpha} = tg\alpha = \frac{dy}{dx} = \frac{4f}{L^2}(L - 2x)$$

se obtiene que

$$Q = qx\cos\alpha + \frac{qL^2}{8f}\frac{4f}{L^2}(L - 2x)\cos\alpha - \frac{qL}{2}\cos\alpha = 0$$

Como era de esperar, el arco tampoco está sometido a esfuerzos cortantes, al ser éstos la derivada del momento flector. El comportamiento de este arco es por lo tanto similar al del

arco de tres articulaciones. Los valores extremos de N se producen en los apoyos y en la clave, y valen

$$N_{x=0} = -\frac{qL}{2}\sin\alpha_0 - \frac{qL^2}{8f}\cos\alpha_0 = -\frac{qL}{8f}\sqrt{L^2+16f^2} \qquad N_{x=L/2} = -\frac{qL^2}{8f}$$

6.9.2 Calcular los esfuerzos en el arco del ejercicio 6.9.1, pero cargado con una fuerza puntual *P* en su clave.

Los momentos flectores en el caso 0 son:

$$M^0 = Px/2 \quad 0 < x < L/2 \qquad M^0 = P(L-x)/2 \quad L/2 < x < L$$

La reacción horizontal es ahora (ecuación (6.45)):

$$A_x = \frac{\int M^0 \mu z ds}{\int z^2 \mu ds} = \frac{\int M^0 \mu_0 \cos\alpha\, y ds}{\int y^2 \mu ds} = \frac{\int M^0 \mu_0 y dx}{\int y^2 \mu ds} = \frac{\frac{5Pf\mu_0 L^2}{48}}{\frac{8\mu_0 f^2 L}{15}} = \frac{75PL}{384f}$$

El diagrama de flectores es (ecuación (6.46)):

$$M = \frac{Px}{2} - \frac{75PL}{384f}y = \frac{P}{96}\left(\frac{75x^2}{L} - 27x\right)$$

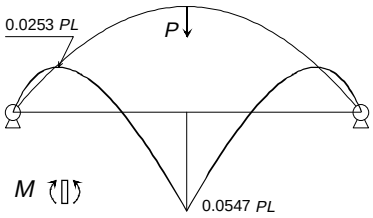


Figura 6.26

El momento máximo está en:

$$\frac{dM}{dx} = 0 \;\rightarrow\; x = \frac{9L}{50} \qquad M_{\max} = M_{9L/50} = -0.0253\,PL$$

El momento máximo positivo aparece en la clave, bajo la carga, y vale

$$M_{L/2} = 0.0547\,PL$$

6.9.3 Sea un arco biarticulado simétrico (figura 6.27), con directriz parabólica definida por su base *L* y su flecha *f*. Se supone que el arco es rígido axialmente (γ=0) y con sección variable, tal que su flexibilidad a flexión varía según la ley $\mu=\mu_0 \cos\alpha$, siendo μ_0 la flexibilidad en la clave. El tirante tiene flexibilidad ρ y una pretensión inicial de valor N_{0t}. Calcular el esfuerzo en el tirante, el diagrama de flectores y la deformación del apoyo A.

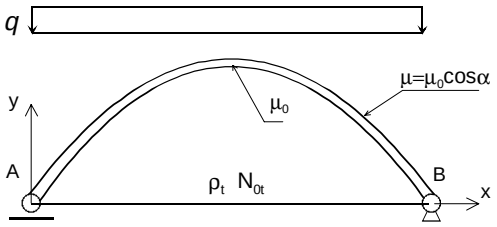


Figura 6.27

La ecuación de la directriz es $y = \frac{4f}{L^2}(Lx - x^2)$

El diagrama de flectores del caso isostático es: $M^0 = \frac{q}{2}(Lx - x^2)$

El valor de la tensión en el tirante viene dado por la ecuación (6.61). Sustituyendo en ella los valores anteriores se obtiene:

$$X = \frac{\frac{qf\mu_0 L^3}{15\rho_t} + N_{0t}}{\frac{8\mu_0 f^2 L}{15\rho_t} + 1}$$

Esta tensión es positiva para valores positivos de la carga exterior q (hacia abajo) y de la pretensión N_{0t}. El diagrama de flectores es:

$$M = \left(\frac{q}{2} - X\frac{4f}{L^2}\right)(Lx - x^2)$$

Se observa que el momento flector isostático, es decir el momento flector en ausencia del tirante, se ve disminuido por la influencia de la tensión X en el tirante. El momento flector con tirante es por lo tanto inferior al momento flector sin tirante. Además, la existencia de una pretensión en el tirante hace aumentar más su esfuerzo final X, y por lo tanto disminuye aún más el momento flector con respecto a la situación sin tirante. La existencia de un tirante pretensado hace por lo tanto disminuir el momento flector.

La deformación horizontal del extremo A se obtiene calculando el alargamiento del tirante. La ecuación de equilibrio de éste es la de un muelle con esfuerzo de pretensión inicial:

$$N_t = \rho_t^{-1}\Delta_t + N_{0t}$$

Despejando la deformación y sustituyendo el valor del esfuerzo en el tirante $N_t=X$, se obtiene:

$$\Delta_t = \frac{qf\mu_0 L^3}{15D} + \frac{1-D}{D}\rho_t N_{0t}$$

siendo D el denominador de la expresión del esfuerzo en el tirante. En esta expresión de la deformación el primer sumando corresponde al efecto de la carga vertical y el segundo a la pretensión en el tirante. Este último sumando es siempre negativo para un valor positivo de la pretensión, pues D es positivo y mayor que 1. Por lo tanto la pretensión del tirante siempre hace disminuir la deformación del apoyo A.

6.9.4 Calcular la posición del centro elástico de un arco biempotrado simétrico, de directriz parabólica, con 60 m de luz y 15 m de flecha. La sección transversal es rectangular, de 1 m de ancho y canto *h* variable entre 2 m en la clave y 2.60 m en los apoyos, según la ley *h*=2+0.02 |*x*| (m). El material tiene E=3 10^{10} N/m^2. Despreciar la energía de esfuerzo axial.

Se adoptan unos ejes situados en la clave del arco (figura 6.28). La ecuación de su directriz referida a ellos es:

$$y = -x^2 / 60$$

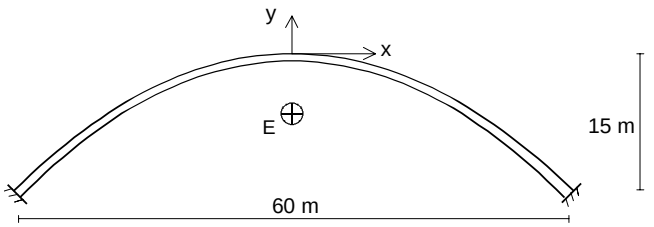


Figura 6.28

Las integrales que definen las propiedades del arco se calculan numéricamente. Para ello se sitúan sobre el arco 21 puntos, separados 3 m según el eje X (figura 6.29). Todas las propiedades del arco, que son variables, se supone que lo hacen de forma discreta, adoptando solamente los valores que tienen en los 21 puntos en que se ha dividido el arco. Según esto los puntos 2 a 20 concentran las propiedades del arco correspondientes a 3 m de longitud horizontal, mientras que los puntos 1 y 21 concentran las propiedades correspondientes a 1.5 m de longitud horizontal.

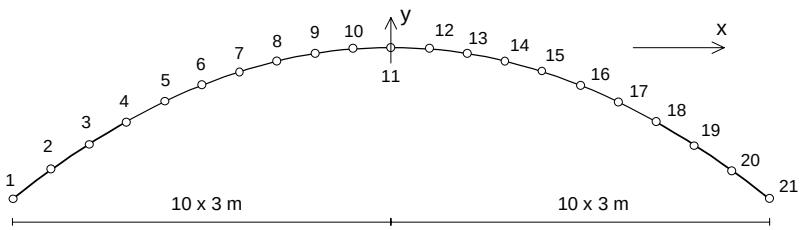


Figura 6.29

A cada punto se le asocia un valor del diferencial de longitud del arco *ds*, calculado mediante :

$$ds = \sqrt{dx^2 + dy^2} = \sqrt{1 + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2}\, dx = \sqrt{1 + \frac{4x^2}{60^2}}\, dx$$

por lo tanto:

$$\Delta s = \sqrt{1 + \frac{x^2}{900}}\, \Delta x$$

donde Δx=3 m en los puntos 2 a 20, y Δx=1.5 m en los puntos 1 y 21. La tabla 6.1 muestra los valores correspondientes a cada punto.

Como comprobación de la validez de esta aproximación, se calcula la longitud del arco mediante:

$$s = \int ds \approx \sum \Delta s = 68.903 \quad \text{m}$$

El valor exacto de la longitud, calculado analíticamente, es 68.868 m, por lo que la aproximación efectuada puede darse por buena. El procedimiento empleado para calcular numéricamente las integrales corresponde al empleo de la regla trapecial a los 20 segmentos en los que se ha dividido el arco.

Al ser el arco simétrico, el centro elástico E está en su eje de simetría. Su coordenada y_E se calcula mediante la expresión (6.74):

$$y_E = \frac{\int y\mu ds}{\int \mu ds} \approx \frac{\sum y\Delta s / EI}{\sum \Delta s / EI}$$

La tabla 6.1 muestra los distintos valores necesarios para aplicar la ecuación anterior.

Punto	x	y	Δx	Δs	Canto	$E\,I$ ($\times 10^{10}$)	$\Delta s / EI$ ($\times 10^{-10}$)	$y\,\Delta s / EI$ ($\times 10^{-10}$)
1	-30	-15.00	1.5	2.121	2.60	4.394	0.48278	-7.2416
2	-27	-12.15	3.0	4.036	2.54	4.097	0.98519	-11.970
3	-24	-9.60	3.0	3.842	2.48	3.813	1.0075	-9.6721
4	-21	-7.35	3.0	3.662	2.42	3.543	1.0335	-7.5965
5	-18	-5.40	3.0	3.499	2.36	3.286	1.0647	-5.7492
6	-15	-3.75	3.0	3.354	2.30	3.042	1.1027	-4.1351
7	-12	-2.40	3.0	3.231	2.24	2.809	1.1499	-2.7598
8	-9	-1.35	3.0	3.132	2.18	2.590	1.2093	-1.6325
9	-6	-0.60	3.0	3.059	2.12	2.382	1.2844	-0.77062
10	-3	-0.15	3.0	3.015	2.06	2.185	1.3796	-0.20693
11	0	0.00	3.0	3.000	2.00	2.000	1.5000	0.0000
12	3	-0.15	3.0	3.015	2.06	2.185	1.3796	-0.20693
13	6	-0.60	3.0	3.059	2.12	2.382	1.2844	-0.77062
14	9	-1.35	3.0	3.132	2.18	2.590	1.2093	-1.6325
15	12	-2.40	3.0	3.231	2.24	2.809	1.1499	-2.7598
16	15	-3.75	3.0	3.354	2.30	3.042	1.1027	-4.1351
17	18	-5.40	3.0	3.499	2.36	3.286	1.0647	-5.7492
18	21	-7.35	3.0	3.662	2.42	3.543	1.0335	-7.5965
19	24	-9.60	3.0	3.842	2.48	3.813	1.0075	-9.6721
20	27	-12.15	3.0	4.036	2.54	4.097	0.98519	-11.970
21	30	-15.00	1.5	2.121	2.60	4.394	0.48278	-7.2416
						Σ	**2.2899 10^{-9}**	**-1.0347 10^{-8}**

Tabla 6.1

La posición del centro elástico es: $y_E \approx \dfrac{\sum y\Delta s / EI}{\sum \Delta s / EI} = \dfrac{-1.0347 \cdot 10^{-8}}{2.289 \cdot 10^{-9}} = -4.518 \quad \text{m}$

6.9.5 Calcular las características de la sección equivalente del arco del ejercicio 6.9.4 respecto de su centro elástico.

La posición del centro elástico se calculó en el ejercicio 6.9.4, y está situado en el eje de simetría del arco, a 4.518 m bajo la clave. Se define un nuevo sistema de ejes ξ,η, que está situado en el centro elástico, y es paralelo al original. La relación entre las coordenadas en ambos sistemas (figura 6.30) es:

$$\xi = x \qquad \eta = y + 4.518$$

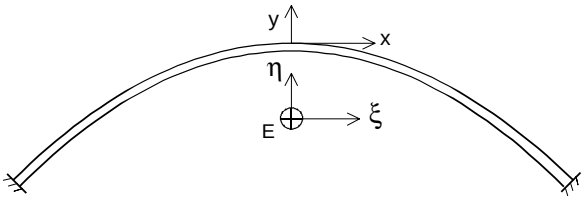


Figura 6.30

Las coordenadas de los puntos de definición del arco respecto a este sistema de ejes se indican en la tabla 6.2.

Punto	$x=\xi$	y	η	$x^2\ \Delta s / EI$ (x 10^{-8})	$\eta^2\ \Delta s / EI$ (x 10^{-9})
1	-30	-15.00	-10.48	4.3450	5.3039
2	-27	-12.15	-7.63	7.1820	5.7377
3	-24	-9.60	-5.08	5.8032	2.6015
4	-21	-7.35	-2.83	4.5579	0.82863
5	-18	-5.40	-0.88	3.4495	0.08273
6	-15	-3.75	0.77	2.4810	0.06512
7	-12	-2.40	2.12	1.6559	0.51608
8	-9	-1.35	3.17	0.9795	1.2140
9	-6	-0.60	3.92	0.4624	1.9721
10	-3	-0.15	4.37	0.1242	2.6327
11	0	0.00	4.52	0.0000	3.0625
12	3	-0.15	4.37	0.1242	2.6327
13	6	-0.60	3.92	0.4624	1.9721
14	9	-1.35	3.17	0.9795	1.2140
15	12	-2.40	2.12	1.6559	0.51608
16	15	-3.75	0.77	2.4810	0.06512
17	18	-5.40	-0.88	3.4495	0.08273
18	21	-7.35	-2.83	4.5579	0.82863
19	24	-9.60	-5.08	5.8032	2.6015
20	27	-12.15	-7.63	7.1820	5.7377
21	30	-15.00	-10.48	4.3450	5.3039
			Σ	**6.2081 10^{-7}**	**4.4972 10^{-8}**

Tabla 6.2

Las características de la sección equivalente respecto al centro elástico son:

- Momento de orden 0. Su valor se calculó en el ejercicio 6.9.4 al determinar la posición del centro elástico:

$$I_{00} = \int \mu ds \approx \sum \Delta s / EI = 2.289 \cdot 10^{-9}$$

- Momentos de orden 2. Se calculan de forma numérica (ecuación (6.83)):

$$I_{20}^e = \int \xi^2 \mu ds \approx \sum x^2 \Delta s / EI \qquad I_{02}^e = \int \eta^2 \mu ds \approx \sum \eta^2 \Delta s / EI$$

Los valores necesarios para efectuar la integración numérica se indican asimismo en la tabla 6.2. Los valores que se obtienen son:

$$I_{20}^e = 6.2081 \cdot 10^{-7} \qquad I_{02}^e = 4.4972 \cdot 10^{-8}$$

6.9.6 Calcular los esfuerzos en el arco del ejercicio 6.9.4 bajo la acción de una carga puntual de 1000 kN aplicada a 10 m a la izquierda de la clave. Determinar la deformación vertical en el punto de aplicación de la carga.

Se adoptan como fuerzas hiperestáticas las reacciones en el centro elástico, cuya posición se calculó en el ejercicio 6.9.4. Los valores de estas fuerzas hiperestáticas se obtienen como solución de las ecuaciones (6.81). Al no haber temperaturas el término independiente de dichas ecuaciones se simplifica mucho y su solución resulta ser:

$$E_\xi = \frac{\int M^0 \eta \mu ds}{I_{02}^e} \approx \frac{\sum M^0 \eta \Delta s / EI}{I_{02}^e}$$

$$E_\eta = \frac{-\int M^0 \xi \mu ds}{I_{20}^e} \approx \frac{-\sum M^0 x \Delta s / EI}{I_{20}^e}$$

$$M_E = \frac{\int M^0 \mu ds}{I_{00}} \approx \frac{\sum M^0 \Delta s / EI}{I_{00}}$$

Los momentos flectores en el caso isostático M^0 se muestran en la figura 6.31 y sus valores numéricos se indican en la tabla 6.3.

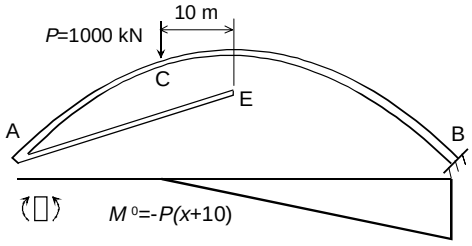


Figura 6.31

Los distintos valores requeridos para calcular las integrales de forma numérica se indican en la tabla 6.3. Las incógnitas hiperestáticas resultan:

$$E_\xi \approx \frac{\sum M^0 \eta \Delta s / EI}{I^e_{02}} = \frac{0.0331284}{4.4972 \cdot 10^{-8}} = 736650 \quad \text{N}$$

$$E_\eta \approx \frac{-\sum M^0 x \Delta s / EI}{I^e_{20}} = \frac{0.462538}{6.2081 \cdot 10^{-7}} = 745052 \quad \text{N}$$

$$M_E \approx \frac{\sum M^0 \Delta s / EI}{I_{00}} = \frac{-0.02972}{2.2899 \cdot 10^{-9}} = -12.98 \cdot 10^6 \quad \text{N} \cdot \text{m}$$

El momento flector vale: $M = M^0 - E_\xi \eta + E_\eta x - M_E$

Sus valores se indican en la última columna de la tabla 6.3.

Punto	M^0 (x10^6)	$M^0\ \Delta s / EI$ (x10^{-3})	$M^0\ x\ \Delta s / EI$ (x10^{-3})	$M^0\ \eta\ \Delta s / EI$ (x10^{-3})	M (x 10^6) (m-N)
1	0.	0.	0.	0.	-1.6517
2	0.	0.	0.	0.	-1.5160
3	0.	0.	0.	0.	-1.1593
4	0.	0.	0.	0.	-0.5816
5	0.	0.	0.	0.	0.2171
6	0.	0.	0.	0.	1.2368
7	0.	0.	0.	0.	2.4774
8	-1.	-0.1209	1.08835	-0.38315	2.9391
9	-4.	-0.5137	3.08249	-2.01312	1.6218
10	-7.	-0.9657	2.89707	-4.21862	0.5255
11	-10.	-1.5000	0.00000	-6.77774	-0.3499
12	-13.	-1.7934	-5.38028	-7.83457	-1.0042
13	-16.	-2.0550	-12.3299	-8.05248	-1.4376
14	-19.	-2.2976	-20.6786	-7.28000	-1.6499
15	-22.	-2.5298	-30.3578	-5.3594	-1.6413
16	-25.	-2.7567	-41.3508	-2.11852	-1.4117
17	-28.	-2.9811	-53.6593	2.62783	-0.9610
18	-31.	-3.2039	-67.2836	9.07209	-0.2894
19	-34.	-3.4255	-82.2126	17.4068	0.6032
20	-37.	-3.6452	-98.4203	27.8183	1.7168
21	-40.	-1.9311	-57.9332	20.2409	3.0514
Σ		**-0.02972**	**-0.462538**	**0.0331284**	

Tabla 6.3

La figura 6.32 muestra el diagrama de momentos flectores del arco.

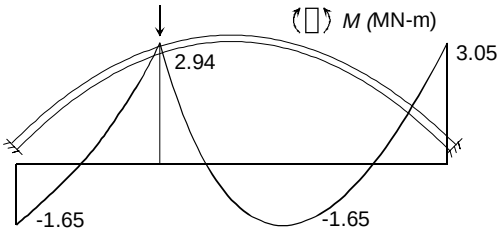


Figura 6.32

La deformación en el punto C de aplicación de la carga se calcula mediante la expresión:

$$\Delta_{CY} = \int MM^{0V} \mu ds \approx \sum MM^{0V} \Delta s / EI$$

Pero en este caso $M^{0V} = M^0 / P$ pues los casos isostático virtual e isostático original (figura 6.31) son iguales, salvo en el valor de la carga aplicada. Por lo tanto la deformación es:

$$\Delta_{CY} \approx \sum \frac{M^{0V} M^{0V} \Delta s}{P\, E\, I} = 1.045 \cdot 10^{-3} \quad \text{m}$$

6.9.7 Calcular los esfuerzos en el arco del ejercicio 6.9.4, bajo la acción de una carga distribuida de valor 100 kN/m.

Se adoptan como fuerzas hiperestáticas las reacciones en el centro elástico, cuya posición se calculó en el ejercicio 6.9.4. Los valores de estas fuerzas hiperestáticas se obtienen como solución de las ecuaciones (6.81), considerando que no hay cargas térmicas:

$$E_\xi = \frac{\int M^0 \eta \mu ds}{I^e_{02}} \approx \frac{\sum M^0 \eta \Delta s / EI}{I^e_{02}}$$

$$E_\eta = \frac{-\int M^0 \xi \mu ds}{I^e_{20}} \approx \frac{-\sum M^0 x \Delta s / EI}{I^e_{20}}$$

$$M_E = \frac{\int M^0 \mu ds}{I_{00}} \approx \frac{\sum M^0 \Delta s / EI}{I_{00}}$$

El momento flector en el caso isostático es: $M^0 = -q(x+30)^2 / 2$

Sus valores se indican en la tabla 6.4 y se muestran gráficamente en la figura 6.33.

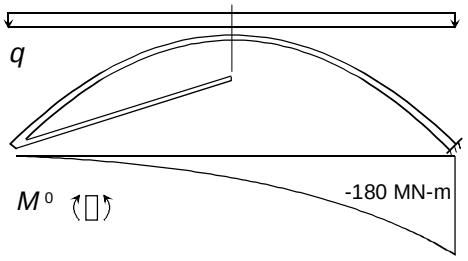


Figura 6.33

Los distintos valores requeridos para calcular las integrales anteriores de forma numérica se indican en la tabla 6.4.

Punto	M^0 (x10^6)	$M^0\,\Delta s / EI$ (x10^{-3})	$M^0\,x\,\Delta s / EI$ (x10^{-3})	$M^0\,\eta\,\Delta s / EI$ (x10^{-3})	M (m-N)
1	0.000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0
2	-0.450	-0.04433	1.1970	0.33833	0.0
3	-1.800	-0.18135	4.3524	0.92154	0.0
4	-4.050	-0.41858	8.7903	1.18522	0.0
5	-7.200	-0.76656	13.798	0.67573	0.0
6	-11.250	-1.24052	18.6079	-0.95334	0.0
7	-16.200	-1.86286	22.3544	-3.94647	0.0
8	-22.050	-2.66645	23.9981	-8.44863	0.0
9	-28.800	-3.69899	22.1939	-14.4945	0.0
10	-36.450	-5.02849	15.0855	-21.9669	0.0
11	-45.000	-6.75000	0.0000	-30.49984	0.0
12	-54.450	-7.51170	-22.5351	-32.81481	0.0
13	-64.800	-8.32272	-49.9363	-32.61253	0.0
14	-76.050	-9.19653	-82.7688	-29.13917	0.0
15	-88.200	-10.14226	-121.7071	-21.48632	0.0
16	-101.25	-11.16472	-167.4708	-8.580021	0.0
17	-115.20	-12.2650	-220.7698	10.81166	0.0
18	-130.05	-13.44122	-282.2656	38.05889	0.0
19	-145.80	-14.68945	-352.5469	74.64455	0.0
20	-162.45	-16.00439	-432.1185	122.13759	0.0
21	-180.00	-8.68998	-260.6994	91.08406	0.0
Σ		**-0.134086**	**-1.86244**	**0.134915**	

Tabla 6.4

Los valores de las incógnitas hiperestáticas resultan ser:

$$E_\xi \approx \frac{\sum M^0 \eta \Delta s / EI}{I^e_{02}} = \frac{0.134915}{4.4972 \cdot 10^{-8}} = 3 \cdot 10^6 \quad \text{N}$$

$$E_\eta \approx \frac{-\sum M^0 x \Delta s / EI}{I^e_{20}} = \frac{-1.86244}{6.2081 \cdot 10^{-7}} = 3 \cdot 10^6 \quad \text{N}$$

$$M_E \approx \frac{\sum M^0 \Delta s / EI}{I_{00}} = \frac{-0.134086}{2.2899 \cdot 10^{-9}} = -58.55 \cdot 10^6 \quad \text{N} \cdot \text{m}$$

El momento flector final es: $M = M^0 - E_\xi \eta + E_\eta x - M_E = 0$

Se obtiene que el momento flector en todo el arco es nulo, como se ve en la última columna de la tabla 6.4. Esto es debido a que se ha despreciado la energía de esfuerzo axial. Al ser nulo el momento flector, también lo es el esfuerzo cortante, cuyo valor viene dado por la expresión:

$$Q = Q^0 + E_\xi \sin\alpha - E_\eta \cos\alpha = q(x+50)\cos\alpha + E_\xi \sin\alpha - E_\eta \cos\alpha$$

La comprobación de que su valor es nulo se deja como ejercicio. Los esfuerzos axiales en el caso isostático son:

$$N^0 = q(x+30)\sin\alpha$$

Su valor numérico se indica en la tabla 6.5. Los esfuerzos axiales finales valen:

$$N = N^0 - E_\xi \cos\alpha - E_\eta \sin\alpha = q(x+30)\sin\alpha - E_\xi \cos\alpha - E_\eta \sin\alpha$$

y su valor se indica asimismo en la tabla 6.5.

Punto	N^0 (x10^6) (N)	$\cos\alpha$	$\sin\alpha$	N (x10^6) (N)
1	0.00	0.707	0.707	-4.2426
2	0.20069	0.743	0.669	-4.0361
3	0.37482	0.781	0.625	-3.8419
4	0.51612	0.819	0.573	-3.6620
5	0.61740	0.857	0.514	-3.4986
6	0.67082	0.894	0.447	-3.3541
7	0.66850	0.928	0.371	-3.2311
8	0.60343	0.958	0.287	-3.1321
9	0.47068	0.981	0.196	-3.0594
10	0.26866	0.995	0.100	-3.0150
11	0.00000	1.000	0.000	-3.0000
12	-0.32836	0.995	-0.100	-3.0150
13	-0.70602	0.981	-0.196	-3.0594
14	-1.12066	0.958	-0.287	-3.1321
15	-1.55984	0.928	-0.371	-3.2311
16	-2.01246	0.894	-0.447	-3.3541
17	-2.46958	0.857	-0.514	-3.4986
18	-2.92466	0.819	-0.573	-3.6620
19	-3.37335	0.781	-0.625	-3.8419
20	-3.81310	0.743	-0.669	-4.0361
21	-4.24264	0.707	-0.707	-4.2426

Tabla 6.5

6.9.8 Calcular los esfuerzos en el arco del ejercicio 6.9.4 bajo la acción de un incremento de temperatura uniforme de 20 ºC en todo él. El coeficiente de dilatación lineal del material es 10^{-5} ºC^{-1}.

Se adoptan como fuerzas hiperestáticas las reacciones en el centro elástico, cuya posición se calculó en el ejercicio 6.9.4. Los valores de estas fuerzas hiperestáticas se obtienen como solución de las ecuaciones (6.81). En este ejercicio dichas ecuaciones se simplifican mucho

ya que al no haber fuerzas exteriores, el momento isostático es nulo. Además, tampoco hay temperatura gradiente, con lo que su solución es:

$$E_\xi = \frac{\int \alpha T_m \cos\alpha\, ds}{I^e_{02}}$$

$$E_\eta = \frac{\int \alpha T_m \sin\alpha\, ds}{I^e_{20}} = \frac{\alpha T_m \int \sin\alpha\, ds}{I^e_{20}} = 0$$

$$M_E = \frac{-\int \alpha T_g ds}{I_{00}} = 0$$

Se observa que no aparece fuerza vertical E_η ya que la integral de la función seno es nula, por ser el arco simétrico. Tampoco aparece momento de reacción en el centro elástico, por no haber temperatura gradiente. Por otra parte la reacción horizontal puede calcularse con mucha sencillez, al ser la temperatura media uniforme:

$$E_\xi = \frac{\int \alpha T_m \cos\alpha ds}{I^e_{02}} = \frac{\int \alpha T_m dx}{I^e_{02}} = \frac{\alpha T_m \int dx}{I^e_{02}} = \frac{\alpha T_m L}{I^e_{02}} = \frac{0.012}{4.4972\cdot 10^{-8}} = 266835 \quad \text{N}$$

El valor final del momento flector es:

$$M = -E_\xi \eta + E_\eta x - M_E = -266835\eta \quad \text{N}\cdot\text{m}$$

El esfuerzo cortante es:

$$Q = E_\xi \sin\alpha - E_\eta \cos\alpha = 266835 \sin\alpha \quad \text{N}$$

El esfuerzo axial vale:

$$N = -E_\xi \cos\alpha - E_\eta \sin\alpha = -266835 \cos\alpha \quad \text{N}$$

La tabla 6.6 contiene los valores numéricos de los esfuerzos internos, y la figura 6.34 muestra los diagramas de momentos flectores y esfuerzos axiales.

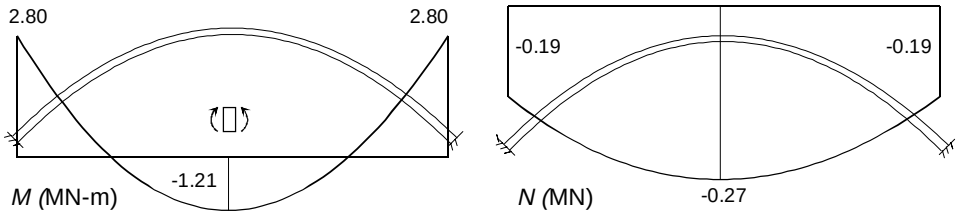


Figura 6.34

Las reacciones en el apoyo A se obtienen fácilmente mediante la ecuación (6.85):

$$A_X = E_\xi = 266835 \quad \text{N} \qquad A_Y = 0 \qquad M_A = -2.797\cdot 10^6 \quad \text{m}\cdot\text{N}$$

Punto	N (x10^6) (N)	Q (x10^6) (N)	M (x10^6) (m-N)
1	-0.1887	0.1887	2.797
2	-0.1983	0.1785	2.036
3	-0.2084	0.1667	1.356
4	-0.2186	0.1530	0.755
5	-0.2288	0.1373	0.235
6	-0.2387	0.1193	-0.205
7	-0.2477	0.0991	-0.565
8	-0.2556	0.0767	-0.845
9	-0.2616	0.0523	-1.046
10	-0.2655	0.0265	-1.166
11	-0.2668	0.0000	-1.206
12	-0.2655	-0.0265	-1.166
13	-0.2616	-0.0523	-1.046
14	-0.2556	-0.0767	-0.845
15	-0.2477	-0.0991	-0.565
16	-0.2387	-0.1193	-0.205
17	-0.2288	-0.1373	0.235
18	-0.2186	-0.1530	0.755
19	-0.2084	-0.1667	1.356
20	-0.1983	-0.1785	2.036
21	-0.1887	-0.1887	2.797

Tabla 6.6

6.10 BIBLIOGRAFÍA

1. Argüelles Alvarez, R., *Cálculo de Estructuras - Tomo I*, Sección de Publicaciones de la Escuela Superior de Ingenieros de Montes, Madrid, 1981.
2. Argüelles Alvarez, R., y Argüelles Bustillo, R., *Análisis de Estructuras: Teoría, Problemas y Programas*, Escuela Técnica Superior de Ingenieros de Montes, Madrid, 1996.
3. Bresse, J. A. C., *Recherches analytiques sur la flexion et la résistance des pièces courbes*, Paris, 1854.
4. Hibbeler, R. C., *Structural Analysis*, Prentice-Hall, New Jersey, 1996.
5. Navier L. M. H., *Résumé des Leçons de Mécanique*, Paris, 1826.
6. Timoshenko, S. P., y Young, D. H., *Teoría de las Estructuras*, Ed. Urmo, Bilbao, 1974.
7. Tuma, J. J., *Análisis Estructural*, Serie Schaum, McGraw-Hill, New York, 1970.
8. Wang, C. K., *Intermediate Structural Analysis*, McGraw-Hill, New York, 1983.

6.11 PROBLEMAS

6.11.1 Calcular los esfuerzos internos en un arco biarticulado de directriz semicircular, cargado con una carga distribuida uniforme de valor q (figura P6.1). Suponer una flexibilidad a flexión μ variable según la ley del coseno $\mu=\mu_0 \cos\alpha$, siendo μ_0 la flexibilidad en la clave y α el ángulo de inclinación de la tangente a la curva directriz del arco. Despreciar la energía de esfuerzo axial.

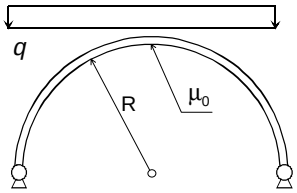


Figura P6.1

6.11.2 Calcular los esfuerzos que aparecen en el arco del ejercicio 6.9.4 bajo la acción de una carga distribuida uniforme horizontal de valor 50 kN/m actuando sobre su lado izquierdo, como se indica en la figura P6.2.

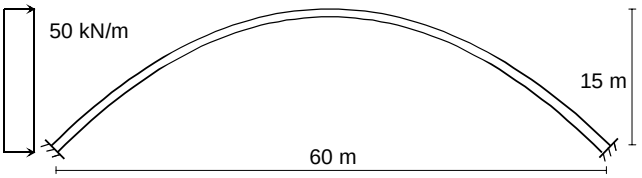


Figura P6.2

6.11.3 Determinar la posición del centro elástico y la orientación de los ejes principales ξ,η para el arco asimétrico de la figura P6.3. Considerar una sección uniforme, con rigidez a flexión EI=1.5 10^{10} N m^2. Efectuar los cálculos necesarios de forma numérica, dividiendo el arco en segmentos iguales.

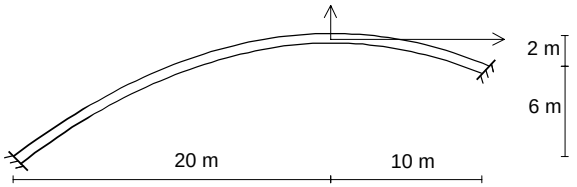


Figura P6.3

6.11.4 Determinar los momentos flectores que se producen en el arco del problema 6.11.3 cuando se aplica una carga distribuida vertical uniforme de valor q=200 kN/m. Efectuar los cálculos de forma numérica.

6.11.5 Calcular los esfuerzos que aparecen en el arco de la figura P6.4, cuya directriz es una parábola simétrica, cuando se aplica una carga uniforme q=1 Tn/m en la zona articulada central. Suponer que la rigidez a flexión varía según la ley de la secante $EI = (EI)_0 \sec(\alpha)$, siendo α la pendiente de la directriz del arco y $(EI)_0$ la rigidez a flexión en la clave.

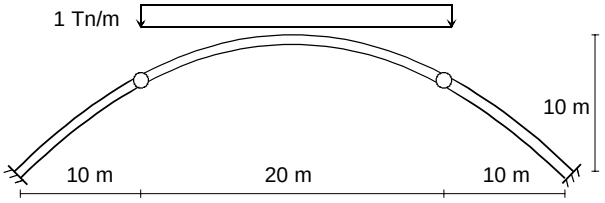


Figura P6.4

6.11.6 Calcular los esfuerzos que aparecen en el arco del ejercicio 6.9.4 bajo la acción de una distribución de temperatura tal que toda su cara superior se calienta 20ºC y toda la cara inferior se enfría 20ºC respecto de la temperatura ambiente. El coeficiente de dilatación lineal del material es $\alpha=10^{-5}$ ºC^{-1}.

6.11.7 Sea un arco biarticulado simétrico (figura P6.5), con directriz parabólica definida por su base *L* y su flecha *f*. Se supone que el arco es rígido axialmente ($\gamma=0$) y con sección variable, de tal forma que su flexibilidad a flexión varía según la ley $\mu=\mu_0 \cos\alpha$, siendo μ_0 la flexibilidad en la clave. El tirante tiene flexibilidad ρ. Calcular el esfuerzo en el tirante, el diagrama de flectores y la deformación del apoyo A, cuando el arco se somete a una variación de temperatura uniforme *T* en todo él. El coeficiente de dilatación lineal del material es α.

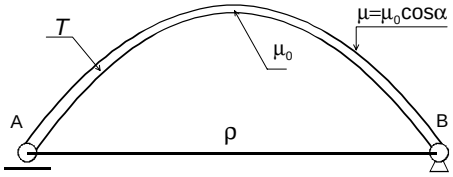


Figura P6.5

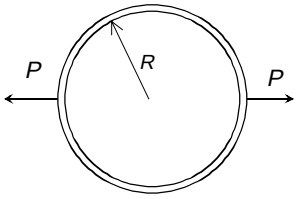


Figura P6.6

6.11.8 Calcular el diagrama de momentos flectores en el anillo de la figura P6.6, sometido a dos fuerzas opuestas iguales. El anillo es de propiedades uniformes *EI* y radio *R*. Despreciar la energía de esfuerzo axial.

6.11.9 Sea un arco biempotrado simétrico (figura P6.7), con directriz parabólica de 20 m de luz y 10 m de flecha. Se supone que el arco es rígido axialmente ($\gamma=0$) y con sección variable, de tal forma que su flexibilidad a flexión varía según la ley $\mu=\mu_0 \cos\alpha$, siendo $\mu_0 = 10^{-8}$ 1/(kg m^2) la flexibilidad en la clave. Calcular los esfuerzos que se producen en el arco a consecuencia de un descenso de 1 cm en uno de sus apoyos.

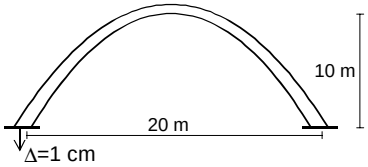


Figura P6.7

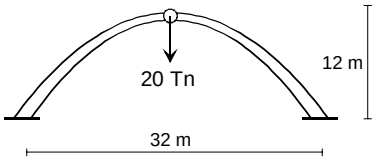


Figura P6.8

6.11.10 Sea un arco simétrico, empotrado en sus apoyos y articulado en su clave (figura P6.8), con directriz parabólica de 32 m de luz y 12 m de flecha. Se supone que el arco es rígido axialmente (γ=0) y con una sección variable, tal que su flexibilidad a flexión varía según la ley $\mu=10^{-8}\cos\alpha$ (1/kg-m^2), siendo α la pendiente de la directriz curva. Calcular los esfuerzos que se producen en él bajo la acción de una carga puntual de 20 Tn en la clave.

6.11.11 El arco de la figura P6.9 tiene directriz parabólica de luz *L* y flecha *f*. Se supone que el arco es rígido axialmente (γ=0) y su sección es tal que su flexibilidad a flexión varía según la ley $\mu=\mu_0\cos\alpha$, siendo μ_0 la flexibilidad en la clave. Calcular la deformación vertical en la dirección de la carga aplicada, la deformación horizontal del apoyo B y el giro en dicho apoyo.

6.11.12 Calcular la distribución de momentos flectores en la estructura de la figura P6.10. La zona curva tiene forma parabólica y su sección es tal que su momento de inercia varía según la ley $I=10^7\sec\alpha$, siendo α la pendiente de la curva directriz. Despreciar la energía del esfuerzo axial en la zona curva. Los pilares tienen momento de inercia 2 10^7 cm^4 y área 10^4 cm^2. El módulo de elasticidad del material es 4 10^5 kg/cm^2.

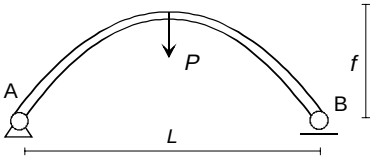


Figura P6.9

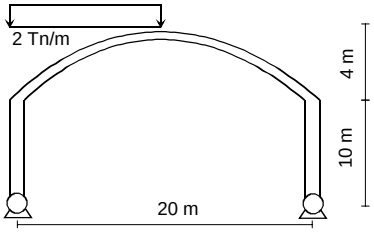


Figura P6.10

Capítulo 7

Rigidez de los elementos estructurales

7.1 INTRODUCCIÓN

El análisis de una estructura empleando el método de flexibilidad descrito en los capítulos anteriores puede resultar muy laborioso si la estructura es medianamente compleja en términos de grado de hiperestaticidad, número y disposición de las barras, etc. En este caso resulta mucho más efectivo para su resolución el método de rigidez, también conocido como de los desplazamientos. El desarrollo detallado de este método se presenta en el capítulo 8, y en este capítulo se presentan los conceptos de rigidez de la estructura y de rigidez de los distintos elementos estructurales, que son las magnitudes básicas en que se fundamenta el método y por lo tanto deben conocerse antes de proceder a su desarrollo.

El método de rigidez se basa en el primer teorema de Castigliano, y una de sus características más importantes es que lleva a una formulación muy sistemática y general, que hace muy sencilla su aplicación práctica. Las primeras formulaciones prácticas de métodos de análisis estructural basados en el concepto de rigidez datan de hace cierto tiempo, como por ejemplo el método del giro - deformación de Bendixen (1914) que utiliza directamente la rigidez a flexión de las barras, o el método de la distribución de momentos de Cross, que se describe en el capítulo 13 y en el que el concepto de rigidez queda menos a la vista. La aparición de los computadores digitales dio un gran empuje al empleo del método de rigidez, ya que su formulación matricial y su naturaleza sistemática lo hacen muy adecuado para su tratamiento mediante un algoritmo de cálculo programado en un ordenador. De hecho, una estructura medianamente complicada no puede resolverse con sencillez si no es empleando el método de rigidez con formulación matricial, y tampoco el método de rigidez puede aplicarse con sencillez a casos reales si no se programa en un computador.

Aunque es mucho más general, el método de rigidez se aplica aquí al análisis de estructuras reticulares discretas, formadas por elementos que son piezas prismáticas, y pueden trabajar a flexión, tracción y/o torsión simultáneamente. Por lo tanto los tipos de estructuras cuyo análisis se aborda por el método de rigidez son: celosías planas o espaciales, pórticos planos o espaciales y emparrillados planos. Las vigas continuas se tratan como un caso particular de los pórticos planos. Se emplean las suposiciones habituales de material elástico-lineal, y pequeñas deformaciones.

7.2 CONCEPTO DE GRADOS DE LIBERTAD

Se denominan *grados de libertad* de una estructura a un conjunto de deformaciones (desplazamientos y/o giros) que definen unívocamente su posición deformada. Como consecuencia, también la energía elástica U acumulada en la estructura, se puede expresar en función de los grados de libertad.

En una estructura reticular, la deformación de cualquiera de sus elementos se puede definir en función de las deformaciones (desplazamientos y giros) de sus dos extremos. Por lo tanto la deformación de toda la estructura se puede definir en función de las deformaciones de todos sus nudos. Estas deformaciones de todos los nudos forman el conjunto mínimo de grados de libertad de la estructura. Sin embargo pueden adoptarse más, por encima de este número mínimo, sin más que dividir cada barra en varias barras de menor longitud, con lo que aparecen más nudos y por lo tanto más grados de libertad

Por ejemplo, el pórtico simple de la figura 7.1 tiene como mínimo seis grados de libertad (tres por cada nudo A y B). También se pueden tomar más nudos, por ejemplo situando un nudo C en el centro de la viga horizontal, confluyendo en él dos barras alineadas. En este caso habría 9 grados de libertad.

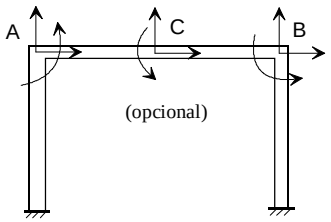


Figura 7.1

7.3 CONCEPTO DE RIGIDEZ DE UNA ESTRUCTURA

Se considera una estructura reticular, cuya deformación se puede definir mediante un conjunto de n grados de libertad Δ_i, que son en general giros o deformaciones:

$$\boldsymbol{\Delta}^T = \{\Delta_1 \quad \Delta_2 \quad \dots \quad \Delta_n\} \tag{7.1}$$

Sean F_i las fuerzas generalizadas (fuerzas o momentos) asociadas a esos grados de libertad:

$$\mathbf{F}^T = \{F_1 \quad F_2 \quad \dots \quad F_n\} \tag{7.2}$$

Según la fórmula de Clapeyron, la energía almacenada por la estructura es igual al trabajo efectuado por estas fuerzas:

$$U = \frac{1}{2}\sum_i F_i \Delta_i = \frac{1}{2}\mathbf{F}^T\boldsymbol{\Delta} \tag{7.3}$$

Si la estructura está en una posición de equilibrio, el valor de una cualquiera de las fuerzas, se obtiene aplicando el primer Teorema de Castigliano:

$$F_i = \frac{\partial U}{\partial \Delta_i} \tag{7.4}$$

Derivando la expresión (7.3) de la energía se obtiene:

$$F_i = \frac{1}{2}\left(F_i + \sum_j \frac{\partial F_j}{\partial \Delta_i}\Delta_j \right) \tag{7.5}$$

o también:

$$F_i = \sum_j \frac{\partial F_j}{\partial \Delta_i}\Delta_j \tag{7.6}$$

Esta expresión se cumple para todas las fuerzas F_i, con lo que las n ecuaciones se pueden agrupar de forma matricial como:

$$\begin{Bmatrix} F_1 \\ F_2 \\ .. \\ F_n \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{\partial F_1}{\partial \Delta_1} & \frac{\partial F_2}{\partial \Delta_1} & .. & \frac{\partial F_n}{\partial \Delta_1} \\ \frac{\partial F_1}{\partial \Delta_2} & \frac{\partial F_2}{\partial \Delta_2} & .. & \frac{\partial F_n}{\partial \Delta_2} \\ .. & .. & .. & .. \\ \frac{\partial F_1}{\partial \Delta_n} & \frac{\partial F_2}{\partial \Delta_n} & .. & \frac{\partial F_n}{\partial \Delta_n} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \Delta_1 \\ \Delta_2 \\ .. \\ \Delta_n \end{Bmatrix} \tag{7.7}$$

$$\mathbf{F} = \mathbf{K}\boldsymbol{\Delta} \tag{7.8}$$

donde **K** es la *matriz de rigidez* de la estructura. Esta ecuación representa las n ecuaciones de equilibrio de la estructura en la dirección de sus n grados de libertad, y es la ecuación fundamental del método de rigidez. Conociendo los valores de las fuerzas exteriores **F** que actúan sobre el sistema**,** se obtienen sus desplazamientos **Δ** por solución del sistema de ecuaciones anterior, lo cual explica el nombre de método de los desplazamientos por el que también se conoce a este método.

Los elementos de la matriz de rigidez **K** son los *coeficientes de rigidez* de la estructura, cuyo valor es:

$$K_{ij} = \frac{\partial F_j}{\partial \Delta_i} \tag{7.9}$$

Simetría de la matriz de rigidez

El valor de un coeficiente de rigidez cualquiera K_{ij} viene dado por la expresión (7.9). Sustituyendo en ella el valor de la fuerza generalizada dado por (7.4), se obtiene:

$$K_{ij} = \frac{\partial}{\partial \Delta_i}\left(\frac{\partial U}{\partial \Delta_j} \right) = \frac{\partial^2 U}{\partial \Delta_j \partial \Delta_i} \tag{7.10}$$

Análogamente, el valor de K_{ji} es:

$$K_{ji} = \frac{\partial F_i}{\partial \Delta_j} = \frac{\partial}{\partial \Delta_j}\left(\frac{\partial U}{\partial \Delta_i}\right) = \frac{\partial^2 U}{\partial \Delta_i \partial \Delta_j} \tag{7.11}$$

Por la independencia del orden de derivación, ambas derivadas segundas son iguales:

$$K_{ij} = K_{ji} = \frac{\partial^2 U}{\partial \Delta_i \partial \Delta_j} \tag{7.12}$$

con lo que queda demostrado que **K** es simétrica. Por lo tanto el sistema de ecuaciones de equilibrio se puede transponer:

$$\begin{Bmatrix} F_1 \\ F_2 \\ .. \\ F_n \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{\partial F_1}{\partial \Delta_1} & \frac{\partial F_1}{\partial \Delta_2} & .. & \frac{\partial F_1}{\partial \Delta_n} \\ \frac{\partial F_2}{\partial \Delta_1} & \frac{\partial F_2}{\partial \Delta_2} & .. & \frac{\partial F_2}{\partial \Delta_n} \\ .. & .. & .. & .. \\ \frac{\partial F_n}{\partial \Delta_1} & \frac{\partial F_n}{\partial \Delta_2} & .. & \frac{\partial F_n}{\partial \Delta_n} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \Delta_1 \\ \Delta_2 \\ .. \\ \Delta_n \end{Bmatrix} \tag{7.13}$$

Energía elástica

La expresión de la energía elástica acumulada en la estructura es

$$U = \frac{1}{2}\boldsymbol{\Delta}^T \mathbf{F} \tag{7.14}$$

Sustituyendo en ella la ecuación de equilibrio se obtiene:

$$U = \frac{1}{2}\boldsymbol{\Delta}^T \mathbf{K} \boldsymbol{\Delta} \tag{7.15}$$

Esto indica que la energía elástica U almacenada en una estructura es una forma cuadrática formada por su matriz de rigidez **K**, y las deformaciones **Δ** a que está sometida.

Pero la energía elástica es siempre positiva, para cualquier estado de deformaciones **Δ** no nulo, y sólo se anula si **Δ** es idénticamente nulo. Cuando se cumple esto, se dice que la forma cuadrática U es definida positiva, y ello implica que la matriz **K** de la forma cuadrática es también definida positiva. Se deduce por lo tanto que **K** es definida positiva: su determinante es siempre positivo y existe su inversa.

Significado físico de la matriz de rigidez

El significado físico de la matriz de rigidez puede ponerse de manifiesto imponiendo a la estructura el siguiente estado de deformación: al grado de libertad j se le impone una deformación de valor unidad ($\Delta_j = 1$) mientras que los restantes grados de libertad se mantienen fijos ($\Delta_i = 0 \quad i \neq j$). Para imponer este estado de deformación hay que aplicar unas fuerzas sobre los distintos grados de libertad, cuyos valores se trata de determinar.

La ecuación de equilibrio en la situación de deformación impuesta es:

$$\begin{Bmatrix} F_1 \\ .. \\ F_j \\ .. \\ F_n \end{Bmatrix}_{\Delta_j=1} = \begin{bmatrix} K_{11} & .. & K_{1j} & .. & K_{1n} \\ .. & .. & .. & .. & .. \\ .. & .. & K_{jj} & .. & .. \\ .. & .. & .. & .. & .. \\ K_{n1} & .. & K_{nj} & .. & K_{nn} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \Delta_1 = 0 \\ .. \\ \Delta_j = 1 \\ .. \\ \Delta_n = 0 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} K_{1j} \\ .. \\ K_{jj} \\ .. \\ K_{nj} \end{Bmatrix} \tag{7.16}$$

Se observa que las fuerzas a efectuar sobre los grados de libertad corresponden a la columna *j* de la matriz de rigidez. Por lo tanto se puede decir que la columna *j* de la matriz de rigidez son las fuerzas que es necesario aplicar sobre los grados de libertad de la estructura, para imponer un estado de deformación compuesto por un desplazamiento unidad en el grado de libertad *j*, y cero en todos los demás.

$$\begin{Bmatrix} K_{1j} \\ .. \\ K_{jj} \\ .. \\ K_{nj} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} F_1 \\ .. \\ F_j \\ .. \\ F_n \end{Bmatrix}_{\Delta_j=1} \tag{7.17}$$

Las fuerzas que hay que aplicar sobre los distintos grados de libertad son:

- Sobre el grado de libertad *j* hay que aplicar una fuerza exterior de valor $F_j = K_{jj}$, que es precisamente la fuerza necesaria para producir el $\Delta_j = 1$. Esta fuerza corresponde al término de la diagonal de **K**.
- En todos los demás grados de libertad aparecen unas fuerzas de reacción, precisamente para que no se muevan, de valor $F_i = K_{ij}$.

Por lo tanto, un término cualquiera K_{ij} de la matriz **K** representa la fuerza de reacción exterior que aparece en la dirección *i*, al aplicarse un desplazamiento unitario en la dirección *j* ($\Delta_j = 1$), siendo cero todos los demás desplazamientos ($\Delta_i = 0 \quad i \neq j$). La figura 7.2 muestra estas fuerzas para la rigidez transversal de un pórtico simple.

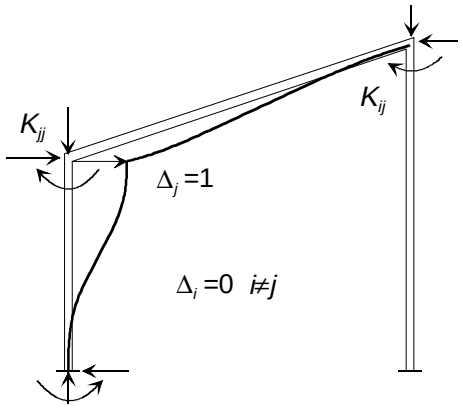


Figura 7.2

Este desarrollo se ha explicado con fuerzas y traslaciones, pero el planteamiento es totalmente general y puede hacerse igualmente con giros y momentos. Es decir que las F_i anteriores pueden ser fuerzas o momentos y las Δ_i traslaciones o giros. Los términos de **K** son en general cocientes entre fuerzas o momentos y traslaciones o giros. Sus unidades son por lo tanto: F/L si son relación entre una fuerza y una deformación, o FL si relacionan un momento con un giro, o bien F si relacionan una fuerza con un giro, o un momento con una traslación.

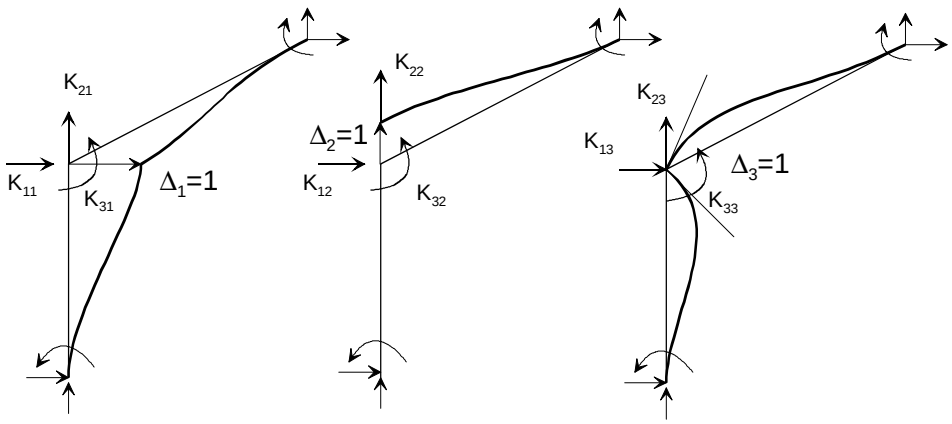
Cálculo de la matriz de rigidez

La matriz de rigidez de una estructura o de un elemento estructural puede determinarse, basándose en la su propia definición, como la derivada segunda de la energía elástica con respecto a las deformaciones, como indica la ecuación (7.12). Esto exige conocer la expresión analítica de la energía elástica en función de los grados de libertad, lo cual es prácticamente imposible para una estructura real, por lo que este método sólo se emplea para un elemento estructural aislado o en todo caso para una estructura muy simple.

Como alternativa, es posible plantear otro método diferente, que no requiere determinar la energía elástica, y que se fundamenta en el sentido físico de los términos de la matriz de rigidez. Consiste sencillamente en imponer sucesivos valores unitarios a todos y cada uno de los grados de libertad de la estructura y calcular las fuerzas que es necesario aplicar desde el exterior, sobre cada uno de ellos, para producir la deformación deseada. Para cada uno de dichos valores unitarios se obtiene así una columna de la matriz de rigidez.

El cálculo de cada columna de **K** es en general un problema hiperestático, cuya única acción exterior es un desplazamiento impuesto, de valor unidad, y en el que deben calcularse las reacciones sobre todos los grados de libertad. Se requiere por lo tanto el empleo de un método adecuado que incluya las condiciones de compatibilidad de deformaciones, como el método de flexibilidad.

Ejemplo. *En una estructura sencilla como la de la figura, los diversos coeficientes K_{ij} son las fuerzas y momentos indicados, para cada valor unitario de las distintas deformaciones.*



Sin embargo, el cálculo la matriz de rigidez por el procedimiento expuesto, para toda la estructura a la vez, resulta muy complicado, pues hay que calcular tantas veces la estructura como grados de libertad tenga, y cada cálculo es a su vez un problema hiperestático. Este método por lo tanto no puede aplicarse de forma directa a toda la estructura.

La solución para formar la matriz **K** de forma simple consiste en calcularla para cada elemento por independiente, con objeto de obtener la expresión de la matriz de rigidez del elemento aislado. A continuación se efectúa un proceso de unión o ensamblaje de las matrices de los distintos elementos, a fin de obtener la matriz de rigidez de toda la estructura.

Resulta por lo tanto del máximo interés disponer de la expresión de la matriz de rigidez de cada tipo distinto de elemento estructural. El resto de este capítulo está dedicado a describir los elementos estructurales más comunes, indicándose sus grados de libertad, las fuerzas que admiten y su matriz de rigidez. El proceso de ensamblaje de las matrices se describe en el capítulo 8.

7.4 BARRA ARTICULADA PLANA

Se trata de un elemento estructural articulado en los dos extremos, y que por lo tanto sólo puede absorber esfuerzo axial, de tracción o compresión, en su propia dirección, y ningún esfuerzo transversal. Es el elemento que forma las celosías planas. Tiene dos grados de libertad de desplazamiento en cada uno de sus dos nudos extremos.

Se adopta un sistema de ejes local, cuyo eje X_L coincide con el eje del elemento, y cuyo origen está en uno cualquiera de los nudos, que se denomina nudo I, mientras que el opuesto es el nudo J (figura 7.3). Se considera que el elemento es de material homogéneo, con sección transversal constante *A*, módulo de elasticidad *E*, y longitud *L*.

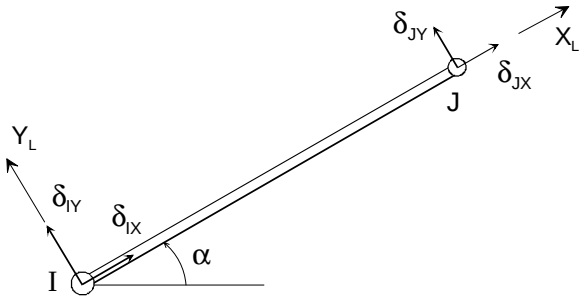


Figura 7.3

Los vectores que agrupan los cuatro grados de libertad del elemento y las fuerzas correspondientes a estos grados de libertad, en coordenadas locales, son:

$$\boldsymbol{\delta} = \begin{Bmatrix} \boldsymbol{\delta}_I \\ \boldsymbol{\delta}_J \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \delta_{IX} \\ \delta_{IY} \\ \delta_{JX} \\ \delta_{JY} \end{Bmatrix} \qquad \mathbf{P} = \begin{Bmatrix} \mathbf{P}_I \\ \mathbf{P}_J \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} P_{IX} \\ P_{IY} \\ P_{JX} \\ P_{JY} \end{Bmatrix} \tag{7.18}$$

Se incluyen las fuerzas en dirección Y_L por existir grados de libertad en dicha dirección, aunque deben ser nulas por equilibrio estático.

7.4.1 Matriz de rigidez. Método del desplazamiento unitario

La matriz de rigidez es de tamaño 4x4, y sus términos se calculan aplicando sucesivos valores unitarios a los cuatro desplazamientos posibles y calculando las fuerzas de reacción que aparecen, como se muestra en la figura 7.4.

- Caso δ_{IX}=1. Las distintas magnitudes son: $\varepsilon = 1/L \qquad \sigma = E\varepsilon \qquad N = A\sigma = AE/L$

  Se obtienen de esta manera los coeficientes de la primera columna de la matriz de rigidez:

$$K_{IX,IX} = EA/L \qquad K_{JX,JX} = -EA/L \qquad K_{IY,IY} = K_{JY,JY} = 0 \tag{7.19}$$

- Caso δ_{IY}=1. En esta situación no aparecen esfuerzos en la barra, (en la hipótesis de pequeñas deformaciones), luego la segunda columna es nula.
- Caso δ_{JX} =1. La situación es análoga al caso δ_{IX}=1 y se obtiene la tercera columna.
- Caso δ_{JY}=1. Se obtiene la cuarta columna, que es toda ella nula.

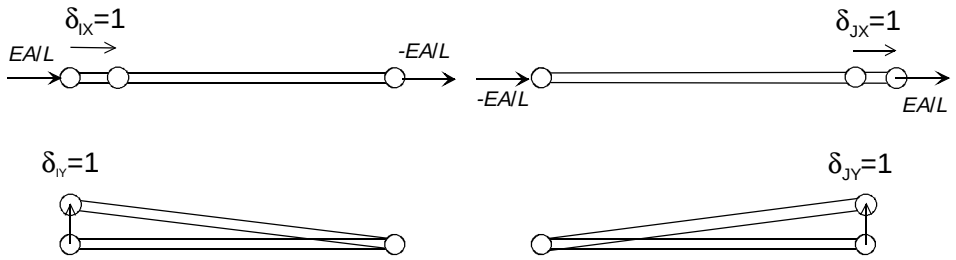


Figura 7.4

La expresión de la matriz de rigidez en el sistema local se obtiene agrupando los resultados anteriores:

$$\begin{Bmatrix} P_{IX} \\ P_{IY} \\ P_{JX} \\ P_{JY} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{EA}{L} & 0 & -\frac{EA}{L} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ -\frac{EA}{L} & 0 & \frac{EA}{L} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \delta_{IX} \\ \delta_{IY} \\ \delta_{JX} \\ \delta_{JY} \end{Bmatrix} \tag{7.20}$$

$$\mathbf{P} = \mathbf{K_L}\boldsymbol{\delta} \tag{7.21}$$

Se observa que:

- Los grados de libertad δ_{IY} δ_{JY} no aportan rigidez: pueden adoptar cualquier valor sin que se produzcan fuerzas en los extremos de la barra.

- Los esfuerzos en la dirección Y_L son siempre nulos, sean cuales sean las deformaciones de la barra.
- Solamente colaboran a la rigidez los grados de libertad de deformación axial δ_{IX} δ_{JX}.

La ecuación de equilibrio anterior se puede poner separada para las magnitudes de cada nudo como:

$$\begin{Bmatrix} \mathbf{P}_I \\ \mathbf{P}_J \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{K}_{LII} & \mathbf{K}_{LIJ} \\ \mathbf{K}_{LJI} & \mathbf{K}_{LJJ} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \boldsymbol{\delta}_I \\ \boldsymbol{\delta}_J \end{Bmatrix} \tag{7.22}$$

donde las matrices y vectores que intervienen son de tamaño 2. Del valor de $\mathbf{K}_L$ se comprueba que:

$$\mathbf{K}_{LIJ} = \mathbf{K}_{LJI}^T \tag{7.23}$$

La expresión anterior puede ponerse en realidad de forma mucho más compacta como:

$$\begin{Bmatrix} P_{IX} \\ P_{JX} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{EA}{L} & -\frac{EA}{L} \\ -\frac{EA}{L} & \frac{EA}{L} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \delta_{IX} \\ \delta_{JX} \end{Bmatrix} \tag{7.24}$$

pero se prefiere mantener los dos grados de libertad en cada nudo para poder efectuar la rotación al sistema general de forma más sencilla.

7.4.2 Matriz de rigidez a partir de la energía elástica

Para determinar la expresión de la matriz de rigidez a partir de la energía elástica, es necesario expresar ésta en función de las deformaciones. El campo de deformaciones en el interior de la barra es lineal, entre sus dos valores extremos en los nudos:

$$u_x(x) = \delta_{IX} + (\delta_{JX} - \delta_{IX})x / L \tag{7.25}$$

La deformación unitaria y la tensión son:

$$\varepsilon_x = \frac{du_x}{dx} = \frac{\delta_{JX} - \delta_{IX}}{L} \qquad \sigma_x = E\varepsilon_x \tag{7.26}$$

La energía vale:

$$U = \frac{1}{2}\int \sigma_x \varepsilon_x dv = \frac{1}{2}\int E\varepsilon_x^2 A dx = \frac{EA}{2}\int \left(\frac{\delta_{JX} - \delta_{IX}}{L}\right)^2 dx$$

$$U = \frac{EA}{2L}\left(\delta_{JX} - \delta_{IX}\right)^2 \tag{7.27}$$

Los distintos términos no nulos de la matriz de rigidez son:

$$K_{IX,IX} = \frac{\partial^2 U}{\partial^2 \delta_{IX}} = \frac{EA}{L} \tag{7.28}$$

$$K_{IX,JX} = \frac{\partial^2 U}{\partial \delta_{IX} \partial \delta_{JX}} = -\frac{EA}{L} \tag{7.29}$$

$$K_{JX,JX} = \frac{\partial^2 U}{\partial \delta_{JX} \partial \delta_{JX}} = \frac{EA}{L} \tag{7.30}$$

$$K_{JX,IX} = \frac{\partial^2 U}{\partial \delta_{JX} \partial \delta_{IX}} = -\frac{EA}{L} \tag{7.31}$$

Al mismo resultado se llega si se pone la expresión (7.27) de la energía en la forma:

$$U = \frac{1}{2}\{\delta_{IX} \quad \delta_{JX}\}\begin{bmatrix} \frac{EA}{L} & -\frac{EA}{L} \\ -\frac{EA}{L} & \frac{EA}{L} \end{bmatrix}\begin{Bmatrix} \delta_{IX} \\ \delta_{JX} \end{Bmatrix} \tag{7.32}$$

donde, por comparación con la expresión (7.15), se identifica la matriz de rigidez del elemento, sólo para aquellos términos no nulos.

7.4.3 Matriz de rigidez en el sistema general

La relación entre los grados de libertad en el sistema local y en el sistema general (figura 7.5) es:

$$\begin{Bmatrix} \delta_{IX} \\ \delta_{IY} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos\alpha & \sin\alpha \\ -\sin\alpha & \cos\alpha \end{bmatrix}\begin{Bmatrix} \Delta_{IX} \\ \Delta_{IY} \end{Bmatrix} \tag{7.33}$$

$$\boldsymbol{\delta}_I = \mathbf{T}\boldsymbol{\Delta}_I \tag{7.34}$$

siendo $\boldsymbol{\Delta}_I$ el vector de deformaciones del nudo I en el sistema general. Agrupando esta misma relación para los dos nudos del elemento, se obtiene:

$$\boldsymbol{\delta} = \begin{Bmatrix} \boldsymbol{\delta}_I \\ \boldsymbol{\delta}_J \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \delta_{IX} \\ \delta_{IY} \\ \delta_{JX} \\ \delta_{JY} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{T} & 0 \\ 0 & \mathbf{T} \end{bmatrix}\begin{Bmatrix} \Delta_{IX} \\ \Delta_{IY} \\ \Delta_{JX} \\ \Delta_{JY} \end{Bmatrix} = \mathbf{T}_2\boldsymbol{\Delta} \tag{7.35}$$

donde $\mathbf{T}_2$ es una matriz 4x4, obtenida agrupando dos veces sobre la diagonal la matriz $\mathbf{T}$, y que por lo tanto también es ortogonal.

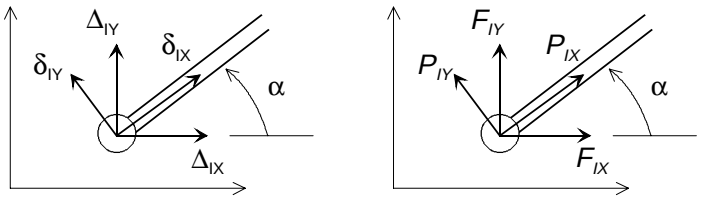


Figura 7.5

La misma relación se cumple para las fuerzas:

$$\mathbf{P} = \mathbf{T}_2\mathbf{F} \tag{7.36}$$

siendo **F** el vector de fuerzas en los extremos del elemento, referido al sistema general (figura 7.6):

$$\mathbf{F} = \begin{Bmatrix} \mathbf{F}_I \\ \mathbf{F}_J \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} F_{IX} \\ F_{IY} \\ F_{JX} \\ F_{JY} \end{Bmatrix} \tag{7.37}$$

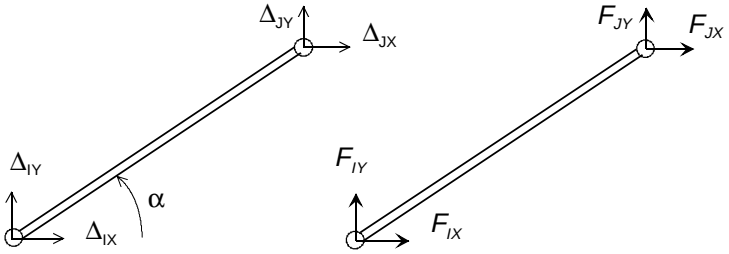


Figura 7.6

Sustituyendo los valores de **P** y **δ** dados por (7.36) y (7.35) en la ecuación de equilibrio (7.21), se obtiene la misma ecuación de equilibrio, pero proyectada sobre el sistema de ejes general de la estructura:

$$\mathbf{F} = \mathbf{T}_2^T \mathbf{K}_L \mathbf{T}_2 \boldsymbol{\Delta} \tag{7.38}$$

$$\begin{Bmatrix} F_{IX} \\ F_{IY} \\ F_{JX} \\ F_{JY} \end{Bmatrix} = \frac{EA}{L} \left[\begin{array}{cc|cc} c^2 & sc & -c^2 & -sc \\ sc & s^2 & -sc & -s^2 \\ \hline -c^2 & -sc & c^2 & sc \\ -sc & -s^2 & sc & s^2 \end{array}\right] \begin{Bmatrix} \Delta_{IX} \\ \Delta_{IY} \\ \Delta_{JX} \\ \Delta_{JY} \end{Bmatrix} \tag{7.39}$$

Siendo c=cosα, s=sinα los dos cosenos directores del eje X_L de la barra. La ecuación anterior define la matriz de rigidez del elemento referida al sistema general

$$\mathbf{K}_G = \mathbf{T}_2^T \mathbf{K}_L \mathbf{T}_2 \tag{7.40}$$

La figura 7.7 muestra el significado físico de las dos primeras columnas de la matriz de rigidez en el sistema general.

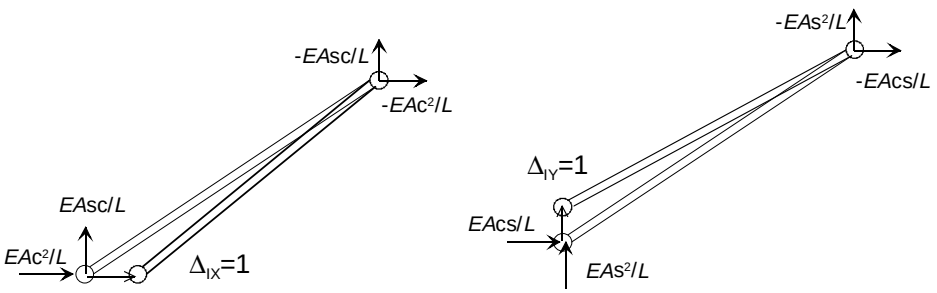


Figura 7.7

La ecuación de equilibrio en el sistema general se puede poner también como:

$$\begin{Bmatrix} \mathbf{F}_I \\ \mathbf{F}_J \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{K}_{GII} & \mathbf{K}_{GIJ} \\ \mathbf{K}_{GJI} & \mathbf{K}_{GJJ} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \mathbf{\Delta}_I \\ \mathbf{\Delta}_J \end{Bmatrix} \tag{7.41}$$

donde se observa que la matriz de rigidez en coordenadas generales está compuesta por cuatro submatrices:

$$\mathbf{K}_{Gij} = \mathbf{T}^T \mathbf{K}_{Lij} \mathbf{T} \tag{7.42}$$

que son la proyección al sistema general de cada una de las matrices correspondientes en el sistema local.

7.5 BARRA BIARTICULADA ESPACIAL

Este elemento tiene dos nudos, en cada uno de los cuales existe una rótula esférica que sólo permite transmitir fuerzas pero no momentos. En consecuencia el elemento sólo puede estar sometido a un esfuerzo axial, sin flexión ni cortante.

Se adopta un sistema de ejes local de tal forma que el eje X_L contiene a la barra, estando dirigido del nudo I al nudo J, y los ejes Y_L, Z_L son perpendiculares a él. En principio queda indeterminada la orientación de los ejes Y_L y Z_L, ya que son admisibles infinitas posiciones, girando alrededor de X_L. No obstante se supondrá que, utilizando algún criterio, se ha determinado la orientación de dichos ejes, y más adelante se verá que ésta no afecta a las propiedades del elemento.

A cada nudo le corresponden tres grados de libertad de traslación en el espacio. Los vectores de grados de libertad y de fuerzas en el sistema local (figura 7.8) son:

$$\boldsymbol{\delta} = \{\delta_{IX} \quad \delta_{IY} \quad \delta_{IZ} \quad \delta_{JX} \quad \delta_{JY} \quad \delta_{JZ}\}^T \tag{7.43}$$

$$\mathbf{P} = \{P_{IX} \quad P_{IY} \quad P_{IZ} \quad P_{JX} \quad P_{JY} \quad P_{JZ}\}^T \tag{7.44}$$

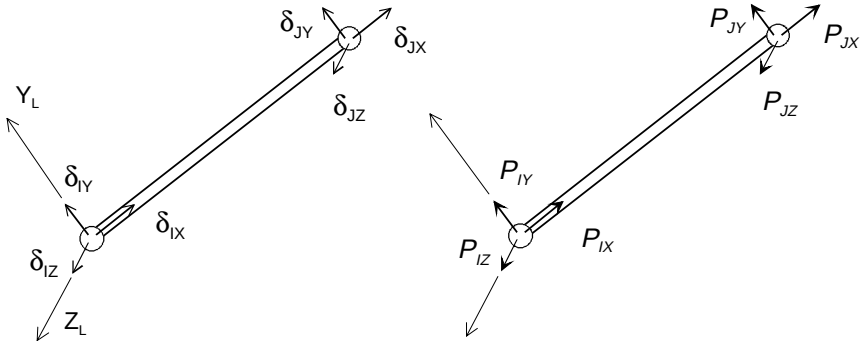


Figura 7.8

7.5.1 Matriz de rigidez en el sistema local

Los coeficientes de rigidez se obtienen utilizando el mismo procedimiento que para el caso plano, pero añadiendo deformaciones transversales según los ejes Y_L y Z_L, que no tienen ningún efecto. La matriz de rigidez que se obtiene, con la suposición de sección constante de área *A*, módulo de elasticidad *E* y longitud *L*, es:

$$\begin{Bmatrix} P_{IX} \\ P_{IY} \\ P_{IZ} \\ P_{JX} \\ P_{JY} \\ P_{JZ} \end{Bmatrix} = \frac{EA}{L} \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \hline -1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right] \begin{Bmatrix} \delta_{IX} \\ \delta_{IY} \\ \delta_{IZ} \\ \delta_{JX} \\ \delta_{JY} \\ \delta_{JZ} \end{Bmatrix} \tag{7.45}$$

$$\mathbf{P} = \mathbf{K}_L \boldsymbol{\delta} \tag{7.46}$$

Esta matriz es la misma que el caso plano, pero añadiendo una fila y columna más, correspondientes al eje Z_L. Nuevamente se observa que sólo hay rigidez en la dirección X_L y que las fuerzas cortantes en las direcciones Y_L y Z_L son siempre nulas, para cualquier valor de las deformaciones.

La ecuación de equilibrio anterior se puede poner separada para las magnitudes de cada nudo en la forma:

$$\begin{Bmatrix} \mathbf{P}_I \\ \mathbf{P}_J \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{K}_{LII} & \mathbf{K}_{LIJ} \\ \mathbf{K}_{LJI} & \mathbf{K}_{LJJ} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \boldsymbol{\delta}_I \\ \boldsymbol{\delta}_J \end{Bmatrix} \tag{7.47}$$

donde las matrices y vectores que intervienen son de tamaño 3.

7.5.2 Matriz de rigidez en el sistema general

Los vectores de deformaciones y fuerzas en el sistema general son (figura 7.9):

$$\boldsymbol{\Delta} = \{\Delta_{IX} \quad \Delta_{IY} \quad \Delta_{IZ} \quad \Delta_{JX} \quad \Delta_{JY} \quad \Delta_{JZ}\}^T \tag{7.48}$$

$$\mathbf{F} = \{F_{IX} \quad F_{IY} \quad F_{IZ} \quad F_{JX} \quad F_{JY} \quad F_{JZ}\}^T \tag{7.49}$$

La matriz de rotación al sistema general es:

$$\boldsymbol{\delta}_I = \begin{Bmatrix} \delta_{IX} \\ \delta_{IY} \\ \delta_{IZ} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} \lambda & \mu & \nu \\ \lambda_Y & \mu_Y & \nu_Y \\ \lambda_Z & \mu_Z & \nu_Z \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \Delta_{IX} \\ \Delta_{IY} \\ \Delta_{IZ} \end{Bmatrix} = \mathbf{T}\boldsymbol{\Delta}_I \tag{7.50}$$

donde λ,μ,ν son los cosenos directores del eje X_L de la barra, $\lambda_Y, \mu_Y, \upsilon_Y$ los del eje Y_L y $\lambda_Z, \mu_Z, \upsilon_Z$ los del Z_L. Análogamente, para las fuerzas sobre el nudo I, la relación es:

$$\mathbf{P}_I = \mathbf{T}\mathbf{F}_I \tag{7.51}$$

Para los seis desplazamientos y las seis fuerzas las relaciones son:

$$\boldsymbol{\delta} = \begin{Bmatrix} \boldsymbol{\delta}_I \\ \boldsymbol{\delta}_J \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{T} & 0 \\ 0 & \mathbf{T} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \boldsymbol{\Delta}_I \\ \boldsymbol{\Delta}_J \end{Bmatrix} = \mathbf{T}_2 \boldsymbol{\Delta} \tag{7.52}$$

$$\mathbf{P} = \mathbf{T}_2 \mathbf{F}$$

Donde $\mathbf{T}_2$ se obtiene por agrupación diagonal de dos matrices $\mathbf{T}$ de 3x3. La ecuación de equilibrio en coordenadas generales es:

$$\begin{Bmatrix} F_{IX} \\ F_{IY} \\ F_{IZ} \\ F_{JX} \\ F_{JY} \\ F_{JZ} \end{Bmatrix} = \frac{EA}{L} \left[\begin{array}{ccc|ccc} \lambda\lambda & \lambda\mu & \lambda\nu & -\lambda\lambda & -\lambda\mu & -\lambda\nu \\ \mu\lambda & \mu\mu & \mu\nu & -\mu\lambda & -\mu\mu & -\mu\nu \\ \nu\lambda & \nu\mu & \nu\nu & -\nu\lambda & -\nu\mu & -\nu\nu \\ \hline -\lambda\lambda & -\lambda\mu & -\lambda\nu & \lambda\lambda & \lambda\mu & \lambda\nu \\ -\mu\lambda & -\mu\mu & -\mu\nu & \mu\lambda & \mu\mu & \mu\nu \\ -\nu\lambda & -\nu\mu & -\nu\nu & \nu\lambda & \nu\mu & \nu\nu \end{array}\right] \begin{Bmatrix} \Delta_{IX} \\ \Delta_{IY} \\ \Delta_{IZ} \\ \Delta_{JX} \\ \Delta_{JY} \\ \Delta_{JZ} \end{Bmatrix} \tag{7.53}$$

$$\mathbf{F} = \mathbf{K}_G \boldsymbol{\Delta} \tag{7.54}$$

En esta expresión de la matriz de rigidez en coordenadas generales sólo intervienen los cosenos directores del eje X_L, y no aparecen los de los otros dos ejes Y_L y Z_L. Queda por lo tanto demostrado que la posición de dichos ejes no afecta al elemento, y por lo tanto no es necesario ni tan siquiera definirlos: basta con definir el eje X_L, que es el que contiene al elemento.

La matriz de rigidez en el sistema general se puede dividir en cuatro submatrices, que definen las rigideces cruzadas entre los dos nudos:

$$\begin{Bmatrix} \mathbf{F}_I \\ \mathbf{F}_J \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{K}_{GII} & \mathbf{K}_{GIJ} \\ \mathbf{K}_{GJI} & \mathbf{K}_{GJJ} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \boldsymbol{\Delta}_I \\ \boldsymbol{\Delta}_J \end{Bmatrix} \tag{7.55}$$

Cada una de estas cuatro submatrices tiene la expresión:

$$\mathbf{K}_{Gij} = \mathbf{T}^T \mathbf{K}_{Lij} \mathbf{T} \tag{7.56}$$

que es la misma que en el caso plano, al ser matricial, aunque las matrices $\mathbf{K}_{Lij}$ son ahora de tamaño 3x3.

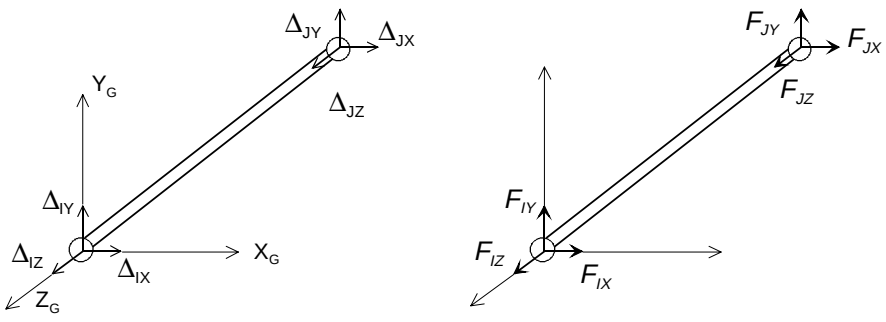


Figura 7.9

7.6 VIGA A FLEXIÓN EN EL PLANO

Se trata de la pieza prismática en el plano, ya estudiada en el capítulo 4. El elemento está situado en el plano XY, y para su estudio se adopta un sistema de ejes local con su eje X_L coincidente con la viga, y su origen en el nudo I del elemento. Los ejes Z general y local son coincidentes.

El elemento tiene capacidad para absorber esfuerzos de flexión y cortadura, a la vez que esfuerzo axial. La flexión se produce en el plano XY, y está controlada por el momento de inercia I_z de la sección respecto del eje Z, que se denomina simplemente I.

En cada nudo los tres grados de libertad son: desplazamiento axial según X_L, desplazamiento transversal según Y_L, y giro según el eje Z. Los esfuerzos correspondientes son: fuerza axial según X_L, fuerza cortante según Y_L y flector según Z, como se indica en la figura 7.10.

$$\boldsymbol{\delta} = \begin{Bmatrix} \boldsymbol{\delta}_I \\ \boldsymbol{\delta}_J \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \delta_{IX} \\ \delta_{IY} \\ \theta_I \\ \delta_{JX} \\ \delta_{JY} \\ \theta_J \end{Bmatrix} \qquad \mathbf{P} = \begin{Bmatrix} \mathbf{P}_I \\ \mathbf{P}_J \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} P_{IX} \\ P_{IY} \\ M_I \\ P_{JX} \\ P_{JY} \\ M_J \end{Bmatrix} \tag{7.57}$$

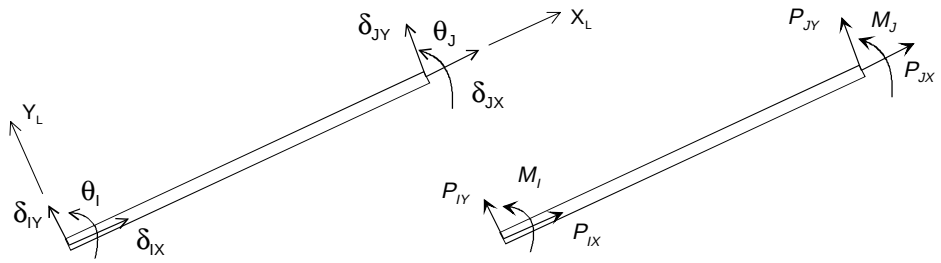


Figura 7.10

7.6.1 Matriz de rigidez en coordenadas locales

La matriz de rigidez es de tamaño 6x6. Sus términos se calculan aplicando desplazamientos unitarios sucesivamente a cada uno de los seis grados de libertad, y calculando en cada caso las fuerzas de reacción que aparecen sobre la barra. Los casos a estudiar son:

- ◊ Columna 1: desplazamiento axial unitario en el nudo I.
- ◊ Columna 2: desplazamiento lateral unitario en el nudo I.
- ◊ Columna 3: giro unitario en el nudo I.
- ◊ Columna 4: desplazamiento axial unitario en el nudo J.
- ◊ Columna 5: desplazamiento lateral unitario en el nudo J.

◊ Columna 6: giro unitario en el nudo J.

De estos seis casos, los dos correspondientes al esfuerzo axial (columnas 1 y 4) ya se han resuelto para el elemento articulado. Los otros cuatro restantes son hiperestáticos, pudiendo resolverse por los teoremas de Mohr. Los resultados se muestran en la figura 7.11.

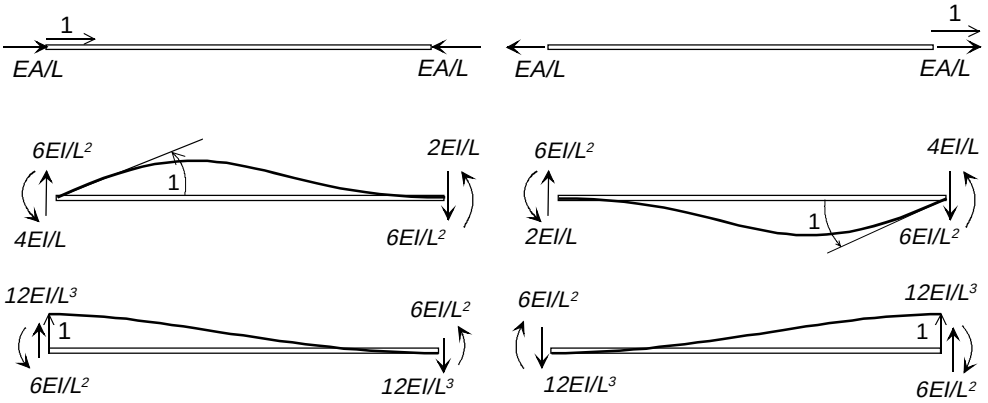


Figura 7.11

La resolución de cada caso proporciona una columna de la matriz de rigidez. Agrupando los distintos resultados, con los signos adecuados, se obtiene la siguiente ecuación de equilibrio:

$$\begin{Bmatrix} P_{IX} \\ P_{IY} \\ M_I \\ P_{JX} \\ P_{JY} \\ M_J \end{Bmatrix} = \left[\begin{array}{ccc|ccc} \frac{EA}{L} & 0 & 0 & -\frac{EA}{L} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{12EI}{L^3} & \frac{6EI}{L^2} & 0 & -\frac{12EI}{L^3} & \frac{6EI}{L^2} \\ 0 & \frac{6EI}{L^2} & \frac{4EI}{L} & 0 & -\frac{6EI}{L^2} & \frac{2EI}{L} \\ \hline -\frac{EA}{L} & 0 & 0 & \frac{EA}{L} & 0 & 0 \\ 0 & -\frac{12EI}{L^3} & -\frac{6EI}{L^2} & 0 & \frac{12EI}{L^3} & -\frac{6EI}{L^2} \\ 0 & \frac{6EI}{L^2} & \frac{2EI}{L} & 0 & -\frac{6EI}{L^2} & \frac{4EI}{L} \end{array}\right] \begin{Bmatrix} \delta_{IX} \\ \delta_{IY} \\ \theta_I \\ \delta_{JX} \\ \delta_{JY} \\ \theta_J \end{Bmatrix} \tag{7.58}$$

$$\mathbf{P} = \mathbf{K}_L \boldsymbol{\delta} \tag{7.59}$$

La no existencia de términos de rigidez entre los grados de libertad de deformación axial y los de flexión muestra el desacoplamiento entre ambos efectos.

La ecuación de equilibrio anterior se puede poner separada para las magnitudes de cada nudo como:

$$\begin{Bmatrix} \mathbf{P}_I \\ \mathbf{P}_J \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{K}_{LII} & \mathbf{K}_{LIJ} \\ \mathbf{K}_{LJI} & \mathbf{K}_{LJJ} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \boldsymbol{\delta}_I \\ \boldsymbol{\delta}_J \end{Bmatrix} \tag{7.60}$$

donde las matrices y vectores que intervienen son de tamaño 3.

7.6.2 Matriz de rigidez en coordenadas generales

La matriz de transformación de coordenadas para las deformaciones de un nudo es:

$$\boldsymbol{\delta}_I = \begin{Bmatrix} \delta_{IX} \\ \delta_{IY} \\ \theta_I \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos\alpha & \sin\alpha & 0 \\ -\sin\alpha & \cos\alpha & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \Delta_{IX} \\ \Delta_{IY} \\ \theta_I \end{Bmatrix} = \mathbf{T}\boldsymbol{\Delta}_I \tag{7.61}$$

Esta es la misma matriz que se emplea para la transformación de un vector en dos dimensiones, pero añadiéndole una fila y columna más, a fin de transformar el giro, que es el mismo en los sistemas de ejes local y general. La misma matriz se emplea para la transformación de esfuerzos. En general la relación entre las magnitudes en los sistemas local y general es:

$$\boldsymbol{\delta}_I = \mathbf{T}\boldsymbol{\Delta}_I \qquad \boldsymbol{\delta}_J = \mathbf{T}\boldsymbol{\Delta}_J \tag{7.62}$$

$$\mathbf{P}_I = \mathbf{T}\mathbf{F}_I \qquad \mathbf{P}_J = \mathbf{T}\mathbf{F}_J \tag{7.63}$$

Agrupando las propiedades de los dos nudos en un único vector (figura 7.12):

$$\boldsymbol{\delta} = \begin{Bmatrix} \boldsymbol{\delta}_I \\ \boldsymbol{\delta}_J \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{T} & 0 \\ 0 & \mathbf{T} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \boldsymbol{\Delta}_I \\ \boldsymbol{\Delta}_J \end{Bmatrix} = \mathbf{T}_2\boldsymbol{\Delta} \qquad \mathbf{P} = \begin{Bmatrix} \mathbf{P}_I \\ \mathbf{P}_J \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{T} & 0 \\ 0 & \mathbf{T} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \mathbf{F}_I \\ \mathbf{F}_J \end{Bmatrix} = \mathbf{T}_2\mathbf{F} \tag{7.64}$$

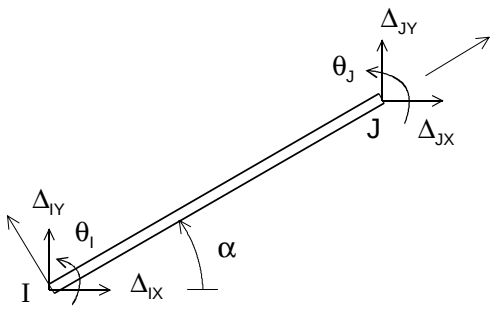


Figura 7.12

Sustituyendo las ecuaciones (7.64) en la (7.59) se obtiene la ecuación de equilibrio proyectada sobre el sistema general:

$$\mathbf{F} = \mathbf{K}_G\boldsymbol{\Delta} \tag{7.65}$$

donde la matriz de rigidez en el sistema general vale:

$$\mathbf{K}_G = \mathbf{T}_2^T\mathbf{K}_L\mathbf{T}_2 \tag{7.66}$$

y cuya expresión detallada se muestra en la ecuación (7.67).

$$\mathbf{K}_G = E\left[\begin{array}{ccc|ccc}
\frac{Ac^2}{L}+\frac{12Is^2}{L^3} & \frac{Asc}{L}-\frac{12Isc}{L^3} & -\frac{6Is}{L^2} & -\frac{Ac^2}{L}-\frac{12Is^2}{L^3} & -\frac{Asc}{L}+\frac{12Isc}{L^3} & -\frac{6Is}{L^2} \\
\frac{Asc}{L}-\frac{12Isc}{L^3} & \frac{As^2}{L}+\frac{12Ic^2}{L^3} & \frac{6Ic}{L^2} & -\frac{Asc}{L}+\frac{12Isc}{L^3} & -\frac{As^2}{L}-\frac{12Ic^2}{L^3} & \frac{6Ic}{L^2} \\
-\frac{6Is}{L^2} & \frac{6Ic}{L^2} & \frac{4I}{L} & \frac{6Is}{L^2} & -\frac{6Ic}{L^2} & \frac{2I}{L} \\
\hline
-\frac{Ac^2}{L}-\frac{12Is^2}{L^3} & -\frac{Asc}{L}+\frac{12Isc}{L^3} & \frac{6Is}{L^2} & \frac{Ac^2}{L}+\frac{12Is^2}{L^3} & \frac{Asc}{L}-\frac{12Isc}{L^3} & \frac{6Is}{L^2} \\
-\frac{Asc}{L}+\frac{12Isc}{L^3} & -\frac{As^2}{L}-\frac{12Ic^2}{L^3} & -\frac{6Ic}{L^2} & \frac{Asc}{L}-\frac{12Isc}{L^3} & \frac{As^2}{L}+\frac{12Ic^2}{L^3} & -\frac{6Ic}{L^2} \\
-\frac{6Is}{L^2} & \frac{6Ic}{L^2} & \frac{2I}{L} & \frac{6Is}{L^2} & -\frac{6Ic}{L^2} & \frac{4I}{L}
\end{array}\right] \tag{7.67}$$

siendo c=cosα s=sinα.

Se observa nuevamente que está formada por cuatro submatrices de tamaño 3x3, que son la proyección al sistema general de cada una de las matrices correspondientes en el sistema local. De forma compacta la ecuación de equilibrio se puede poner:

$$\begin{Bmatrix} F_{IX} \\ F_{IY} \\ M_I \\ F_{JX} \\ F_{JY} \\ M_J \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{K}_{GII} & \mathbf{K}_{GIJ} \\ \mathbf{K}_{GJI} & \mathbf{K}_{GJJ} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \Delta_{IX} \\ \Delta_{IY} \\ \theta_I \\ \Delta_{JX} \\ \Delta_{JY} \\ \theta_J \end{Bmatrix} \tag{7.68}$$

$$\mathbf{K}_{GIJ} = \mathbf{T}^T \mathbf{K}_{LIJ} \mathbf{T} \tag{7.69}$$

En la práctica son muy frecuentes las vigas situadas en posición horizontal o vertical, y para ellas es posible obtener una expresión sencilla de su ecuación de equilibrio en el sistema general.

Vigas horizontales

En este caso el sistema local coincide con el general, y la matriz de rigidez es la misma en ambos (figura 7.13).

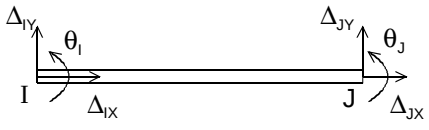


Figura 7.13

La ecuación de equilibrio en el sistema general es:

$$\begin{Bmatrix} F_{IX} \\ F_{IY} \\ M_I \\ F_{JX} \\ F_{JY} \\ M_J \end{Bmatrix} = \left[\begin{array}{ccc|ccc} \frac{EA}{L} & 0 & 0 & -\frac{EA}{L} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{12EI}{L^3} & \frac{6EI}{L^2} & 0 & -\frac{12EI}{L^3} & \frac{6EI}{L^2} \\ 0 & \frac{6EI}{L^2} & \frac{4EI}{L} & 0 & -\frac{6EI}{L^2} & \frac{2EI}{L} \\ \hline -\frac{EA}{L} & 0 & 0 & \frac{EA}{L} & 0 & 0 \\ 0 & -\frac{12EI}{L^3} & -\frac{6EI}{L^2} & 0 & \frac{12EI}{L^3} & -\frac{6EI}{L^2} \\ 0 & \frac{6EI}{L^2} & \frac{2EI}{L} & 0 & -\frac{6EI}{L^2} & \frac{4EI}{L} \end{array}\right] \begin{Bmatrix} \Delta_{IX} \\ \Delta_{IY} \\ \theta_I \\ \Delta_{JX} \\ \Delta_{JY} \\ \theta_J \end{Bmatrix} \tag{7.70}$$

Vigas verticales

En este caso α=90º (figura 7.14) y la ecuación de equilibrio en el sistema general es la siguiente:

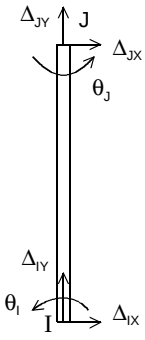


Figura 7.14

$$\begin{Bmatrix} F_{IX} \\ F_{IY} \\ M_I \\ F_{JX} \\ F_{JY} \\ M_J \end{Bmatrix} = \left[\begin{array}{ccc|ccc} \frac{12EI}{L^3} & 0 & -\frac{6EI}{L^2} & -\frac{12EI}{L^3} & 0 & -\frac{6EI}{L^2} \\ 0 & \frac{EA}{L} & 0 & 0 & -\frac{EA}{L} & 0 \\ -\frac{6EI}{L^2} & 0 & \frac{4EI}{L} & \frac{6EI}{L^2} & 0 & \frac{2EI}{L} \\ \hline -\frac{12EI}{L^3} & 0 & \frac{6EI}{L^2} & \frac{12EI}{L^3} & 0 & \frac{6EI}{L^2} \\ 0 & -\frac{EA}{L} & 0 & 0 & \frac{EA}{L} & 0 \\ -\frac{6EI}{L^2} & 0 & \frac{2EI}{L} & \frac{6EI}{L^2} & 0 & \frac{4EI}{L} \end{array}\right] \begin{Bmatrix} \Delta_{IX} \\ \Delta_{IY} \\ \theta_I \\ \Delta_{JX} \\ \Delta_{JY} \\ \theta_J \end{Bmatrix} \tag{7.71}$$

7.7 ELEMENTO DE EMPARRILLADO PLANO

Se llama emparrillado plano a una estructura formada por vigas contenidas en un plano (el plano XY) pero que está sometida a fuerzas que actúan en la dirección Z. Además de estas fuerzas, también puede haber momentos aplicados en las direcciones X e Y.

Por lo tanto el elemento que forma los emparrillados es el mismo elemento estructural que forma un pórtico plano, pero variando las cargas, que ahora son las complementarias de las que actúan sobre el pórtico (que son fuerzas según X e Y y momentos según Z).

El sistema de ejes local de una barra de emparrillado tiene el eje X_L dirigido según la dirección de la barra, desde el nudo I al J, y el eje Y_L perpendicular a ella y contenido en el plano X_GY_G, de tal forma que los ejes Z_L y Z_G son coincidentes (figura 7.15). Al igual que en los pórticos planos, una vez definidos los nudos I y J queda perfectamente definido el sistema de ejes local al elemento, con el criterio anterior.

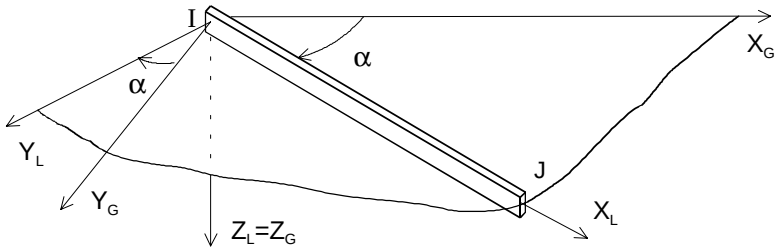


Figura 7.15

Este elemento tiene tres grados de libertad en cada nudo (figura 7.16), que son:

- ◊ φ_{IX} giro según el eje X local, originado por la torsión,
- ◊ φ_{IY} giro según el eje Y local, originado por la flexión,
- ◊ δ_{IZ} desplazamiento según el eje Z, transversal al plano de la estructura, y originado por la flexión.

$$\boldsymbol{\delta}_I = \{\varphi_{IX} \quad \varphi_{IY} \quad \delta_{IZ}\}^T \qquad \boldsymbol{\delta}_J = \{\varphi_{JX} \quad \varphi_{JY} \quad \delta_{JZ}\}^T \tag{7.72}$$

Se observa que estos grados de libertad son los complementarios de los del elemento viga plana. Los esfuerzos que puede haber en cada extremo se muestran en la figura 7.16:

$$\mathbf{P}_I = \{m_{IX} \quad m_{IY} \quad P_{IZ}\}^T \qquad \mathbf{P}_J = \{m_{JX} \quad m_{JY} \quad P_{JZ}\}^T \tag{7.73}$$

siendo:

- ◊ m_{IX},m_{JX}: momento torsor según X_L,
- ◊ m_{IY},m_{JY}: momento flector según Y_L,
- ◊ P_{IZ},P_{JZ}: fuerza cortante según Z_L, asociada al momento flector anterior.

El elemento es capaz de absorber esfuerzos de torsión según su eje local X_L y esfuerzos de flexión en el plano X_LZ_L. Esta flexión está controlada por el momento de inercia I_y de la sección respecto a su eje Y_L.

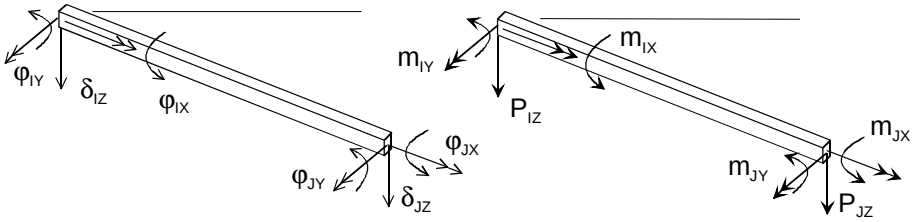


Figura 7.16

7.7.1 Matriz de rigidez en coordenadas locales

La matriz de rigidez se obtiene por el método de los desplazamientos unitarios, resolviendo los seis problemas siguientes:

- Columnas 1 y 4. Se impone un valor unitario al giro de torsión del elemento. Los resultados se indican en la figura 7.17, siendo *G* el módulo de elasticidad en cortadura y *J* la constante de rigidez a la torsión de la sección recta de la viga, de tal forma que el producto *GJ* sea la rigidez a torsión. Para secciones circulares, *J* es el momento de inercia polar de la sección, y para otros tipos de sección se debe aplicar la teoría de la torsión correspondiente.

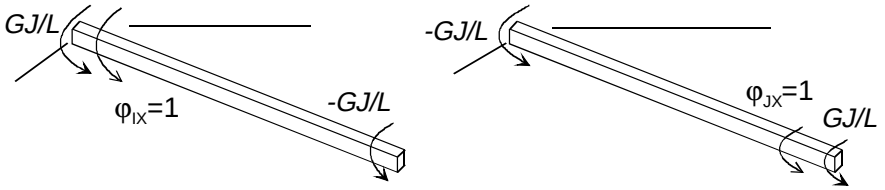


Figura 7.17

- Columna 2: se impone un valor unitario al giro φ_{IY}, como se muestra en la figura 7.18, en la que se representa el elemento en su plano $X_L Z_L$. Este problema corresponde al elemento de viga plana en dos dimensiones.
- Columna 5: se impone un valor unitario a φ_{JY}. Es similar al cálculo de la columna 2.

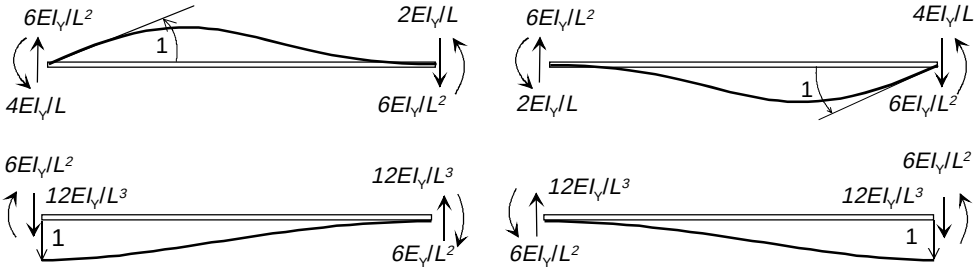


Figura 7.18

- Columna 3: se impone un desplazamiento unitario a δ_{IZ}. Este problema corresponde al elemento de viga plana en dos dimensiones (figura 7.18).

- Columna 6: se impone un desplazamiento unitario a δ_{JZ}. Es similar a la columna 3.

La ecuación de equilibrio en coordenadas locales se obtiene agrupando las seis columnas:

$$\begin{Bmatrix} m_{IX} \\ m_{IY} \\ P_{IZ} \\ m_{JX} \\ m_{JY} \\ P_{JZ} \end{Bmatrix} = \left[\begin{array}{ccc|ccc} \frac{GJ}{L} & 0 & 0 & -\frac{GL}{L} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{4EI_y}{L} & -\frac{6EI_y}{L^2} & 0 & \frac{2EI_y}{L} & \frac{6EI_y}{L^2} \\ 0 & -\frac{6EI_y}{L^2} & \frac{12EI_y}{L^3} & 0 & -\frac{6EI_y}{L^2} & -\frac{12EI_y}{L^3} \\ \hline -\frac{GJ}{L} & 0 & 0 & \frac{GJ}{L} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{2EI_y}{L} & -\frac{6EI_y}{L^2} & 0 & \frac{4EI_y}{L} & \frac{6EI_y}{L^2} \\ 0 & \frac{6EI_y}{L^2} & -\frac{12EI_y}{L^3} & 0 & \frac{6EI_y}{L^2} & \frac{12EI_y}{L^3} \end{array}\right] \begin{Bmatrix} \varphi_{IX} \\ \varphi_{IY} \\ \delta_{IZ} \\ \varphi_{JX} \\ \varphi_{JY} \\ \delta_{JZ} \end{Bmatrix} \tag{7.74}$$

$$\mathbf{P} = \mathbf{K}_L \boldsymbol{\delta} \tag{7.75}$$

Se observa que la torsión está desacoplada de la flexión. Nótese la similitud con el elemento viga plana, sustituyendo el esfuerzo axial, cuya rigidez es *EA/L*, por el de torsión, cuya rigidez es *GJ/L*.

7.7.2 Matriz de rigidez en coordenadas generales

La transformación de las deformaciones de un nudo cualquiera I es (figura 7.19):

$$\boldsymbol{\delta}_I = \begin{Bmatrix} \varphi_{IX} \\ \varphi_{IY} \\ \delta_{IZ} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos\alpha & \sin\alpha & 0 \\ -\sin\alpha & \cos\alpha & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \theta_{IX} \\ \theta_{IY} \\ \Delta_{IZ} \end{Bmatrix} = \mathbf{T}\boldsymbol{\Delta}_I \tag{7.76}$$

siendo

$$\boldsymbol{\Delta}_I = \{\theta_{IX} \quad \theta_{IY} \quad \Delta_{IZ}\}^T \tag{7.77}$$

el vector de deformaciones del nudo I en el sistema general.

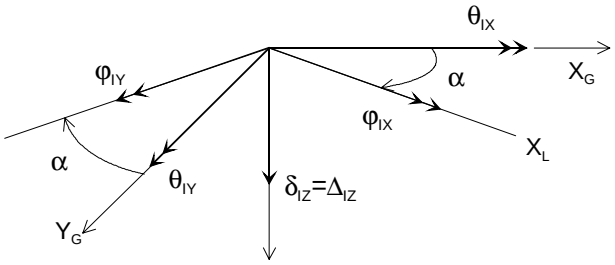


Figura 7.19

Esta es la misma matriz que se emplea para la transformación de las deformaciones del elemento viga plana, pero empleándola para proyectar los dos giros φ del sistema local al general y manteniendo el valor del desplazamiento Z, que es el mismo en ambos sistemas.

Análogamente, la relación para las fuerzas es:

$$\mathbf{P}_I = \begin{Bmatrix} m_{IX} \\ m_{IY} \\ P_{IZ} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos\alpha & \sin\alpha & 0 \\ -\sin\alpha & \cos\alpha & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} M_{IX} \\ M_{IY} \\ F_{IZ} \end{Bmatrix} = \mathbf{T}\mathbf{F}_I \tag{7.78}$$

donde se observa que los momentos de flexión y torsión del sistema local se transforman en dos momentos según los ejes generales X e Y, y que el esfuerzo cortante vertical es el mismo en ambos sistemas.

Agrupando los dos nudos en un único vector se obtiene:

$$\boldsymbol{\delta} = \begin{Bmatrix} \boldsymbol{\delta}_I \\ \boldsymbol{\delta}_J \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{T} & 0 \\ 0 & \mathbf{T} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \boldsymbol{\Delta}_I \\ \boldsymbol{\Delta}_J \end{Bmatrix} = \mathbf{T}_2\boldsymbol{\Delta} \qquad \mathbf{P} = \begin{Bmatrix} \mathbf{P}_I \\ \mathbf{P}_J \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{T} & 0 \\ 0 & \mathbf{T} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \mathbf{F}_I \\ \mathbf{F}_J \end{Bmatrix} = \mathbf{T}_2\mathbf{F} \tag{7.79}$$

Sustituyendo estas expresiones en la ecuación de equilibrio en el sistema local se obtiene la ecuación en el sistema general, que es (figura 7.20):

$$\mathbf{F} = \mathbf{T}_2^T \mathbf{K}_L \mathbf{T}_2 \boldsymbol{\Delta} = \mathbf{K}_G \boldsymbol{\Delta} \tag{7.80}$$

$$\begin{Bmatrix} M_{IX} \\ M_{IY} \\ F_{IZ} \\ M_{JX} \\ M_{JY} \\ F_{JZ} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{K}_{GII} & \mathbf{K}_{GIJ} \\ \mathbf{K}_{GJI} & \mathbf{K}_{GJJ} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \theta_{IX} \\ \theta_{IY} \\ \Delta_{IZ} \\ \theta_{JX} \\ \theta_{JY} \\ \Delta_{JZ} \end{Bmatrix} \tag{7.81}$$

$$\mathbf{K}_G = \begin{bmatrix} \frac{GJc^2}{L}+\frac{4EIs^2}{L} & \frac{GJsc}{L}-\frac{4EIsc}{L} & \frac{6EIs^2}{L^2} & -\frac{GJc^2}{L}+\frac{2EIs^2}{L} & -\frac{GJsc}{L}-\frac{2EIsc}{L} & -\frac{6EIs}{L^2} \\ \frac{GJsc}{L}-\frac{4EIsc}{L} & \frac{GJs^2}{L}+\frac{4EIc^2}{L} & -\frac{6EIc}{L^2} & -\frac{GJsc}{L}-\frac{2EIsc}{L} & -\frac{GJs^2}{L}+\frac{2EIc^2}{L} & \frac{6EIc}{L^2} \\ -\frac{6EIs^2}{L^2} & -\frac{6EIc}{L^2} & \frac{12EI}{L^3} & \frac{6EIs}{L^2} & -\frac{6EIc}{L^2} & -\frac{12EI}{L^3} \\ -\frac{GJc^2}{L}+\frac{2EIs^2}{L} & -\frac{GJsc}{L}-\frac{2EIsc}{L} & \frac{6EIs}{L^2} & \frac{GJc^2}{L}+\frac{4EIs^2}{L} & \frac{GJsc}{L}-\frac{4EIsc}{L} & -\frac{6EIs}{L^2} \\ -\frac{GJsc}{L}-\frac{2EIsc}{L} & -\frac{GJs^2}{L}+\frac{2EIc^2}{L} & -\frac{6EIc}{L^2} & \frac{GJsc}{L}-\frac{4EIsc}{L} & \frac{GJs^2}{L}+\frac{4EIc^2}{L} & \frac{6EIc}{L^2} \\ -\frac{6EIs^2}{L^2} & \frac{6EIc}{L^2} & -\frac{12EI}{L^3} & -\frac{6EIs}{L^2} & \frac{6EIc}{L^2} & \frac{12EI}{L^3} \end{bmatrix} \tag{7.82}$$

donde, para simplificar, se ha empleado,: c=cosα, s=sinα, $I \equiv I_y$.

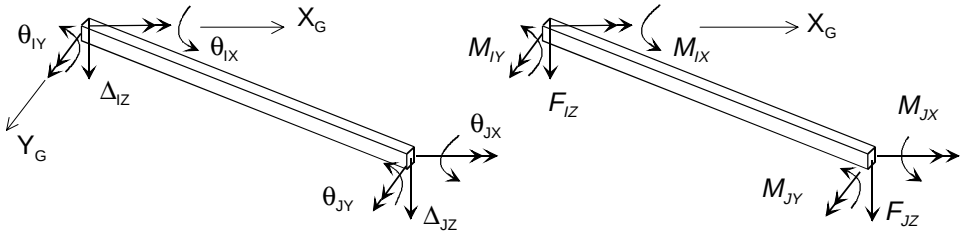


Figura 7.20

7.8 VIGA ESPACIAL

Se trata de una pieza prismática recta, situada en una posición arbitraria en el espacio. Al elemento se asocia un sistema de ejes local (figura 7.21) de la siguiente forma:

- ◊ El eje X_L está dirigido según el eje del elemento, coincidiendo con su centro de gravedad. El origen de este eje está en el nudo I del elemento.
- ◊ Los ejes Y_L, Z_L son perpendiculares al X_L, y deben ser los principales de inercia de la sección recta del elemento.

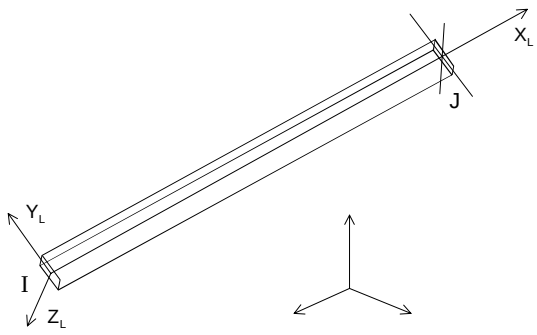


Figura 7.21

Los grados de libertad de cada nudo, en coordenadas locales, son tres desplazamientos y tres giros (figura 7.22):

$$\boldsymbol{\delta}_I = \{\delta_{IX} \quad \delta_{IY} \quad \delta_{IZ} \quad \varphi_{IX} \quad \varphi_{IY} \quad \varphi_{IZ}\}^T$$
$$\boldsymbol{\delta}_J = \{\delta_{JX} \quad \delta_{JY} \quad \delta_{JZ} \quad \varphi_{JX} \quad \varphi_{JY} \quad \varphi_{JZ}\}^T \qquad (7.83)$$

y de la misma forma los seis esfuerzos (tres fuerzas y tres momentos) en cada nudo son:

$$\mathbf{P}_I = \{P_{IX} \quad P_{IY} \quad P_{IZ} \quad m_{IX} \quad m_{IY} \quad m_{IZ}\}^T$$
$$\mathbf{P}_J = \{P_{JX} \quad P_{JY} \quad P_{JZ} \quad m_{JX} \quad m_{JY} \quad m_{JZ}\}^T \qquad (7.84)$$

Por lo tanto el elemento tiene posibilidad de absorber:

- ◊ Esfuerzos axiales P_{IX} P_{JX}, estando la rigidez axial relacionada con el área A de la viga.

- ◊ Momentos torsores m_{IX} m_{JX}. La rigidez a la torsión está relacionada con el producto GJ, siendo G el módulo de elasticidad en cortadura y J la rigidez a torsión equivalente de la sección. Para secciones circulares J es su momento polar de inercia respecto a Z_L.
- ◊ Momentos flectores y esfuerzos cortantes asociados a la flexión en el plano X_LY_L: m_{IZ} m_{JZ} P_{IY} P_{JY}. La rigidez a esta flexión está controlada por el producto EI_z.
- ◊ Momentos flectores y esfuerzos cortantes asociados a la flexión en el plano X_LZ_L: m_{IY} m_{JY} P_{IZ} P_{JZ}. La rigidez a esta flexión depende del producto EI_y.

Todos los elementos estudiados anteriormente son en realidad casos particulares de éste, en los que debido a su particular situación geométrica y estado de cargas, sólo aparecen algunos de los esfuerzos y deformaciones anteriores.

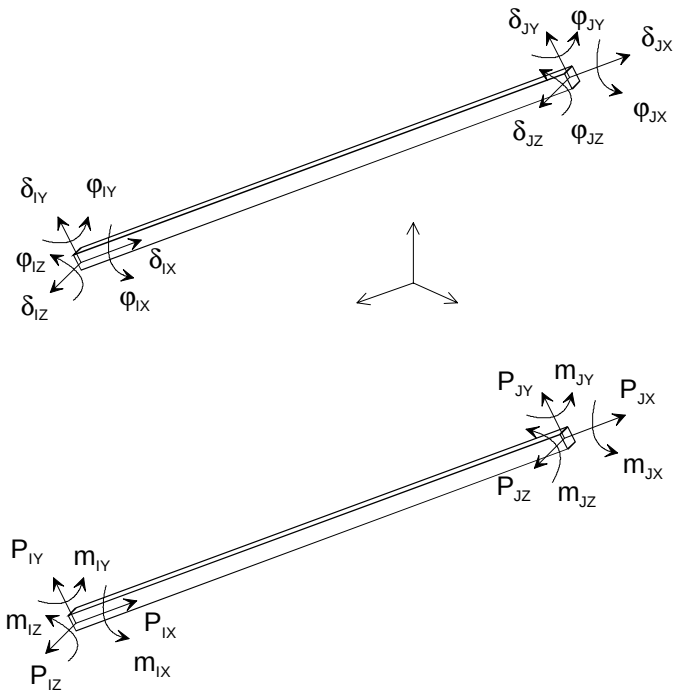


Figura 7.22

7.8.1 Matriz de rigidez en el sistema local

La matriz de rigidez es de tamaño 12x12 y se puede obtener por el método del desplazamiento unitario, descomponiendo el análisis en los doce casos siguientes:

- ◊ dos deformaciones axiales,
- ◊ dos giros a torsión según el eje X_L,

- ◊ dos giros según Z_L y dos desplazamientos según Y_L, para la flexión en el plano $X_L Y_L$,
- ◊ dos giros según Y_L y dos desplazamientos según Z_L, para la flexión en el plano $X_L Z_L$.

Todos estos casos han sido resueltos en el estudio de los elementos anteriores. La ecuación de equilibrio en coordenadas locales se obtiene agrupando los distintos coeficientes de rigidez según los grados de libertad correspondientes, y se puede separar para las magnitudes de cada nudo en la forma:

$$\begin{Bmatrix} P_{IX} \\ P_{IY} \\ P_{IZ} \\ m_{IX} \\ m_{IY} \\ m_{IZ} \\ \hline P_{JX} \\ P_{JY} \\ P_{JZ} \\ m_{JX} \\ m_{JY} \\ m_{JZ} \end{Bmatrix} = \left[\begin{array}{ccc|ccc} & & & & & \\ & \mathbf{K}_{LII} & & & \mathbf{K}_{LIJ} & \\ & & & & & \\ \hline & & & & & \\ & \mathbf{K}_{LJI} & & & \mathbf{K}_{LJJ} & \\ & & & & & \end{array}\right] \begin{Bmatrix} \delta_{IX} \\ \delta_{IY} \\ \delta_{IZ} \\ \varphi_{IX} \\ \varphi_{IY} \\ \varphi_{IZ} \\ \hline \delta_{JX} \\ \delta_{JY} \\ \delta_{JZ} \\ \varphi_{JX} \\ \varphi_{JY} \\ \varphi_{JZ} \end{Bmatrix} \tag{7.85}$$

donde las cuatro sub-matrices que intervienen son de tamaño 6x6 y se muestran en las ecuaciones (7.86) a (7.88).

$$\mathbf{K}_{LII} = \begin{bmatrix} \frac{EA}{L} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{12EI_z}{L^3} & 0 & 0 & 0 & \frac{6EI_z}{L^2} \\ 0 & 0 & \frac{12EI_y}{L^3} & 0 & -\frac{6EI_y}{L^2} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{GJ}{L} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -\frac{6EI_y}{L^2} & 0 & \frac{4EI_y}{L} & 0 \\ 0 & \frac{6EI_z}{L^2} & 0 & 0 & 0 & \frac{4EI_z}{L} \end{bmatrix} \tag{7.86}$$

$$\mathbf{K}_{LJJ} = \begin{bmatrix} \frac{EA}{L} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{12EI_z}{L^3} & 0 & 0 & 0 & -\frac{6EI_z}{L^2} \\ 0 & 0 & \frac{12EI_y}{L^3} & 0 & \frac{6EI_y}{L^2} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{GJ}{L} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{6EI_y}{L^2} & 0 & \frac{4EI_y}{L} & 0 \\ 0 & -\frac{6EI_z}{L^2} & 0 & 0 & 0 & \frac{4EI_z}{L} \end{bmatrix} \tag{7.87}$$

$$\mathbf{K}_{LIJ} = \mathbf{K}_{LJI}^T = \begin{bmatrix} -\frac{EA}{L} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -\frac{12EI_z}{L^3} & 0 & 0 & 0 & \frac{6EI_z}{L^2} \\ 0 & 0 & -\frac{12EI_y}{L^3} & 0 & -\frac{6EI_y}{L^2} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -\frac{GJ}{L} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{6EI_y}{L^2} & 0 & \frac{2EI_y}{L} & 0 \\ 0 & -\frac{6EI_z}{L^2} & 0 & 0 & 0 & \frac{2EI_z}{L} \end{bmatrix} \tag{7.88}$$

La matriz de rigidez que se obtiene muestra que:

- ◊ El esfuerzo axial está desacoplado de los restantes esfuerzos, apareciendo los mismos términos que para una barra de celosía espacial.
- ◊ Los momentos de torsión están desacoplados de los demás esfuerzos, apareciendo los mismos términos que para un emparrillado plano.
- ◊ Los términos debidos a la flexión corresponden a la flexión en dos planos ortogonales $X_L Y_L$ y $X_L Z_L$, con términos similares a los del elemento viga plana. Ambas flexiones están desacopladas entre sí y de los restantes efectos.

7.8.2 Matriz de cambio de coordenadas

La matriz de cambio de coordenadas entre los sistemas general y local corresponde a la matriz de rotación entre dos sistemas de ejes en el espacio, que contiene a los nueve cosenos directores de los ejes, y que depende de sólo tres parámetros independientes.

De entre los muchos métodos existentes para definir la posición relativa de dos sistemas de ejes, en la práctica del análisis estructural se utilizan con frecuencia dos: el empleo de tres rotaciones sucesivas, y el método del punto auxiliar.

Empleo de tres rotaciones sucesivas

Este método consiste en pasar del sistema general X_G,Y_G,Z_G al sistema local a través de tres rotaciones sucesivas alrededor de ejes apropiados.

Como punto de partida para este método se emplea el conocimiento de las coordenadas generales de los nudos extremos del elemento, que permiten definir los cosenos directores λ,μ,ν del eje X_L:

$$\lambda = (x_J - x_I)/L \qquad \mu = (y_J - y_I)/L \qquad \nu = (z_J - z_I)/L \tag{7.89}$$

siendo L la longitud del elemento.

Con esto se han definido tres de los nueve cosenos directores, y se han empleado dos parámetros independientes, pues de entre λ,μ,ν sólo hay dos independientes ya que satisfacen la ecuación de normalización entre sí. Es necesario por lo tanto incluir un parámetro más para definir perfectamente el sistema local. Para definir este tercer parámetro se efectúan tres rotaciones que transforman el sistema general en el sistema local.

- *Rotación α*: se gira el sistema general un ángulo α respecto al eje Y_G, de tal manera que el eje X_G vaya a parar a una nueva posición X_α que sea la proyección de la barra sobre el plano X_GZ_G, como se indica en la figura 7.23. Con esto se genera un sistema de ejes girado $X_\alpha Y_\alpha Z_\alpha$, tal que la barra queda contenida en el plano $X_\alpha Y_\alpha$. Esta rotación se define por una matriz:

$$\mathbf{T}_\alpha = \begin{bmatrix} \cos\alpha & 0 & \sin\alpha \\ 0 & 1 & 0 \\ -\sin\alpha & 0 & \cos\alpha \end{bmatrix} \tag{7.90}$$

que permite pasar un vector **V** cualquiera del sistema global al sistema α:

$$\mathbf{V}_\alpha = \mathbf{T}_\alpha \mathbf{V}_G \tag{7.91}$$

El valor del ángulo α puede determinarse de manera sencilla, en función de los cosenos directores del eje X_L, mediante las expresiones:

$$\sin\alpha = \nu / \sqrt{\lambda^2 + \nu^2} \qquad \cos\alpha = \lambda / \sqrt{\lambda^2 + \nu^2} \tag{7.92}$$

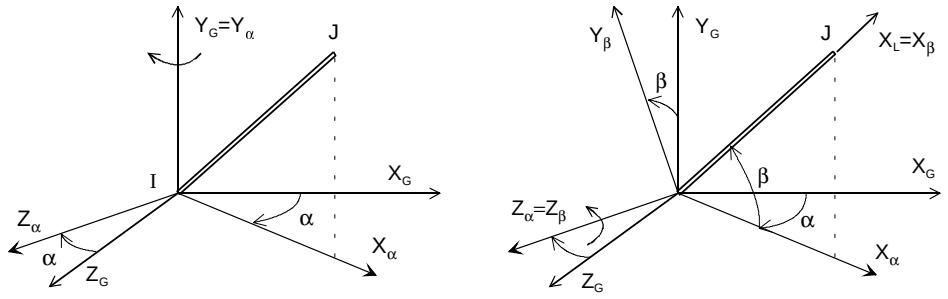


Figura 7.23

- *Rotación β*: se gira el sistema α anterior, un ángulo β alrededor del eje Z_α, para generar otro sistema $X_\beta, Y_\beta, Z_\beta$, que tiene:
  - el eje X_β coincidente con la barra,
  - el eje Z_β, sigue siendo el mismo eje Z_α, y está situado en el plano $X_G Z_G$,
  - los ejes X_α, $X_\beta=X_L$, $Y_\alpha=Y_G$, Y_β, e Y_L se hallan en el mismo plano.

  Esta rotación se muestra en la figura 7.23 y se expresa mediante la matriz:

$$\mathbf{T}_\beta = \begin{bmatrix} \cos\beta & \sin\beta & 0 \\ -\sin\beta & \cos\beta & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \tag{7.93}$$

  que permite pasar del sistema α al β:

$$\mathbf{V}_\beta = \mathbf{T}_\beta \mathbf{V}_\alpha = \mathbf{T}_\beta \mathbf{T}_\alpha \mathbf{V}_G \tag{7.94}$$

  El valor del ángulo β en función de los cosenos directores del eje X_L es:

$$\sin\beta = \mu \qquad\qquad \cos\beta = \sqrt{\lambda^2 + \nu^2} \tag{7.95}$$

  Con esta segunda rotación los ejes Y_β, Y_L, Z_β, y Z_L están en un mismo plano, que es perpendicular al eje de la viga (figura 7.24).

- *Rotación ψ*: finalmente para llegar al sistema de ejes local se efectúa una última rotación, de valor ψ, alrededor del eje X_L, hasta hacer coincidir el eje Y_β con el Y_L. Con ello también coincidirá el Z_β con el Z_L. La matriz de esta última transformación es:

$$\mathbf{T}_\psi = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos\psi & \sin\psi \\ 0 & -\sin\psi & \cos\psi \end{bmatrix} \tag{7.96}$$

  El ángulo ψ no puede expresarse en función de los cosenos directores del eje X_L, y es en realidad el tercer parámetro que falta para definir la orientación del sistema local respecto del general (figura 7.24).

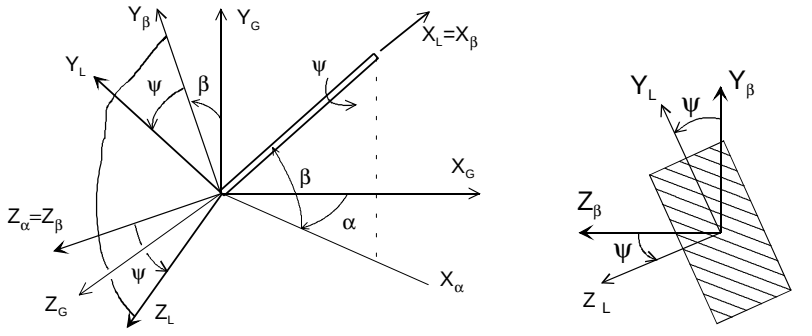


Figura 7.24

Tras la aplicación de estas tres rotaciones, la relación entre un vector **V** expresado en los sistemas local y general es:

$$\mathbf{V}_L = \mathbf{T}_\psi \mathbf{V}_\beta = \mathbf{T}_\psi \mathbf{T}_\beta \mathbf{T}_\alpha \mathbf{V}_G \tag{7.97}$$

Por lo tanto la matriz de rotación entre los sistemas global y local es:

$$\mathbf{T} = \mathbf{T}_\psi \mathbf{T}_\beta \mathbf{T}_\alpha = \begin{bmatrix} \lambda & \mu & \nu \\ \dfrac{-\lambda\mu\cos\psi - \nu\sin\psi}{D} & D\cos\psi & \dfrac{-\mu\nu\cos\psi + \lambda\sin\psi}{D} \\ \dfrac{\lambda\mu\sin\psi - \nu\cos\psi}{D} & -D\sin\psi & \dfrac{\mu\nu\sin\psi + \lambda\cos\psi}{D} \end{bmatrix} \tag{7.98}$$

siendo: $$D^2 = \lambda^2 + \nu^2 \tag{7.99}$$

En esta matriz intervienen los tres cosenos directores del eje de la viga λ, μ, ν, de los cuales dos son independientes, y el ángulo ψ, es decir un total de tres parámetros independientes.

El ángulo ψ se ha definido como el ángulo que forman los ejes Y_β e Y_L, (o bien el Z_β y el Z_L), medido en sentido antihorario, cuando se mira a la viga en el sentido negativo del eje X_L (del nudo J al I). Con esta regla siempre puede calcularse el valor de ψ, si se conoce la posición de los ejes principales de la sección.

Método del punto auxiliar

Este método, muy empleado en la práctica, consiste en utilizar los siguientes parámetros para definir la orientación del sistema local (figura 7.25):

- los tres cosenos directores del eje X_L,
- un punto auxiliar P, situado obligatoriamente en el plano $X_L Y_L$ y fuera del eje X_L, cuyas coordenadas, medidas en el sistema general y relativas al nudo I, son:

$$\mathbf{V}_{PG} = \{x_{PG} \quad y_{PG} \quad z_{PG}\}^T \tag{7.100}$$

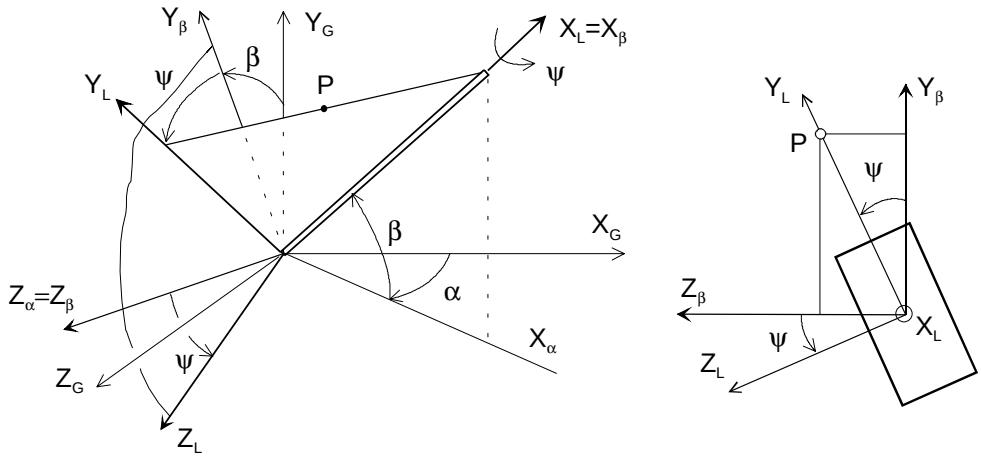


Figura 7.25

Estas coordenadas se pueden transformar al sistema β mediante la aplicación de las rotaciones α y β (ecuación (7.94)):

$$\mathbf{V}_{P\beta} = \mathbf{T}_\beta \mathbf{T}_\alpha \mathbf{V}_{PG} \tag{7.101}$$

donde las matrices $\mathbf{T}_\alpha$ $\mathbf{T}_\beta$ dependen de λ, μ, ν pero no de ψ. Se obtienen así las coordenadas de P respecto al sistema β, cuyo valor es:

$$\begin{aligned} x_{P\beta} &= \lambda x_{PG} + \mu y_{PG} + \nu z_{PG} \\ y_{P\beta} &= -\frac{\lambda\,\mu\,x_{PG}}{D} + D\,y_{PG} - \frac{\mu\,\nu\,z_{PG}}{D} \\ z_{P\beta} &= -\frac{\nu\,x_{PG}}{D} + \frac{\lambda\,z_{PG}}{D} \end{aligned} \tag{7.102}$$

Finalmente el valor de ψ es tal que (figura 7.25):

$$\tan\psi = \frac{z_{P\beta}}{y_{P\beta}} \tag{7.103}$$

Una vez conocido ψ, la matriz **T** se obtiene de la expresión (7.98).

7.8.3 Elementos orientados según el eje Y

Si un elemento está dirigido según el eje Y_G, los cosenos directores de su eje X_L valen $\lambda = 0, \mu = 1, \nu = 0$. De esta manera la variable *D* definida en (7.99) es nula, y no se puede calcular la matriz de rotación **T**. En términos geométricos, al estar la viga según Y_G, hay una indeterminación para definir la rotación α, y por lo tanto hay entera libertad para elegir el origen del ángulo ψ, como se muestra en la figura 7.26.

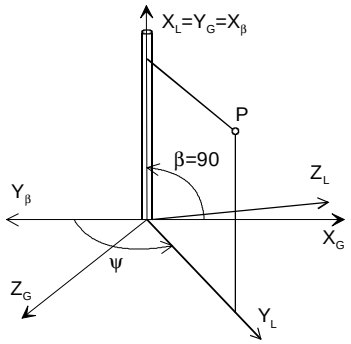


Figura 7.26

En este caso lo que se hace es no efectuar la rotación α, es decir emplear $\mathbf{T}_\alpha = \mathbf{I}$, con lo que el ángulo β vale 90º o 270º en función de que la barra esté orientada según el Y_G positivo o negativo. Esto equivale a decir que el eje Y_β está orientado según $-X_G$ para una barra que esta orientada según $+Y_G$, o que Y_β está orientado según $+X_G$ para una barra situada según $-Y_G$. La matriz **T** obtenida en ambos casos es:

$$\mathbf{T} = \begin{bmatrix} 0 & \mu & 0 \\ -\mu\cos\psi & 0 & \sin\psi \\ \mu\sin\psi & 0 & \cos\psi \end{bmatrix} \tag{7.104}$$

donde μ vale +1 o -1 en función del sentido de orientación de la barra.

Para este tipo de elementos orientados según el eje Y_G, se puede utilizar asimismo el método del punto auxiliar P. Este punto P se toma en cualquier posición del plano $X_L Y_L$, salvo en el propio X_L, y sus coordenadas en el sistema β son:

$$x_{P\beta} = \mu\, y_{PG} \qquad y_{P\beta} = -\mu\, x_{PG} \qquad z_{P\beta} = z_{PG} \tag{7.105}$$

El valor de ψ es:

$$\tan\psi = \frac{z_{P\beta}}{y_{P\beta}} = -\frac{z_{PG}}{\mu\, x_{PG}} \tag{7.106}$$

7.8.4 Matriz de rigidez en coordenadas generales

Las deformaciones de los nudos en el sistema general son (figura 7.27.a):

$$\begin{aligned} \boldsymbol{\Delta}_I &= \{\Delta_{IX} \quad \Delta_{IY} \quad \Delta_{IZ} \quad \theta_{IX} \quad \theta_{IY} \quad \theta_{IZ}\}^T \\ \boldsymbol{\Delta}_J &= \{\Delta_{JX} \quad \Delta_{JY} \quad \Delta_{JZ} \quad \theta_{JX} \quad \theta_{JY} \quad \theta_{JZ}\}^T \end{aligned} \tag{7.107}$$

Al haber en cada nudo seis deformaciones, la rotación de las mismas al sistema general requiere emplear dos veces la matriz de rotación. Agrupando las expresiones para los dos nudos se obtiene:

$$\boldsymbol{\delta} = \begin{Bmatrix} \boldsymbol{\delta}_I \\ \boldsymbol{\delta}_J \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{T} & & & \\ & \mathbf{T} & & \\ & & \mathbf{T} & \\ & & & \mathbf{T} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \boldsymbol{\Delta}_I \\ \boldsymbol{\Delta}_J \end{Bmatrix} = \mathbf{T}_4 \boldsymbol{\Delta} \tag{7.108}$$

donde la matriz $\mathbf{T}_4$ permite girar los doce grados de libertad del elemento. Las seis fuerzas para cada nudo, en el sistema general, son (figura 7.27.b):

$$\begin{aligned} \mathbf{F}_I &= \{F_{IX} \quad F_{IY} \quad F_{IZ} \quad M_{IX} \quad M_{IY} \quad M_{IZ}\}^T \\ \mathbf{F}_J &= \{F_{JX} \quad F_{JY} \quad F_{JZ} \quad M_{JX} \quad M_{JY} \quad M_{JZ}\}^T \end{aligned} \tag{7.109}$$

Estas fuerzas se proyectan de la misma forma que las deformaciones

$$\mathbf{P} = \begin{Bmatrix} \mathbf{P}_I \\ \mathbf{P}_J \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{T} & & & \\ & \mathbf{T} & & \\ & & \mathbf{T} & \\ & & & \mathbf{T} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \mathbf{F}_I \\ \mathbf{F}_J \end{Bmatrix} = \mathbf{T}_4 \mathbf{F} \tag{7.110}$$

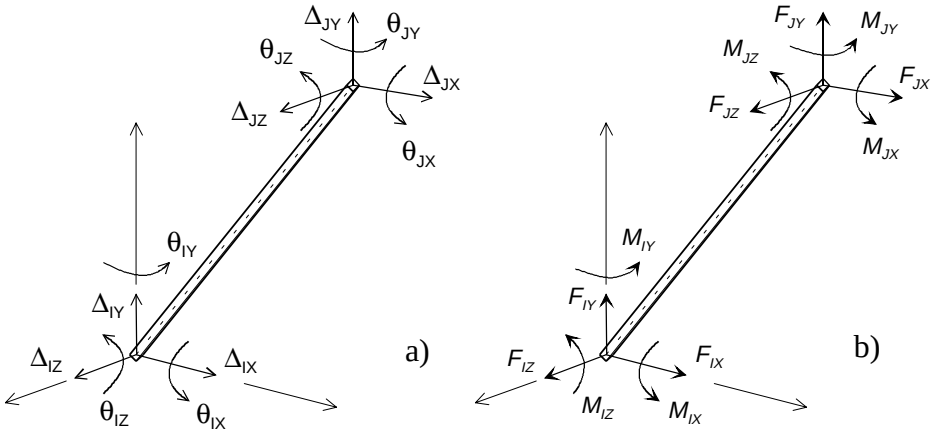


Figura 7.27

La ecuación de equilibrio proyectada sobre el sistema global es:

$$\mathbf{F} = \mathbf{K}_G \boldsymbol{\Delta} \tag{7.111}$$

$$\mathbf{K}_G = \mathbf{T}_4^T \mathbf{K}_L \mathbf{T}_4 \tag{7.112}$$

La matriz de rigidez en coordenadas generales está formada nuevamente por cuatro submatrices de tamaño 6x6, que son la proyección al sistema general de cada una de las matrices correspondientes en el sistema local.

$$\begin{Bmatrix} \mathbf{F}_I \\ \mathbf{F}_J \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{K}_{GII} & \mathbf{K}_{GIJ} \\ \mathbf{K}_{GJI} & \mathbf{K}_{GJJ} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \boldsymbol{\Delta}_I \\ \boldsymbol{\Delta}_J \end{Bmatrix} \tag{7.113}$$

$$\mathbf{K}_{Gij} = \mathbf{T}_2^T \mathbf{K}_{Lij} \mathbf{T}_2 \tag{7.114}$$

siendo $\mathbf{T}_2$ la agrupación diagonal de dos matrices $\mathbf{T}$, que permite transformar las seis fuerzas y momentos (o los seis desplazamientos y giros) de un solo nudo.

7.9 VIGA PLANA ARTICULADA EMPOTRADA

En este elemento existe una articulación en el nudo I, y por lo tanto no puede absorber momento flector en él. Al imponer la condición de momento nulo $M_I = 0$, se debe prescindir de un grado de libertad, que es precisamente el giro en el nudo I.

Para obtener la ecuación de equilibrio de este elemento se parte de la del elemento viga plana, que tiene dos giros y dos momentos flectores en sus extremos (ecuación (7.58)). En ella, la fila 3 corresponde a la ecuación de equilibrio del momento en el nudo I, que ahora es cero:

$$M_I = \frac{6EI}{L^2}\delta_{IY} + \frac{4EI}{L}\theta_I - \frac{6EI}{L^2}\delta_{JY} + \frac{2EI}{L}\theta_J = 0 \tag{7.115}$$

De donde se despeja el giro θ_I en función de los demás grados de libertad:

$$\theta_I = \frac{3}{2L}(\delta_{JY} - \delta_{IY}) - \frac{\theta_J}{2} \tag{7.116}$$

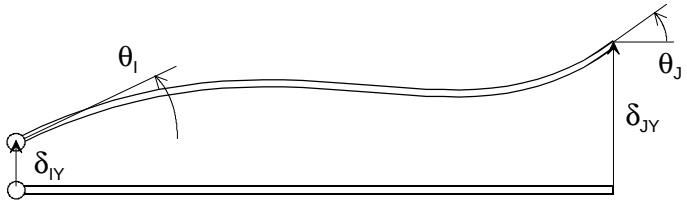


Figura 7.28

El haber introducido la condición de momento nulo permite determinar el valor del giro del nudo I en función de las otras tres deformaciones de la viga. El valor de este giro se sustituye de nuevo en la ecuación de equilibrio inicial, con lo que se obtiene la ecuación del nuevo elemento, que ya incluye el hecho de que $M_I = 0$. Esta ecuación de equilibrio es:

$$\begin{Bmatrix} P_{IX} \\ P_{IY} \\ M_I \\ P_{JX} \\ P_{JY} \\ M_J \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{EA}{L} & 0 & 0 & -\frac{EA}{L} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{3EI}{L^3} & 0 & 0 & -\frac{3EI}{L^3} & \frac{3EI}{L^2} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -\frac{EA}{L} & 0 & 0 & \frac{EA}{L} & 0 & 0 \\ 0 & -\frac{3EI}{L^3} & 0 & 0 & \frac{3EI}{L^3} & -\frac{3EI}{L^2} \\ 0 & \frac{3EI}{L^2} & 0 & 0 & -\frac{3EI}{L^2} & \frac{3EI}{L} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \delta_{IX} \\ \delta_{IY} \\ \theta_I \\ \delta_{JX} \\ \delta_{JY} \\ \theta_J \end{Bmatrix} \tag{7.117}$$

$$\mathbf{P} = \mathbf{K}_L \boldsymbol{\delta} \tag{7.118}$$

Se observa que la fila y la columna correspondientes al giro en I son nulas, lo cual quiere decir que:

- El momento en el nudo I es siempre cero, para cualquier valor de los otros cinco grados de libertad.
- El valor del grado de libertad θ_I, de giro en el nudo I, no afecta a las fuerzas en los extremos del elemento.

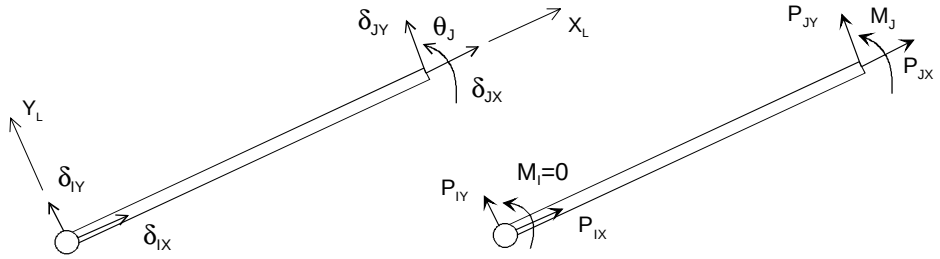


Figura 7.29

Con el proceso anterior ha desaparecido el giro I de entre los grados de libertad del elemento, que ahora pasa a tener cinco en lugar de los seis iniciales. Sin embargo es habitual mantener el giro I entre los grados de libertad del elemento, aunque realmente no intervenga en su ecuación de equilibrio, por compatibilidad con los restantes elementos.

7.9.1 Matriz de rigidez en el sistema general

La ecuación de equilibrio en el sistema general se obtiene por rotación de la ecuación (7.117) obtenida en el sistema local. Para ello se emplea la misma matriz de transformación de coordenadas empleada para el elemento viga plana (ecuación (7.61)). Los grados de libertad en el sistema general se muestran en la figura 7.30.

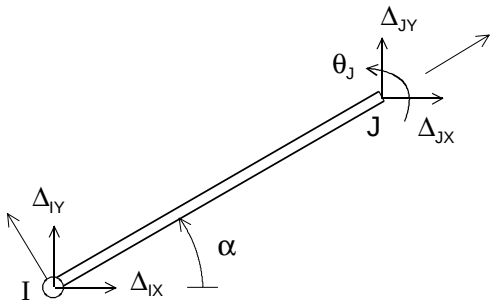


Figura 7.30

Efectuando el mismo proceso que para los elementos anteriores, se obtiene la ecuación de equilibrio en el sistema general:

$$\mathbf{F} = \mathbf{K}_G \boldsymbol{\Delta} \qquad\qquad \mathbf{K}_G = \mathbf{T}_2^T \mathbf{K}_L \mathbf{T}_2 \tag{7.119}$$

siendo la matriz de rigidez del elemento en el sistema general:

$$\mathbf{K}_G = E\left[\begin{array}{ccc|ccc}
\frac{Ac^2}{L}+\frac{3Is^2}{L^3} & \frac{Asc}{L}-\frac{3Isc}{L^3} & 0 & -\frac{Ac^2}{L}-\frac{3Is^2}{L^3} & -\frac{Asc}{L}+\frac{3Isc}{L^3} & -\frac{3Is}{L^2} \\
\frac{Asc}{L}-\frac{3Isc}{L^3} & \frac{As^2}{L}+\frac{3Ic^2}{L^3} & 0 & -\frac{Asc}{L}+\frac{3Isc}{L^3} & -\frac{As^2}{L}-\frac{3Ic^2}{L^3} & \frac{3Ic}{L^2} \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
\hline
-\frac{Ac^2}{L}-\frac{3Is^2}{L^3} & -\frac{Asc}{L}+\frac{3Isc}{L^3} & 0 & \frac{Ac^2}{L}+\frac{3Is^2}{L^3} & \frac{Asc}{L}-\frac{3Isc}{L^3} & \frac{3Is}{L^2} \\
-\frac{Asc}{L}+\frac{3Isc}{L^3} & -\frac{As^2}{L}-\frac{3Ic^2}{L^3} & 0 & \frac{Asc}{L}-\frac{3Isc}{L^3} & \frac{As^2}{L}+\frac{3Ic^2}{L^3} & -\frac{3Ic}{L^2} \\
-\frac{3Is}{L^2} & \frac{3Ic}{L^2} & 0 & \frac{3Is}{L^2} & -\frac{3Ic}{L^2} & \frac{3I}{L}
\end{array}\right] \tag{7.120}$$

Viga horizontal

En este caso la ecuación de equilibrio en el sistema general es la misma que en el sistema local (figura 7.31).

$$\begin{Bmatrix} F_{IX} \\ F_{IY} \\ M_I \\ \hline F_{JX} \\ F_{JY} \\ M_J \end{Bmatrix} = \left[\begin{array}{ccc|ccc} \frac{EA}{L} & 0 & 0 & -\frac{EA}{L} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{3EI}{L^3} & 0 & 0 & -\frac{3EI}{L^3} & \frac{3EI}{L^2} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \hline -\frac{EA}{L} & 0 & 0 & \frac{EA}{L} & 0 & 0 \\ 0 & -\frac{3EI}{L^3} & 0 & 0 & \frac{3EI}{L^3} & -\frac{3EI}{L^2} \\ 0 & \frac{3EI}{L^2} & 0 & 0 & -\frac{3EI}{L^2} & \frac{3EI}{L} \end{array}\right] \begin{Bmatrix} \Delta_{IX} \\ \Delta_{IY} \\ \theta_I \\ \hline \Delta_{JX} \\ \Delta_{JY} \\ \theta_J \end{Bmatrix} \tag{7.121}$$

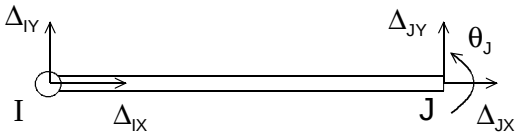


Figura 7.31

Viga vertical

En este caso α=90º (figura 7.32) y la ecuación de equilibrio queda:

$$\begin{Bmatrix} F_{IX} \\ F_{IY} \\ M_I \\ \hline F_{JX} \\ F_{JY} \\ M_J \end{Bmatrix} = \left[\begin{array}{ccc|ccc} \frac{3EI}{L^3} & 0 & 0 & -\frac{3EI}{L^3} & 0 & -\frac{3EI}{L^2} \\ 0 & \frac{EA}{L} & 0 & 0 & -\frac{EA}{L} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \hline -\frac{3EI}{L^3} & 0 & 0 & \frac{3EI}{L^3} & 0 & \frac{3EI}{L^2} \\ 0 & -\frac{EA}{L} & 0 & 0 & \frac{EA}{L} & 0 \\ -\frac{3EI}{L^2} & 0 & 0 & \frac{3EI}{L^2} & 0 & \frac{3EI}{L} \end{array}\right] \begin{Bmatrix} \Delta_{IX} \\ \Delta_{IY} \\ \theta_I \\ \hline \Delta_{JX} \\ \Delta_{JY} \\ \theta_J \end{Bmatrix} \tag{7.122}$$

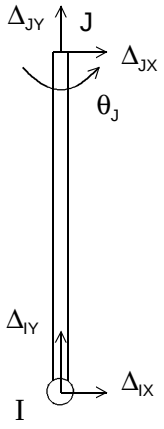


Figura 7.32

7.10 VIGA PLANA EMPOTRADA ARTICULADA

En este elemento existe una articulación en el nudo J, y por lo tanto se cumple que $M_J = 0$. Al imponer esta condición de momento nulo se debe prescindir de un grado de libertad, que es el giro en el nudo J. El proceso para obtener la ecuación de equilibrio de este elemento sigue los mismos pasos que para el elemento anterior.

Se parte de la ecuación de equilibrio del elemento viga plana, que dos tiene giros y absorbe momento flector en sus dos extremos (ecuación (7.58)). En ella, la fila 6 corresponde a la ecuación de equilibrio del momento en el nudo J, que ahora es cero:

$$M_J = \frac{6EI}{L^2}\delta_{IY} + \frac{2EI}{L}\theta_I - \frac{6EI}{L^2}\delta_{JY} + \frac{4EI}{L}\theta_J = 0 \qquad (7.123)$$

De ella se despeja el giro θ_J en función de los demás:

$$\theta_J = \frac{3}{2L}(\delta_{JY} - \delta_{IY}) - \frac{\theta_I}{2} \qquad (7.124)$$

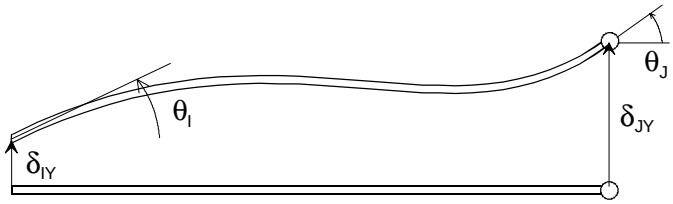


Figura 7.33

El haber introducido la condición de momento nulo ha permitido determinar el valor del giro del nudo J en función de las otras tres deformaciones de la viga. El valor de este giro se sustituye de nuevo en la ecuación de equilibrio inicial, con lo que se obtiene la ecuación del nuevo elemento, que ya incluye el hecho de que $M_J = 0$, y es:

$$\begin{Bmatrix} P_{IX} \\ P_{IY} \\ M_I \\ P_{JX} \\ P_{JY} \\ M_J \end{Bmatrix} = \left[\begin{array}{ccc|ccc} \frac{EA}{L} & 0 & 0 & -\frac{EA}{L} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{3EI}{L^3} & \frac{3EI}{L^2} & 0 & -\frac{3EI}{L^3} & 0 \\ 0 & \frac{3EI}{L^2} & \frac{3EI}{L} & 0 & -\frac{3EI}{L^2} & 0 \\ \hline -\frac{EA}{L} & 0 & 0 & \frac{EA}{L} & 0 & 0 \\ 0 & -\frac{3EI}{L^3} & -\frac{3EI}{L^2} & 0 & \frac{3EI}{L^3} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right] \begin{Bmatrix} \delta_{IX} \\ \delta_{IY} \\ \theta_I \\ \delta_{JX} \\ \delta_{JY} \\ \theta_J \end{Bmatrix} \tag{7.125}$$

La fila y la columna correspondientes al giro en J son nulas: esto quiere decir que el momento en el nudo J es siempre cero, para cualquier valor de los otros cinco grados de libertad, y que el giro θ_J en el nudo J no afecta a las fuerzas en los extremos del elemento.

Con este proceso ha desaparecido el giro J de entre los grados de libertad del elemento, que ahora pasa a tener cinco en lugar de los seis iniciales. No obstante se mantiene el giro J entre sus grados de libertad, aunque realmente no intervenga en su ecuación de equilibrio, por compatibilidad con los restantes elementos.

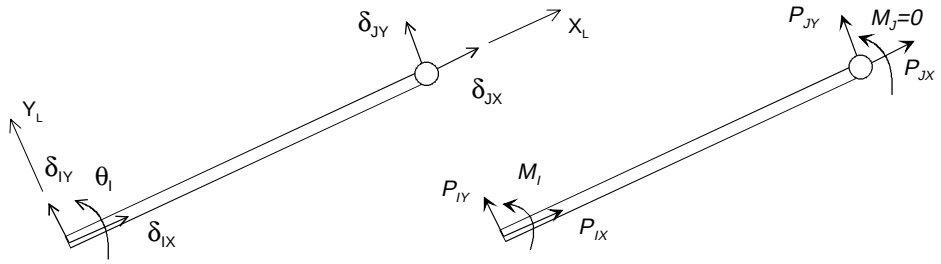


Figura 7.34

7.10.1 Matriz de rigidez en el sistema general

La ecuación de equilibrio en el sistema general se obtiene por rotación de la ecuación obtenida en el sistema local, utilizando la matriz de transformación de coordenadas empleada para el elemento viga plana, definida por la ecuación (7.61). Efectuando el mismo proceso que para dicho elemento, se obtiene la ecuación de equilibrio en el sistema general:

$$\mathbf{F} = \mathbf{K}_G \boldsymbol{\Delta} \qquad\qquad \mathbf{K}_G = \mathbf{T}_2^T \mathbf{K}_L \mathbf{T}_2 \tag{7.126}$$

donde la matriz de rigidez en el sistema general es:

$$\mathbf{K}_G = E\left[\begin{array}{ccc|ccc|c} \frac{Ac^2}{L}+\frac{3Is^2}{L^3} & \frac{Asc}{L}-\frac{3Isc}{L^3} & -\frac{3Is}{L^2} & -\frac{Ac^2}{L}-\frac{3Is^2}{L^3} & -\frac{Asc}{L}+\frac{3Isc}{L^3} & 0 \\ \frac{Asc}{L}-\frac{3Isc}{L^3} & \frac{As^2}{L}+\frac{3Ic^2}{L^3} & \frac{3Ic}{L^2} & -\frac{Asc}{L}+\frac{3Isc}{L^3} & -\frac{As^2}{L}-\frac{3Ic^2}{L^3} & 0 \\ -\frac{3Is}{L^2} & \frac{3Ic}{L^2} & \frac{3I}{L} & \frac{3Is}{L^2} & -\frac{3Ic}{L^2} & 0 \\ \hline -\frac{Ac^2}{L}-\frac{3Is^2}{L^3} & -\frac{Asc}{L}+\frac{3Isc}{L^3} & \frac{3Is}{L^2} & \frac{Ac^2}{L}+\frac{3Is^2}{L^3} & \frac{Asc}{L}-\frac{3Isc}{L^3} & 0 \\ -\frac{Asc}{L}+\frac{3Isc}{L^3} & -\frac{As^2}{L}-\frac{3Ic^2}{L^3} & -\frac{3Ic}{L^2} & \frac{Asc}{L}-\frac{3Isc}{L^3} & \frac{As^2}{L}+\frac{3Ic^2}{L^3} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right] \tag{7.127}$$

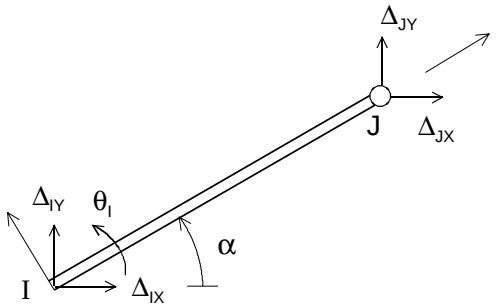


Figura 7.35

Viga horizontal

La ecuación de equilibrio en el sistema general es la misma que en el sistema local.

$$\left\{\begin{array}{c} F_{IX} \\ F_{IY} \\ M_I \\ F_{JX} \\ F_{JY} \\ M_J \end{array}\right\} = \left[\begin{array}{ccc|ccc} \frac{EA}{L} & 0 & 0 & -\frac{EA}{L} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{3EI}{L^3} & \frac{3EI}{L^2} & 0 & -\frac{3EI}{L^3} & 0 \\ 0 & \frac{3EI}{L^2} & \frac{3EI}{L} & 0 & -\frac{3EI}{L^2} & 0 \\ \hline -\frac{EA}{L} & 0 & 0 & \frac{EA}{L} & 0 & 0 \\ 0 & -\frac{3EI}{L^3} & -\frac{3EI}{L^2} & 0 & \frac{3EI}{L^3} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right] \left\{\begin{array}{c} \Delta_{IX} \\ \Delta_{IY} \\ \theta_I \\ \Delta_{JX} \\ \Delta_{JY} \\ \theta_J \end{array}\right\} \tag{7.128}$$

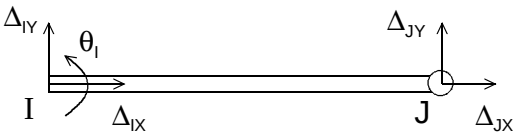


Figura 7.36

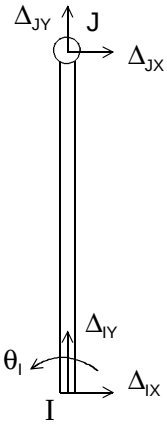


Figura 7.37

Viga vertical

En este caso α=90º (figura 7.37) y la ecuación de equilibrio queda:

$$\begin{Bmatrix} F_{IX} \\ F_{IY} \\ M_I \\ \hline F_{JX} \\ F_{JY} \\ M_J \end{Bmatrix} = \left[\begin{array}{ccc|ccc} \frac{3EI}{L^3} & 0 & \frac{-3EI}{L^2} & \frac{-3EI}{L^3} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{EA}{L} & 0 & 0 & -\frac{EA}{L} & 0 \\ \frac{-3EI}{L^2} & 0 & \frac{3EI}{L} & \frac{3EI}{L^2} & 0 & 0 \\ \hline \frac{-3EI}{L^3} & 0 & \frac{3EI}{L^2} & \frac{3EI}{L^3} & 0 & 0 \\ 0 & -\frac{EA}{L} & 0 & 0 & \frac{EA}{L} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right] \begin{Bmatrix} \Delta_{IX} \\ \Delta_{IY} \\ \theta_I \\ \hline \Delta_{JX} \\ \Delta_{JY} \\ \theta_J \end{Bmatrix} \tag{7.129}$$

7.11 ELEMENTOS ESPACIALES CON ARTICULACIONES

El elemento viga espacial permite múltiples posibilidades de inclusión de articulaciones en sus nudos extremos: la figura 7.38 muestra algunos ejemplos. Es posible incluso eliminar varios grados de libertad (p.e. los giros según Y_L y Z_L). Para todos ellos la matriz de rigidez correspondiente se obtiene siguiendo la misma técnica que para los elementos planos.

Un método más sistemático y general para eliminar varios grados de libertad de un elemento es la técnica de condensación de grados de libertad que se explica en el capítulo 12.

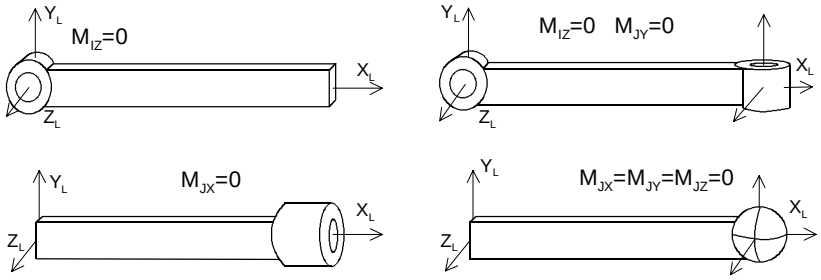


Figura 7.38

7.12 MUELLES DE ESFUERZO AXIAL

Los muelles de esfuerzo axial se comportan exactamente igual que los elementos de celosía biarticulados: sólo pueden absorber fuerza axial y sólo la deformación axial es significativa. El comportamiento del muelle viene caracterizado por su rigidez *K*, que corresponde al factor *EA/L* de las barras biarticuladas.

Se adopta un sistema de ejes local tal que el eje X_L está en la dirección del muelle (figura 7.39). La ecuación constitutiva del muelle es:

$$P_{IX} = K(\delta_{IX} - \delta_{JX}) \qquad P_{JX} = K(\delta_{JX} - \delta_{IX}) \tag{7.130}$$

Agrupando estas dos ecuaciones, y añadiendo los grados de libertad en la dirección Y_L y las fuerzas correspondientes, que no producen ningún efecto, se obtiene la ecuación de equilibrio en el sistema local:

$$\begin{Bmatrix} P_{IX} \\ P_{IY} \\ P_{JX} \\ P_{JY} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} K & 0 & -K & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ -K & 0 & K & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \delta_{IX} \\ \delta_{IY} \\ \delta_{JX} \\ \delta_{JY} \end{Bmatrix} \qquad \mathbf{P} = \mathbf{K}_L \boldsymbol{\delta} \tag{7.131}$$

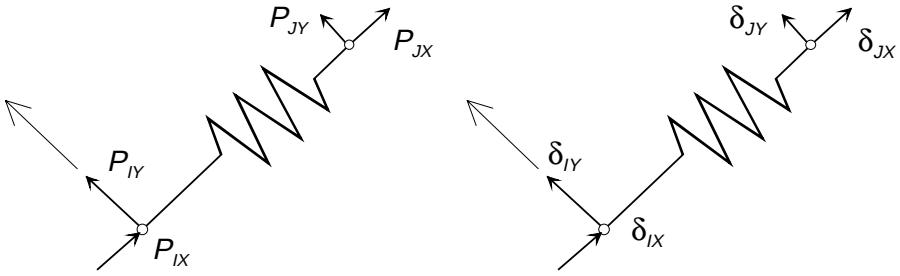


Figura 7.39

La matriz de rotación al sistema general es (figura 7.40):

$$\begin{Bmatrix}\delta_{IX}\\ \delta_{IY}\end{Bmatrix}=\begin{bmatrix}\cos\alpha & \sin\alpha\\ -\sin\alpha & \cos\alpha\end{bmatrix}\begin{Bmatrix}\Delta_{IX}\\ \Delta_{IY}\end{Bmatrix} \tag{7.132}$$

$$\boldsymbol{\delta}_I=\mathbf{T}\boldsymbol{\Delta}_I \tag{7.133}$$

siendo $\boldsymbol{\Delta}_I$ el vector de deformaciones del nudo I en el sistema general. Para la totalidad de las deformaciones del muelle se puede poner:

$$\boldsymbol{\delta}=\begin{Bmatrix}\boldsymbol{\delta}_I\\ \boldsymbol{\delta}_J\end{Bmatrix}=\begin{Bmatrix}\delta_{IX}\\ \delta_{IY}\\ \delta_{JX}\\ \delta_{JY}\end{Bmatrix}=\begin{bmatrix}\mathbf{T} & 0\\ 0 & \mathbf{T}\end{bmatrix}\begin{Bmatrix}\Delta_{IX}\\ \Delta_{IY}\\ \Delta_{JX}\\ \Delta_{JY}\end{Bmatrix}=\mathbf{T}_2\boldsymbol{\Delta} \tag{7.134}$$

donde $\mathbf{T}_2$ es una matriz ortogonal 4x4, obtenida agrupando dos veces la matriz $\mathbf{T}$ sobre la diagonal. La misma relación se cumple para las fuerzas:

$$\mathbf{P}=\mathbf{T}_2\mathbf{F} \tag{7.135}$$

siendo $\mathbf{F}$ el vector de todas las fuerzas sobre el muelle, referido al sistema de ejes general:

$$\mathbf{F}=\begin{Bmatrix}\mathbf{F}_I\\ \mathbf{F}_J\end{Bmatrix}=\begin{Bmatrix}F_{IX}\\ F_{IY}\\ F_{JX}\\ F_{JY}\end{Bmatrix} \tag{7.136}$$

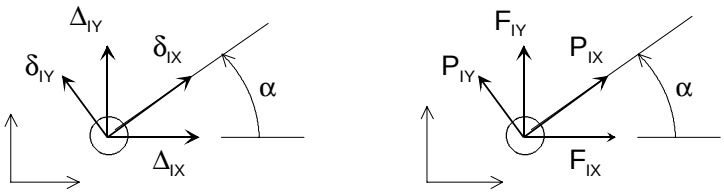


Figura 7.40

La ecuación de equilibrio proyectada sobre el sistema de ejes general es (figura 7.41):

$$\mathbf{F}=\mathbf{T}_2^T\mathbf{K}_L\mathbf{T}_2\boldsymbol{\Delta}=\mathbf{K}_G\boldsymbol{\Delta} \tag{7.137}$$

$$\begin{Bmatrix}F_{IX}\\ F_{IY}\\ F_{JX}\\ F_{JY}\end{Bmatrix}=K\begin{bmatrix}c^2 & sc & -c^2 & -sc\\ sc & s^2 & -sc & -s^2\\ -c^2 & -sc & c^2 & sc\\ -sc & -s^2 & sc & s^2\end{bmatrix}\begin{Bmatrix}\Delta_{IX}\\ \Delta_{IY}\\ \Delta_{JX}\\ \Delta_{JY}\end{Bmatrix} \tag{7.138}$$

Donde se ha definido la matriz de rigidez $\mathbf{K}_G$ del muelle referida al sistema general y se han empleado los dos cosenos directores del eje X_L: $c=\cos\alpha$, $s=\sin\alpha$.

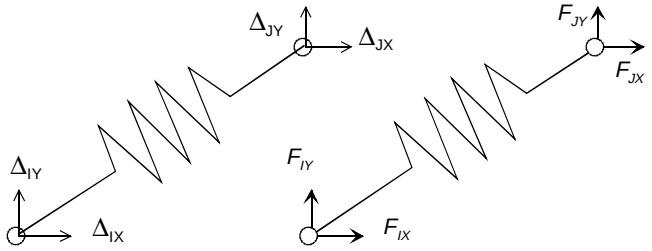


Figura 7.41

7.13 MUELLES AL GIRO

Los muelles al giro acoplan dos grados de libertad de rotación, aplicando sobre ellos dos momentos iguales y de sentido contrario. Sólo transmiten este momento, y no afectan para nada a la transmisión de fuerzas, ni a los grados de libertad de desplazamiento del nudo: las barras unidas por el muelle al giro tienen los mismos desplazamientos y por lo tanto hay una perfecta transmisión de fuerzas entre ellas. Únicamente los giros son distintos y el muelle aplica un momento proporcional a su diferencia.

La materialización habitual de estos muelles es mediante un resorte de espiral plana, o una barra de torsión de longitud despreciable, a fin de que las dos barras unidas por el muelle estén en contacto, y haya transmisión de fuerzas. En ambos casos los vectores giro son coincidentes en dirección. La figura 7.42 muestra la disposición típica.

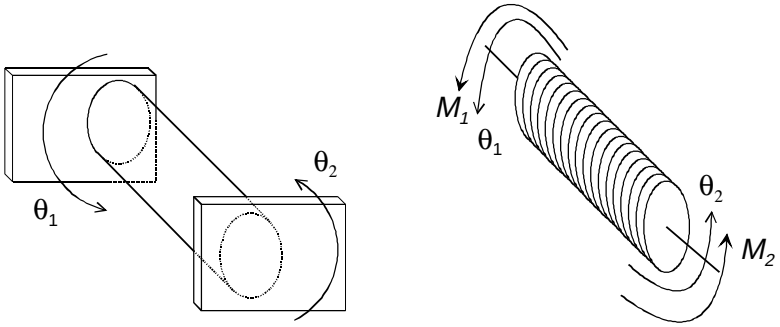


Figura 7.42

Para el caso de estructuras planas situadas en el plano XY, estos muelles acoplan los giros Z, y su representación simplificada habitual, en el plano de la estructura, se muestra en la figura 7.43.

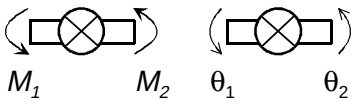


Figura 7.43

La ecuación constitutiva, sin considerar los esfuerzos de pretensión inicial, es:

$$M_1 = K(\theta_1 - \theta_2) \qquad M_2 = K(\theta_2 - \theta_1) \tag{7.139}$$

con lo que la ecuación de equilibrio es:

$$\begin{Bmatrix} M_1 \\ M_2 \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} K & -K \\ -K & K \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \theta_1 \\ \theta_2 \end{Bmatrix} \tag{7.140}$$

Nótese que esta ecuación acopla dos giros cualesquiera, con cualquier orientación espacial, por lo que no es estrictamente necesario que ambos giros tengan la misma orientación. En todo caso la materialización práctica de un muelle al giro que tenga sus dos giros extremos no paralelos no es fácil.

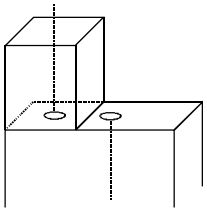
7.14 ELEMENTOS DESCENTRADOS

En el cálculo de las propiedades de rigidez de los elementos se ha empleado hasta ahora un sistema de ejes local cuyo eje X_L pasa por el centro de gravedad de la sección de la viga, y se ha supuesto que dicho eje X_L pasa también por el punto que define el nudo. Dicho de otra forma el eje centroidal del elemento coincide con la línea que une los dos nudos de la estructura donde se conecta el elemento. En esta situación las deformaciones del nudo coinciden con las que hay en el extremo de la viga.

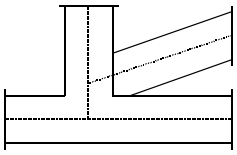
Sin embargo son relativamente frecuentes en la práctica situaciones en las que eso no ocurre, es decir que el eje centroidal X_L del elemento no coincide con la línea que une los nudos donde se conecta el elemento. Se dice en este caso que el elemento está descentrado con respecto a la línea de los nudos.

Ejemplos

El descentramiento se produce con frecuencia cuando los elementos unidos en el nudo son de tamaño muy diferente, y por necesidades constructivas se debe enrasar una de sus caras, como en la figura.



En ocasiones, por motivos estéticos o funcionales, se requiere precisamente que un elemento esté descentrado con respecto al nudo.



En esta situación existe un diferencia entre los puntos donde se calcula la rigidez del elemento, que son sus extremos, y los puntos donde se debe ensamblar dicha rigidez con la de los restantes elementos, que son los nudos de la estructura.

Se denominan I, J a los puntos extremos del elemento (a fin de respetar la misma notación empleada en todos los elementos ya desarrollados) y A, B a los dos nudos donde se conecta la viga. La distancia entre los puntos I y A define el descentramiento del nudo I respecto al nudo A, y la distancia entre J y B el descentramiento del nudo J, que puede ser distinto del anterior. Estos descentramientos se cuantifican mediante dos vectores $\mathbf{d}_I$ y $\mathbf{d}_J$

que definen la posición de los extremos de la viga I, J respecto de los nudos A y B (figura 7.44).

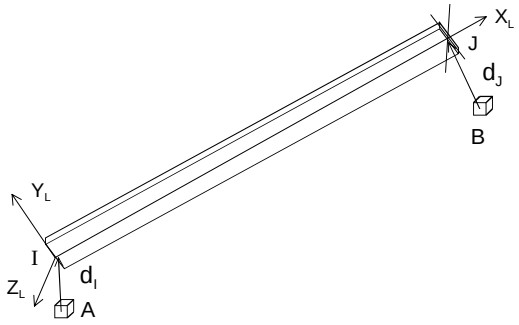


Figura 7.44

La ecuación de equilibrio de cualquier elemento se puede expresar siempre en su sistema de ejes locales como:

$$\begin{Bmatrix} \mathbf{P}_I \\ \mathbf{P}_J \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{K}_{LII} & \mathbf{K}_{LIJ} \\ \mathbf{K}_{LJI} & \mathbf{K}_{LJJ} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \boldsymbol{\delta}_I \\ \boldsymbol{\delta}_J \end{Bmatrix} \tag{7.141}$$

donde el tamaño de los distintos vectores depende de la naturaleza del elemento. En principio se supondrá un elemento general en el espacio con lo que la ecuación anterior es de tamaño 12x12 y los vectores de fuerzas y deformaciones en ambos extremos de la viga son de tamaño 6.

Traslación de fuerzas

Para el desarrollo que sigue resulta conveniente separar los vectores de esfuerzos en el extremo del elemento en sus componentes de fuerza y momento. Así, para el nudo I:

$$\mathbf{P}_I = \begin{Bmatrix} \mathbf{P}_{FI} \\ \mathbf{P}_{MI} \end{Bmatrix} \tag{7.142}$$

siendo $\mathbf{P}_{FI}$ el vector con las fuerzas que actúan sobre el nudo I del elemento, y $\mathbf{P}_{MI}$ el vector con los momentos que actúan sobre dicho nudo. Estas fuerzas y momentos se pueden trasladar al nudo de la estructura (punto A) imponiendo el equilibrio estático del segmento AI, mediante las ecuaciones (figura 7.45):

$$\mathbf{P}_{FA} = \mathbf{P}_{FI} \qquad \mathbf{P}_{MA} = \mathbf{P}_{MI} + \tilde{\mathbf{d}}_I \mathbf{P}_{FI} \tag{7.143}$$

siendo:

- ◊ $\mathbf{P}_{FA}$ y $\mathbf{P}_{MA}$ las fuerzas y momentos aplicados sobre la barra, pero actuantes en A.
- ◊ $\tilde{\mathbf{d}}_I$ la matriz antisimétrica asociada al producto vectorial por el vector $\mathbf{d}_I$.

$$\tilde{\mathbf{d}}_I = \begin{bmatrix} 0 & -z_I & y_I \\ z_I & 0 & -x_I \\ -y_I & x_I & 0 \end{bmatrix} \tag{7.144}$$

◊ $\mathbf{d}_I$ el vector que define la posición del punto I respecto al punto A, medido en el sistema de ejes local a la barra. Corresponde a la medida del descentramiento del punto I de la barra respecto del nudo A.

$$\mathbf{d}_I = \begin{Bmatrix} x_I \\ y_I \\ z_I \end{Bmatrix} \tag{7.145}$$

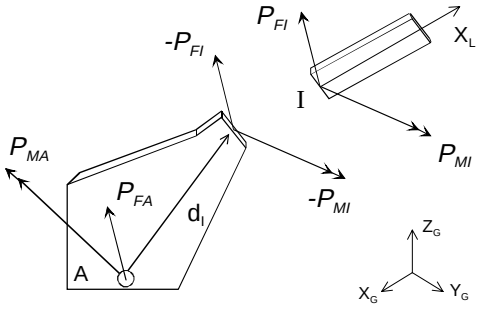


Figura 7.45

Las expresiones (7.143) pueden agruparse en una única:

$$\begin{Bmatrix} \mathbf{P}_{FA} \\ \mathbf{P}_{MA} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{I} & 0 \\ \tilde{\mathbf{d}}_I & \mathbf{I} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \mathbf{P}_{FI} \\ \mathbf{P}_{MI} \end{Bmatrix} \tag{7.146}$$

$$\mathbf{P}_A = \mathbf{T}_{EI}\mathbf{P}_I \tag{7.147}$$

donde $\mathbf{T}_{EI}$ es una matriz de traslación de esfuerzos (fuerzas y momentos) del punto I al nudo A. Si ambos puntos coinciden, esta matriz es la identidad. La relación inversa es:

$$\begin{Bmatrix} \mathbf{P}_{FI} \\ \mathbf{P}_{MI} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{I} & 0 \\ -\tilde{\mathbf{d}}_I & \mathbf{I} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \mathbf{P}_{FA} \\ \mathbf{P}_{MA} \end{Bmatrix} \tag{7.148}$$

$$\mathbf{P}_I = \mathbf{T}_{EI}^{-1}\mathbf{P}_A \tag{7.149}$$

Traslación de deformaciones

Al igual que para las fuerzas, resulta conveniente separar los vectores de deformaciones de los extremos de la barra en sus componentes de desplazamiento y giro. Así, para el nudo I:

$$\boldsymbol{\delta}_I = \begin{Bmatrix} \boldsymbol{\delta}_{DI} \\ \boldsymbol{\delta}_{GI} \end{Bmatrix} \tag{7.150}$$

siendo $\boldsymbol{\delta}_{DI}$ el vector con los desplazamientos del nudo I del elemento y $\boldsymbol{\delta}_{GI}$ el vector con los giros del nudo I del elemento. Estas deformaciones y giros se pueden trasladar al nudo A de la estructura imponiendo la compatibilidad geométrica del segmento IA, suponiendo que es infinitamente rígido, lo cual es admisible si el descentramiento no es excesivamente grande:

$$\boldsymbol{\delta}_{GA} = \boldsymbol{\delta}_{GI} \qquad \boldsymbol{\delta}_{DA} = \boldsymbol{\delta}_{DI} + \tilde{\boldsymbol{\delta}}_{GI}(-\mathbf{d}_I) = \boldsymbol{\delta}_{DI} + \tilde{\mathbf{d}}_I\boldsymbol{\delta}_{GI} \tag{7.151}$$

siendo:

- ◊ $\boldsymbol{\delta}_{DA}$ y $\boldsymbol{\delta}_{GA}$ los desplazamientos y giros del punto A.
- ◊ $\tilde{\boldsymbol{\delta}}_{GI}$ la matriz antisimétrica asociada al producto vectorial por el vector $\boldsymbol{\delta}_{GI}$ de rotaciones del nudo I.
- ◊ $\tilde{\mathbf{d}}_I$ la matriz antisimétrica asociada al producto vectorial por el vector $\mathbf{d}_I$.

Las expresiones anteriores pueden agruparse en una única:

$$\begin{Bmatrix}\boldsymbol{\delta}_{DA}\\ \boldsymbol{\delta}_{GA}\end{Bmatrix}=\begin{bmatrix}\mathbf{I} & \tilde{\mathbf{d}}_I\\ \mathbf{0} & \mathbf{I}\end{bmatrix}\begin{Bmatrix}\boldsymbol{\delta}_{DI}\\ \boldsymbol{\delta}_{GI}\end{Bmatrix} \tag{7.152}$$

$$\boldsymbol{\delta}_A=\mathbf{T}_{DI}\boldsymbol{\delta}_I \tag{7.153}$$

donde $\mathbf{T}_{DI}$ es la matriz de traslación de deformaciones (desplazamientos y giros) del punto I al nudo A. La expresión inversa de la anterior es:

$$\begin{Bmatrix}\boldsymbol{\delta}_{DI}\\ \boldsymbol{\delta}_{GI}\end{Bmatrix}=\begin{bmatrix}\mathbf{I} & -\tilde{\mathbf{d}}_I\\ \mathbf{0} & \mathbf{I}\end{bmatrix}\begin{Bmatrix}\boldsymbol{\delta}_{DA}\\ \boldsymbol{\delta}_{GA}\end{Bmatrix} \tag{7.154}$$

$$\boldsymbol{\delta}_I=\mathbf{T}_{DI}^{-1}\boldsymbol{\delta}_A \tag{7.155}$$

Las matrices de traslación de esfuerzos $\mathbf{T}_E$ y deformaciones $\mathbf{T}_D$ son una traspuesta de la otra:

$$\mathbf{T}_{EI}^{-1}=\mathbf{T}_{DI}^{T} \qquad\qquad \mathbf{T}_{EI}^{T}=\mathbf{T}_{DI}^{-1} \tag{7.156}$$

Para el nudo J existen relaciones análogas.

Ecuaciones de equilibrio referidas a los nudos de la estructura

Para obtener la ecuación de equilibrio de un elemento estructural descentrado, referida a los nudos de la estructura, se parte de la ecuación de equilibrio del elemento en su sistema de coordenadas local (7.141).

Sustituyendo en ella las ecuaciones de traslación de fuerzas (7.149) y deformaciones (7.155) desde los extremos de la barra I, J a los nudos de la estructura A, B, se obtiene:

$$\begin{Bmatrix}\mathbf{P}_A\\ \mathbf{P}_B\end{Bmatrix}=\begin{bmatrix}\mathbf{T}_{EI} & \mathbf{0}\\ \mathbf{0} & \mathbf{T}_{EJ}\end{bmatrix}\begin{bmatrix}\mathbf{K}_{LII} & \mathbf{K}_{LIJ}\\ \mathbf{K}_{LJI} & \mathbf{K}_{LJJ}\end{bmatrix}\begin{bmatrix}\mathbf{T}_{DI}^{-1} & \mathbf{0}\\ \mathbf{0} & \mathbf{T}_{DJ}^{-1}\end{bmatrix}\begin{Bmatrix}\boldsymbol{\delta}_A\\ \boldsymbol{\delta}_B\end{Bmatrix} \tag{7.157}$$

que en forma compacta es:

$$\begin{Bmatrix}\mathbf{P}_A\\ \mathbf{P}_B\end{Bmatrix}=\begin{bmatrix}\mathbf{T}_{EI}\mathbf{K}_{LII}\mathbf{T}_{DI}^{-1} & \mathbf{T}_{EI}\mathbf{K}_{LIJ}\mathbf{T}_{DJ}^{-1}\\ \mathbf{T}_{EJ}\mathbf{K}_{LJI}\mathbf{T}_{DI}^{-1} & \mathbf{T}_{EJ}\mathbf{K}_{LJJ}\mathbf{T}_{DJ}^{-1}\end{bmatrix}\begin{Bmatrix}\boldsymbol{\delta}_A\\ \boldsymbol{\delta}_B\end{Bmatrix} \tag{7.158}$$

Esta ecuación representa el equilibrio de la barra, pero trasladado a los nudos de la estructura A, B y referido todavía al sistema de ejes local de la barra. Se observa que el descentramiento de los elementos respecto de los nudos de la estructura implica un nuevo cambio de ejes en la ecuación de equilibrio del elemento.

La ecuación (7.158) se somete a continuación al proceso de rotación al sistema de ejes general de la estructura ya descrito, para su posterior ensamblaje con el resto de los elementos estructurales.

Caso de estructuras planas

Si la estructura es plana la formulación se simplifica mucho. Para el caso de un pórtico plano, cada nudo tiene dos desplazamientos X, Y y un giro Z, con lo que las matrices de traslación de esfuerzos y deformaciones son:

$$\mathbf{T}_{EI} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ -y_I & x_I & 1 \end{bmatrix} \qquad \mathbf{T}_{DI} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & y_I \\ 0 & 1 & -x_I \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \tag{7.159}$$

7.15 ELEMENTOS CURVOS PLANOS

Estos elementos se estudian bajo la suposición de que su radio de curvatura es muy grande comparado con sus dimensiones transversales, al igual que se hace en el capítulo 6, por lo que no es necesario emplear una teoría especial para piezas curvas. Con esta simplificación la energía acumulada por un elemento de este estilo, cuando se le somete a un esfuerzo axial N y a un momento flector M, es:

$$U = \int \frac{M^2 \mu}{2} ds + \int \frac{N^2 \gamma}{2} ds \tag{7.160}$$

donde $\mu = 1/EI$ es la rigidez a flexión y $\gamma = 1/EA$ es la rigidez a esfuerzo axial. Se ha despreciado la energía debida al esfuerzo cortante.

Para el estudio del elemento se define un sistema de ejes local al mismo, cuyo origen está en el nudo I y cuyo eje X_L va del nudo I al nudo J. La directriz del elemento está definida por una ecuación referida a este sistema de ejes local, del tipo $y=y(x)$, o bien de forma paramétrica como $y=y(t)$, $x=x(t)$, siendo t algún parámetro.

Los grados de libertad del elemento en cada nudo son dos desplazamientos en el plano XY y un giro según el eje Z (figura 7.46). De la misma forma los esfuerzos en los nudos son dos fuerzas y un momento flector. Al ser el elemento curvo, ya no se identifican las fuerzas por separado como el esfuerzo axial y el cortante.

$$\boldsymbol{\delta} = \begin{Bmatrix} \boldsymbol{\delta}_I \\ \boldsymbol{\delta}_J \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \delta_{IX} \\ \delta_{IY} \\ \theta_I \\ \delta_{JX} \\ \delta_{JY} \\ \theta_J \end{Bmatrix} \qquad \mathbf{P} = \begin{Bmatrix} \mathbf{P}_I \\ \mathbf{P}_J \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} P_{IX} \\ P_{IY} \\ M_I \\ P_{JX} \\ P_{JY} \\ M_J \end{Bmatrix} \tag{7.161}$$

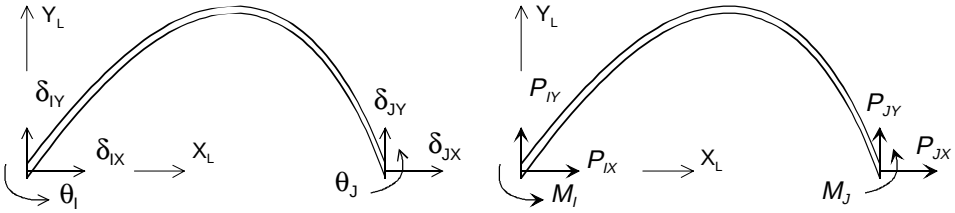


Figura 7.46

7.15.1 Matriz de rigidez en coordenadas locales

Los coeficientes de la matriz de rigidez para un elemento de este tipo se obtienen haciendo uso de su significado físico: las columnas de la matriz de rigidez son las fuerzas que hay que hacer sobre el elemento para imponer desplazamientos unitarios en cada uno de sus grados de libertad. Al ser el elemento hiperestático de grado h=3 y curvo, el cálculo de estas fuerzas es más complejo, y se emplea para ello el método de flexibilidad.

Columna 1

Se impone una valor unitario a δ_{IX}, con lo que las fuerzas que aparecen según los distintos grados de libertad son los coeficientes K_{i1} que forman la primera columna de la matriz de rigidez.

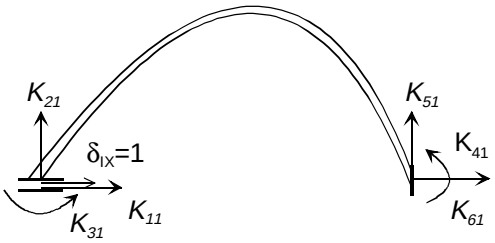


Figura 7.47

Se eligen como incógnitas hiperestáticas las tres reacciones en el nudo I, con lo que su cálculo proporciona directamente tres de los coeficientes de rigidez buscados. El problema queda descompuesto en suma de cuatro casos: un caso 0 donde actúan las fuerzas exteriores, y tres casos *1*, *2* y *3* en los que se aplica un valor unitario a cada una de las incógnitas hiperestáticas. En todos ellos el elemento queda reducido a un voladizo curvo, fijo en el nudo J, como se muestra en la figura 7.48.

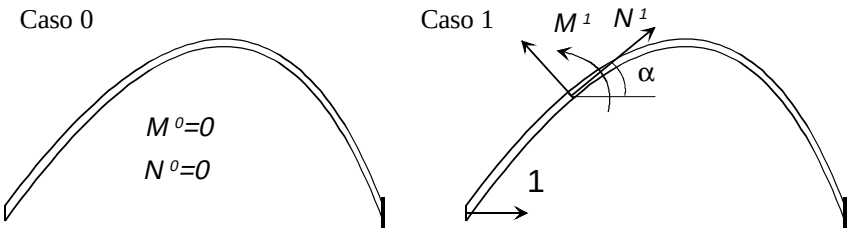


Figura 7.48

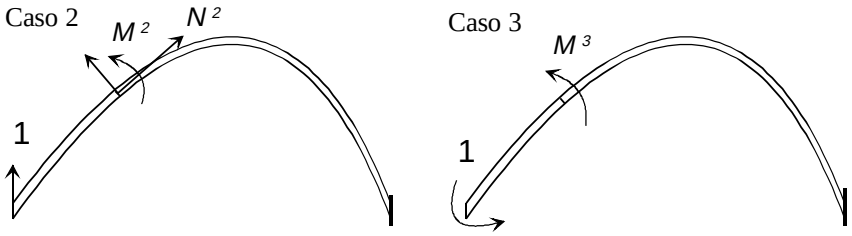


Figura 7.48 (cont.)

◊ Caso *0*. Los esfuerzos son nulos por no haber fuerzas exteriores aplicadas.

◊ Caso *1*. Se aplica un valor unitario de K_{11}, y aparecen un esfuerzo axial N^1, y un momento flector M^1, de valor:

$$M^1 = -y \qquad N^1 = -\cos\alpha \tag{7.162}$$

◊ Caso *2*. Se aplica un valor unitario a K_{12} y aparecen unos esfuerzos de valor:

$$M^2 = x \qquad N^2 = -\sin\alpha \tag{7.163}$$

◊ Caso *3*. Se aplica un valor unitario a K_{13} y aparecen unos esfuerzos de valor:

$$M^3 = -1 \qquad N^3 = 0 \tag{7.164}$$

Las ecuaciones de compatibilidad para cada una de las incógnitas son:

◊ Incógnita K_{11}

$$\frac{\partial U}{\partial K_{11}} = 1 \tag{7.165}$$

$$K_{11}\left(\int M^1 \mu M^1 ds + \int N^1 \gamma N^1 ds\right) + K_{21}\left(\int M^2 \mu M^1 ds + \int N^2 \gamma N^1 ds\right) +$$

$$+ K_{31}\left(\int M^3 \mu M^1 ds + \int N^3 \gamma N^1 ds\right) = 1 \tag{7.166}$$

Las integrales están extendidas a toda la longitud de la pieza curva. Esta expresión se puede poner de forma más compacta en la forma:

$$K_{11} f_{11} + K_{21} f_{12} + K_{31} f_{13} = 1 \tag{7.167}$$

donde se han definido los escalares:

$$f_{ij} = \int M^i \mu M^j ds + \int N^i \gamma N^j ds \tag{7.168}$$

que son los coeficientes de flexibilidad del elemento para el nudo I, y forman su matriz de flexibilidad en dicho nudo.

◊ Incógnita K_{21}. De la misma forma anterior, esta ecuación de compatibilidad se puede poner como

$$K_{11} f_{21} + K_{21} f_{22} + K_{31} f_{23} = 0 \tag{7.169}$$

◊ Incógnita K_{31}. La ecuación resultante en este caso es:

$$K_{11} f_{31} + K_{21} f_{32} + K_{31} f_{33} = 0 \tag{7.170}$$

Estas tres ecuaciones se pueden agrupar de forma matricial como

$$\begin{bmatrix} f_{11} & f_{12} & f_{13} \\ f_{21} & f_{22} & f_{23} \\ f_{31} & f_{32} & f_{33} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} K_{11} \\ K_{21} \\ K_{31} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{Bmatrix} \tag{7.171}$$

$$\mathbf{f}_{II} \mathbf{K}_{I1} = \mathbf{U}_1 \tag{7.172}$$

donde $\mathbf{f}_{II}$ es la matriz de flexibilidad del elemento para el nudo I, cuyos términos vienen definidos por (7.168), y $\mathbf{K}_{I1}$ representa la primera columna de $\mathbf{K}_{II}$. El vector $\mathbf{U}_1$ es todo él nulo, excepto su primer término, que vale 1. El sistema de ecuaciones (7.172) proporciona los tres primeros términos de la primera columna de la matriz de rigidez.

Columna 2

Esta columna se calcula siguiendo el mismo procedimiento que la columna 1, pero ahora el valor unitario de la deformación se aplica en la dirección Y del nudo I. Se eligen también como incógnitas hiperestáticas los tres esfuerzos en el nudo I, que ahora son los coeficientes de rigidez K_{12}, K_{22}, K_{32} asociados a la columna 2.

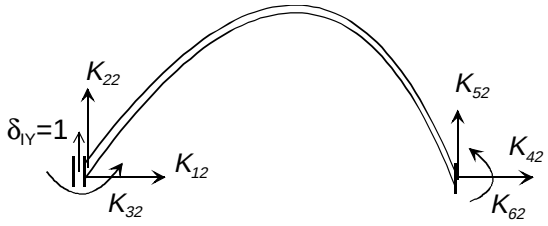


Figura 7.49

◊ Caso *0*: no hay esfuerzos en él, por no haber fuerzas exteriores.

◊ Casos *1*, *2* y *3*: son iguales a los ya calculados para la columna 1.

Las ecuaciones de compatibilidad que se obtienen son muy semejantes a las de la columna 1. De hecho la matriz de coeficientes de las ecuaciones es la misma matriz **f** anterior. La única diferencia es que ahora la ecuación de compatibilidad que está igualada a 1 es la correspondiente a la fuerza vertical K_{22}, es decir:

$$\begin{bmatrix} f_{11} & f_{12} & f_{13} \\ f_{21} & f_{22} & f_{23} \\ f_{31} & f_{32} & f_{33} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} K_{12} \\ K_{22} \\ K_{32} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{Bmatrix} \tag{7.173}$$

$$\mathbf{f}_{II} \mathbf{K}_{I2} = \mathbf{U}_2 \tag{7.174}$$

Por lo tanto sin ningún esfuerzo extra se puede hallar la segunda columna.

Columna 3

Ahora se impone un giro unitario en el nudo I, manteniendo los desplazamientos nulos, y se calculan las fuerzas necesarias para ello, que son los coeficientes de rigidez buscados.

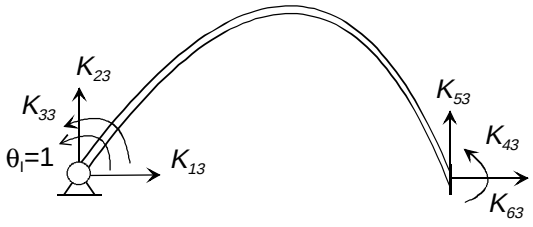


Figura 7.50

El proceso de cálculo es igual que para las dos columnas anteriores, llegándose al sistema de ecuaciones:

$$\begin{bmatrix} f_{11} & f_{12} & f_{13} \\ f_{21} & f_{22} & f_{23} \\ f_{31} & f_{32} & f_{33} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} K_{13} \\ K_{23} \\ K_{33} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{Bmatrix} \tag{7.175}$$

$$\mathbf{f}_{II}\mathbf{K}_{I3} = \mathbf{U}_3 \tag{7.176}$$

Coeficientes de rigidez

Agrupando los tres sistemas de ecuaciones anteriores se obtiene la expresión matricial:

$$\begin{bmatrix} f_{11} & f_{12} & f_{13} \\ f_{21} & f_{22} & f_{32} \\ f_{31} & f_{32} & f_{33} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} K_{11} & K_{12} & K_{13} \\ K_{21} & K_{22} & K_{23} \\ K_{31} & K_{32} & K_{33} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \tag{7.177}$$

que permite obtener la matriz de coeficientes de rigidez como inversa de la matriz de coeficientes de flexibilidad:

$$\mathbf{K}_{II} = \mathbf{f}_{II}^{-1} \tag{7.178}$$

Términos restantes

Los tres últimos términos de cada columna se calculan fácilmente en base a las ecuaciones de equilibrio del elemento, que se pueden deducir de las figuras 7.47, 7.49 y 7.50:

$$K_{4j} = -K_{1j} \qquad K_{5j} = -K_{2j} \qquad K_{6j} = -K_{3j} + K_{2j}L - K_{1j}H \tag{7.179}$$

siendo L la distancia entre los nudos I, J medida según el eje X_L, y H la misma distancia medida según el eje Y_L (con el sistema de ejes adoptado *H=0*). Estas expresiones se pueden poner de forma matricial como:

$$\begin{bmatrix} K_{41} & K_{42} & K_{43} \\ K_{51} & K_{52} & K_{53} \\ K_{61} & K_{62} & K_{63} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ -H & L & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} K_{11} & K_{12} & K_{13} \\ K_{21} & K_{22} & K_{23} \\ K_{31} & K_{32} & K_{33} \end{bmatrix} \tag{7.180}$$

Columnas 4 a 6

Se calculan de modo semejante a las tres primeras, pero eligiendo como incógnitas hiperestáticas a los esfuerzos en el nudo J.

7.16 INFLUENCIA DE LA ENERGÍA DE ESFUERZO CORTANTE

La deformación debida al esfuerzo cortante puede tenerse en cuenta en el método de rigidez, si en la deducción de los coeficientes de rigidez se emplea una expresión de la energía elástica que incluya la energía debida al esfuerzo cortante.

Admitiendo la hipótesis de Timoshenko según la cual las secciones rectas y perpendiculares a la fibra neutra se mantienen rectas en el estado deformado (ver apartado 4.9), la energía elástica acumulada en un elemento estructural prismático plano es:

$$U = \int \frac{M^2 \mu}{2} dx + \int \frac{N^2 \gamma}{2} dx + \int \frac{Q^2 \eta}{2} dx \tag{7.181}$$

donde $\mu = 1/EI$ es la flexibilidad correspondiente a la flexión, $\gamma = 1/EA$ es la del esfuerzo axial y $\eta = 1/GA'$ es la correspondiente al esfuerzo cortante, siendo A' el área equivalente a cortadura de la sección.

7.16.1 Elemento viga plana

Los grados de libertad del elemento son los mismos que al estudiarlo sin energía de esfuerzo cortante: dos desplazamientos en el plano XY y un giro según el eje Z. De la misma manera los esfuerzos en los nudos son dos fuerzas y un momento flector. El giro Z corresponde al giro de la sección recta material de la viga, y no a la pendiente de la deformada elástica, ya que ahora ambos son diferentes.

$$\boldsymbol{\delta} = \begin{Bmatrix} \boldsymbol{\delta}_I \\ \boldsymbol{\delta}_J \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \delta_{IX} \\ \delta_{IY} \\ \theta_I \\ \delta_{JX} \\ \delta_{JY} \\ \theta_J \end{Bmatrix} \qquad \mathbf{P} = \begin{Bmatrix} \mathbf{P}_I \\ \mathbf{P}_J \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} P_{IX} \\ P_{IY} \\ M_I \\ P_{JX} \\ P_{JY} \\ M_J \end{Bmatrix} \tag{7.182}$$

Los coeficientes de rigidez para este elemento se deducen haciendo uso de su significado físico: las columnas de la matriz de rigidez son las fuerzas que hay que aplicar sobre el elemento para imponer desplazamientos unitarios en todos sus grados de libertad. Al estar la flexión desacoplada del esfuerzo axial, solamente es necesario evaluar los coeficientes de rigidez correspondientes a la flexión, que es en los que se manifiesta la influencia del esfuerzo cortante. Así pues sólo se calculan las columnas 2, 3, 5 y 6 de la matriz de rigidez, aplicando las correspondientes deformaciones de valor unidad y calculando las reacciones por el método de flexibilidad. Desde el punto de vista de la flexión el elemento es hiperestático de grado h=2.

Columna 2

Se impone una valor unitario a δ_{IY}, con lo que las fuerzas que aparecen según los distintos grados de libertad son la columna 2 de la matriz de rigidez (figura 7.51).

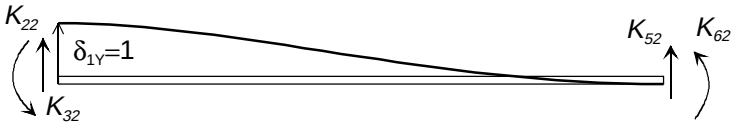


Figura 7.51

Para resolver el problema se eligen como incógnitas hiperestáticas las dos reacciones (fuerza vertical y momento) en el nudo I, con lo que su cálculo proporciona directamente dos de los coeficientes de rigidez buscados. El problema queda descompuesto en suma de tres casos: un caso 0 donde actúan las fuerzas exteriores, y dos casos *1* y *2*, en los que se aplica un valor unitario de cada una de las incógnitas hiperestáticas. En todos ellos la barra queda reducida a un voladizo fijo en J.

◊ Caso *0*. Al no haber fuerzas exteriores aplicadas, los esfuerzos son nulos.

◊ Caso *1*. Con un valor unitario de K_{22} los esfuerzos son (figura 7.52):

$$M^1 = x \qquad Q^1 = 1 \tag{7.183}$$

◊ Caso *2*. Se aplica un valor unitario a K_{32}, y los esfuerzos son (figura 7.52):

$$M^2 = -1 \qquad Q^2 = 0 \tag{7.184}$$

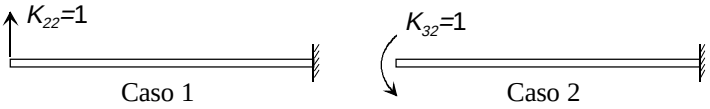


Figura 7.52

Las ecuaciones de compatibilidad para cada una de las dos incógnitas hiperestáticas son:

◊ Incógnita K_{22}

$$\frac{\partial U}{\partial K_{22}} = 1 \tag{7.185}$$

$$K_{22}\left(\int M^1 \mu M^1 dx + \int Q^1 \eta Q^1 dx\right) + K_{32}\left(\int M^2 \mu M^1 dx + \int Q^2 \eta Q^1 ds\right) = 1 \tag{7.186}$$

◊ Incógnita K_{32}

$$K_{22}\left(\int M^1 \mu M^2 dx + \int Q^1 \eta Q^2 dx\right) + K_{32}\left(\int M^2 \mu M^2 dx + \int Q^2 \eta Q^2 ds\right) = 0 \tag{7.187}$$

Se observa que los coeficientes de las incógnitas K_{ij} son los coeficientes de flexibilidad de la viga en el nudo I (ver apartado 4.11). Desarrollando dichos coeficientes y agrupando de forma matricial, las dos ecuaciones de compatibilidad se pueden poner como:

$$\begin{bmatrix} \frac{\mu L^3}{3}+\eta L & -\frac{\mu L^2}{2} \\ -\frac{\mu L^2}{2} & \mu L \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} K_{22} \\ K_{32} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 1 \\ 0 \end{Bmatrix} \tag{7.188}$$

$$\mathbf{f}_{II}\mathbf{K}_{I2} = \mathbf{U}_1 \tag{7.189}$$

donde la matriz $\mathbf{f}_{II}$ contiene todos los coeficientes de flexibilidad de la viga en el nudo I y $\mathbf{K}_{I2}$ es la segunda columna de la matriz de rigidez en el nudo I. El vector $\mathbf{U}_1$ es todo él nulo, excepto su primer término, que vale 1. El sistema anterior proporciona los términos de la segunda columna de la matriz de rigidez, correspondientes al momento y a la fuerza transversal en el nudo I. Su resolución se efectúa más adelante.

Columna 3

Esta columna se calcula siguiendo el mismo procedimiento que la columna 2, pero ahora el valor unitario de la deformación se impone al giro I (figura 7.53). Se eligen nuevamente como incógnitas hiperestáticas los dos esfuerzos en el nudo I, que ahora son los coeficientes de rigidez K_{23} y K_{33} asociados a la columna 3.

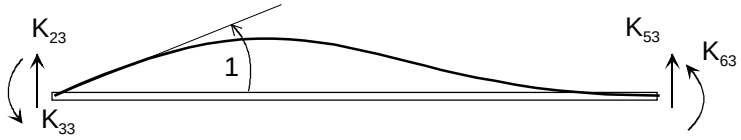


Figura 7.53

- Caso *0*: no hay esfuerzos en él, por no haber fuerzas exteriores.
- Casos *1* y *2*: son iguales a los ya calculados para la columna 2, aunque ahora se corresponden con otras incógnitas hiperestáticas.

Las ecuaciones de compatibilidad tienen una forma semejante a las de la columna 2. De hecho la matriz de coeficientes de las ecuaciones es la misma matriz $\mathbf{f}_{II}$ anterior, y la única diferencia es que ahora la ecuación de compatibilidad que está igualada a 1 es la correspondiente al momento K_{33}, que es donde se impone el giro unitario.

$$\begin{bmatrix} \frac{\mu L^3}{3}+\eta L & -\frac{\mu L^2}{2} \\ -\frac{\mu L^2}{2} & \mu L \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} K_{23} \\ K_{33} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 0 \\ 1 \end{Bmatrix} \tag{7.190}$$

Coeficientes de rigidez

Agrupando los dos sistemas de ecuaciones (7.188) y (7.190) se obtiene:

$$\begin{bmatrix} \frac{\mu L^3}{3}+\eta L & -\frac{\mu L^2}{2} \\ -\frac{\mu L^2}{2} & \mu L \end{bmatrix} \begin{bmatrix} K_{22} & K_{23} \\ K_{32} & K_{33} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \tag{7.191}$$

$$\mathbf{f}_{II}\mathbf{K}_{II} = \mathbf{I} \tag{7.192}$$

que permite obtener la matriz de rigidez asociada a la flexión $\mathbf{K}_{II}$ como la inversa de la matriz de coeficientes de flexibilidad del nudo I:

$$\mathbf{K}_{II} = \mathbf{f}_{II}^{-1} = \begin{bmatrix} \dfrac{12EI}{(1+\kappa)L^3} & \dfrac{6EI}{(1+\kappa)L^2} \\ \dfrac{6EI}{(1+\kappa)L^2} & \dfrac{(4+\kappa)EI}{L(1+\kappa)} \end{bmatrix} \tag{7.193}$$

donde se ha empleado el *factor de rigidez a cortante* κ:

$$\kappa = \frac{12EI}{GA' L^2} \tag{7.194}$$

que depende de la rigidez relativa a flexión y a cortante. Si la viga es infinitamente rígida a cortante, este factor es nulo, y la matriz de rigidez anterior coincide con la del elemento sin rigidez a cortante. Nótese que este factor depende de la relación entre la rigidez a flexión (*EI*) y a esfuerzo cortante (*GA'*) y del cuadrado de la longitud de la viga. Para vigas muy cortas el factor L^2 tiene gran importancia, y el factor κ puede ser alto, disminuyendo notablemente la rigidez de la viga.

Términos restantes

Los dos últimos términos de cada columna se calculan fácilmente en base a las ecuaciones de equilibrio del elemento:

$$K_{5j} = -K_{2j} \qquad\qquad K_{6j} = -K_{3j} + K_{2j}L \tag{7.195}$$

Columnas 5 y 6

Se calculan de modo semejante a las anteriores, pero eligiendo como incógnitas hiperestáticas a los esfuerzos en el nudo J. El sistema de ecuaciones que se obtiene en este caso, aplicando el método de flexibilidad, es:

$$\begin{bmatrix} \dfrac{\mu L^3}{3} + \eta L & \dfrac{\mu L^2}{2} \\ \dfrac{\mu L^2}{2} & \mu L \end{bmatrix} \begin{bmatrix} K_{55} & K_{56} \\ K_{65} & K_{66} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \tag{7.196}$$

$$\mathbf{f}_{JJ}\mathbf{K}_{JJ} = \mathbf{I} \tag{7.197}$$

Los coeficientes de rigidez son:

$$\mathbf{K}_{JJ} = \begin{bmatrix} \dfrac{12EI}{(1+\kappa)L^3} & -\dfrac{6EI}{(1+\kappa)L^2} \\ -\dfrac{6EI}{(1+\kappa)L^2} & \dfrac{(4+\kappa)EI}{L(1+\kappa)} \end{bmatrix} \tag{7.198}$$

De manera análoga, los restantes términos se hallan aplicando las ecuaciones de equilibrio:

$$K_{2j} = -K_{5j} \qquad K_{3j} = -K_{6j} + K_{2j}L \tag{7.199}$$

Matriz de rigidez en coordenadas locales

Su expresión final se obtiene agrupando todos los coeficientes anteriores, y añadiendo los correspondientes al esfuerzo axial:

$$\mathbf{K}_L = \begin{bmatrix} \frac{EA}{L} & 0 & 0 & -\frac{EA}{L} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{12EI}{(1+\kappa)L^3} & \frac{6EI}{(1+\kappa)L^2} & 0 & -\frac{12EI}{(1+\kappa)L^3} & \frac{6EI}{(1+\kappa)L^2} \\ 0 & \frac{6EI}{(1+\kappa)L^2} & \frac{(4+\kappa)EI}{(1+\kappa)L} & 0 & -\frac{6EI}{(1+\kappa)L^2} & \frac{(2-\kappa)EI}{(1+\kappa)L} \\ -\frac{EA}{L} & 0 & 0 & \frac{EA}{L} & 0 & 0 \\ 0 & -\frac{12EI}{(1+\kappa)L^3} & -\frac{6EI}{(1+\kappa)L^2} & 0 & \frac{12EI}{(1+\kappa)L^3} & -\frac{6EI}{(1+\kappa)L^2} \\ 0 & \frac{6EI}{(1+\kappa)L^2} & \frac{(2-\kappa)EI}{(1+\kappa)L} & 0 & -\frac{6EI}{(1+\kappa)L^2} & \frac{(4+\kappa)EI}{(1+\kappa)L} \end{bmatrix} \tag{7.200}$$

7.16.2 Elemento de emparrillado plano

La deducción de la matriz de rigidez de este elemento es exactamente igual que la del elemento viga plana, pues la rigidez a flexión de uno y otro son iguales, aunque están asociadas a grados de libertad diferentes.

Los grados de libertad de este elemento son:

$$\boldsymbol{\delta}_I = \begin{Bmatrix} \varphi_{IX} \\ \varphi_{IY} \\ \delta_{IZ} \end{Bmatrix} \qquad \boldsymbol{\delta}_J = \begin{Bmatrix} \varphi_{JX} \\ \varphi_{JY} \\ \delta_{JZ} \end{Bmatrix} \tag{7.201}$$

La matriz de rigidez en coordenadas locales se obtiene sencillamente reordenando la del elemento viga, y resulta ser:

$$\mathbf{K}_L = \begin{bmatrix} \frac{GJ}{L} & 0 & 0 & -\frac{GJ}{L} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{(4+\kappa)EI}{(1+\kappa)L} & -\frac{6EI}{(1+\kappa)L^2} & 0 & \frac{(2-\kappa)EI}{(1+\kappa)L} & \frac{6EI}{(1+\kappa)L^2} \\ 0 & -\frac{6EI}{(1+\kappa)L^2} & \frac{12EI}{(1+\kappa)L^3} & 0 & -\frac{6EI}{(1+\kappa)L^2} & -\frac{12EI}{(1+\kappa)L^3} \\ -\frac{GJ}{L} & 0 & 0 & \frac{GJ}{L} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{(2-\kappa)EI}{(1+\kappa)L} & -\frac{6EI}{(1+\kappa)L^2} & 0 & \frac{(4+\kappa)EI}{(1+\kappa)L} & \frac{6EI}{(1+\kappa)L^2} \\ 0 & \frac{6EI}{(1+\kappa)L^2} & -\frac{12EI}{(1+\kappa)L^3} & 0 & \frac{6EI}{(1+\kappa)L^2} & \frac{12EI}{(1+\kappa)L^3} \end{bmatrix} \quad (7.202)$$

7.17 EJERCICIOS RESUELTOS

7.17.1 Calcular la matriz de rigidez de un elemento articulado en ambos extremos, con área variable de forma lineal entre dos valores A_1 y A_2 (figura 7.54).

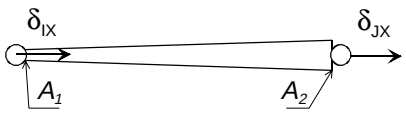


Figura 7.54

La matriz de rigidez se obtiene calculando las fuerzas en los extremos de la barra cuando se aplican valores unitarios a las deformaciones, como se muestra en la figura 7.55.

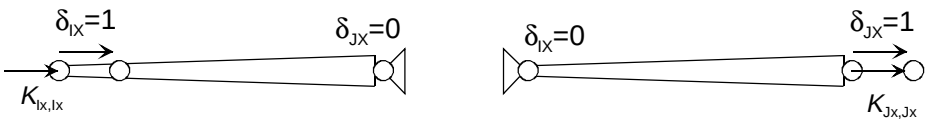


Figura 7.55

La primera columna se obtiene aplicando un valor δ_{IX}=1. Para resolver este problema se emplea la ecuación diferencial de equilibrio axial de un elemento viga (5.34), considerando que no hay cargas axiales aplicadas:

$$\frac{d}{dx}\left(EA\frac{du}{dx}\right) = 0$$

La variación del área en el elemento tiene la forma: $A = A_1 + \frac{A_2 - A_1}{L}x = A_1 + Bx$

Integrando la ecuación anterior se obtiene:

$$EA\frac{du}{dx} = C_1 \qquad\qquad u = \frac{C_1}{EB}\ln(A_1 + Bx) + C_2$$

Las condiciones de contorno para determinar las constantes de integración son:

$$u(x=0) = 1 \quad \rightarrow \quad 1 = \frac{C_1}{EB}\ln A_1 + C_2$$

$$u(x=L) = 0 \quad \rightarrow \quad 0 = \frac{C_1}{EB}\ln A_2 + C_2$$

Resolviendo se obtiene:

$$C_1 = \frac{-EB}{\ln\frac{A_2}{A_1}} \qquad\qquad C_2 = \frac{\ln A_2}{\ln\frac{A_2}{A_1}}$$

La fuerza a aplicar en el nudo I es:

$$K_{Ix,Ix} = -A_1\sigma_1 = -A_1E\left(\frac{du}{dx}\right)_{x=0} = -A_1E\frac{C_1}{EA_1} = \frac{EB}{\ln\frac{A_2}{A_1}} = \frac{E(A_2 - A_1)}{L\ln\frac{A_2}{A_1}}$$

y la fuerza en el nudo opuesto es $K_{Jx,Ix} = -K_{Ix,Ix}$

La segunda columna se obtiene aplicando un valor δ_{JX}=1. En este caso las condiciones de contorno para determinar las constantes de integración son:

$$u(x=0) = 0 \quad \rightarrow \quad C_2 = \frac{-C_1}{EB}\ln A_1$$

$$u(x=L) = 1 \quad \rightarrow \quad 1 = \frac{C_1}{EB}\ln A_2 + C_2$$

Resolviendo se obtiene:

$$C_1 = \frac{EB}{\ln\frac{A_2}{A_1}} \qquad\qquad C_2 = \frac{1}{1 - \ln\frac{A_2}{A_1}}$$

La fuerza a aplicar en el nudo J es:

$$K_{Jx,Jx} = A_2\sigma_2 = A_2E\left(\frac{du}{dx}\right)_{x=L} = A_2E\frac{C_1}{EA_2} = \frac{EB}{\ln\frac{A_2}{A_1}} = \frac{E(A_2 - A_1)}{L\ln\frac{A_2}{A_1}}$$

y la fuerza en el nudo opuesto es $K_{Jx,Ix} = -K_{Jx,Jx}$

La matriz de rigidez del elemento es:

$$\mathbf{K}_L = \frac{E(A_2 - A_1)}{L \ln\left(\frac{A_2}{A_1}\right)} \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix}$$

7.17.2 Calcular la expresión general de la matriz de rigidez de un elemento curvo articulado en ambos extremos. Despreciar la energía de esfuerzo axial.

Los grados de libertad del elemento son los dos desplazamientos de cada nudo extremo. Se adopta un sistema de ejes local con origen en el nudo I, y cuyo eje X pasa por el nudo J.

$$\boldsymbol{\delta}^e = \begin{Bmatrix} \delta_{Ix} \\ \delta_{Iy} \\ \delta_{Jx} \\ \delta_{Jy} \end{Bmatrix}$$

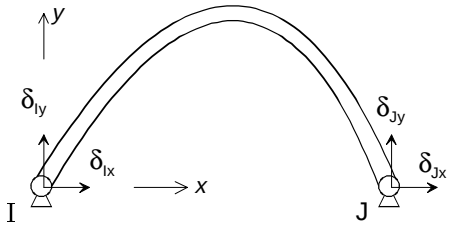


Figura 7.56

Columna 1. Se impone un valor unidad al desplazamiento en la dirección X del nudo I y se calculan las cuatro fuerzas en la dirección de los grados de libertad. La estructura es hiperestática h=1 y se adopta como incógnita hiperestática la fuerza en la dirección X del nudo I, que es la rigidez K_{11} (figura 7.57).

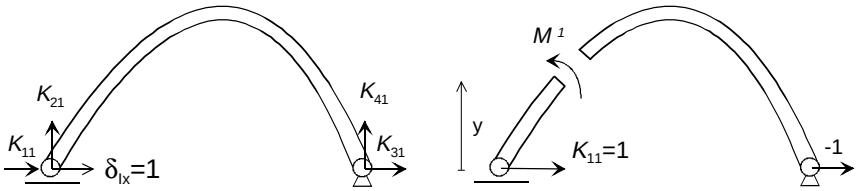


Figura 7.57

El valor del momento flector vale $M^1 = -y$, y por lo tanto el coeficiente de flexibilidad es:

$$f_{11} = \int M^1 \mu M^1 ds = \int y^2 \mu ds$$

La ecuación de compatibilidad permite obtener directamente la rigidez:

$$f_{11} K_{11} = 1 \qquad \rightarrow \qquad K_{11} = \frac{1}{f_{11}} = \frac{1}{\int y^2 \mu ds}$$

La fuerza en el nudo J debe ser igual y de sentido contrario a la fuerza en el nudo I, con lo que $K_{31} = -K_{11}$.

Por equilibrio no puede haber fuerzas verticales en los apoyos, con lo que $K_{21} = K_{31} = 0$

Columna 2. Se impone un desplazamiento unidad en el nudo I, dirección Y. Las fuerzas necesarias para imponer dicha deformación son todas ellas nulas, luego la segunda columna es toda ella nula.

Columna 3. Se impone un valor unidad al desplazamiento en la dirección Y del nudo J y se calculan las cuatro fuerzas en la dirección de los grados de libertad. El problema es simétrico al cálculo de la columna 1, por lo que los resultados son:

$$K_{33} = \frac{1}{\int y^2 \mu ds} \qquad K_{13} = -K_{33} \qquad K_{23} = K_{43} = 0$$

Columna 4. Esta columna es nula por la misma razón que la columna 2.

La matriz de rigidez del elemento, en su sistema de ejes local, es por lo tanto:

$$\mathbf{K}_L = \frac{1}{\int y^2 \mu ds} \begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

La integral que aparece en esta expresión es la flexibilidad lateral de arco en sus apoyos. Nótese que si el arco es de flecha muy pequeña (y→0) y se aproxima a una barra recta, la rigidez tiende a infinito. Ello es debido a que no se ha considerado la energía debida al esfuerzo axial, que en una barra biarticulada recta es la única energía que se acumula.

7.17.3 Aplicar los resultados del ejercicio 7.17.2 para el caso de un arco de directriz parabólica de flecha *f* y luz *L*, cuyo momento de inercia varía según la ley de la secante $I = I_0 \sec\alpha$, donde I_0 es el momento de inercia en la clave.

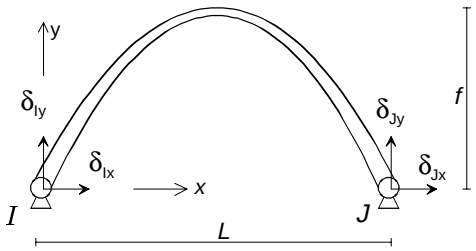


Figura 7.58

La ecuación de la directriz del arco es:

$$y = \frac{4f}{L^2}(Lx - x^2)$$

con lo que la flexibilidad es:

$$f_{11} = \int \frac{16 f^2}{L^4}(Lx - x^2)^2 \mu_0 \cos\alpha \, ds = \frac{16 f^2 \mu_0}{L^4} \int_0^L (Lx - x^2)^2 dx = \frac{8}{15} \mu_0 L f^2$$

La matriz de rigidez del elemento es:

$$\mathbf{K}_L = \frac{15}{8\mu_0 L f^2}\begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

7.17.4 Aplicar los resultados del ejercicio 7.17.2 para el caso de un arco de directriz circular de radio *R* y luz *L*. Suponer rigidez a flexión constante *EI*.

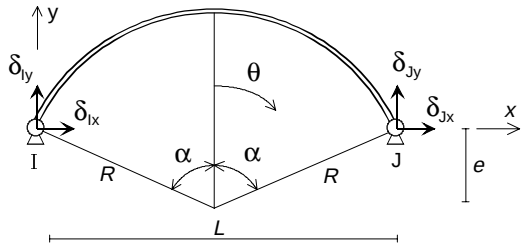


Figura 7.59

La ecuación paramétrica de la directriz del arco, tomando como origen de *y* el nudo I, es:

$$y = R\cos\theta - e$$

con lo que la flexibilidad es:

$$f_{11} = \int (R\cos\theta - e)^2 \mu ds = \int_{-\alpha}^{+\alpha} (R\cos\theta - e)^2 \mu R d\theta$$

$$f_{11} = \mu\left(R^3 \cos\alpha \sin\alpha + R^3\alpha - 4R^2 e \sin\alpha + 2e^2 R\alpha\right)$$

Esta expresión se puede simplificar introduciendo en ella la longitud del arco $s = 2R\alpha$ y considerando las relaciones geométricas siguientes: $R\cos\alpha = e \quad R\sin\alpha = L/2$.

Operando se obtiene la siguiente expresión de la flexibilidad:

$$f_{11} = \frac{1}{2EI}\left(sR^2 + 2se^2 - 3eLR\right)$$

con lo que la matriz de rigidez del elemento es:

$$\mathbf{K}_L = \frac{2EI}{sR^2 + 2se^2 - 3eLR}\begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

7.17.5 Calcular la matriz de rigidez de un arco empotrado en ambos extremos, con directriz parabólica de flecha *f* y luz *L*, y cuyo momento de inercia varía según la ley de la secante $I = I_0 \sec\alpha$, donde I_0 es el momento de inercia en la clave. Despreciar la energía de esfuerzo axial.

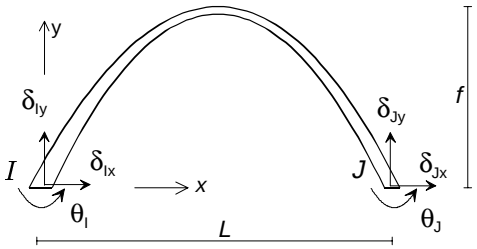


Figura 7.60

Los grados de libertad del elemento son los dos desplazamientos y el giro de cada nudo extremo. Se adopta un sistema de ejes local con origen en el nudo I y cuyo eje X pasa por el nudo J. Con este sistema de ejes, la ecuación de la directriz del arco es:

$$y = \frac{4f}{L^2}(Lx - x^2)$$

La matriz de rigidez se calcula siguiendo el procedimiento indicado en el apartado 7.15.1:

Columnas 1, 2 y 3

Los coeficientes de la matriz de flexibilidad en el nudo I tienen la expresión:

$$f_{ij} = \int M^i \mu M^j ds = \int M^i M^j \mu_0 \cos\alpha\, ds = \int M^i M^j \mu_0\, dx$$

Los valores del momento flector en los distintos casos se indican en las ecuaciones (7.162) a (7.164):

$$M^1 = -y \qquad M^2 = x \qquad M^3 = -1$$

Los distintos coeficientes son:

$$f_{11} = \int_0^L (-y)^2 \mu_0 dx = \frac{8}{15}\mu_0 L f^2$$

$$f_{21} = \int_0^L x(-y)\mu_0 dx = -\frac{1}{3}\mu_0 L^2 f$$

$$f_{31} = \int_0^L (-1)(-y)\mu_0 dx = \frac{2}{3}\mu_0 L f$$

$$f_{22} = \int_0^L x^2 \mu_0 dx = \frac{1}{3}\mu_0 L^3$$

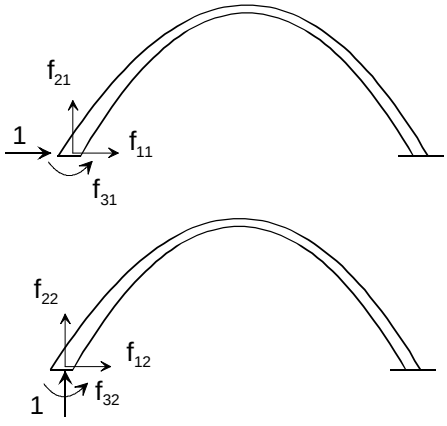


Figura 7.61

$$f_{32} = \int_0^L (-1) x \mu_0 dx = -\frac{1}{2}\mu_0 L^2$$

$$f_{33} = \int_0^L (-1)^2 \mu_0 dx = \mu_0 L$$

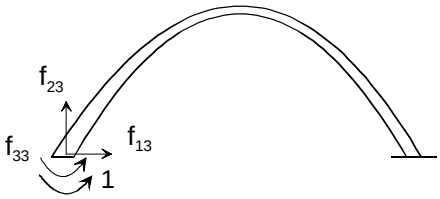


Figura 7.61 (cont)

La matriz de flexibilidad en el nudo I es:

$$\mathbf{f}_{II} = \mu_0 \begin{bmatrix} \frac{8Lf^2}{15} & -\frac{L^2 f}{3} & \frac{2Lf}{3} \\ -\frac{L^2 f}{3} & \frac{L^3}{3} & -\frac{L^2}{2} \\ \frac{2Lf}{3} & -\frac{L^2}{2} & L \end{bmatrix}$$

La matriz de rigidez directa del nudo I se obtiene invirtiendo la matriz de flexibilidad anterior.

$$\mathbf{K}_{II} = \mathbf{f}_{II}^{-1} = EI_0 \begin{bmatrix} \frac{45}{4Lf^2} & 0 & -\frac{15}{2Lf} \\ 0 & \frac{12}{L^3} & \frac{6}{L^2} \\ -\frac{15}{2Lf} & \frac{6}{L^2} & \frac{9}{L} \end{bmatrix} \begin{matrix} \delta_{Ix} \\ \delta_{Iy} \\ \theta_I \end{matrix}$$

La matriz de rigidez cruzada entre el nudo I y el J se obtiene mediante la ecuación (7.180), considerando que H=0.

$$\mathbf{K}_{JI} = \begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & L & -1 \end{bmatrix} \mathbf{K}_{II} = EI_0 \begin{bmatrix} -\frac{45}{4Lf^2} & 0 & \frac{15}{2Lf} \\ 0 & -\frac{12}{L^3} & -\frac{6}{L^2} \\ \frac{15}{2Lf} & \frac{6}{L^2} & -\frac{3}{L} \end{bmatrix} \begin{matrix} \delta_{Jx} \\ \delta_{Jy} \\ \theta_J \end{matrix}$$
$$\begin{matrix} \delta_{Ix} & \delta_{Iy} & \theta_I \end{matrix}$$

Columnas 4, 5 y 6

Se pueden obtener por un procedimiento análogo a las anteriores pero, considerando la simetría del elemento, es más sencillo determinar la matriz de flexibilidad en el nudo J por simple inspección de la matriz correspondiente del nudo I, dado que las columnas de dichas matrices son las tres deformaciones en cada nudo al aplicarle una fuerza unitaria. Con esta consideración se obtiene que

$$\mathbf{f}_{JJ} = \mu_0 \begin{bmatrix} \frac{8Lf^2}{15} & \frac{L^2 f}{3} & \frac{2Lf}{3} \\ \frac{L^2 f}{3} & \frac{L^3}{3} & \frac{L^2}{2} \\ \frac{2Lf}{3} & \frac{L^2}{2} & L \end{bmatrix}$$

y la matriz de rigidez directa de este nudo es:

$$\mathbf{K}_{JJ} = \mathbf{f}_{JJ}^{-1} = EI_0 \begin{bmatrix} \frac{45}{4Lf^2} & 0 & -\frac{15}{2Lf} \\ 0 & \frac{12}{L^3} & -\frac{6}{L^2} \\ -\frac{15}{2Lf} & -\frac{6}{L^2} & \frac{9}{L} \end{bmatrix} \begin{matrix} \delta_{Jx} \\ \delta_{Jy} \\ \theta_J \end{matrix}$$

La matriz de rigidez cruzada entre J e I es la traspuesta de la $\mathbf{K}_{JI}$ hallada antes.

Agrupando todas las matrices se obtiene la ecuación de equilibrio del elemento, que se muestra a continuación.

$$\begin{Bmatrix} P_{Ix} \\ P_{Iy} \\ M_I \\ P_{Jx} \\ P_{Jy} \\ M_J \end{Bmatrix} = EI_0 \begin{bmatrix} \frac{45}{4Lf^2} & 0 & -\frac{15}{2Lf} & -\frac{45}{4Lf^2} & 0 & \frac{15}{2Lf} \\ 0 & \frac{12}{L^3} & \frac{6}{L^2} & 0 & -\frac{12}{L^3} & \frac{6}{L^2} \\ -\frac{15}{2Lf} & \frac{6}{L^2} & \frac{9}{L} & \frac{15}{2Lf} & -\frac{6}{L^2} & -\frac{3}{L} \\ -\frac{45}{4Lf^2} & 0 & \frac{15}{2Lf} & \frac{45}{4Lf^2} & 0 & -\frac{15}{2Lf} \\ 0 & -\frac{12}{L^3} & -\frac{6}{L^2} & 0 & \frac{12}{L^3} & -\frac{6}{L^2} \\ \frac{15}{2Lf} & \frac{6}{L^2} & -\frac{3}{L} & -\frac{15}{2Lf} & -\frac{6}{L^2} & \frac{9}{L} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \delta_{Ix} \\ \delta_{Iy} \\ \theta_I \\ \delta_{Jx} \\ \delta_{Jy} \\ \theta_J \end{Bmatrix}$$

Nótese que, a diferencia de las vigas rectas, existe acoplamiento entre el esfuerzo axial y la flexión, debido a la naturaleza curva del elemento.

7.18 BIBLIOGRAFÍA

1. Alarcón Alvarez, E., *Cálculo Matricial de Estructuras*, Ed. Reverté, Barcelona, 1986.
2. Arbabi, F., *Structural Analysis and Behavior*, McGraw-Hill, New York, 1991.
3. Beaufait, F., Rowan, W., Hoadley, P., y Hackett, R. M., *Computer Methods of Structural Analysis*, Prentice-Hall, New Jersey, 1970.
4. Hibbeler, R. C., *Structural Analysis*, Prentice-Hall, New Jersey, 1996.
5. Kardestuncer, H., *Introducción al Análisis Estructural con Matrices*, McGraw-Hill, Mexico, 1975.
6. Meek, J. L., *Matrix Structural Analysis*, McGraw-Hill, New York, 1971.
7. Przemieniecki, J. S., *Theory of Matrix Structural Analysis*, McGraw-Hill, New York, 1968.
8. Sennett, R. E., *Matrix Analysis of Structures*, Prentice-Hall, Englewood Cliffs, N. J., 1994.
9. Tuma, J. J., *Análisis Estructural*, Serie Schaum, McGraw-Hill, New York, 1970.
10. Wang, C. K., *Intermediate Structural Analysis*, McGraw-Hill, New York, 1983.

7.19 PROBLEMAS

7.19.1 Determinar la matriz de rigidez de un elemento estructural curvo en forma de cuarto de círculo, de radio R y sección transversal uniforme (figura P7.1). Despreciar la energía debida al esfuerzo axial.

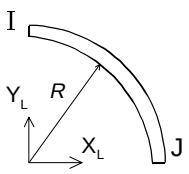


Figura P7.1

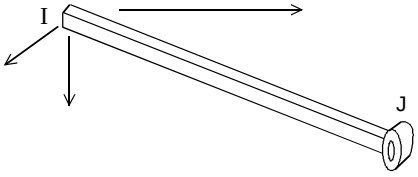


Figura P7.2

7.19.2 Determinar la matriz de rigidez de un elemento de emparrillado plano articulado en uno de sus nudos (figura P7.2).

7.19.3 Obtener la expresión de la matriz de rigidez de un elemento viga plana cuyos dos extremos están descentrados una magnitud *e* en la dirección Y_L respecto de los nudos (A y B) de la estructura (figura P7.3).

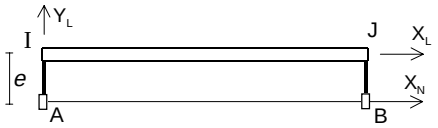


Figura P7.3

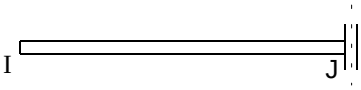


Figura P7.4

7.19.4 Obtener la matriz de rigidez de un elemento viga plana, en uno de cuyos extremos hay una deslizadera en la dirección Y_L, de tal manera que el esfuerzo cortante es nulo en esa dirección (figura P7.4).

7.19.5 Obtener la expresión de la matriz de rigidez de los elementos espaciales modificados indicados en el apartado 7.11.

7.19.6 Obtener la matriz de rigidez de un elemento viga plana a flexión, con sección rectangular de ancho constante *b* y canto variable de forma lineal entre dos valores extremos h_1 y h_2 en sus dos nudos (figura P7.5).

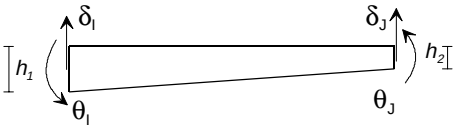


Figura P7.5

Capítulo 8

Método de rigidez

8.1 GRADOS DE LIBERTAD DE LA ESTRUCTURA

La estructura en su conjunto tiene tantos grados de libertad como sean necesarios para definir la posición deformada de todos sus elementos, es decir tantos grados de libertad como aparezcan en las ecuaciones de equilibrio de los distintos elementos. Estos grados de libertad que aparecen en los elementos estructurales se van acumulando en los distintos nudos donde se unen dichos elementos y configuran el conjunto de los grados de libertad de la estructura.

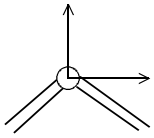
Es muy importante recalcar este hecho de que los grados de libertad se originan en los elementos, que los necesitan para definir su posición deformada y por lo tanto su ecuación de equilibrio. En consecuencia, la estructura tiene todos aquellos grados de libertad que requieran sus elementos, en función de la naturaleza de cada uno.

Los grados de libertad originados en los elementos se van agrupando en los nudos, y la forma de unión de unos elementos con otros en los nudos define qué grados de libertad son compartidos entre unos elementos y otros, y por lo tanto cuál es el conjunto final de grados de libertad de la estructura.

La introducción de las condiciones de compatibilidad de desplazamientos en los nudos se efectúa por lo tanto de manera automática en el método de rigidez, si el vector de grados de libertad de la estructura se forma como se ha indicado, por unión de los grados de libertad de los elementos.

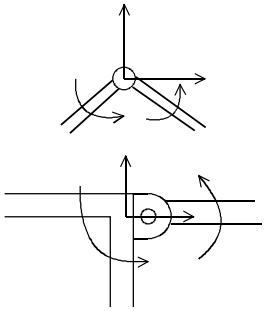
Ejemplos

Dos elementos de celosía unidos en un nudo. Se comparten los dos desplazamientos que tiene cada barra en sus nudos extremos. El nudo tiene dos grados de libertad.



Dos elementos viga a flexión unidos mediante una articulación a un nudo. No se comparten los giros, sólo los desplazamientos de las barras. El nudo tiene 4 grados de libertad.

Tres elementos viga a flexión. Uno de ellos no comparte el giro con los otros dos, al estar articulado al nudo. El nudo tiene 4 grados de libertad.



8.2 EQUILIBRIO DE UN ELEMENTO ESTRUCTURAL

Las ecuaciones de equilibrio de un elemento cualquiera, expresadas en el sistema de coordenadas generales de la estructura, se pueden poner siempre en la forma:

$$\begin{Bmatrix} \mathbf{F}_I^e \\ \mathbf{F}_J^e \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{K}_{II}^e & \mathbf{K}_{IJ}^e \\ \mathbf{K}_{JI}^e & \mathbf{K}_{JJ}^e \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \boldsymbol{\Delta}_I \\ \boldsymbol{\Delta}_J \end{Bmatrix} \tag{8.1}$$

donde I, J son los nudos donde se conecta el elemento, y el superíndice *e* indica el elemento de que se trata. $\boldsymbol{\Delta}_I$ y $\boldsymbol{\Delta}_J$ son los grados de libertad de los nudos I y J que afectan al elemento *e*, es decir que son una parte del vector de grados de libertad $\boldsymbol{\Delta}$. La ecuación anterior es válida para cualquier tipo de elemento estructural, variando únicamente el tamaño de las matrices que intervienen. Éste puede variar entre 1x1 para muelles al giro hasta 12x12 para elementos en el espacio.

En general, las fuerzas que actúan sobre un elemento cualquiera *e* en un nudo I se expresan por:

$$\mathbf{F}_I^e = \mathbf{K}_{II}^e \boldsymbol{\Delta}_I + \mathbf{K}_{IJ}^e \boldsymbol{\Delta}_J \tag{8.2}$$

donde *e* y I deben considerarse como índices libres (figura 8.1).

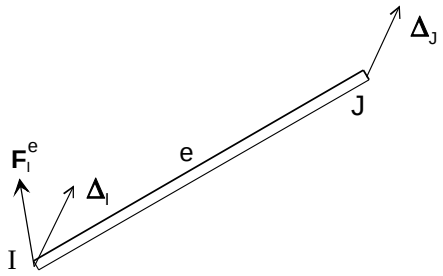


Figura 8.1

8.3 ECUACIÓN DE EQUILIBRIO DE LA ESTRUCTURA

Para que la estructura esté en equilibrio se debe satisfacer que cualquier trozo de ella lo esté. Al haberse impuesto ya el equilibrio por separado de las distintas barras, basta con imponer ahora que todos y cada uno de los nudos estén en equilibrio por separado, a fin de

garantizar que cualquier trozo de la estructura lo esté. Esta consideración del equilibrio de todos los nudos llevará a la obtención de las ecuaciones generales de equilibrio de la estructura en el método de rigidez.

8.3.1 Relación entre las deformaciones de un nudo y de toda la estructura

Para el análisis que sigue a continuación es necesario establecer una relación entre las magnitudes definidas a nivel de nudo y las correspondientes definidas para toda la estructura. Sea por ejemplo un nudo I cuyas deformaciones son $\boldsymbol{\Delta}_I$, y sea $\boldsymbol{\Delta}$ el vector de deformaciones de todos los nudos de la estructura. La relación entre ambos se puede establecer mediante una ecuación del tipo:

$$\boldsymbol{\Delta}_I = \mathbf{B}_I \boldsymbol{\Delta} \tag{8.3}$$

donde $\mathbf{B}_I$ es una matriz que tiene tantas filas como grados de libertad tiene el nudo I y tantas columnas como grados de libertad hay en toda la estructura. Cada fila de esta matriz define la posición de un término de $\boldsymbol{\Delta}_I$ en el vector total $\boldsymbol{\Delta}$, por lo tanto cada fila contiene un 1 en la posición del grado de libertad en $\boldsymbol{\Delta}$ y un 0 en todas las demás posiciones.

***Ejemplo**: En una estructura con cinco nudos, suponiendo que todos ellos tienen tres grados de libertad, la matriz del nudo 3 es:*

$$\mathbf{B}_3 = \left[\begin{array}{ccc|ccc|ccc|ccc|ccc} 0&0&0&0&0&0&1&0&0&0&0&0&0&0&0 \\ 0&0&0&0&0&0&0&1&0&0&0&0&0&0&0 \\ 0&0&0&0&0&0&0&0&1&0&0&0&0&0&0 \end{array}\right] \tag{8.4}$$

La peculiar estructura de estas matrices hace que sean ortogonales. Las matrices correspondientes a dos nudos I, J son asimismo ortogonales entre sí:

$$\mathbf{B}_I^{-1} = \mathbf{B}_I^T \qquad\qquad \mathbf{B}_I \mathbf{B}_J^T = \mathbf{0} \tag{8.5}$$

Estas mismas matrices se pueden emplear también para relacionar las fuerzas. Por ejemplo la relación entre las fuerzas en el extremo I de una barra *e*, y el vector de fuerzas totales en la estructura **F** es:

$$\mathbf{F}_I^e = \mathbf{B}_I \mathbf{F} \tag{8.6}$$

Estas matrices se denominan a menudo *de ordenación*, pues permiten situar los términos de un vector asociado a un nudo, en la posición que ocupan dentro otro vector correspondiente a toda la estructura.

8.3.2 Equilibrio de un nudo

Sea un nudo cualquiera de la estructura I, sobre él actúan las siguientes fuerzas (figura 8.2):

- Fuerzas exteriores aplicadas directamente sobre el nudo. Se denomina a estas fuerzas $\mathbf{F}_I^{ext}$. Entre estas fuerzas exteriores se incluyen también las reacciones en la sustentación, que no son conocidas. En este primer análisis se supone que no hay fuerzas aplicadas en el interior de los elementos; éstas se tratarán más adelante.
- Fuerzas efectuadas sobre el nudo por los elementos que confluyen en él. Hay tantas como barras lleguen al nudo, y son iguales y de sentido contrario a la fuerza que se

hace sobre la barra. Las fuerzas efectuadas por las barras sobre el nudo son por lo tanto $-\mathbf{F}_I^e$ siendo *e* un elemento cualquiera.

La ecuación vectorial de equilibrio de fuerzas del nudo I es:

$$\mathbf{F}_I^{ext} - \sum_{e(I)} \mathbf{F}_I^e = 0 \tag{8.7}$$

donde el sumatorio se extiende a todas las barras que confluyen en el nudo I, cuyo número total se denomina $e(I)$.

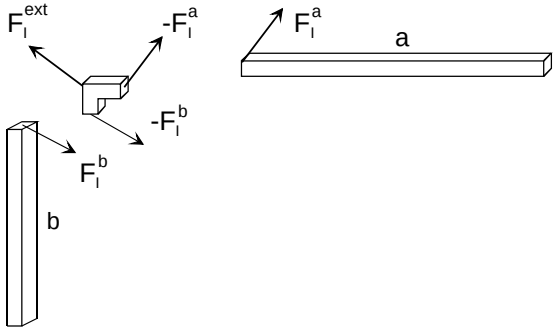


Figura 8.2

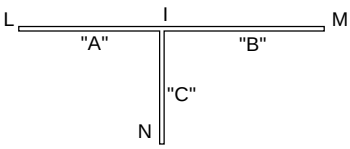
Sustituyendo el valor de las fuerzas producidas por los elementos, en función de la rigidez de cada elemento dada por la ecuación (8.2), se obtiene:

$$\sum_{e(I)} \left(\mathbf{K}_{II}^e \boldsymbol{\Delta}_I + \mathbf{K}_{IJ^e}^e \boldsymbol{\Delta}_{J^e} \right) = \mathbf{F}_I^{ext} \tag{8.8}$$

donde la expresión J^e indica el número que corresponde al nudo J de la barra *e(I)*. Dicho de otra forma J^e es el número del nudo vecino al I debido a la barra *e*. La ecuación anterior es vectorial, y tiene tantas componentes escalares como fuerzas haya en el nudo I, es decir tantas como grados de libertad $\boldsymbol{\Delta}_I$ haya en él. No puede resolverse por sí sola, pues involucra a los grados de libertad del nudo I y a los de todos sus nudos vecinos, debido a la presencia de los términos de acople $\mathbf{K}_{IJ}$.

Ejemplo. *En el nudo I de la figura confluyen 3 barras A,B,C que están unidas respectivamente a los nudos L,M,N, con lo que la ecuación de equilibrio del nudo es:*

$$\left(\mathbf{K}_{II}^A + \mathbf{K}_{II}^B + \mathbf{K}_{II}^C \right) \boldsymbol{\Delta}_I + \mathbf{K}_{IL}^A \boldsymbol{\Delta}_L + \mathbf{K}_{IM}^B \boldsymbol{\Delta}_M + \mathbf{K}_{IN}^C \boldsymbol{\Delta}_N = \mathbf{F}_I^{ext}$$



La ecuación (8.8) puede escribirse para todos los nudos de la estructura *I*=1,*N*, y se obtiene un sistema de tantas ecuaciones como incógnitas, que puede resolverse para hallar $\boldsymbol{\Delta}$.

Para obtener una expresión más compacta de dicho sistema se procede a referir las magnitudes de la ecuación (8.8) al conjunto de grados de libertad de la estructura,

empleando la matriz $\mathbf{B}$. Sustituyendo las deformaciones de los nudos en función de las deformaciones totales $\boldsymbol{\Delta}$ según (8.3) se obtiene:

$$\sum_{e(I)}\left(\mathbf{K}^e_{II}\mathbf{B}_I+\mathbf{K}^e_{IJ^e}\mathbf{B}_{J^e}\right)\boldsymbol{\Delta}=\mathbf{F}^{ext}_I \tag{8.9}$$

Premultiplicando por $\mathbf{B}^T_I$ se obtiene:

$$\sum_{e(I)}\left(\mathbf{B}^T_I\mathbf{K}^e_{II}\mathbf{B}_I+\mathbf{B}^T_I\mathbf{K}^e_{IJ^e}\mathbf{B}_{J^e}\right)\boldsymbol{\Delta}=\mathbf{B}^T_I\mathbf{F}^{ext}_I \tag{8.10}$$

que es la ecuación de equilibrio del nudo I, pero empleando las deformaciones de todos los nudos de la estructura. El tamaño de esta ecuación se ha ampliado de esta forma hasta el tamaño del vector $\boldsymbol{\Delta}$, es decir a todos los grados de libertad de la estructura.

8.3.3 Equilibrio de todos los nudos

Existe una ecuación como la (8.10) para cada nudo de la estructura, y para tenerlas en cuenta todas ellas a la vez, basta con sumar la expresión (8.10) a todos los nudos. Dado que la ecuación se ha referido a todos los grados de libertad $\boldsymbol{\Delta}$, las matrices de ordenación $\mathbf{B}$ se encargan de situar cada término en su lugar y las matrices resultantes pueden sumarse directamente.

$$\sum_I\sum_{e(I)}\left(\mathbf{B}^T_I\mathbf{K}^e_{II}\mathbf{B}_I+\mathbf{B}^T_I\mathbf{K}^e_{IJ^e}\mathbf{B}_{J^e}\right)\boldsymbol{\Delta}=\sum_I\mathbf{B}^T_I\mathbf{F}^{ext}_I \tag{8.11}$$

Se obtiene así el sistema de ecuaciones de equilibrio de todos los grados de libertad $\boldsymbol{\Delta}$ de la estructura.

La formación de este sistema de ecuaciones es muy sistemática: se recorren todos los nudos de la estructura (primer sumatorio) y para cada uno de ellos se recorren todos los elementos que llegan a él (segundo sumatorio), calculándose la rigidez directa que se aporta a ese nudo y la rigidez cruzada con cada nudo vecino. A continuación estas matrices se multiplican por la matriz $\mathbf{B}$ correspondiente, a fin de situarlas en su posición definitiva. Finalmente se suman todas ellas para obtener $\mathbf{K}$. Como término independiente se emplean las fuerzas exteriores aplicadas sobre el nudo, multiplicadas por la matriz de ordenación de cada nudo a fin de situarlas en el vector de fuerzas total.

La ecuación (8.11) puede simplificarse si se tienen en cuenta dos hechos.

- El término de la derecha no es otra cosa que el vector de todas las fuerzas exteriores actuantes sobre la estructura $\mathbf{F}^{ext}$, que se obtiene por ensamblado a través de las matrices $\mathbf{B}_I$ de los vectores de fuerzas aplicados en cada nudo $\mathbf{F}^{ext}_I$:

$$\sum_I\mathbf{B}^T_I\mathbf{F}^{ext}_I=\mathbf{F}^{ext} \tag{8.12}$$

- Los términos de la izquierda pueden calcularse de forma más sistemática. Los dos sumatorios existentes visitan cada barra dos veces (una vez para cada uno de sus nudos extremos) y en cada ocasión calculan dos submatrices de rigidez, con lo que en total se calculan $4n_B$ submatrices de rigidez (siendo n_B el número de barras). Por esta razón es posible reordenar la forma en que se calculan los coeficientes de rigidez, y emplear un único sumatorio que recorre todas las barras y calcula las cuatro submatrices de rigidez.

$$\sum_e \left(\mathbf{B}_I^T \mathbf{K}_{II}^e \mathbf{B}_I + \mathbf{B}_I^T \mathbf{K}_{IJ}^e \mathbf{B}_J + \mathbf{B}_J^T \mathbf{K}_{JI}^e \mathbf{B}_I + \mathbf{B}_J^T \mathbf{K}_{JJ}^e \mathbf{B}_J\right)\boldsymbol{\Delta} = \mathbf{F}^{ext} \tag{8.13}$$

En esta expresión los dos primeros términos de rigidez provienen del equilibrio del nudo I y los dos últimos provienen del equilibrio del nudo J, todos ellos para el elemento *e*. Los coeficientes del sistema de ecuaciones anterior constituyen la *matriz de rigidez de la estructura* **K**, con lo que las ecuaciones (8.13) u (8.11) se pueden poner en la forma:

$$\mathbf{K}\boldsymbol{\Delta} = \mathbf{F}^{ext} \tag{8.14}$$

Otro proceso de deducción

Un análisis detallado de los coeficientes de rigidez en (8.13) muestra que corresponden a la matriz de rigidez del elemento *e*, expandidos al conjunto de todos los grados de libertad de la estructura. Esto puede observarse con más detalle si se considera la ecuación de equilibrio de un elemento cualquiera:

$$\begin{bmatrix} \mathbf{K}_{II}^e & \mathbf{K}_{IJ}^e \\ \mathbf{K}_{JI}^e & \mathbf{K}_{JJ}^e \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \boldsymbol{\Delta}_I \\ \boldsymbol{\Delta}_J \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \mathbf{F}_I^e \\ \mathbf{F}_J^e \end{Bmatrix} \tag{8.15}$$

Las deformaciones nodales se pueden sustituir por su valor en función de $\boldsymbol{\Delta}$, empleando la matriz de ordenación de todos los grados de libertad del elemento, que es:

$$\begin{Bmatrix} \boldsymbol{\Delta}_I \\ \boldsymbol{\Delta}_J \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{B}_I \\ \mathbf{B}_J \end{bmatrix} \boldsymbol{\Delta} \tag{8.16}$$

Sustituyendo en la ecuación de equilibrio anterior y premultiplicando por $\begin{bmatrix} \mathbf{B}_I \\ \mathbf{B}_J \end{bmatrix}^T$ se obtiene:

$$\left(\mathbf{B}_I^T \mathbf{K}_{II}^e \mathbf{B}_I + \mathbf{B}_I^T \mathbf{K}_{IJ}^e \mathbf{B}_J + \mathbf{B}_J^T \mathbf{K}_{JI}^e \mathbf{B}_I + \mathbf{B}_J^T \mathbf{K}_{JJ}^e \mathbf{B}_J\right)\boldsymbol{\Delta} = \mathbf{B}_I^T \mathbf{F}_I^e + \mathbf{B}_J^T \mathbf{F}_J^e \tag{8.17}$$

que es la expresión de la ecuación de equilibrio del elemento *e*, transformada al sistema de grados de libertad de toda la estructura $\boldsymbol{\Delta}$. El término de la izquierda es la matriz de rigidez del elemento transformada al conjunto $\boldsymbol{\Delta}$, y es la misma que se halló en la expresión (8.13).

La ecuación anterior es para un elemento cualquiera *e*, pero puede sumarse a todos los elementos de la estructura, a fin de tener cuenta el equilibrio de todos y cada uno de ellos, resultando:

$$\sum_e \left(\mathbf{B}_I^T \mathbf{K}_{II}^e \mathbf{B}_I + \mathbf{B}_I^T \mathbf{K}_{IJ}^e \mathbf{B}_J + \mathbf{B}_J^T \mathbf{K}_{JI}^e \mathbf{B}_I + \mathbf{B}_J^T \mathbf{K}_{JJ}^e \mathbf{B}_J\right)\boldsymbol{\Delta} = \sum_e \left(\mathbf{B}_I^T \mathbf{F}_I^e + \mathbf{B}_J^T \mathbf{F}_J^e\right) \tag{8.18}$$

El término de la derecha contiene la suma de las fuerzas sobre los dos nudos extremos I,J de todas las barras de la estructura, adaptadas al conjunto total de grados de libertad. Por equilibrio de los nudos esta suma es igual a las suma de todas las fuerzas exteriores actuantes sobre los nudos $\mathbf{F}^{ext}$. De esta manera se obtiene la misma expresión (8.13) para la ecuación de equilibrio de toda la estructura.

La expresión (8.18) muestra que la matriz de rigidez **K** de la estructura se obtiene por suma de las matrices de rigidez de todos los elementos, tras su expansión al conjunto de grados de libertad de toda la estructura. En la práctica la transformación de la matriz del

elemento no se hace mediante multiplicación por la matriz de ordenación **B**, sino que sencillamente se procede a su ordenación término a término dentro de la matriz general de toda la estructura.

8.4 PROPIEDADES DE LA MATRIZ DE RIGIDEZ DE LA ESTRUCTURA

La matriz de rigidez de la estructura **K** es una matriz cuadrada, de tamaño igual al número total de grados de libertad de la estructura. Si ésta tiene N nudos y cada uno de ellos tiene M grados de libertad, el tamaño de **K** es NxM (M es 2 para las celosías planas, 3 para celosías espaciales, pórticos planos y emparrillados, y 6 para pórticos espaciales). Se trata de una matriz simétrica, como ya quedó demostrado en el capítulo 7.

La matriz **K** se obtiene por ensamblaje de las matrices de rigidez de los distintos elementos que forman la estructura, en los grados de libertad correspondientes a aquellos nudos a los que se une cada elemento.

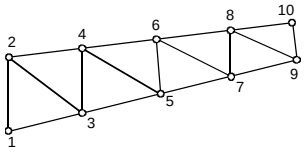
La matriz de rigidez **K** es dispersa y además puede tener una estructura de banda. Esto se debe a que cada elemento solamente aporta rigidez a los grados de libertad de aquellos nudos a los que se une; por lo tanto si un nudo I no está relacionado directamente con otro nudo J, en los términos de acople entre sus grados de libertad no se añade ninguna rigidez. Esto hace que la matriz **K** tenga muchos ceros, es decir sea de estructura dispersa. Por otra parte si la numeración de los nudos es adecuada ocurre que los términos no nulos de la matriz se agrupan alrededor de la diagonal, en lo que se llama estructura de banda.

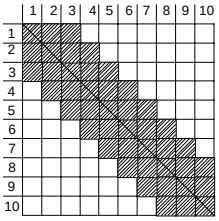
En otro tipo de estructuras no es tan clara la estructura de banda, y se utiliza otra forma de almacenamiento que se llama de "altura de columna variable", en la que sólo se almacena aquella parte de las columnas de **K** que es distinta de cero. A la línea que limita la zona de términos no nulos se le llama el "perfil", y al número de términos que hay entre la diagonal y el perfil se le llama "volumen" de la matriz

Naturalmente el aspecto que adopta la matriz **K** depende de la numeración que se asigne a los nudos, y de cómo están relacionados éstos a través de los elementos. Por lo tanto es importante elegir una numeración correcta, pues permite generar muchos más ceros en **K**, facilitando su manejo. Existen algoritmos que son capaces de renumerar la numeración inicial y obtener otra que genere un ancho de banda menor.

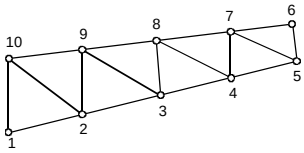
En todo caso, si no se dispone de un algoritmo de renumeración, es conveniente el numerar los nudos de tal forma que cualquier barra conecte a dos nudos cuya numeración sea lo más próxima posible.

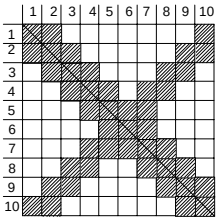
Ejemplo. *En la estructura de la figura la numeración de los nudos empleada permite obtener una estructura de banda muy compacta, siendo necesario guardar sólo los términos no nulos, que se muestran rayados en la figura, y que son 27 en lugar de los 100 que tendría la matriz completa. Al ser una celosía plana cada nudo tiene dos grados de libertad por lo que cada celdilla es de tamaño 2x2.*





Con la numeración que se muestra a continuación, los términos no nulos se distribuyen en la matriz de forma distinta, sin que se identifique una estructura de banda.

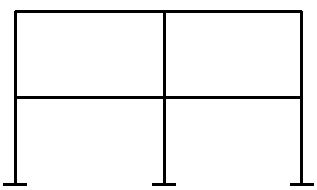




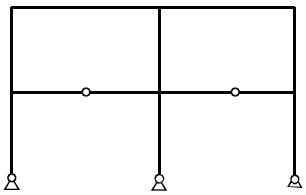
8.5 COMPARACIÓN CON EL MÉTODO DE FLEXIBILIDAD

Una vez conocidos los fundamentos del método de rigidez, puede establecerse una comparación con el de flexibilidad. En primer lugar hay que decir que el método de flexibilidad origina de ordinario un sistema de ecuaciones de menor tamaño que el método de rigidez.

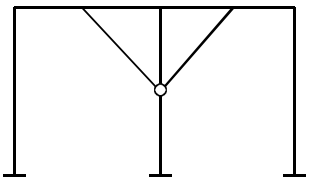
Ejemplo. *La figura siguiente muestra una serie de pórticos planos, indicando su grado de hiperestaticidad h y su número de grados de libertad mínimo g.*



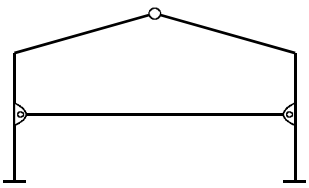
h=12 g=18



h=7 g=22



h=9 g=17



h=3 g=14

Al diseñar una estructura, interesa conocer los esfuerzos a los que están sometidos sus elementos. Para esto es más rápido el método de flexibilidad, pues los esfuerzos se obtienen

directamente. El método de rigidez requiere otro paso posterior: primero se hallan los desplazamientos y después se calculan los esfuerzos, aunque el proceso es muy simple

Un inconveniente importante a la hora de emplear el método de flexibilidad, es la necesidad de determinar el grado de hiperestaticidad de la estructura y de tener que elegir un conjunto de fuerzas redundantes. Esta decisión es muy difícil de tomar de forma automática, por lo que se dificulta su empleo en un ordenador.

En contrapartida, el método de los rigidez no exige tomar ninguna decisión de este tipo para poderse aplicar, sino que los grados de libertad se seleccionan de forma automática, en función del tipo de estructura. Por esta última razón es mucho más sencilla su programación y uso en un ordenador, aunque el número final de ecuaciones sea mayor.

La ventaja decisiva del método de rigidez está en la facilidad con la que se puede formar la matriz de rigidez de la estructura, a partir de cada una de las matrices de rigidez de las barras que la forman, mediante un sencillo proceso de ensamblaje. El cálculo de la matriz de flexibilidad puede realizarse de forma análoga, pero la dificultad es muy superior, ya que para hallar un coeficiente de flexibilidad ha de resolverse una estructura isostática y calcular sus deformaciones.

Otra ventaja del método de rigidez estriba en que se obtiene una matriz de rigidez dispersa, o con estructura de banda si los nudos se numeran adecuadamente, lo cual facilita en gran manera la resolución del sistema de ecuaciones final.

Resumiendo, las ventajas decisivas del método de rigidez son la facilidad de construcción sistemática de la matriz de rigidez, y su aplicación sencilla y automática a prácticamente cualquier estructura, sin tener que tomar decisiones previas. Estas ventajas hacen que el método de rigidez sea el universalmente utilizado en la actualidad para el análisis de estructuras, en particular si se emplea un ordenador.

8.6 FUERZAS EXTERIORES SOBRE LOS NUDOS

Las fuerzas exteriores aplicadas sobre los nudos pasan directamente al vector de fuerzas nodales **F**. Cada fuerza aplicada en un nudo se añade directamente al término F_i correspondiente al grado de libertad Δ_i sobre el que actúa.

Este hecho se ha tenido en cuenta en la deducción de las ecuaciones de equilibrio de la estructura, en las que se impuso el equilibrio de cada nudo según cada uno de sus grados de libertad, equilibrando las fuerzas que hacen los elementos sobre el nudo con las fuerzas exteriores que actúan sobre el nudo (ecuación (8.7)).

8.7 FUERZAS EXTERIORES SOBRE LOS ELEMENTOS

Se considera aquí el tratamiento de cualquier tipo de carga aplicada sobre los elementos, como fuerzas distribuidas, fuerzas o momentos puntuales no aplicados en los nudos, efectos térmicos… La presencia de estas cargas provoca unas deformaciones y unos esfuerzos cuya determinación requiere considerar los términos adecuados en las ecuaciones de equilibrio.

El objetivo es determinar, para todas las fuerzas actuantes sobre los elementos, unas fuerzas equivalentes a ellas, denominadas *fuerzas nodales equivalentes*, que están aplicadas sobre los nudos y producen las mismas deformaciones en éstos que las fuerzas originales.

La situación real de la estructura se considera como suma de dos estados o fases diferentes, denominados 0 y 1.

Fase 0: empotramiento perfecto

En esta fase actúan las cargas aplicadas sobre las barras, y además se supone que los nudos no se deforman nada bajo la acción de dichas cargas aplicadas en las barras, es decir que todas las deformaciones nodales son nulas. Para conseguir este estado ficticio deben actuar sobre los nudos unas fuerzas exteriores ficticias $\mathbf{F}^0$, de la magnitud necesaria para mantener nulas las deformaciones nodales.

Al no existir deformaciones nodales, cada elemento tiene sus dos extremos perfectamente fijos, sin ninguna posibilidad de deformación y queda por lo tanto reducido a una barra biempotrada. En esta situación las fuerzas sobre los extremos de la barra (figura 8.3) no son otras que las fuerzas de empotramiento perfecto de dicha barra en sus dos nudos, que se denominan:

- ◊ $\mathbf{P}_I^{0e}$ fuerzas de empotramiento perfecto actuando sobre el nudo I de la barra *e*, referidas al sistema de ejes local de la barra. Su cálculo es muy sencillo al ser una viga biempotrada de un sólo vano.
- ◊ $\mathbf{F}_I^{0e}$ fuerzas de empotramiento perfecto actuando sobre el nudo I de la barra *e*, pero referidas al sistema general de la estructura, obtenidas por rotación de las anteriores:

$$\mathbf{F}_I^{0e} = \mathbf{T}^{eT}\mathbf{P}_I^{0e} \tag{8.19}$$

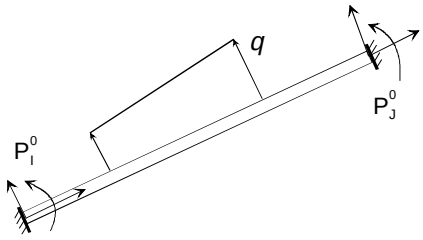


Figura 8.3

La estructura queda de este modo reducida a un conjunto de vigas empotradas en sus dos extremos, independientes unas de otras, y sometidas cada una de ellas a las fuerzas exteriores.

A continuación se calcula el valor que deben tener las fuerzas ficticias aplicadas desde el exterior sobre los nudos, para mantener los nudos sin deformación.

Sobre el extremo I de la barra *e* actúan las fuerzas de empotramiento perfecto $\mathbf{F}_I^{0e}$, luego sobre el nudo I actúa una fuerza igual y de signo contrario. El equilibrio del nudo I implica que la suma de todas las fuerzas aplicadas por los elementos sobre el nudo, más la fuerza que es necesario aplicar desde el exterior es nula:

$$\mathbf{F}_I^0 + \sum_e (-\mathbf{F}_I^{0e}) = 0 \tag{8.20}$$

donde $\mathbf{F}_I^0$ es la fuerza a aplicar desde el exterior, y el sumatorio se extiende a todos los elementos que confluyen en I. Despejando el valor de la fuerza que hay que hacer desde el exterior para mantener el nudo I fijo se obtiene:

$$\mathbf{F}_I^0 = \sum_e \mathbf{F}_I^{0e} \tag{8.21}$$

Es decir que hay que aplicar desde el exterior una fuerza $\mathbf{F}_I^0$ igual a la suma de todas las fuerzas de empotramiento perfecto en todas las barras que confluyen en el nudo I.

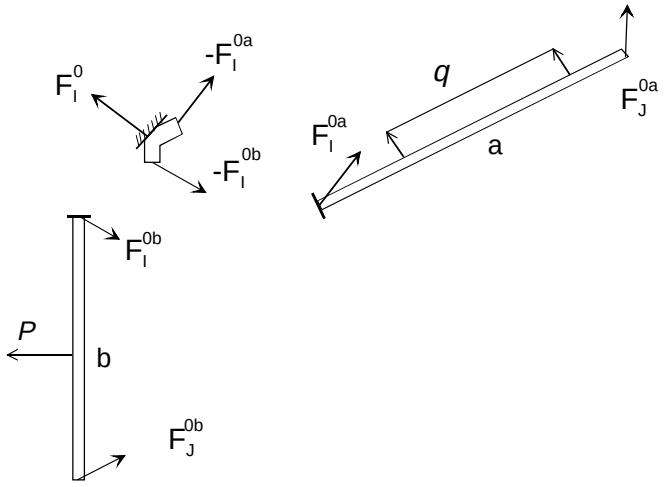


Figura 8.4

El vector de todas las fuerzas aplicadas sobre todos los nudos se obtiene por ensamblado de todas las fuerzas anteriores:

$$\mathbf{F}^0 = \sum_I \mathbf{B}_I^T \mathbf{F}_I^0 \tag{8.22}$$

donde $\mathbf{B}_I$ es la matriz de ordenación del nudo I en el conjunto de todos los nudos de la estructura. Al final de esta fase, la estructura está sometida a un sistema de cargas nodales $\mathbf{F}^0$, tal que su acción y la de las fuerzas exteriores aplicadas sobre las barras, anulan todas las deformaciones de los nudos.

Fase 1: deformación de los nudos

En esta fase se aplican sobre los nudos unas fuerzas iguales y de sentido contrario a las que ha sido necesario aplicar en la fase 0: $-\mathbf{F}^0$, con lo que se restituye la situación real de la estructura. Si sobre la estructura existen fuerzas exteriores $\mathbf{F}^N$ actuando directamente sobre los nudos, éstas se aplican también en esta fase.

La ecuación de equilibrio de la estructura en esta fase es:

$$\mathbf{K}\boldsymbol{\Delta} = \mathbf{F}^N - \mathbf{F}^0 \tag{8.23}$$

Esta ecuación indica que para el cálculo de las deformaciones es necesario emplear, como fuerzas nodales equivalentes debidas a las cargas en las barras, *a las fuerzas de empotramiento perfecto sobre las barras, obtenidas en la fase 0, ensambladas con signo menos*. La solución de la ecuación anterior permite obtener las deformaciones de los nudos de la estructura, que se producen sólo en esta fase 1 (figura 8.5).

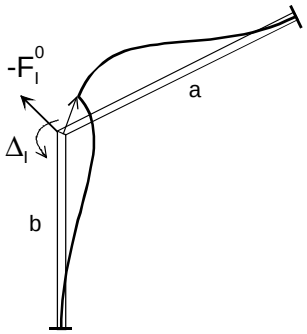


Figura 8.5

8.8 ESFUERZOS EN LOS ELEMENTOS

Los esfuerzos finales en los extremos de los elementos se obtienen superponiendo las dos mismas fases 0 y 1 empleadas para el cálculo de las deformaciones.

- Los esfuerzos en los extremos de una barra en la fase 0 son los esfuerzos de empotramiento perfecto originados por las cargas actuantes sobre ella. Éstos se conocen normalmente en el sistema de ejes local del elemento:

$$\mathbf{P}^{0e} = \begin{Bmatrix} \mathbf{P}_I^{0e} \\ \mathbf{P}_J^{0e} \end{Bmatrix} \tag{8.24}$$

- Los esfuerzos en los extremos de la barra en la fase 1 son los debidos a las deformaciones de sus nudos $\boldsymbol{\delta}^e$. Estas últimas se extraen del vector de deformaciones de la estructura $\boldsymbol{\Delta}$, empleando la matriz $\mathbf{B}$ de cada nudo:

$$\boldsymbol{\Delta}_I = \mathbf{B}_I \boldsymbol{\Delta} \qquad\qquad \boldsymbol{\Delta}_J = \mathbf{B}_J \boldsymbol{\Delta} \tag{8.25}$$

  A continuación se proyectan al sistema local de la barra y se agrupan:

$$\boldsymbol{\delta}^e = \begin{Bmatrix} \boldsymbol{\delta}_I \\ \boldsymbol{\delta}_J \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \mathbf{T}\boldsymbol{\Delta}_I \\ \mathbf{T}\boldsymbol{\Delta}_J \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{T}\mathbf{B}_I \\ \mathbf{T}\mathbf{B}_J \end{bmatrix} \boldsymbol{\Delta} \tag{8.26}$$

  con lo que los esfuerzos en la fase 1 son:

$$\mathbf{P}^{1e} = \mathbf{K}_L^e \boldsymbol{\delta}^e \tag{8.27}$$

Los esfuerzos finales en la barra son la suma de las fases 0 y 1 (figura 8.6):

$$\mathbf{P}^e = \mathbf{P}^{0e} + \mathbf{K}_L^e \boldsymbol{\delta}^e \tag{8.28}$$

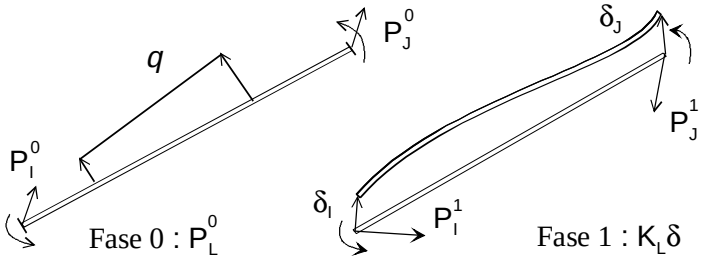


Figura 8.6

8.9 CARGAS TÉRMICAS

La existencia de variaciones en la temperatura de los elementos de la estructura, con respecto a la temperatura a la que se montaron, origina una serie de deformaciones y esfuerzos, que se suman a los producidos por las fuerzas exteriores. La variación en la temperatura de los elementos se traduce en una serie de cargas equivalentes, de origen térmico, cuya magnitud se trata de evaluar.

Al estar las variaciones de temperatura localizadas en los elementos de la estructura, las cargas térmicas se tratan igual que todas las acciones actuantes sobre las barras: se deben determinar las fuerzas de fase 0 producidas por dichas variaciones de temperatura. Por lo tanto el problema a resolver es simplemente determinar las fuerzas de empotramiento perfecto para una viga biempotrada sometida a variaciones de temperatura (figura 8.7).

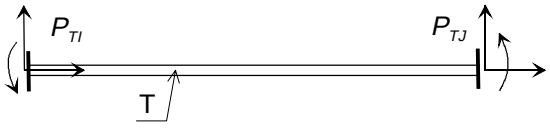


Figura 8.7

Sea un elemento cualquiera sometido a un campo de temperatura en su interior *T(x,y,z)* y que está perfectamente empotrado en sus extremos. Este problema (fase 0) se puede descomponer a su vez en suma de otros dos, que se desarrollan a continuación.

Fase 0a: estado de libre dilatación

En esta fase se deja al elemento dilatarse libremente, sin que se imponga ninguna restricción a su movimiento, de tal manera que no aparezcan fuerzas sobre él. En esta situación la energía elástica acumulada en el elemento es nula.

La manera más simple de conseguir este estado es sustentar al elemento isostáticamente, puesto que si a una estructura sustentada isostáticamente se le aplican efectos térmicos no aparece en ella ningún esfuerzo, aunque sí aparezcan deformaciones.

Las deformaciones que aparecen en los extremos del elemento en este estado se denominan $\boldsymbol{\delta}_T$ (referidas al sistema local). Naturalmente existen muchas expresiones de estas deformaciones, tantas como posibles estados de libre dilatación pueden obtenerse, aunque todas ellas se diferencian entre sí en un movimiento de sólido rígido del elemento. Por ejemplo, para un elemento plano, basta con eliminar tres de las seis restricciones

existentes en el elemento biempotrado, y transformarlo en un voladizo o en una viga simplemente apoyada (figura 8.8).

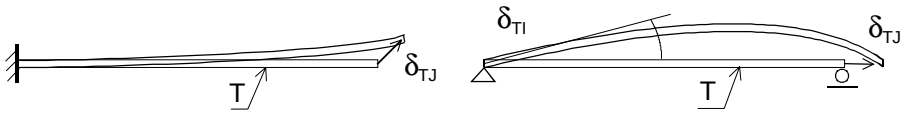


Figura 8.8

Los esfuerzos en los extremos del elemento son:

$$\mathbf{P}^{0a} = \mathbf{K}_L^{0a}\boldsymbol{\delta}_T = \mathbf{0}$$

donde $\mathbf{K}_L^{0a}$ es la matriz de rigidez del elemento en su estado de libre dilatación. Estos esfuerzos son siempre nulos, sea cual sea el estado de libre dilatación elegido.

El cálculo de las deformaciones de libre dilatación no es un problema de análisis estructural sino un problema de dilatación de sólidos, que se resolverá para cada tipo de elemento estructural diferente y para cada distribución de temperatura.

Fase 0b: restitución del caso 0

Para restituir el estado original 0, de empotramiento perfecto, hay que devolver las deformaciones del elemento a cero. Para ello basta con aplicar unas deformaciones iguales y de sentido contrario a las generadas en la fase 0a, es decir $-\boldsymbol{\delta}_T$ (figura 8.9). Para obtener estas deformaciones, las fuerzas que hay que aplicar sobre el elemento son:

$$\mathbf{P}^{0b} = \mathbf{K}_L(-\boldsymbol{\delta}_T) \tag{8.29}$$

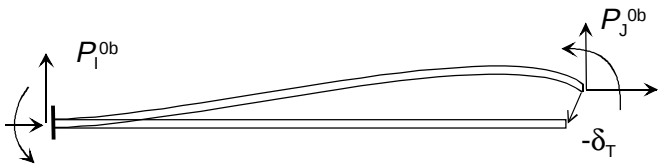


Figura 8.9

Tras este proceso, la suma de las fases 0a y 0b coincide con la fase 0 inicial. Los valores de las distintas magnitudes en esta fase 0 son:

- Deformaciones: $\boldsymbol{\delta}^0 = \boldsymbol{\delta}_T + (-\boldsymbol{\delta}_T) = 0$
- Esfuerzos: $\mathbf{P}_T^0 = \mathbf{P}^{0a} + \mathbf{P}^{0b} = \mathbf{0} + \mathbf{K}_L(-\boldsymbol{\delta}_T)$

La expresión obtenida para las fuerzas nodales equivalentes a las variaciones de temperatura es:

$$\mathbf{P}_T^0 = -\mathbf{K}_L\boldsymbol{\delta}_T \tag{8.30}$$

En esta expresión el valor de $\boldsymbol{\delta}_T$ son las deformaciones que se producen en el elemento en un estado de libre dilatación cualquiera. Son función de la distribución de temperatura, de las dimensiones del elemento y de su coeficiente de dilatación térmica, pero no de las

condiciones en sus extremos (articulado, empotrado…). $\mathbf{K}_L$ es la matriz de rigidez del elemento en su sistema local, que depende del tipo de elemento de que se trate.

Una vez obtenidas mediante la expresión (8.30), las fuerzas debidas a las temperaturas siguen exactamente el mismo proceso que todas las demás cargas actuantes sobre los elementos, es decir que se ensamblan en el vector de fuerzas de toda la estructura, con signo menos.

Las fuerzas nodales equivalentes a las temperaturas deben asimismo tenerse en cuenta al calcular los esfuerzos finales en los extremos de los elementos, como cualquier otra fuerza de fase 0 (apartado 8.8).

8.10 VIGAS PLANAS CON TEMPERATURA

Se supone una viga plana cualquiera, sin precisarse por el momento las condiciones en sus extremos (articulado, empotrado..). Sean *h* su canto (distancia entre sus caras superior e inferior) y α el coeficiente de dilatación lineal del material, que se suponen constantes en toda su longitud. Se emplea un sistema de ejes local X_L,Y_L con el eje X_L orientado desde el nudo inicial I al final J (figura 8.10).

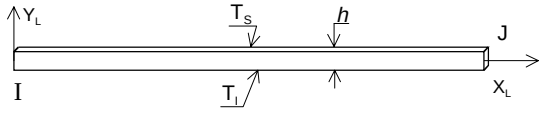


Figura 8.10

Se supone una distribución de temperaturas lineal entre dos valores extremos T_S en la cara superior (Y_L positivo) y T_I en la cara inferior (Y_L negativo). Esta distribución de temperatura se supone constante en toda la longitud de la viga. La temperatura en un punto cualquiera situado a una distancia *y* del eje de la viga es:

$$T = (T_S + T_I)/2 + y(T_S - T_I)/h \qquad (8.31)$$

$$T = T_m + yT_g$$

donde se han definido:

- temperatura media: $T_m = (T_S + T_I)/2$
- temperatura gradiente entre ambas caras: $T_g = (T_S - T_I)/h$

8.10.1 Deformaciones de origen térmico

Para calcular las deformaciones en el estado de libre dilatación se elige éste como una viga en voladizo, empotrada en I y libre en J. Se trata por lo tanto de determinar las deformaciones del nudo J bajo la distribución de temperatura indicada.

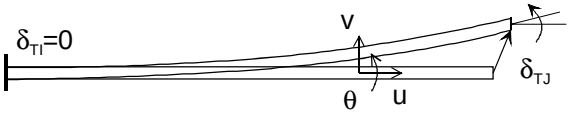


Figura 8.11

Sea un punto cualquiera P de la viga, situado a una distancia *y* de su eje (figura 8.12), cuyas deformaciones se denominan u_P v_P. Las deformaciones unitarias que se originan a consecuencia de las temperaturas, son:

$$\varepsilon_x = \frac{\partial u_P}{\partial x} = \alpha T \qquad \varepsilon_y = \frac{\partial v_P}{\partial y} = \alpha T \qquad \varepsilon_{xy} = \frac{\partial u_P}{\partial y} + \frac{\partial v_P}{\partial x} = 0 \tag{8.32}$$

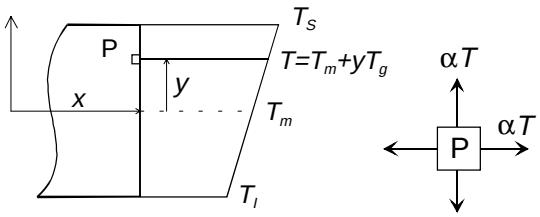


Figura 8.12

- Sustituyendo el valor de *T* en la expresión de ε_x e integrando en *x* se obtiene:

$$u_P = \int \varepsilon_x dx = \int \alpha T dx = \int (\alpha T_m + \alpha y T_g) dx = \alpha T_m x + \alpha T_g xy + f(y) \tag{8.33}$$

La condición de que la sección inicial de la viga está toda ella fija implica que:

$$u_P(x=0,y)=0 \qquad \rightarrow \qquad f(y)=0 \tag{8.34}$$

El campo de desplazamientos horizontales u_P vale:

$$u_P = \alpha T_m x + \alpha T_g xy \tag{8.35}$$

es decir que la deformación horizontal u_P es lineal en la dirección axial *x*, y lineal asimismo en el espesor de la viga.

- La expresión de ε_{xy} permite poner:

$$\frac{\partial v_P}{\partial x} = -\frac{\partial u_P}{\partial y} = -\alpha T_g x \tag{8.36}$$

Integrando esta ecuación se obtiene el valor de la deformación vertical v_P :

$$v_P = -\alpha T_g x^2 / 2 + g(y) \tag{8.37}$$

La condición de que el nudo I está fijo implica que:

$$v_P(x=0,y)=0 \qquad \rightarrow \qquad g(y)=0 \tag{8.38}$$

La deformada vertical de la viga es por lo tanto una parábola con tangente horizontal en el nudo inicial I. En particular la deformación vertical *v* del eje de la viga es:

$$v = v_P(y=0) = -\alpha T_g x^2 / 2 \tag{8.39}$$

- El valor del giro del eje de la viga es:

$$\theta = \frac{dv}{dx} = -\alpha T_g x \tag{8.40}$$

Las deformaciones del nudo J son (figura 8.13):

$$\delta_{TJX} = u_P(x = L, y = 0) = \alpha T_m L$$
$$\delta_{TJY} = v_P(x = L, y = 0) = -\alpha T_g L^2 / 2 \qquad (8.41)$$
$$\theta_{TJZ} = \theta(x = L) = -\alpha T_g L$$

El vector de deformaciones térmicas en el estado de libre dilatación es:

$$\boldsymbol{\delta}_T = \begin{Bmatrix} \delta_{TIX} = 0 \\ \delta_{TIY} = 0 \\ \theta_{TI} = 0 \\ \delta_{TJX} = \alpha T_m L \\ \delta_{TJY} = -\alpha T_g L^2 / 2 \\ \theta_{TJ} = -\alpha T_g L \end{Bmatrix} \qquad (8.42)$$

Obsérvese que la deformación axial es producida únicamente por la temperatura media, mientras que la temperatura gradiente produce la flecha lateral y el giro.

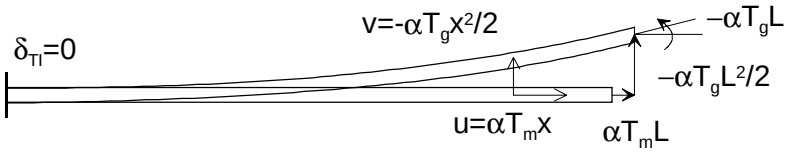


Figura 8.13

Los esfuerzos que aparecen en la fase 0 vienen dados por la ecuación (8.30), y su expresión es diferente para cada tipo de elemento estructural, al depender de la matriz de rigidez.

8.10.2 Elemento biarticulado plano

Este elemento no tiene giros en sus nudos, luego puede prescindirse del valor del giro en el vector $\boldsymbol{\delta}_{LT}$, o lo que es lo mismo, añadir a la matriz de rigidez del elemento dos filas y columnas nulas correspondientes a dichos giros. El valor que se obtiene para las fuerzas de fase 0 es:

$$\mathbf{P}_T^0 = \begin{Bmatrix} P_{IX} \\ P_{IY} \\ P_{JX} \\ P_{JY} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} EA\alpha T_m \\ 0 \\ -EA\alpha T_m \\ 0 \end{Bmatrix} \qquad (8.43)$$

Se observa que sólo interviene la temperatura media, y que aparece una fuerza de compresión de valor $EA\alpha T_m$. Esta es la fuerza que hay que aplicar en la barra para mantenerla con sus dos extremos fijos, cuando ella se dilata una magnitud $\alpha T_m L$ (figura 8.14).

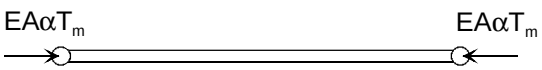


Figura 8.14

8.10.3 Elemento biempotrado plano

La expresión de los esfuerzos de fase 0 en este caso es:

$$\mathbf{P}_T^0 = \begin{Bmatrix} P_{IX} \\ P_{IY} \\ M_I \\ P_{JX} \\ P_{JY} \\ M_J \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} EA\alpha T_m \\ 0 \\ -EI\alpha T_g \\ -EA\alpha T_m \\ 0 \\ EI\alpha T_g \end{Bmatrix} \tag{8.44}$$

Se observa que los esfuerzos son una compresión de valor $EA\alpha T_m$, y dos momentos iguales y de signo contrario, de valor $EI\alpha T_g$. Los esfuerzos cortantes son nulos: la barra está en un estado de flexión pura. El sentido físico de las deformaciones y esfuerzos es el indicado en la figura 8.15.

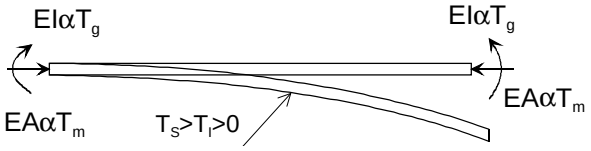


Figura 8.15

8.10.4 Elemento empotrado - articulado plano

Los esfuerzos de fase 0 para este elemento son:

$$\mathbf{P}_T^0 = \begin{Bmatrix} P_{IX} \\ P_{IY} \\ M_I \\ P_{JX} \\ P_{JY} \\ M_J \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} EA\alpha T_m \\ -3EI\alpha T_g / 2L \\ -3EI\alpha T_g / 2 \\ -EA\alpha T_m \\ 3EI\alpha T_g / 2L \\ 0 \end{Bmatrix} \tag{8.45}$$

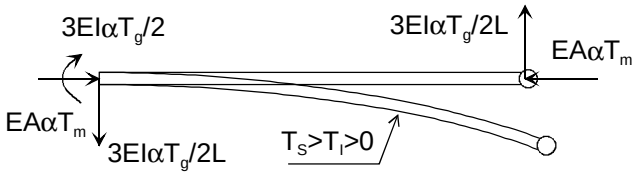


Figura 8.16

En este caso sí que existen esfuerzos cortantes, para equilibrar el único momento que aparece en el nudo I (figura 8.16).

8.10.5 Elemento articulado - empotrado plano

Los esfuerzos de fase 0 para este elemento se muestran en la figura 8.17, y su valor es:

$$\mathbf{P}_T^0 = \begin{Bmatrix} P_{IX} \\ P_{IY} \\ M_I \\ P_{JX} \\ P_{JY} \\ M_J \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} EA\alpha T_m \\ 3EI\alpha T_g / 2L \\ 0 \\ -EA\alpha T_m \\ -3EI\alpha T_g / 2L \\ 3EI\alpha T_g / 2 \end{Bmatrix} \tag{8.46}$$

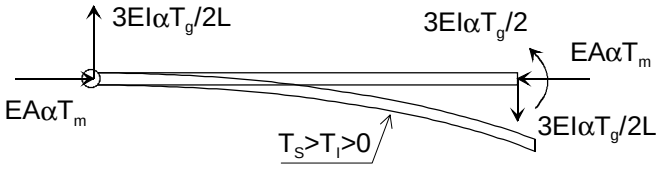


Figura 8.17

8.11 ELEMENTOS TRIDIMENSIONALES CON TEMPERATURA

Para los elementos espaciales se emplea su sistema de ejes local X_L,Y_L,Z_L con el eje X_L orientado desde el nudo inicial I al final J y los otros dos perpendiculares a él, según los ejes principales de la sección. Se supone una distribución de temperaturas lineal en cada una de las dos coordenadas locales Y_L, Z_L.

$$T = T_m + yT_{gy} + zT_{gz} \tag{8.47}$$

donde T_m es la temperatura media, T_{gy} es el gradiente en la dirección del eje Y_L, y T_{gz} es el gradiente en la dirección Z_L. Esta ley de variación corresponde a una distribución de la temperatura en la sección de la viga según un plano.

8.11.1 Deformaciones de origen térmico

Sea P un punto cualquiera, situado en una sección a una distancia x del nudo inicial y con coordenadas y,z en dicha sección, y cuyas deformaciones son u_P,v_P,w_P. Su estado de deformación unitaria está dado por:

$$\begin{aligned} &\varepsilon_x = \frac{\partial u_P}{\partial x} = \alpha T \qquad \varepsilon_y = \frac{\partial v_P}{\partial y} = \alpha T \qquad \varepsilon_z = \frac{\partial w_P}{\partial z} = \alpha T \\ &\varepsilon_{xy} = \frac{\partial u_P}{\partial y} + \frac{\partial v_P}{\partial x} = 0 \quad \varepsilon_{yz} = \frac{\partial v_P}{\partial z} + \frac{\partial w_P}{\partial y} = 0 \quad \varepsilon_{zx} = \frac{\partial w_P}{\partial x} + \frac{\partial u_P}{\partial z} = 0 \end{aligned} \tag{8.48}$$

- Sustituyendo el valor de T en la expresión de ε_x e integrando en x se obtiene:

$$u_P = \int \varepsilon_x dx = \int (\alpha T_m + \alpha y T_{gy} + \alpha z T_{gz}) dx = \alpha T_m x + \alpha T_{gy} xy + \alpha T_{gz} xz + f(y,z) \tag{8.49}$$

La condición de que la sección inicial de la viga está toda ella fija implica que

$$u(x=0,y,z) = 0 \qquad \rightarrow \qquad f(y,z) = 0 \tag{8.50}$$

El campo de desplazamientos u_P vale:

$$u_P = \alpha T_m x + \alpha T_{gy} xy + \alpha T_{gz} xz \tag{8.51}$$

es decir que la deformación axial u_P es lineal en la dirección x, y lineal asimismo en las dos direcciones transversales de la viga.

- La expresión de ε_{xy} permite poner:

$$\frac{\partial v_P}{\partial x} = -\frac{\partial u_P}{\partial y} = -\alpha T_{gy} x \tag{8.52}$$

que integrada permite obtener el valor de la deformación transversal v_P:

$$v_P = -\alpha T_{gy} x^2 / 2 + g(y,z) \tag{8.53}$$

La condición de que el nudo I está fijo implica que:

$$v_P(x=0,y,z) = 0 \qquad \rightarrow \qquad g(y,z) = 0 \tag{8.54}$$

La deformada lateral v_P de la viga es una parábola con tangente horizontal en el nudo inicial I. En particular, la deformación lateral del eje de la viga es:

$$v = v_P(y=0,z=0) = -\alpha T_{gy} x^2 / 2 \tag{8.55}$$

- El valor del giro θ_z de la viga es:

$$\theta_z = \frac{dv}{dx} = -\alpha T_{gy} x \tag{8.56}$$

- Con un desarrollo similar se obtiene la deformación w según el eje Z_L y su giro correspondiente:

$$w = -\alpha T_{gz} x^2 / 2 \qquad\qquad \theta_y = -\frac{dw}{dx} = \alpha T_{gz} x \tag{8.57}$$

El vector de deformaciones de origen térmico en los nudos se obtiene particularizando las deformadas obtenidas en los nudos I (x=0) y J (x=L). Su expresión resulta ser:

$$\boldsymbol{\delta}_T = \begin{Bmatrix} \delta_{IX} \\ \delta_{IY} \\ \delta_{IZ} \\ \varphi_{IX} \\ \varphi_{IY} \\ \varphi_{IZ} \\ \delta_{JX} \\ \delta_{JY} \\ \delta_{JZ} \\ \varphi_{JX} \\ \varphi_{JY} \\ \varphi_{JZ} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ \alpha T_m L \\ -\alpha T_{gy} L^2 / 2 \\ -\alpha T_{gz} L^2 / 2 \\ 0 \\ \alpha T_{gz} L \\ -\alpha T_{gy} L \end{Bmatrix} \tag{8.58}$$

Se observa que la temperatura media sólo influye en la deformación axial, que el gradiente según el eje Y sólo influye en el desplazamiento según Y y en el giro según Z, y que el gradiente según Z sólo influye en la flecha Z y en el giro Y.

8.11.2 Elemento biarticulado espacial

Al igual que para el elemento plano, debe prescindirse de los giros, que este elemento no posee, y considerar sólo las tres deformaciones.

El vector de esfuerzos de fase 0 que se obtiene es:

$$\mathbf{P}_T^0 = \begin{Bmatrix} P_{IX} \\ P_{IY} \\ P_{IZ} \\ P_{JX} \\ P_{JY} \\ P_{JZ} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} EA\alpha T_m \\ 0 \\ 0 \\ -EA\alpha T_m \\ 0 \\ 0 \end{Bmatrix} \qquad (8.59)$$

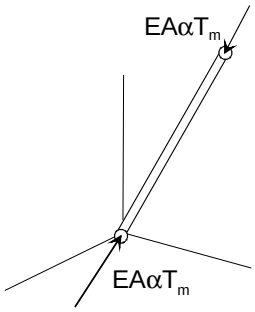


Figura 8.18

En la fase 0 el elemento está comprimido un valor $EA\alpha T_m$, igual al esfuerzo de compresión en el elemento plano (figura 8.18).

8.11.3 Elemento viga espacial

El vector de fuerzas de empotramiento debido a las temperaturas para este elemento es:

$$\mathbf{P}_T^0 = \begin{Bmatrix} P_{IX} \\ P_{IY} \\ P_{IZ} \\ m_{IX} \\ m_{IY} \\ m_{IZ} \\ P_{JX} \\ P_{JY} \\ P_{JZ} \\ m_{JX} \\ m_{JY} \\ m_{JZ} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} EA\alpha T_m \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ EI\alpha T_{gz} \\ -EI\alpha T_{gy} \\ -EA\alpha T_m \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ -EI\alpha T_{gz} \\ EI\alpha T_{gy} \end{Bmatrix} \qquad (8.60)$$

Contiene términos no nulos para el esfuerzo axial, que son función únicamente de la temperatura media, así como para los momentos flectores en las dos direcciones locales Y,Z, que son función de los correspondientes gradientes. No aparecen fuerzas de reacción laterales según los ejes Y,Z, por ser los momentos en los extremos iguales y de sentido contrario, por lo que en la fase 0el elemento está en un estado de flexión compuesta pura.

8.12 ELEMENTO DE EMPARRILLADO PLANO CON TEMPERATURA

La distribución de temperaturas en este elemento sólo puede tener la componente gradiente, con una temperatura media nula. Esto es debido a que este elemento no tiene grados de libertad de deformación axial, y como se ha visto anteriormente, la temperatura media sólo produce deformación axial; por lo tanto este elemento no puede admitir dicho tipo de temperatura media. Así pues se supone una variación de T lineal entre un valor T_S en la cara superior (Z positivo) y uno $T_I = -T_S$ en la cara inferior (Z negativo). El gradiente térmico entre las caras de la viga es:

$$T_g = \left(T_S - T_I\right) / h = 2T_S / h \tag{8.61}$$

8.12.1 Deformaciones de origen térmico

La temperatura en un punto P, situado a una distancia z del eje de la viga es $T = zT_g$, como se observa en la figura 8.19. Las deformaciones del punto P son u_P y w_P, y las deformaciones unitarias que se producen son:

$$\varepsilon_x = \frac{\partial u_P}{\partial x} = \alpha T = \alpha T_g z \qquad \varepsilon_z = \frac{\partial w_P}{\partial z} = \alpha T_g z \qquad \varepsilon_{xz} = \frac{\partial u_P}{\partial z} + \frac{\partial w_P}{\partial x} = 0 \tag{8.62}$$

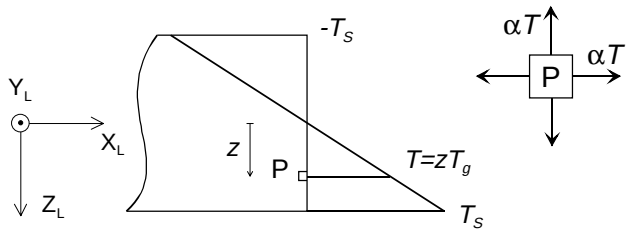


Figura 8.19

El campo de deformaciones de la viga se obtiene integrando en x la expresión de la deformación unitaria ε_x y aplicando las condiciones de contorno en el nudo inicial I, que está fijo. Denominando w a la deformación vertical del eje de la viga y θ_y a su giro, se obtiene:

$$u_P = \alpha T_g xz \qquad w = \frac{-\alpha T_g x^2}{2} \qquad \theta_y = -\frac{\partial w}{\partial x} = \alpha T_g x \tag{8.63}$$

La deformada axial del elemento es lineal en su longitud y en la sección transversal, mientras que su deformación lateral es una parábola (figura 8.20).

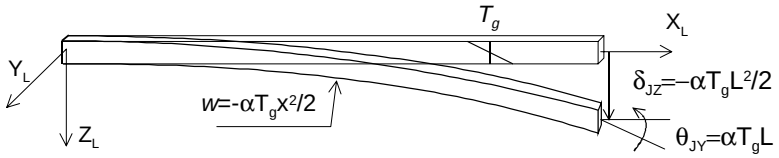


Figura 8.20

El vector de deformaciones de origen térmico se obtiene particularizando esta deformada a los nudos I y J:

$$\delta_T = \begin{Bmatrix} \theta_{IX} \\ \theta_{IY} \\ \delta_{IZ} \\ \theta_{JX} \\ \theta_{JY} \\ \delta_{JZ} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ \alpha T_g L \\ -\alpha T_g L^2 / 2 \end{Bmatrix} \tag{8.64}$$

8.12.2 Esfuerzos de fase 0

Los esfuerzos de fase 0 debidos a la distribución de temperaturas se obtienen multiplicando las deformaciones de origen térmico por la matriz de rigidez del elemento en coordenadas locales. Se obtiene:

$$\mathbf{P}_T^0 = \begin{Bmatrix} m_{IX} \\ m_{IY} \\ P_{IZ} \\ m_{JX} \\ m_{JY} \\ P_{JZ} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 0 \\ EI\alpha T_g \\ 0 \\ 0 \\ -EI\alpha T_g \\ 0 \end{Bmatrix} \tag{8.65}$$

Se observa que no aparecen cortantes, al igual que en la viga biempotrada, y que los momentos flectores que aparecen tienen el mismo valor que para dicha viga. El sentido de estas fuerzas puede verse en la figura 8.21.

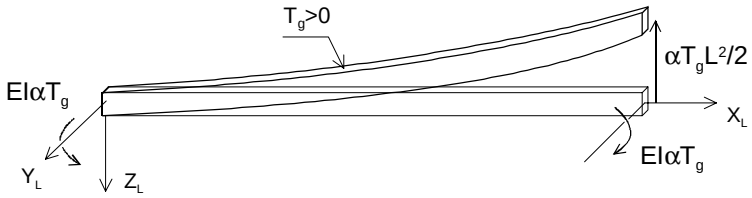


Figura 8.21

8.13 ERRORES EN LA FORMA DE LOS ELEMENTOS

Supongamos un elemento estructural cuya forma o tamaño natural no coincide con la forma o tamaño del espacio en el que se va a montar en la estructura. Si este elemento se monta en la estructura, forzándolo a adaptarse al espacio de montaje, se producen esfuerzos y deformaciones en la estructura, ya que el elemento trata de volver a su situación natural, arrastrando a la estructura. Esta situación puede producirse bien porque el elemento sea de dimensiones inadecuadas o bien porque, aún siendo del tamaño adecuado, el espacio para su montaje en la estructura no coincide con el tamaño del elemento, debido a incorrecciones en el ensamblaje anterior de la estructura. En cualquier caso, siempre que exista una discrepancia entre la forma natural del elemento y la forma que debe tener una vez montado

se producirán esfuerzos en la estructura. A estos efectos se considera como forma natural del elemento a la que tiene en su estado sin cargas.

En el estudio de las celosías, vigas y pórticos se ha considerado el hecho de que las barras sean de longitud diferente al espacio de montaje, pero ahora, la mayor generalidad del método de rigidez permite estudiar otros tipos de errores de forma más complejos.

Al estar los errores de forma localizados en los elementos de la estructura, su efecto se trata igual que todas las demás acciones actuantes sobre ellos: se deben determinar las fuerzas de fase 0 producidas por los errores de forma. Por lo tanto el problema a resolver es determinar las fuerzas de empotramiento perfecto de una viga biempotrada cuya forma o tamaño tiene una serie de errores. Estas fuerzas se denominan $\mathbf{P}_E^0$, y siguen el mismo proceso de ensamblaje que todas las demás.

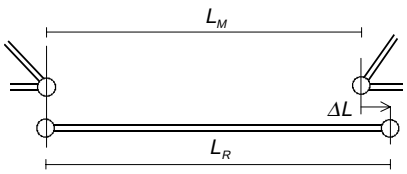
8.13.1 Cuantificación de los errores

El primer paso del análisis consiste en cuantificar la discrepancia entre la forma natural (descargada) del elemento y la forma que debe adoptar una vez montado. Esto se hace de manera muy simple definiendo un vector que contiene las deformaciones de los nudos del elemento real con respecto a la forma que tiene que adoptar una vez montado en la estructura. Se le denomina $\boldsymbol{\delta}_E$.

***Ejemplo**. Cuantificar el vector de errores de forma de una barra que es más larga que su longitud teórica en una magnitud ΔL*

El vector es:

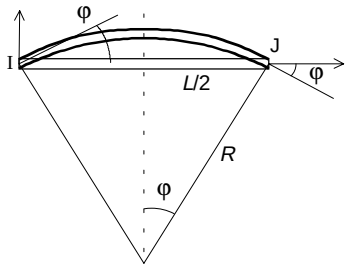
$$\boldsymbol{\delta}_E = \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \\ \Delta L \\ 0 \end{Bmatrix} \begin{matrix} \delta_{IX} \\ \delta_{IY} \\ \delta_{JX} \\ \delta_{JY} \end{matrix}$$



***Ejemplo**. Cuantificar el vector de errores de forma de una barra de longitud L, que está curvada circularmente con un radio R.*

$$sen\varphi = \frac{L/2}{R} \qquad \varphi \approx \frac{L}{2R}$$

$$\boldsymbol{\delta}_E = \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \\ L/2R \\ 0 \\ 0 \\ -L/2R \end{Bmatrix} \begin{matrix} \delta_{IX} \\ \delta_{IY} \\ \theta_I \\ \delta_{JX} \\ \delta_{JY} \\ \theta_J \end{matrix}$$



8.13.2 Esfuerzos de fase 0

Una vez cuantificados los errores, el tratamiento de este problema sigue el mismo camino que las cargas de origen térmico. La fase 0 se descompone en dos sub-fases (figura 8.22):

Fase 0a: estado natural del elemento, o de libre deformación

En esta fase el elemento no tiene a ningún impedimento a su deformación y por lo tanto se deforma hasta llegar a su forma natural, es decir a la forma errónea respecto a la teórica de montaje. Por lo tanto las deformaciones son precisamente el vector de errores:

$$\boldsymbol{\delta}_E^{0a} \equiv \boldsymbol{\delta}_E \tag{8.66}$$

y evidentemente las fuerzas sobre el elemento son nulas:

$$\mathbf{P}_E^{0a} = \mathbf{0} \tag{8.67}$$

Fase 0b: restitución de la fase 0

Para llevar al elemento a la fase 0, se aplican unas deformaciones nodales de valor:

$$\boldsymbol{\delta}_E^{0b} = -\boldsymbol{\delta}_E^{0a} \tag{8.68}$$

y para ello es necesario aplicar unas fuerzas nodales de valor:

$$\mathbf{P}_E^{0b} = \mathbf{K}_L \boldsymbol{\delta}_E^{0b} = -\mathbf{K}_L \boldsymbol{\delta}_E^{0a} = -\mathbf{K}_L \boldsymbol{\delta}_E \tag{8.69}$$

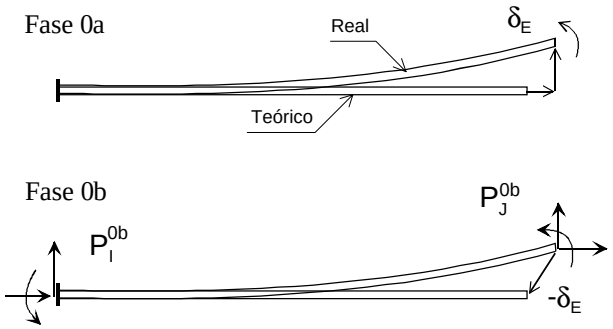


Figura 8.22

Las magnitudes resultantes en la fase 0 son la suma de las fases 0a y 0b:

- Deformaciones: $\boldsymbol{\delta}_E^0 = \boldsymbol{\delta}_E^{0a} + \boldsymbol{\delta}_E^{0b} = \boldsymbol{\delta}_E - \boldsymbol{\delta}_E = \mathbf{0}$
- Fuerzas: $\mathbf{P}_E^0 = \mathbf{P}_E^{0a} + \mathbf{P}_E^{0b} = \mathbf{0} - \mathbf{K}_L \boldsymbol{\delta}_E$

Por lo tanto las fuerzas de empotramiento perfecto en la fase 0 son:

$$\mathbf{P}_E^0 = -\mathbf{K}_L \boldsymbol{\delta}_E \tag{8.70}$$

Es la misma expresión que para las fuerzas debidas a las temperaturas (ecuación (8.30)), pero empleando el vector de errores de forma $\boldsymbol{\delta}_E$ en lugar de las deformaciones térmicas.

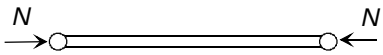
8.14 PRETENSIÓN INICIAL EN LOS ELEMENTOS

Se entiende por esfuerzos de pretensión inicial de un elemento a aquellos esfuerzos que hay que aplicar *sobre él* para poderlo montar en la estructura. Estos esfuerzos de pretensión inicial se originan por diferencias entre la forma geométrica real del elemento y el espacio disponible para su montaje en la estructura. A consecuencia de esta diferencia es necesario aplicar sobre el elemento unos esfuerzos exteriores para poderlo montar, que se eliminan una vez montado, pero que al desaparecer hacen que el elemento tienda a volver a su situación natural, produciendo esfuerzos y deformaciones en la estructura.

Se trata por lo tanto del mismo problema que el de errores en la forma del elemento, pero en este caso no se conocen los errores $\boldsymbol{\delta}_E$ en sí mismos, sino las fuerzas que hay que aplicar sobre el elemento para poderlo montar. Es decir que en este caso se conocen directamente las fuerzas de fase 0 sobre el elemento, y se denominan igual que las debidas a los errores: $\mathbf{P}_E^0$.

Ejemplo. *El vector de fuerzas de fase 0 para un elemento de celosía que necesita ser comprimido N* kg *para ser montado en la estructura es:*

$$\mathbf{P}_E^0 = \begin{Bmatrix} P_{IX} \\ P_{IY} \\ P_{JX} \\ P_{JY} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} +N \\ 0 \\ -N \\ 0 \end{Bmatrix}$$



8.14.1 Pretensión inicial en muelles de esfuerzo axial

Los muelles siguen el mismo tratamiento que los demás elementos estructurales para el cálculo de los esfuerzos de pretensión inicial. La ecuación de equilibrio de un muelle es:

$$S = K(\Delta - \Delta_0) \tag{8.71}$$

donde S es el esfuerzo y Δ es la deformación relativa entres sus extremos. Δ_0 es el error en la longitud del muelle, que es la diferencia entre su longitud natural L_N (estado descargado) y su longitud de montaje en la estructura L_M:

$$\Delta_0 = L_N - L_M \tag{8.72}$$

También puede ponerse (8.71) en la forma:

$$S = K\Delta + S_0 \tag{8.73}$$

donde S_0 es el esfuerzo de pretensión inicial que hay que aplicarle para montarlo:

$$S_0 = -K\Delta_0 \tag{8.74}$$

Nótese la total similitud de esta ecuación con la expresión general de los esfuerzos de pretensión inicial debidos a errores en la forma (ecuación (8.70)).

El vector de errores de forma puede ponerse como:

$$\boldsymbol{\delta}_E = \begin{Bmatrix} \delta_{IX} \\ \delta_{IY} \\ \delta_{JX} \\ \delta_{JY} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \delta_{EIX} \\ 0 \\ \delta_{EJX} \\ 0 \end{Bmatrix} \qquad (8.75)$$

donde los valores de δ_{EIX} y de δ_{EJX} se obtienen a partir de Δ_0. De hecho Δ_0 puede distribuirse entre δ_{EIX} y δ_{EJX} de forma arbitraria, con la condición de que entre ambas representen el valor del error de longitud Δ_0.

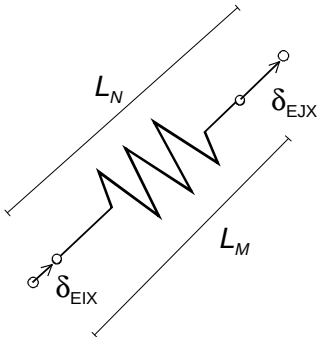


Figura 8.23

En efecto, según la figura 8.23 se cumple que:

$$\delta_{EIX} + L_N = L_M + \delta_{EJX} \qquad (8.76)$$

luego:

$$L_N - L_M = \delta_{EJX} - \delta_{EIX} = \Delta_0 \qquad (8.77)$$

En el vector de errores podrían ponerse errores también en la dirección Y, pero no darían lugar a esfuerzos de fase 0, al no haber rigidez en dicha dirección, por lo que se omiten. Las fuerzas de pretensión necesarias para el montaje del muelle son (ecuación (8.70)):

$$\mathbf{P}_E^0 = \begin{Bmatrix} P_{IX} \\ P_{IY} \\ P_{JX} \\ P_{JY} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} K(\delta_{EJX} - \delta_{EIX}) \\ 0 \\ -K(\delta_{EJX} - \delta_{EIX}) \\ 0 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} K\Delta_0 \\ 0 \\ -K\Delta_0 \\ 0 \end{Bmatrix} \qquad (8.78)$$

Nótese que los esfuerzos dependen de la diferencia de errores entre ambos nudos, es decir del error en longitud Δ_0.

Si en lugar del error se conoce la fuerza de pretensión S_0, el vector de esfuerzos de montaje (fase 0) es directamente:

$$\mathbf{P}_E^0 = \begin{Bmatrix} P_{IX} \\ P_{IY} \\ P_{JX} \\ P_{JY} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} -S_0 \\ 0 \\ S_0 \\ 0 \end{Bmatrix} \qquad (8.79)$$

donde $S_0 = -K\Delta_0$ es positivo si actúa a tracción sobre el muelle (figura 8.24). El vector de fuerzas de pretensión proyectado sobre el sistema general tiene la expresión siguiente, en función bien del error en longitud o de la pretensión:

$$\mathbf{F}_E^0 = \begin{Bmatrix} F_{IX} \\ F_{IY} \\ F_{JX} \\ F_{JY} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} -S_0 \cos\alpha \\ -S_0 \sin\alpha \\ S_0 \cos\alpha \\ S_0 \sin\alpha \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} K\Delta_0 \cos\alpha \\ K\Delta_0 \sin\alpha \\ -K\Delta_0 \cos\alpha \\ -K\Delta_0 \sin\alpha \end{Bmatrix} \tag{8.80}$$

donde α es el ángulo de inclinación del muelle con el eje X_G.

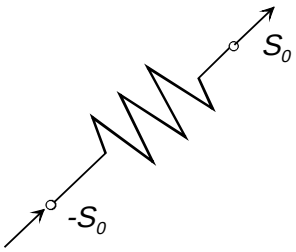


Figura 8.24

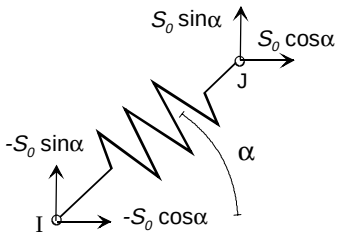


Figura 8.25

8.14.2 Pretensión inicial en muelles al giro

Los esfuerzos de pretensión en muelles al giro se originan a consecuencia de una desalineación angular entre los dos extremos del muelle. La ecuación constitutiva es:

$$M = K(\theta - \theta_0) \tag{8.81}$$

donde M es el momento, y θ es la deformación relativa entres sus extremos. θ_0 es el error de desalineación angular en el muelle, que es igual a la diferencia entre su ángulo natural θ_N (estado descargado) y el ángulo de montaje en la estructura θ_M:

$$\theta_0 = \theta_N - \theta_M \tag{8.82}$$

La ecuación (8.81) también puede ponerse como:

$$M = K\theta + M_0 \tag{8.83}$$

donde M_0 es el esfuerzo de pretensión inicial que hay que aplicar al muelle para montarlo:

$$M_0 = -K\theta_0 \tag{8.84}$$

El vector de errores puede ponerse como:

$$\boldsymbol{\delta}_E = \begin{Bmatrix} \theta_{E1} \\ \theta_{E2} \end{Bmatrix} \tag{8.85}$$

donde θ_{E1} y θ_{E2} son los errores en ambos extremos, cuya diferencia es el desalineamiento angular θ_0. Al igual que para los muelles de esfuerzo axial, el error θ_0 puede distribuirse entre los θ_{E1} y θ_{E2} de cualquier forma (figura 8.26).

$$\theta_0 = \theta_{E2} - \theta_{E1} \tag{8.86}$$

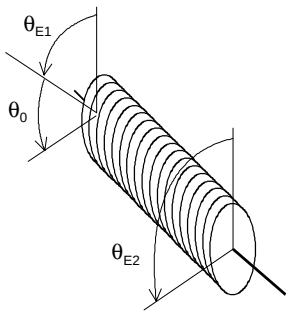


Figura 8.26

Los momentos de pretensión necesarios para el montaje, es decir los momentos de fase 0, vienen dados por la ecuación (8.70):

$$\mathbf{P}_E^0 = \begin{Bmatrix} M_{E1} \\ M_{E2} \end{Bmatrix} = -\begin{bmatrix} K & -K \\ -K & K \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \theta_{E1} \\ \theta_{E2} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} K(\theta_{E2} - \theta_{E1}) \\ -K(\theta_{E2} - \theta_{E1}) \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} K\theta_0 \\ -K\theta_0 \end{Bmatrix} \tag{8.87}$$

y dependen del desalineamiento relativo θ_0 entre ambos extremos del muelle (figura 8.26).

Este mismo vector de esfuerzos de montaje puede ponerse en función del momento de pretensión inicial, si se dispone de este dato en lugar del error angular (figura 8.28):

$$\mathbf{P}_E^0 = \begin{Bmatrix} M_{E1} \\ M_{E2} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} -M_0 \\ M_0 \end{Bmatrix} \tag{8.88}$$

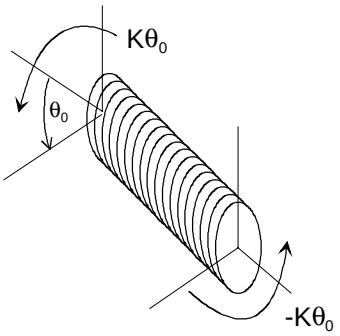


Figura 8.27

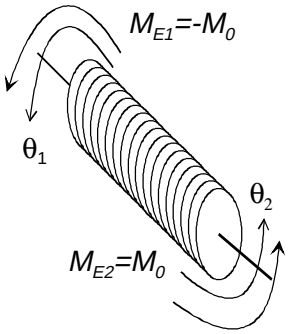


Figura 8.28

8.15 CONDICIONES DE LIGADURA

El equilibrio de una estructura se representa mediante el sistema de ecuaciones lineales:

$$\mathbf{K\Delta} = \mathbf{F} \tag{8.89}$$

- **K** es la matriz de rigidez de toda la estructura, obtenido por ensamblaje de las matrices de cada uno de los elementos que la componen,
- **F** es el vector de fuerzas nodales equivalentes a todas las acciones exteriores,
- $\boldsymbol{\Delta}$ es el vector de grados de libertad, que incluye a todas las posibles deformaciones nodales de la estructura, incluso aquellas que corresponden a puntos fijos, y por lo tanto son nulas.

El proceso seguido para la deducción de esta ecuación de equilibrio hace que en ella se incluyan tanto la compatibilidad de deformaciones en los nudos, como el equilibrio de fuerzas de los nudos y de los elementos. En esta ecuación falta sin embargo introducir las condiciones de contorno que representan la forma en que la estructura está sustentada.

Si se considera la estructura en este estado (sin aplicar las condiciones de contorno), ocurre que aún en ausencia de fuerzas exteriores, ($\mathbf{F} = \mathbf{0}$), pueden existir desplazamientos $\boldsymbol{\Delta}$ distintos de cero. Es decir que existe un vector no nulo $\boldsymbol{\Delta}_0$ tal que:

$$\mathbf{K}\boldsymbol{\Delta}_0 = \mathbf{0} \tag{8.90}$$

Pero este sistema homogéneo sólo tiene solución distinta de cero si $Det(\mathbf{K}) = 0$, es decir si la matriz $\mathbf{K}$ es singular. Por lo tanto, antes de incluir las condiciones de contorno, la matriz de rigidez es singular, y no puede resolverse el sistema de ecuaciones para hallar los desplazamientos.

El número mínimo de condiciones de contorno que hay que incluir en el sistema de ecuaciones debe ser tal que se elimine toda posibilidad de movimiento de la estructura como un sólido rígido. En el plano el número mínimo es 3, y en el espacio es 6. Asimismo se debe evitar que cualquier parte de la estructura tenga una posibilidad de movimiento como sólido rígido.

8.16 LIGADURAS DE DESPLAZAMIENTO NULO

Se parte de la ecuación de equilibrio (8.89) en la que aparece el vector de deformaciones de todos los grados de libertad $\boldsymbol{\Delta}$. De entre todos ellos hay unos cuantos que están fijos, es decir que su desplazamiento es nulo, y se les denomina $\boldsymbol{\Delta}_F = \mathbf{0}$. Los restantes, que tienen libertad para moverse, y cuyo valor es desconocido, están agrupados en el vector $\boldsymbol{\Delta}_I$. Por lo tanto el vector $\boldsymbol{\Delta}$ se puede separar en:

$$\boldsymbol{\Delta} = \begin{Bmatrix} \boldsymbol{\Delta}_I \\ \boldsymbol{\Delta}_F \end{Bmatrix} \tag{8.91}$$

El sistema de ecuaciones se puede dividir en:

$$\begin{bmatrix} \mathbf{K}_{II} & \mathbf{K}_{IF} \\ \mathbf{K}_{FI} & \mathbf{K}_{FF} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \boldsymbol{\Delta}_I \\ \boldsymbol{\Delta}_F = \mathbf{0} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \mathbf{F}_I \\ \mathbf{F}_F + \mathbf{R}_F \end{Bmatrix} \tag{8.92}$$

siendo:

$\mathbf{F}_I$: fuerzas exteriores conocidas, actuantes sobre los grados de libertad libres,

$\mathbf{F}_F$: fuerzas exteriores conocidas, actuantes sobre los grados de libertad fijos,

$\mathbf{R}_F$: reacciones desconocidas, que actúan sobre los grados de libertad fijos.

La primera parte de la ecuación (8.92) indica que:

$$\mathbf{K}_{II}\boldsymbol{\Delta}_I = \mathbf{F}_I \tag{8.93}$$

de la que se puede calcular $\boldsymbol{\Delta}_I$. La ecuación anterior indica que basta con quedarse con aquella parte de la matriz $\mathbf{K}$ que corresponde a los grados de libertad no fijados $\mathbf{K}_{II}$. Esta submatriz $\mathbf{K}_{II}$ tiene inversa si las condiciones de contorno impuestas garantizan la estabilidad de la estructura y en ese caso es posible hallar las deformaciones.

Para pasar de la expresión inicial a la final hay que reorganizar toda la matriz $\mathbf{K}$, a fin de separarla en las 4 submatrices *I, F* y esto es un proceso engorroso, por lo que en la práctica no se lleva a cabo. Lo que se hace es eliminar de la matriz total $\mathbf{K}$ las filas y columnas correspondientes a los grados de libertad que tienen desplazamiento nulo. De esta manera se obtiene directamente la matriz $\mathbf{K}_{II}$.

Una vez hallados los $\boldsymbol{\Delta}_I$ las reacciones en los apoyos se obtienen aplicando la parte inferior de la ecuación (8.92):

$$\mathbf{R}_F = \mathbf{K}_{FI}\boldsymbol{\Delta}_I - \mathbf{F}_F = \mathbf{K}_{FI}\mathbf{K}_{II}^{-1}\mathbf{F}_I - \mathbf{F}_F \tag{8.94}$$

8.17 LIGADURAS DE DESPLAZAMIENTO CONOCIDO

En este tipo de condición se conoce el valor que adoptan unos determinados grados de libertad de la estructura, por ejemplo en caso de un asiento conocido en un punto de apoyo. Se supone que dichos valores son distintos de cero, pues el caso nulo ya ha sido tratado. El vector $\boldsymbol{\Delta}$ de grados de libertad se divide en tres partes:

$$\boldsymbol{\Delta} = \begin{Bmatrix} \boldsymbol{\Delta}_I \\ \boldsymbol{\Delta}_F \\ \boldsymbol{\Delta}_C \end{Bmatrix} \tag{8.95}$$

- $\boldsymbol{\Delta}_C$: vector que agrupa a todos los grados de libertad cuyo valor se conoce, y que son distintos de cero,
- $\boldsymbol{\Delta}_F$: vector que agrupa a los grados de libertad fijos, que tienen valor nulo,
- $\boldsymbol{\Delta}_I$: vector que agrupa a los restantes grados de libertad, de valor desconocido.

El sistema de ecuaciones de equilibrio se puede dividir en la misma forma:

$$\begin{bmatrix} \mathbf{K}_{II} & \mathbf{K}_{IF} & \mathbf{K}_{IC} \\ \mathbf{K}_{FI} & \mathbf{K}_{FF} & \mathbf{K}_{FC} \\ \mathbf{K}_{CI} & \mathbf{K}_{CF} & \mathbf{K}_{CC} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \boldsymbol{\Delta}_I \\ \boldsymbol{\Delta}_F \\ \boldsymbol{\Delta}_C \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \mathbf{F}_I \\ \mathbf{F}_F + \mathbf{R}_F \\ \mathbf{F}_C + \mathbf{R}_C \end{Bmatrix} \tag{8.96}$$

donde:

- $\mathbf{F}_I$ $\mathbf{F}_F$ $\mathbf{F}_C$ son las fuerzas exteriores que actúan sobre los distintos grados de libertad y son todas conocidas,
- $\mathbf{R}$ son las reacciones exteriores desconocidas aplicadas sobre los distintos grados de libertad. Son de dos tipos:
  - $\mathbf{R}_C$ son las fuerzas de reacción que hay que hacer desde el exterior, sobre los grados de libertad con desplazamiento conocido $\boldsymbol{\Delta}_C$, para obligarles a desplazarse precisamente el valor deseado $\boldsymbol{\Delta}_C$,
  - $\mathbf{R}_F$ son las fuerzas de reacción que hay que hacer desde el exterior, sobre los grados de libertad con desplazamiento nulo $\boldsymbol{\Delta}_F$, para impedir su desplazamiento.

No existen reacciones desconocidas sobre los grados de libertad incógnita $\boldsymbol{\Delta}_I$.

En primer lugar se eliminan las ecuaciones correspondientes a los grados de libertad fijos, borrando sus filas y columnas, tal y como ya se ha indicado, y queda:

$$\begin{bmatrix} \mathbf{K}_{II} & \mathbf{K}_{IC} \\ \mathbf{K}_{CI} & \mathbf{K}_{CC} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \boldsymbol{\Delta}_I \\ \boldsymbol{\Delta}_C \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \mathbf{F}_I \\ \mathbf{F}_C + \mathbf{R}_C \end{Bmatrix} \tag{8.97}$$

De la primera ecuación se obtiene que:

$$\mathbf{K}_{II}\boldsymbol{\Delta}_I = \mathbf{F}_I - \mathbf{K}_{IC}\boldsymbol{\Delta}_C \tag{8.98}$$

Esta es la ecuación final de equilibrio de la estructura, y de ella puede calcularse $\boldsymbol{\Delta}_I$. La presencia de las deformaciones conocidas $\boldsymbol{\Delta}_C$ ha añadido un nuevo término al vector de cargas, cuyo valor es:

$$\mathbf{F}_C^* = -\mathbf{K}_{IC}\boldsymbol{\Delta}_C \tag{8.99}$$

y que se suma a las cargas exteriores actuantes. Este vector de fuerzas representa unas fuerzas nodales que están aplicadas sobre los grados de libertad $\boldsymbol{\Delta}_I$ y que son equivalentes a los desplazamientos impuestos sobre los $\boldsymbol{\Delta}_C$.

Una vez obtenidos los $\boldsymbol{\Delta}_I$ de la ecuación (8.98), las fuerzas de reacción en los grados de libertad conocidos $\mathbf{R}_C$ se obtienen de la segunda parte de la ecuación (8.97):

$$\mathbf{R}_C = \mathbf{K}_{CI}\boldsymbol{\Delta}_I + \mathbf{K}_{CC}\boldsymbol{\Delta}_C - \mathbf{F}_C \tag{8.100}$$

Finalmente las reacciones en los puntos fijos se obtienen de la segunda parte de (8.96):

$$\mathbf{R}_F = \mathbf{K}_{FI}\boldsymbol{\Delta}_I + \mathbf{K}_{FC}\boldsymbol{\Delta}_C - \mathbf{F}_F \tag{8.101}$$

8.18 MÉTODO DE LA RIGIDEZ FICTICIA PARA CONDICIONES DE LIGADURA

El proceso descrito en los apartados anteriores es teóricamente correcto, y es el que se usa para resolver problemas manualmente. Sin embargo este método puede ser engorroso para su utilización práctica en ciertos programas de computador, pues requiere reordenar las matrices, o separar parte de ellas para realizar las operaciones algebraicas indicadas. Por esta razón se utiliza otro método que, aunque aproximado, da resultados suficientemente buenos en la práctica, y es muy sencillo de aplicar. El proceso es el siguiente:

- Para introducir un desplazamiento conocido Δ_{Ci} en el grado de libertad *i*, se multiplica el término de la diagonal de dicho grado de libertad por un número muy grande *M*, usualmente $M=10^{10}$, denominado rigidez ficticia. Esta operación equivale a aplicar una rigidez de gran valor según el grado de libertad cuyo valor se quiere imponer.
- Se modifica el término de la fila *i* del vector de cargas, sustituyéndolo por el valor $K_{ii}\Delta_{Ci}M$.
- Se resuelve el sistema de ecuaciones resultante, y se obtendrá un valor de Δ_i sensiblemente igual a Δ_{Ci}.

Si el grado de libertad está fijo, se sigue el proceso anterior con un valor de $\Delta_{Ci} = 0$, lo cual equivale a multiplicar la diagonal de $\mathbf{K}$ por el número *M*, y a sustituir el término correspondiente del vector de fuerzas F_i por 0.

Ejemplo. *Se considera un sistema con tres grados de libertad, cuyas tres ecuaciones de equilibrio son:*

$$\sum_j K_{ij}\Delta_j = F_i \quad i = 1,3$$

Imponiendo un valor conocido a Δ_3 *la tercera ecuación queda:*

$$\sum_{j=1,2} K_{3j}\Delta_j + K_{33}M\Delta_3 = K_{33}M\Delta_{C3}$$

despejando Δ_3 *de esta ecuación se obtiene:*

$$\Delta_3 = \Delta_{C3} - \frac{\sum_{j=1,2} K_{3j}\Delta_j}{MK_{33}} \approx \Delta_{C3}$$

El segundo sumando es muy pequeño, al ser M mucho mayor que los restantes términos, por lo que se obtiene para el grado de libertad Δ_3 *un valor muy similar al impuesto.*

8.19 APOYOS ELÁSTICOS

Otra forma de apoyo de una estructura consiste en que un determinado punto no tiene sus desplazamientos impuestos, como en los casos anteriores, ni tampoco es totalmente libre de moverse, sino que está unido a la sustentación a través de uno o más muelles, de constantes conocidas.

En realidad estos apoyos no deben considerarse condiciones de ligadura de la estructura en sentido estricto, pues los muelles del apoyo son unos elementos estructurales más, y como tales deben analizarse. Por lo tanto los pasos para tratar un apoyo elástico son:

- identificar los grados de libertad del nudo donde está el apoyo elástico,
- calcular la matriz de rigidez del muelle de apoyo,
- ensamblar dicha matriz en la matriz de la estructura.

Este tipo de apoyos no debe confundirse con las condiciones de contorno de desplazamiento impuesto, ya estudiadas en el apartado 8.17. En estas últimas, los desplazamientos del nudo son de magnitud conocida, y no están controlados por las cargas actuantes sobre la estructura, mientras que en los apoyos elásticos la deformación del apoyo está controlada por las fuerzas actuantes y por la rigidez de la estructura, entre la que se incluye la del propio apoyo elástico como una rigidez más.

Por ejemplo, se supone que el nudo I de una estructura está unido al suelo mediante unos muelles de rigideces K_x, K_y, para las deformaciones y K_z para el giro (figura 8.29). Los tres están desacoplados, es decir que cada uno de ellos actúa independientemente de los demás. Esto quiere decir que K_x es la fuerza para mover una unidad el nudo I en dirección *x*, sin la presencia de K_y ni K_z, y lo mismo para las otras dos. Dichas rigideces se suponen conocidas en el sistema de ejes global.

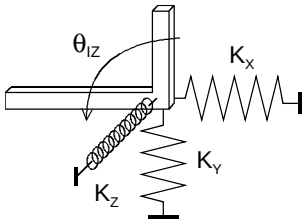


Figura 8.29

La matriz de rigidez de los muelles que forman el apoyo elástico es:

$$\begin{Bmatrix} F_{IX}^m \\ F_{IY}^m \\ M_{IZ}^m \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} K_x & & \\ & K_y & \\ & & K_z \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \Delta_{IX} \\ \Delta_{IY} \\ \theta_{IZ} \end{Bmatrix} \tag{8.102}$$

donde el superíndice *m* indica que se trata de las fuerzas aplicadas sobre los muelles. Esta matriz de rigidez de los muelles se ensambla en la matriz de rigidez total de la estructura y de la solución de las ecuaciones de equilibrio del conjunto se obtienen los valores de las deformaciones del nudo I. A partir de éstas se pueden obtener las fuerzas en los distintos muelles mediante la ecuación anterior.

De la misma forma se tratan los casos, menos frecuentes, en que los muelles están acoplados entre sí. En este caso la matriz de rigidez del muelle es llena, al haber rigideces cruzadas entre unas direcciones y otras.

Un caso que da lugar a matrices llenas es el de un muelle en dirección distinta de los ejes generales. En este caso hay que elegir un sistema de ejes local al muelle, en el que se calculan sus características de rigidez. Se considera por ejemplo un muelle como se indica en la figura 8.30, con su eje X local orientado en su propia dirección.

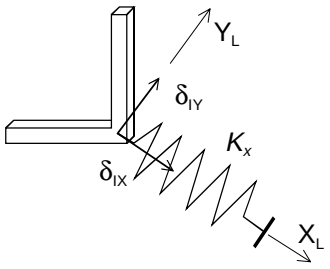


Figura 8.30

Su matriz de rigidez en coordenadas locales es:

$$\begin{Bmatrix} P_{IX}^m \\ P_{IY}^m \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} K_x & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \delta_{IX} \\ \delta_{IY} \end{Bmatrix} \qquad \mathbf{P}^m = \mathbf{K}_L^m \boldsymbol{\delta} \tag{8.103}$$

Del sistema local se puede pasar al sistema general por medio de la matriz de proyección:

$$\begin{Bmatrix} P_{IX}^m \\ P_{IY}^m \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos\alpha & \sin\alpha \\ -\sin\alpha & \cos\alpha \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} F_{IX}^m \\ F_{IY}^m \end{Bmatrix} \qquad \mathbf{P}^m = \mathbf{T}^m \mathbf{F}^m \tag{8.104}$$

Análogamente se proyectan las deformaciones del nudo. La matriz de rigidez del muelle, en coordenadas generales, es:

$$\mathbf{K}_G^m = \mathbf{T}^{mT}\mathbf{K}_L^m\mathbf{T}^m = K_x\begin{bmatrix} \cos^2\alpha & \sin\alpha\cos\alpha \\ \sin\alpha\cos\alpha & \sin^2\alpha \end{bmatrix} \tag{8.105}$$

que es llena, y que se ordena en la matriz de rigidez de toda la estructura por el procedimiento habitual.

8.20 CONDICIONES DE CONTORNO NO EN LOS EJES GENERALES

Hasta ahora se ha supuesto que las condiciones de contorno en los puntos de apoyo se conocen expresadas en el sistema de ejes general de la estructura, y por lo tanto su introducción en la matriz de rigidez global de la misma es muy sencilla.

Sin embargo puede ocurrir que en algunos apoyos las condiciones de contorno no se conozcan en la dirección de los ejes globales, sino en otra diferente. El caso más frecuente es el de una deslizadera orientada según una dirección que no coincide ni con el eje X ni con el eje Y.

En algunos casos sencillos sería posible estudiar la estructura haciendo uso de un sistema de ejes general adecuado, situado en la dirección de movimiento del apoyo. Sin embargo esta solución no es aplicable si hay varios apoyos inclinados en direcciones diferentes, pues en ese caso es imposible el hallar un sistema de ejes global en el que se puedan aplicar todas las condiciones de contorno. En todo caso interesa poder elegir el sistema global con entera libertad en la posición más práctica, por lo que resulta interesante el disponer de un método para tratar estos apoyos inclinados con total generalidad.

La solución general del problema consiste en definir unos ejes locales para el nudo donde está el apoyo, denominados X_N,Y_N, que deben elegirse de manera conveniente para que sea fácil aplicar en ellos las condiciones de ligadura. Lo habitual es que el eje X_N local coincida con la dirección del movimiento del apoyo.

Sea *k* el nudo donde se desea aplicar la condición de ligadura. Se denomina $\boldsymbol{\Delta}_k$ a sus desplazamientos en el sistema global, y $\boldsymbol{\Delta}_k^N$ a éstos mismos referidos al sistema local del nudo X_N,Y_N. La relación entre ambos es:

$$\boldsymbol{\Delta}_k^N = \mathbf{T}_k^N\boldsymbol{\Delta}_k \tag{8.106}$$

siendo $\mathbf{T}_k^N$ la matriz de rotación del sistema local del nudo *k* al general de la estructura.

Por ejemplo, para un apoyo como el mostrado en la figura 8.31 la condición de ligadura en el sistema general es:

$$\Delta_X\sin\alpha - \Delta_Y\cos\alpha = 0 \tag{8.107}$$

mientras que en el sistema local de apoyo es simplemente:

$$\Delta_Y^N = 0 \tag{8.108}$$

La relación entre los desplazamientos en ambos sistemas es:

$$\begin{Bmatrix} \Delta_X^N \\ \Delta_Y^N \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos\alpha & \sin\alpha \\ -\sin\alpha & \cos\alpha \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \Delta_X \\ \Delta_Y \end{Bmatrix} \tag{8.109}$$

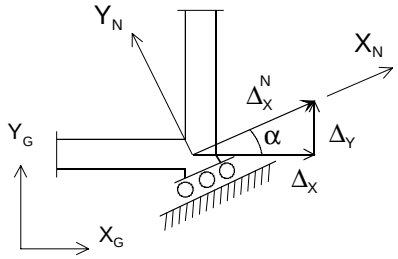


Figura 8.31

Se plantea un cambio de coordenadas entre el vector de deformaciones de toda la estructura $\boldsymbol{\Delta}$ y un nuevo vector, denominado $\boldsymbol{\Delta}^{Nk}$, que contiene las deformaciones del nudo *k* expresadas en su sistema local:

$$\boldsymbol{\Delta}^{Nk} = \begin{Bmatrix} \boldsymbol{\Delta}_1 \\ \dots \\ \boldsymbol{\Delta}_k^N \\ \dots \\ \boldsymbol{\Delta}_n \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{I} & & & & \\ & \mathbf{I} & & & \\ & & \mathbf{T}_k^N & & \\ & & & \mathbf{I} & \\ & & & & \mathbf{I} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \boldsymbol{\Delta}_1 \\ \dots \\ \boldsymbol{\Delta}_k \\ \dots \\ \boldsymbol{\Delta}_n \end{Bmatrix} = \boldsymbol{\lambda}\boldsymbol{\Delta} \tag{8.110}$$

La matriz del cambio de coordenadas $\boldsymbol{\lambda}$ contiene a la matriz de rotación $\mathbf{T}^N$ para el nudo *k*, y a la matriz identidad $\mathbf{I}$ para todos los demás nudos, a los que no se aplica cambio alguno.

Este cambio de coordenadas se puede sustituir en el sistema de ecuaciones de equilibrio de la estructura, resultando:

$$\mathbf{F} = \mathbf{K}\boldsymbol{\lambda}^T\boldsymbol{\Delta}^{Nk} \tag{8.111}$$

donde se ha hecho uso de que $\boldsymbol{\lambda}$ es ortogonal. Premultiplicando por $\boldsymbol{\lambda}$ se obtiene:

$$\boldsymbol{\lambda}\mathbf{F} = \boldsymbol{\lambda}\mathbf{K}\boldsymbol{\lambda}^T\boldsymbol{\Delta}^{Nk} \tag{8.112}$$

que se puede poner de forma resumida como:

$$\mathbf{F}^{Nk} = \mathbf{K}^{Nk}\boldsymbol{\Delta}^{Nk} \tag{8.113}$$

Este es el sistema de ecuaciones de equilibrio proyectado sobre el nuevo vector de grados de libertad, que es un conjunto mixto, ya que utiliza sistemas de coordenadas diferentes para los distintos nudos.

Dada la estructura de $\boldsymbol{\lambda}$ los diversos términos de la ecuación anterior tienen expresiones sencillas.

- La matriz de rigidez proyectada sobre el nuevo conjunto de grados de libertad tiene la expresión:

$$\mathbf{K}^{Nk} = \boldsymbol{\lambda}\mathbf{K}\boldsymbol{\lambda}^{T} = \begin{bmatrix} \mathbf{K}_{11} & \cdots & \mathbf{K}_{1k}\mathbf{T}_k^{N^T} & \cdots & \mathbf{K}_{1n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ \mathbf{T}_k^N\mathbf{K}_{k1} & \cdots & \mathbf{T}_k^N\mathbf{K}_{kk}\mathbf{T}_k^{N^T} & \cdots & \mathbf{T}_k^N\mathbf{K}_{kn} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ \mathbf{K}_{n1} & \cdots & \mathbf{K}_{nk}\mathbf{T}_k^{N^T} & \cdots & \mathbf{K}_{nn} \end{bmatrix} \tag{8.114}$$

Esta matriz se obtiene sencillamente a base de:

- ◊ Premultiplicar todas las rigideces cruzadas entre el nudo *k* y los demás, es decir la fila *k* de la matriz, por $\mathbf{T}_k^N$.
- ◊ Postmultiplicar todas las matrices de rigidez cruzadas entre los demás nudos y el *k*, es decir la columna *k* de la matriz, por $\mathbf{T}_k^N$ transpuesta.
- ◊ Automáticamente la rigidez directa del nudo *k* queda pre y postmultiplicada por la matriz $\mathbf{T}_k^N$.

- El vector de fuerzas tiene la expresión:

$$\mathbf{F}^{Nk} = \boldsymbol{\lambda}\mathbf{F} = \begin{Bmatrix} \mathbf{F}_1 \\ \cdots \\ \mathbf{T}_k^N\mathbf{F}_k \\ \cdots \\ \mathbf{F}_n \end{Bmatrix} \tag{8.115}$$

Se observa que se han proyectado las fuerzas exteriores $\mathbf{F}_k$ actuantes sobre el nudo *k* desde el sistema general al local del nudo. Las demás fuerzas no han variado.

En el sistema de ecuaciones así obtenido se pueden introducir las condiciones de contorno del nudo *k* con gran sencillez, pues en él se utilizan las deformaciones en el sistema de ejes local al nudo X_N,Y_N, que se ha elegido precisamente para que las condiciones de contorno sean fáciles de expresar. Para ello se siguen los procedimientos ya conocidos, pero utilizando la matriz $\mathbf{K}^{Nk}$ en lugar de la inicial.

Resolviendo la ecuación (8.113) se obtienen los desplazamientos de todos los nudos de la estructura, que para los apoyos inclinados están referidos a su sistema local X_N,Y_N. Si se desea, estos últimos pueden referirse al sistema general sin más que deshacer el cambio de coordenadas.

El cálculo de reacciones en el apoyo inclinado sigue las mismas expresiones deducidas en el caso general pero utilizando la matriz $\mathbf{K}^{Nk}$ en lugar de la inicial.

Si hay varios apoyos inclinados se toman sistemas locales distintos para cada uno de ellos y se repite el proceso anterior.

Tratamiento mediante muelles

Otro método, quizás muy intuitivo, para tratar este tipo de apoyo consiste en introducir un muelle con una rigidez muy grande en la dirección del desplazamiento impedido, como se muestra en la figura 8.32.

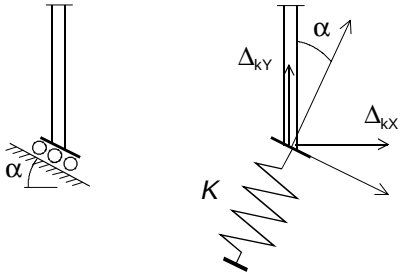


Figura 8.32

Las matriz de rigidez del muelle en coordenadas globales es:

$$\mathbf{K}_G^m = \begin{bmatrix} K\cos^2\alpha & -K\sin\alpha\cos\alpha \\ -K\sin\alpha\cos\alpha & K\sin^2\alpha \end{bmatrix} \tag{8.116}$$

donde K es la rigidez del muelle. Esta matriz se suma a las rigideces que hay en los grados de libertad Δ_{kx}, Δ_{ky} debidas a los restantes elementos de la estructura, dando, para el nudo k, las siguientes ecuaciones de equilibrio:

$$\begin{bmatrix} \cdots K_{xi} \cdots & K_{xx} + K\cos^2\alpha & K_{xy} - K\sin\alpha\cos\alpha & \cdots K_{xj} \cdots \\ \cdots K_{yi} \cdots & K_{yx} - K\sin\alpha\cos\alpha & K_{yy} + K\sin^2\alpha & \cdots K_{yj} \cdots \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \Delta_{kx} \\ \Delta_{ky} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} F_{kx} \\ F_{ky} \end{bmatrix} \tag{8.117}$$

El problema es que esta matriz tiene un mal condicionamiento numérico. En efecto, como K es mucho mayor que los otros términos de rigidez aportados por la estructura $K_{xx}, K_{yy}, K_{xy}, K_{yx}$, y que los términos de acople entre el nudo k y los demás, todos éstos pueden despreciarse frente a K, resultando que la matriz de rigidez efectiva es:

$$\begin{bmatrix} \cdots 0 \cdots & K\cos^2\alpha & -K\sin\alpha\cos\alpha & \cdots 0 \cdots \\ \cdots 0 \cdots & -K\sin\alpha\cos\alpha & K\sin^2\alpha & \cdots 0 \cdots \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \Delta_{kx} \\ \Delta_{ky} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} F_{kx} \\ F_{ky} \end{bmatrix} \tag{8.118}$$

En esta matriz se observa que las filas correspondientes a Δ_{kx}, Δ_{ky} son combinación lineal una de otra: multiplicando la ecuación de Δ_{kx} por el factor $\sin\alpha/\cos\alpha$ y cambiando de signo se obtiene la ecuación de Δ_{ky}.

En la matriz inicial (8.117) lo que ocurre es que las dos ecuaciones son casi combinación lineal una de la otra. Esto origina grandes problemas numéricos al tratar de resolver el sistema de ecuaciones, cuyas consecuencias dependen del método de resolución de sistemas que se utilice. Por esta razón la utilización de este método no es aconsejable, salvo si se conoce bien el orden de magnitud de los términos de la matriz de rigidez y si

además se emplean métodos numéricos adecuados para la resolución del sistema de ecuaciones.

8.21 EJERCICIOS RESUELTOS

8.21.1 Calcular los esfuerzos en la estructura de la figura 8.33. Todas las barras son del mismo material, con módulo de elasticidad E=200000 MPa y tienen igual área transversal A=10 cm^2.

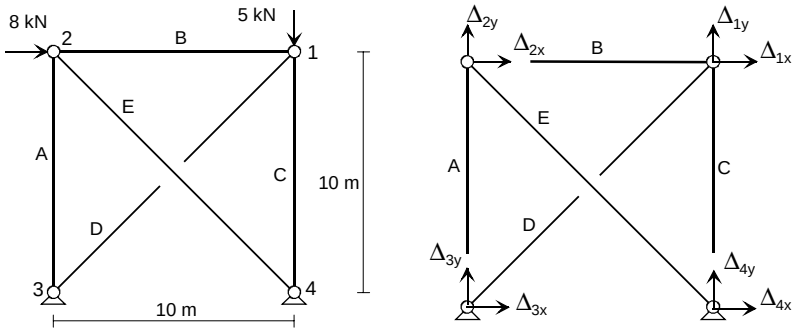


Figura 8.33

Los grados de libertad de la estructura son:

$$\boldsymbol{\Delta} = \left\{\Delta_{1x} \quad \Delta_{1y} \quad \Delta_{2x} \quad \Delta_{2y} \quad \Delta_{3x} \quad \Delta_{3y} \quad \Delta_{4x} \quad \Delta_{4y}\right\}^T = \left\{\boldsymbol{\Delta}_I \quad \boldsymbol{\Delta}_F\right\}^T$$

Todos los elementos son barras articuladas en los dos extremos, cuya matriz de rigidez viene dada por la ecuación (7.39).

Elemento A: Nudo inicial: 3. Nudo final: 2. Ángulo: 90º. Longitud: 10 m. Área: 0.001 m^2. cosα=0. sinα=1.

$$\mathbf{K}_G^A = \frac{EA}{10}\begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{matrix} \Delta_{3x} \\ \Delta_{3y} \\ \Delta_{2x} \\ \Delta_{2y} \end{matrix}$$

Elemento B: Nudo inicial: 2. Nudo final: 2. Ángulo: 0º. Longitud: 10 m. Área: 0.001 m^2. cosα=1. sinα=0.

$$\mathbf{K}_G^B = \frac{EA}{10}\begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{matrix} \Delta_{2x} \\ \Delta_{2y} \\ \Delta_{1x} \\ \Delta_{1y} \end{matrix}$$

Elemento C: Nudo inicial: 4. Nudo final: 1. Ángulo: 90º. Longitud: 10 m. Área: 0.001 m^2. cosα=0. sinα=1.

$$\mathbf{K}_G^C = \frac{EA}{10}\begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{matrix} \Delta_{4x} \\ \Delta_{4y} \\ \Delta_{1x} \\ \Delta_{1y} \end{matrix}$$

Elemento D: Nudo inicial: 3. Nudo final: 1. Ángulo: 45º. Longitud: $10\sqrt{2}$ m. Área: 0.001 m^2. cosα=$1/\sqrt{2}$. sinα=$1/\sqrt{2}$.

$$\mathbf{K}_G^D = \frac{EA}{10\sqrt{2}}\begin{bmatrix} 1/2 & 1/2 & -1/2 & -1/2 \\ 1/2 & 1/2 & -1/2 & -1/2 \\ -1/2 & -1/2 & 1/2 & 1/2 \\ -1/2 & -1/2 & 1/2 & 1/2 \end{bmatrix} \begin{matrix} \Delta_{3x} \\ \Delta_{3y} \\ \Delta_{1x} \\ \Delta_{1y} \end{matrix}$$

Elemento E: Nudo inicial: 2. Nudo final: 4. Ángulo: -45º. Longitud: $10\sqrt{2}$ m. Área: 0.001 m^2. cosα=$1/\sqrt{2}$, sinα=$-1/\sqrt{2}$.

$$\mathbf{K}_G^E = \frac{EA}{10\sqrt{2}}\begin{bmatrix} 1/2 & -1/2 & -1/2 & 1/2 \\ -1/2 & 1/2 & 1/2 & -1/2 \\ -1/2 & 1/2 & 1/2 & -1/2 \\ 1/2 & -1/2 & -1/2 & 1/2 \end{bmatrix} \begin{matrix} \Delta_{2x} \\ \Delta_{2y} \\ \Delta_{4x} \\ \Delta_{4y} \end{matrix}$$

Matrices de ordenación de las barras:

$$\mathbf{B}^A = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \qquad \mathbf{B}^B = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{B}^C = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \qquad \mathbf{B}^D = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{B}^E = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

La contribución de cada elemento a la matriz de rigidez de la estructura es:

$$\mathbf{K}_G^{(e)} = \mathbf{B}^{e^T}\mathbf{K}_G^{eC}\mathbf{B}^e \qquad e = \{A, B, C, D, E\}$$

A continuación se muestran las distintas matrices:

$$\mathbf{K}_G^{(A)} = \frac{EA}{10}\begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \qquad \mathbf{K}_G^{(B)} = \frac{EA}{10}\begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{K}_G^{(C)} = \frac{EA}{10}\begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \qquad \mathbf{K}_G^{(D)} = \frac{EA}{10\sqrt{2}}\begin{bmatrix} 1/2 & 1/2 & 0 & 0 & -1/2 & -1/2 & 0 & 0 \\ 1/2 & 1/2 & 0 & 0 & -1/2 & -1/2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -1/2 & -1/2 & 0 & 0 & 1/2 & 1/2 & 0 & 0 \\ -1/2 & -1/2 & 0 & 0 & 1/2 & 1/2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{K}_G^{(E)} = \frac{EA}{10\sqrt{2}}\begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1/2 & -1/2 & 0 & 0 & -1/2 & 1/2 \\ 0 & 0 & -1/2 & 1/2 & 0 & 0 & 1/2 & -1/2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1/2 & 1/2 & 0 & 0 & 1/2 & -1/2 \\ 0 & 0 & 1/2 & -1/2 & 0 & 0 & -1/2 & 1/2 \end{bmatrix}$$

La matriz de rigidez de la estructura se obtiene sumando la colaboración de los distintos elementos.

$$\mathbf{K} = EA\begin{bmatrix} 0.1354 & 0.0354 & -0.1 & 0 & -0.0354 & -0.0354 & 0 & 0 \\ 0.0354 & 0.1354 & 0 & 0 & -0.0354 & -0.0354 & 0 & -0.1 \\ -0.1 & 0 & 0.1354 & -0.0354 & 0 & 0 & -0.0354 & 0.0354 \\ 0 & 0 & -0.0354 & 0.1354 & 0 & -0.1 & 0.0354 & -0.0354 \\ -0.0354 & -0.0354 & 0 & 0 & 0.0354 & 0.0354 & 0 & 0 \\ -0.0354 & -0.0354 & 0 & -0.1 & 0.0354 & 0.1354 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -0.0354 & 0.0354 & 0 & 0 & 0.0354 & -0.0354 \\ 0 & -0.1 & 0.0354 & -0.0354 & 0 & 0 & -0.0354 & 0.1354 \end{bmatrix}$$

La matriz $\mathbf{K}_{II}$ se obtiene a partir de la matriz de rigidez completa, extrayendo los coeficientes correspondientes a los grados de libertad no nulos, que son los cuatro primeros:

$$\mathbf{K}_{II} = \begin{bmatrix} 2.7071 & 0.7071 & -2.0 & 0 \\ 0.7071 & 2.7071 & 0 & 0 \\ -2.0 & 0 & 2.7071 & -0.7071 \\ 0 & 0 & -0.7071 & 2.7071 \end{bmatrix} \cdot 10^7$$

El vector de fuerzas nodales se obtiene de forma directa a partir de las fuerzas exteriores:

$$\mathbf{F} = \begin{Bmatrix} \mathbf{F}_I \\ \mathbf{F}_F \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} F_{1x} = 0 \\ F_{1y} = -5000 \\ F_{2x} = +8000 \\ F_{2y} = 0 \\ F_{3x} = 0 \\ F_{3y} = 0 \\ F_{4x} = 0 \\ F_{4y} = 0 \end{Bmatrix}$$

El sistema de ecuaciones de equilibrio, después de aplicar las condiciones de ligadura de desplazamiento conocido, es:

$$\mathbf{K}_{II}\boldsymbol{\Delta}_I = \mathbf{F}_I \qquad 10^7 \begin{bmatrix} 2.7071 & 0.7071 & -2.0 & 0 \\ 0.7071 & 2.7071 & 0 & 0 \\ -2.0 & 0 & 2.7071 & -0.7071 \\ 0 & 0 & -0.7071 & 2.7071 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \Delta_{1x} \\ \Delta_{1y} \\ \Delta_{2x} \\ \Delta_{2y} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 0 \\ -5000 \\ +8000 \\ 0 \end{Bmatrix}$$

Los desplazamientos de los nudos son:

$$\boldsymbol{\Delta}_I = \begin{Bmatrix} \Delta_{1x} \\ \Delta_{1y} \\ \Delta_{2x} \\ \Delta_{2y} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 0.8167 \\ -0.3980 \\ 0.9647 \\ 0.2520 \end{Bmatrix} \cdot 10^{-3} \qquad \text{m}$$

Las reacciones en los apoyos se obtienen de la ecuación (8.94):

$$\mathbf{R}_F = \mathbf{K}_{FI}\boldsymbol{\Delta}_I - \mathbf{F}_F$$

$$\begin{Bmatrix} R_{1x} \\ R_{1y} \\ R_{2x} \\ R_{2y} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} -0.7071 & -0.7071 & 0 & 0 \\ -0.7071 & -0.7071 & 0 & -2.0 \\ 0 & 0 & -0.7071 & 0.7071 \\ 0 & -2.0 & 0.7071 & -0.7071 \end{bmatrix} \cdot 10^7 \begin{Bmatrix} 0.8167 \\ -0.3980 \\ 0.9647 \\ 0.2520 \end{Bmatrix} \cdot 10^{-3} - \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} -2960 \\ -8000 \\ -5040 \\ 13000 \end{Bmatrix}$$

Esfuerzos en el elemento A. Las deformaciones de los nudos de este elemento son:

$$\boldsymbol{\Delta}^A = \mathbf{B}^A\boldsymbol{\Delta} = \begin{Bmatrix} \Delta_{3x} \\ \Delta_{3y} \\ \Delta_{2x} \\ \Delta_{2y} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 0.0 \\ 0.0 \\ 0.9647 \\ 0.2520 \end{Bmatrix} \cdot 10^{-3}$$

$$\boldsymbol{\delta}^A = \begin{Bmatrix} \delta_{3x} \\ \delta_{3y} \\ \delta_{2x} \\ \delta_{2y} \end{Bmatrix} = \mathbf{T}_2 \boldsymbol{\Delta}^A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} 0. \\ 0. \\ 0.9647 \\ 0.2520 \end{Bmatrix} \cdot 10^{-3} = \begin{Bmatrix} 0. \\ 0. \\ 0.2520 \\ -0.9647 \end{Bmatrix} \cdot 10^{-3}$$

con lo que los esfuerzos en sus extremos, calculados en el sistema local, son:

$$\mathbf{P}^A = \mathbf{K}_L^A \boldsymbol{\delta}^A \qquad \begin{Bmatrix} P_{3x} \\ P_{3y} \\ P_{2x} \\ P_{2y} \end{Bmatrix} = \frac{EA}{10} \begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} 0. \\ 0. \\ 0.2520 \\ -0.9647 \end{Bmatrix} 10^{-3} = \begin{Bmatrix} -5039 \\ 0 \\ 5039 \\ 0 \end{Bmatrix}$$

que corresponden a un esfuerzo axial de tracción de 5039 N, como se muestra en la figura 8.34. También pueden calcularse los esfuerzos en el sistema general, empleando las deformaciones y la matriz de rigidez referidas a dicho sistema:

$$\mathbf{F}^A = \mathbf{K}_G^A \boldsymbol{\Delta}^A \qquad \begin{Bmatrix} F_{3x} \\ F_{3y} \\ F_{2x} \\ F_{2y} \end{Bmatrix} = \frac{EA}{10} \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} 0. \\ 0. \\ 0.9647 \\ 0.2520 \end{Bmatrix} 10^{-3} = \begin{Bmatrix} 0 \\ -5039 \\ 0 \\ 5039 \end{Bmatrix}$$

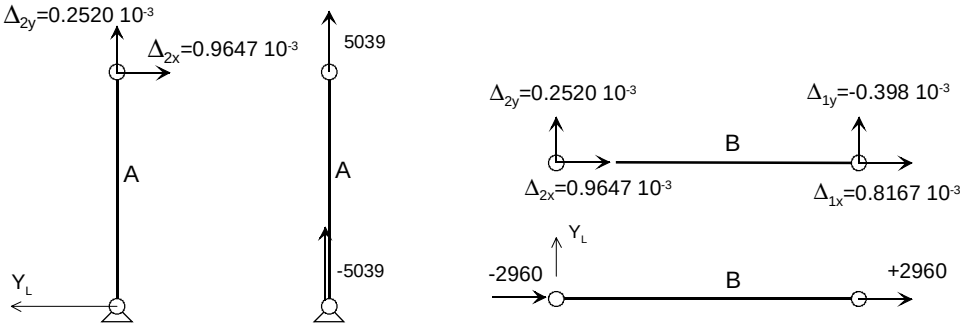


Figura 8.34

Esfuerzos en el elemento B. Al estar orientado según el eje X, su sistema local coincide con el general de la estructura, y las deformaciones de los nudos son (figura 8.34):

$$\boldsymbol{\delta}^B = \mathbf{B}^B \boldsymbol{\Delta} = \boldsymbol{\Delta}^B = \begin{Bmatrix} \Delta_{2x} \\ \Delta_{2y} \\ \Delta_{1x} \\ \Delta_{1y} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 0.9647 \\ 0.2520 \\ 0.8167 \\ -0.3980 \end{Bmatrix} \cdot 10^{-3}$$

con lo que los esfuerzos en sus extremos son:

$$\mathbf{P}^B = \mathbf{K}_L^B \boldsymbol{\delta}^B \qquad \begin{Bmatrix} P_{2x} \\ P_{2y} \\ P_{1x} \\ P_{1y} \end{Bmatrix} = \frac{EA}{10} \begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} -0.9647 \\ 0.2520 \\ 0.8167 \\ -0.3980 \end{Bmatrix} 10^{-3} = \begin{Bmatrix} 2960 \\ 0 \\ -2960 \\ 0 \end{Bmatrix}$$

que corresponden a un esfuerzo axial de compresión de 2960 N.

Esfuerzos en el elemento D (figura 8.35). Las deformaciones de los nudos de este elemento, en los sistemas general y local, son:

$$\boldsymbol{\Delta}^D = \mathbf{B}^D \boldsymbol{\Delta} = \begin{Bmatrix} \Delta_{3x} \\ \Delta_{3y} \\ \Delta_{1x} \\ \Delta_{1y} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 0.0 \\ 0.0 \\ 0.8167 \\ -0.3980 \end{Bmatrix} \cdot 10^{-3}$$

$$\boldsymbol{\delta}^D = \begin{Bmatrix} \delta_{3x} \\ \delta_{3y} \\ \delta_{1x} \\ \delta_{1y} \end{Bmatrix} = \mathbf{T}_2 \boldsymbol{\Delta}^D = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & -1 & 1 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} 0. \\ 0. \\ 0.8167 \\ -0.3980 \end{Bmatrix} \cdot 10^{-3} = \begin{Bmatrix} 0. \\ 0. \\ 0.2960 \\ -0.8589 \end{Bmatrix} \cdot 10^{-3}$$

con lo que los esfuerzos en sus extremos, calculados en el sistema local, son:

$$\mathbf{P}^A = \mathbf{K}_L^A \boldsymbol{\delta}^A \qquad \begin{Bmatrix} P_{3x} \\ P_{3y} \\ P_{2x} \\ P_{2y} \end{Bmatrix} = \frac{EA}{10\sqrt{2}} \begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} 0. \\ 0. \\ 0.2960 \\ -0.8589 \end{Bmatrix} 10^{-3} = \begin{Bmatrix} -4186 \\ 0 \\ 4186 \\ 0 \end{Bmatrix}$$

que corresponden a un esfuerzo axial de tracción de 4186 N. También pueden calcularse los esfuerzos en el sistema general, empleando las deformaciones y la matriz de rigidez referidas a dicho sistema:

$$\mathbf{F}^D = \mathbf{K}_G^D \boldsymbol{\Delta}^D \qquad \begin{Bmatrix} F_{3x} \\ F_{3y} \\ F_{1x} \\ F_{1y} \end{Bmatrix} = \frac{EA}{10\sqrt{2}} \begin{bmatrix} 0.5 & 0.5 & -0.5 & -0.5 \\ 0.5 & 0.5 & -0.5 & -0.5 \\ -0.5 & -0.5 & 0.5 & 0.5 \\ -0.5 & -0.5 & 0.5 & 0.5 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} 0. \\ 0. \\ 0.8167 \\ -0.3980 \end{Bmatrix} 10^{-3} = \begin{Bmatrix} -2960 \\ -2960 \\ 2960 \\ 2960 \end{Bmatrix}$$

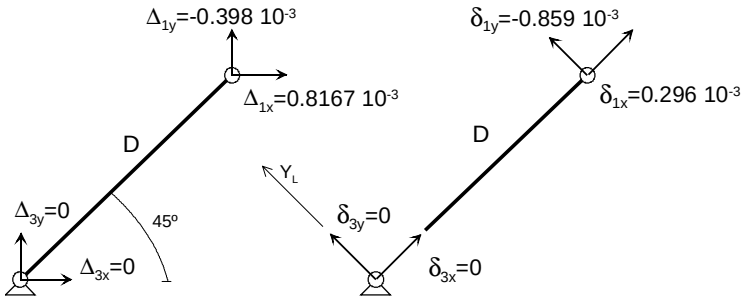


Figura 8.35

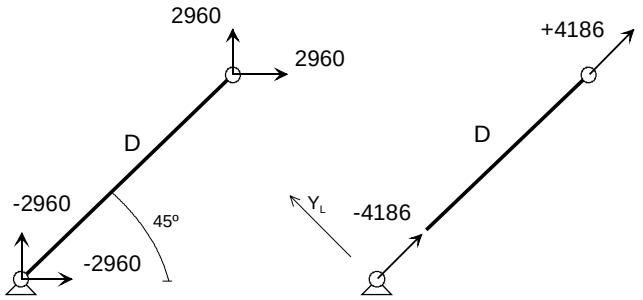


Figura 8.35 (cont)

Los esfuerzos en las restantes barras se calculan siguiendo el mismo procedimiento. Los valores finales se indican en la figura 8.36.

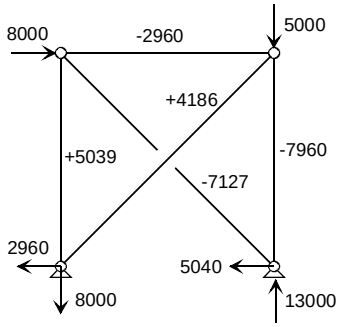


Figura 8.36

8.21.2 Calcular los esfuerzos en el pórtico de la figura 8.37. Todas las barras son del mismo material, con módulo de elasticidad *E*=200000 MPa. Sus propiedades resistentes se indican en la figura.

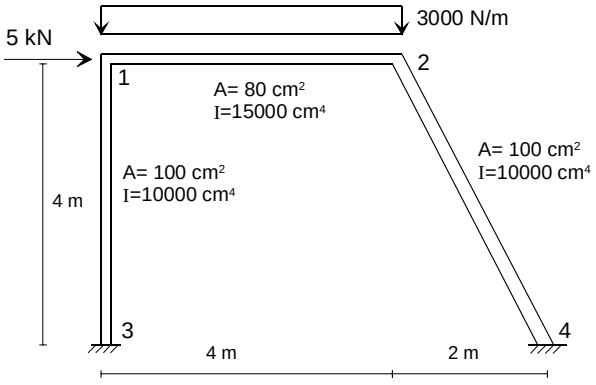


Figura 8.37

Para facilitar el desarrollo se emplean únicamente los grados de libertad no nulos, que son los siguientes:

$$\boldsymbol{\Delta}_I = \left\{ \Delta_{1x} \quad \Delta_{1y} \quad \theta_1 \quad \Delta_{2x} \quad \Delta_{2y} \quad \theta_2 \right\}^T$$

Las unidades empleadas en la resolución son N y m.

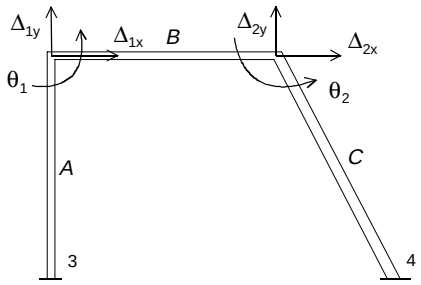


Figura 8.38

La matriz de rigidez correspondiente a estos grados de libertad es:

$$\mathbf{K}_{II} = \begin{bmatrix} \mathbf{K}^A_{G11} + \mathbf{K}^B_{G11} & \mathbf{K}^B_{G12} \\ \mathbf{K}^B_{G21} & \mathbf{K}^B_{G22} + \mathbf{K}^C_{G22} \end{bmatrix}$$

Todos los elementos son barras empotradas en los dos extremos, cuya matriz de rigidez viene dada por la ecuación (7.58).

Elemento A. Nudo inicial: 3. Nudo final: 1. Ángulo: 90º. Longitud: 4 m. Área: 0.01 m^2. Inercia: 10^{-4} m^4. cosα=0, sinα=1.

$$\mathbf{K}^A_{G11} = 10^8 \begin{bmatrix} 0.0375 & 0 & 0.075 \\ 0 & 5.0 & 0 \\ 0.075 & 0 & 0.2 \end{bmatrix} \begin{matrix} \Delta_{1x} \\ \Delta_{1Y} \\ \theta_1 \end{matrix}$$

Elemento B. Nudo inicial: 1. Nudo final: 2. Ángulo: 0º. Longitud: 4 m. Área: 0.008 m^2. Inercia: 1.5 10^{-4} m^4. cosα=1, sinα=0.

$$\mathbf{K}^B_G = \begin{bmatrix} \mathbf{K}^B_{G11} & \mathbf{K}^B_{G12} \\ \mathbf{K}^B_{G21} & \mathbf{K}^B_{G22} \end{bmatrix} = 10^8 \begin{bmatrix} 4 & 0 & 0 & -4 & 0 & 0 \\ 0 & 0.0562 & 0.1125 & 0 & -0.0562 & 0.1125 \\ 0 & 0.1125 & 0.3 & 0 & -0.1125 & 0.15 \\ -4 & 0 & 0 & 4 & 0 & 0 \\ 0 & -0.0562 & -0.1125 & 0 & 0.0562 & -0.1125 \\ 0 & 0.1125 & 0.15 & 0 & -0.1125 & 0.3 \end{bmatrix} \begin{matrix} \Delta_{1x} \\ \Delta_{1y} \\ \theta_1 \\ \Delta_{2x} \\ \Delta_{2y} \\ \theta_2 \end{matrix}$$

Elemento C. Nudo inicial: 2. Nudo final: 4. Ángulo: -63.43º. Longitud: 4.47 m. Área: 0.01 m^2. Inercia: 10^{-4} m^4. sinα=-0.894, cosα=0.447.

$$\mathbf{K}^C_{G22} = 10^8 \begin{bmatrix} 0.9159 & -1.7781 & 0.0537 \\ -1.7781 & 3.5831 & 0.0268 \\ 0.0537 & 0.0268 & 0.1789 \end{bmatrix} \begin{matrix} \Delta_{2x} \\ \Delta_{2y} \\ \theta_2 \end{matrix}$$

La matriz de rigidez de la estructura se obtiene ensamblando las matrices de los distintos elementos, según los grados de libertad correspondientes, siguiendo el esquema indicado antes.

$$\mathbf{K}_{II} = 10^8 \begin{bmatrix} 4.0375 & 0. & 0.075 & -4. & 0. & 0. \\ 0. & 5.0562 & 0.1125 & 0. & -0.0562 & 0.1125 \\ 0.075 & 0.1125 & 0.5 & 0. & -0.1125 & 0.15 \\ -4. & 0. & 0. & 4.9159 & -1.7781 & 0.0537 \\ 0. & -0.0562 & -0.1125 & -1.7781 & 3.6393 & -0.0857 \\ 0. & 0.1125 & 0.15 & 0.0537 & -0.0857 & 0.4789 \end{bmatrix}$$

Fuerzas nodales debidas a la carga distribuida: las fuerzas y momentos de empotramiento perfecto en la barra B son (figura 8.39)

$$P_{1y}^0 = \frac{qL}{2} = 6000 \text{ N} \qquad M_1^0 = \frac{qL^2}{12} = 4000 \text{ Nm}$$

$$P_{2y}^0 = \frac{qL}{2} = 6000 \text{ N} \qquad M_2^0 = -\frac{qL^2}{12} = -4000 \text{ Nm}$$

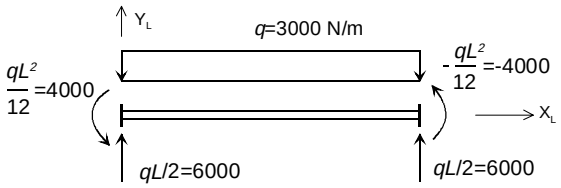


Figura 8.39

El vector de fuerzas de fase 0 correspondiente a esta fuerza distribuida es:

$$\mathbf{P}^{0B} = \begin{Bmatrix} P_{1x} = 0 \\ P_{1y} = 6000 \\ M_1 = 4000 \\ P_{2x} = 0 \\ P_{2y} = 6000 \\ M_2 = -4000 \end{Bmatrix} \equiv \mathbf{F}^{0B}$$

Este vector se ensambla, con signo menos, en el vector de fuerzas nodales de la estructura.

Incluyendo la carga puntual de 5 kN aplicada en el nudo 1 en dirección X, el vector de fuerzas nodales completo es:

$$\mathbf{F}_I = \begin{Bmatrix} F_{1x} = +5000 \\ F_{1y} = -6000 \\ M_1 = -4000 \\ F_{2x} = 0 \\ F_{2y} = -6000 \\ M_2 = +4000 \end{Bmatrix}$$

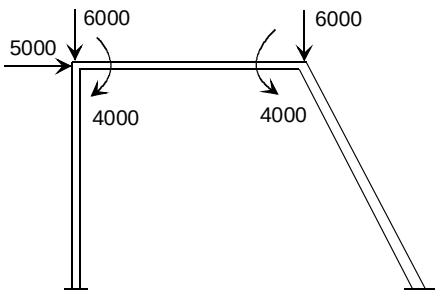


Figura 8.40

Los desplazamientos de los nudos que se obtienen son:

$$\boldsymbol{\Delta}_I = \mathbf{K}_{II}^{-1}\mathbf{F}_I \qquad \boldsymbol{\Delta}_I = \begin{Bmatrix} \Delta_{1x} \\ \Delta_{1y} \\ \theta_1 \\ \Delta_{2x} \\ \Delta_{2y} \\ \theta_2 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 0.2621 \\ -0.0104 \\ -0.1286 \\ 0.2496 \\ 0.1041 \\ 0.1169 \end{Bmatrix} \cdot 10^{-3}$$

Esfuerzos en el elemento A. Las deformaciones de los nudos de este elemento son:

$$\boldsymbol{\Delta}^A = \begin{Bmatrix} \Delta_{3x} \\ \Delta_{3y} \\ \theta_3 \\ \Delta_{1x} \\ \Delta_{1y} \\ \theta_1 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 0.0 \\ 0.0 \\ 0.0 \\ 0.2621 \\ -0.0104 \\ -0.1286 \end{Bmatrix} \cdot 10^{-3}$$

$$\boldsymbol{\delta}^A = \begin{Bmatrix} \delta_{3x} \\ \delta_{3y} \\ \theta_3 \\ \delta_{1x} \\ \delta_{1y} \\ \theta_1 \end{Bmatrix} = \mathbf{T}_2\boldsymbol{\Delta}^A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} 0. \\ 0. \\ 0. \\ 0.2621 \\ -0.0104 \\ -0.1286 \end{Bmatrix} \cdot 10^{-3} = \begin{Bmatrix} 0. \\ 0. \\ 0. \\ -0.0104 \\ -0.2621 \\ -0.1286 \end{Bmatrix} \cdot 10^{-3}$$

Los esfuerzos en sus extremos, calculados en el sistema local, son:

$$\mathbf{P}^A = \mathbf{K}_L^A\boldsymbol{\delta}^A$$

$$\begin{Bmatrix} P_{3x} \\ P_{3y} \\ M_3 \\ P_{1x} \\ P_{1y} \\ M_1 \end{Bmatrix} = 10^8 \begin{bmatrix} 5 & 0 & 0 & -5 & 0 & 0 \\ 0 & 0.0375 & 0.075 & 0 & -0.0375 & 0.075 \\ 0 & 0.075 & 0.2 & 0 & -0.075 & 0.1 \\ -5 & 0 & 0 & 5 & 0 & 0 \\ & -0.0375 & -0.075 & 0 & 0.0375 & -0.075 \\ & 0.075 & 0.1 & 0 & -0.075 & 0.2 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} 0. \\ 0. \\ 0. \\ -0.0104 \\ -0.2621 \\ -0.1286 \end{Bmatrix} 10^{-3} = \begin{Bmatrix} 5224 \\ 18 \\ 679 \\ -5224 \\ -18 \\ -606 \end{Bmatrix}$$

Esfuerzos en el elemento B: al estar orientado según el eje X, su sistema local coincide con el general de la estructura. Las deformaciones de sus nudos son:

$$\boldsymbol{\delta}^B = \boldsymbol{\Delta}^B = \begin{Bmatrix} \delta_{1x} \\ \delta_{1y} \\ \theta_1 \\ \delta_{2x} \\ \delta_{2y} \\ \theta_2 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 0.2621 \\ -0.0104 \\ -0.1286 \\ 0.2496 \\ 0.1041 \\ 0.1169 \end{Bmatrix} \cdot 10^{-3}$$

Los esfuerzos en sus extremos se obtienen sumando los de la fase 0 con los de la fase 1:

$$\mathbf{P}^B = \mathbf{P}^{0B} + \mathbf{P}^{1B} = \mathbf{P}^{0B} + \mathbf{K}_L^B \boldsymbol{\delta}^B$$

$$\begin{Bmatrix} P_{1x} \\ P_{1y} \\ M_1 \\ P_{2x} \\ P_{2y} \\ M_2 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 0 \\ 6000 \\ 4000 \\ 0 \\ 6000 \\ -4000 \end{Bmatrix} + 10^8 \begin{bmatrix} 4 & 0 & 0 & -4 & 0 & 0 \\ 0 & 0.0562 & 0.1125 & 0 & -0.0562 & 0.1125 \\ 0 & 0.1125 & 0.3 & 0 & -0.1125 & 0.15 \\ -4 & 0 & 0 & 4 & 0 & 0 \\ 0 & -0.0562 & -0.1125 & 0 & 0.0562 & -0.1125 \\ 0 & 0.1125 & 0.15 & 0 & -0.1125 & 0.3 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} 0.2621 \\ -0.0104 \\ -0.1286 \\ 0.2496 \\ 0.1041 \\ 0.1169 \end{Bmatrix} 10^{-3}$$

$$\mathbf{P}^B = \begin{Bmatrix} P_{1x} \\ P_{1y} \\ M_1 \\ P_{2x} \\ P_{2y} \\ M_2 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 0 \\ 6000 \\ 4000 \\ 0 \\ 6000 \\ -4000 \end{Bmatrix} + \begin{Bmatrix} 4981 \\ -776 \\ -3394 \\ -4981 \\ 776 \\ 290 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 4981 \\ 5224 \\ 606 \\ -4981 \\ 6776 \\ -3710 \end{Bmatrix}$$

Los esfuerzos internos en la viga son asimismo la suma de los debidos a las fases 0 y 1. Como ejemplo, en la figura 8.41 se muestra el diagrama de momentos de esta viga, representado con el criterio ingenieril.

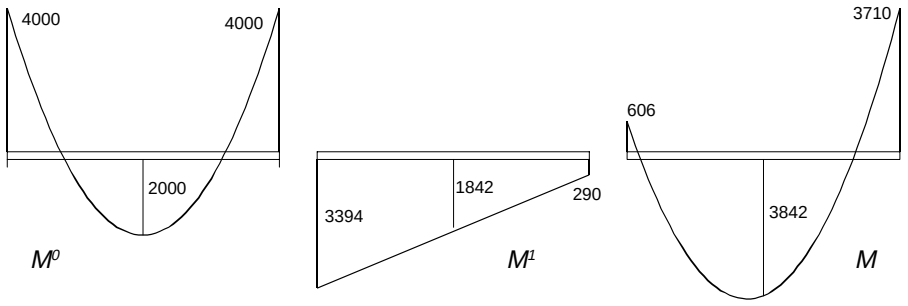


Figura 8.41

Esfuerzos en el elemento C. Las deformaciones de los nudos de este elemento en el sistema general son:

$$\boldsymbol{\Delta}^C = \begin{Bmatrix} \Delta_{2x} \\ \Delta_{2y} \\ \theta_2 \\ \Delta_{4x} \\ \Delta_{4y} \\ \theta_4 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 0.2496 \\ 0.1041 \\ 0.1169 \\ 0. \\ 0. \\ 0. \end{Bmatrix} \cdot 10^{-3}$$

Proyectándolas sobre el sistema local se obtiene:

$$\boldsymbol{\delta}^C = \begin{Bmatrix} \delta_{2x} \\ \delta_{2y} \\ \theta_2 \\ \delta_{4x} \\ \delta_{4y} \\ \theta_4 \end{Bmatrix} = \mathbf{T}_2^C \boldsymbol{\Delta}^C$$

$$\begin{Bmatrix} \delta_{2x} \\ \delta_{2y} \\ \theta_2 \\ \delta_{4x} \\ \delta_{4y} \\ \theta_4 \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} 0.447 & -0.894 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0.894 & 0.447 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0.447 & -0.894 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0.894 & 0.447 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} 0.2496 \\ 0.1041 \\ 0.1169 \\ 0. \\ 0. \\ 0. \end{Bmatrix} \cdot 10^{-3} = \begin{Bmatrix} 0.0185 \\ 0.2698 \\ 0.1169 \\ 0. \\ 0. \\ 0. \end{Bmatrix} \cdot 10^{-3}$$

Al no haber cargas aplicadas sobre esta viga, los esfuerzos en sus extremos, calculados en el sistema local, son:

$$\mathbf{P}^C = \mathbf{K}_L^C \boldsymbol{\delta}^C$$

$$\begin{Bmatrix} P_{2x} \\ P_{2y} \\ M_2 \\ P_{4x} \\ P_{4y} \\ M_4 \end{Bmatrix} = 10^8 \begin{bmatrix} 4.472 & 0 & 0 & -4.472 & 0 & 0 \\ 0 & 0.0268 & 0.06 & 0 & -0.0268 & 0.06 \\ 0 & 0.06 & 0.1789 & 0 & -0.06 & 0.089 \\ -4.472 & 0 & 0 & 4.472 & 0 & 0 \\ 0 & -0.0268 & -0.06 & 0 & 0.0268 & -0.06 \\ 0 & 0.06 & 0.089 & 0 & -0.06 & 0.1789 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} 0.0185 \\ 0.2698 \\ 0.1169 \\ 0. \\ 0. \\ 0. \end{Bmatrix} 10^{-3} = \begin{Bmatrix} 8288 \\ 1425 \\ 3710 \\ -8288 \\ -1425 \\ 2664 \end{Bmatrix}$$

La figura 8.42 muestra los esfuerzos en los extremos de todos los elementos así como el diagrama de momentos flectores de la estructura.

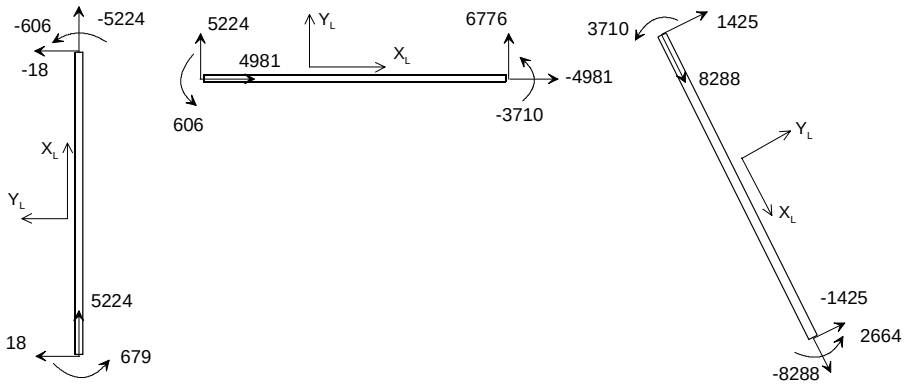


Figura 8.42

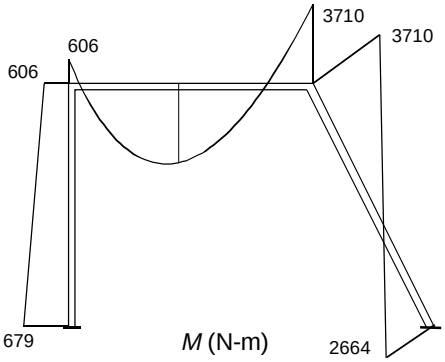


Figura 8.42 (cont.)

8.21.3 Calcular las deformaciones y esfuerzos producidos en la estructura del ejercicio 8.21.2 por un calentamiento de +20ºC en la cara superior de la viga B. Se supone que el canto de dicha viga es *h*=20 cm, y que el coeficiente de dilatación térmica del material vale 10^{-5} ºC^{-1}.

Los grados de libertad de la estructura y los coeficientes de rigidez correspondientes son los mismos que se emplearon en el ejercicio 8.21.2, siendo necesario calcular únicamente el vector de fuerzas nodales equivalentes al incremento de temperatura.

Las temperaturas media y gradiente en la viga son:

$$T_m = \frac{T_S + T_I}{2} = \frac{20+0}{2} = 10\,^{\circ}\mathrm{C} \qquad T_g = \frac{T_S - T_I}{h} = \frac{20-0}{0.20} = 100\,^{\circ}\mathrm{C/m}$$

Por lo tanto, el vector de fuerzas nodales equivalentes, según la expresión (8.44) es:

$$\mathbf{P}_T^{0B} = \begin{Bmatrix} P_{T1x} \\ P_{T1y} \\ M_{T1} \\ P_{T2x} \\ P_{T2y} \\ M_{T2} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 160000 \\ 0 \\ -30000 \\ -160000 \\ 0 \\ 30000 \end{Bmatrix}$$

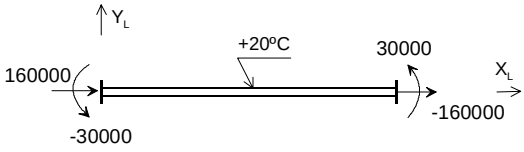


Figura 8.43

El vector de fuerzas de la estructura se obtiene ensamblando, con signo menos, las fuerzas de fase 0 existentes en la barra B.

$$\mathbf{F}_I = \begin{Bmatrix} F_{1x} \\ F_{1y} \\ M_1 \\ F_{2x} \\ F_{2y} \\ M_2 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} -160000 \\ 0 \\ 30000 \\ 160000 \\ 0 \\ -30000 \end{Bmatrix}$$

La figura 8.44 muestra dicho vector de fuerzas, que es equivalente al calentamiento de la barra B.

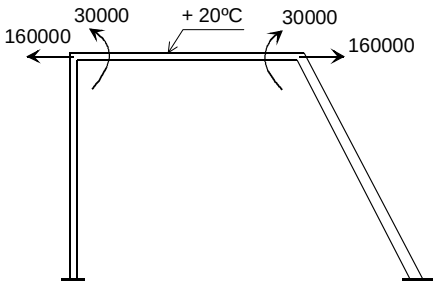


Figura 8.44

Las deformaciones nodales que se producen son (figura 8.45):

$$\boldsymbol{\Delta}_I = \begin{Bmatrix} \Delta_{1x} \\ \Delta_{1y} \\ \theta_1 \\ \Delta_{2x} \\ \Delta_{2y} \\ \theta_2 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} -0.3239 \\ 0.0002 \\ 0.9364 \\ 0.0906 \\ 0.0515 \\ -0.9207 \end{Bmatrix} \cdot 10^{-3}$$

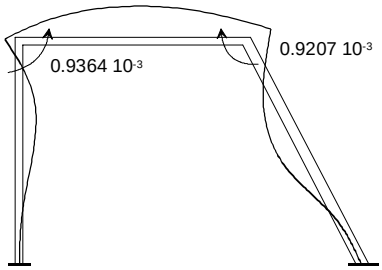


Figura 8.45

Los esfuerzos en la barra B se calculan siguiendo el proceso habitual, como suma de las fases 0 y 1:

$$\mathbf{P}^B = \mathbf{P}_T^{0B} + \mathbf{K}_L^B \boldsymbol{\delta}^B$$

$$\begin{Bmatrix} P_{1x} \\ P_{1y} \\ M_1 \\ P_{2x} \\ P_{2y} \\ M_2 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 160000 \\ 0 \\ -30000 \\ -160000 \\ 0 \\ 30000 \end{Bmatrix} + 10^8 \begin{bmatrix} 4 & 0 & 0 & -4 & 0 & 0 \\ 0 & 0.0562 & 0.1125 & 0 & -0.0562 & 0.1125 \\ 0 & 0.1125 & 0.3 & 0 & -0.1125 & 0.15 \\ -4 & 0 & 0 & 4 & 0 & 0 \\ & -0.0562 & -0.1125 & 0 & 0.0562 & -0.1125 \\ & 0.1125 & 0.15 & 0 & -0.1125 & 0.3 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} -0.3239 \\ 0.0002 \\ 0.9364 \\ 0.0906 \\ 0.0515 \\ -0.9207 \end{Bmatrix} 10^{-3}$$

$$\mathbf{P}^B = \begin{Bmatrix} P_{1x} \\ P_{1y} \\ M_1 \\ P_{2x} \\ P_{2y} \\ M_2 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 160000 \\ 0 \\ -30000 \\ -160000 \\ 0 \\ 30000 \end{Bmatrix} + \begin{Bmatrix} -165810 \\ -110 \\ 13700 \\ 165810 \\ 110 \\ -14150 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} -5810 \\ -110 \\ -16300 \\ 5810 \\ 110 \\ 15850 \end{Bmatrix}$$

La figura 8.46 muestra los esfuerzos en la barra B, su deformada y su diagrama de momentos flectores.

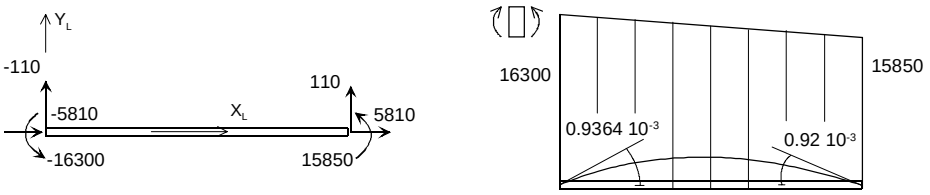


Figura 8.46

Nótese que la barra tiene un momento flector que es prácticamente constante y con las tracciones en su cara inferior, mientras que la deformada de la viga indica una curvatura con la concavidad hacia abajo (negativa para los ejes empleados). Esta aparente discordancia es debida a la presencia de la temperatura, con lo que la relación momento flector - curvatura viene dada por la ecuación (5.23). Adoptando un valor medio para el momento de valor 16000, dicha ecuación puede ponerse como:

$$M = EIv'' + EI\alpha T_g \qquad \rightarrow \qquad 16000 = EIv'' + 30000 \qquad \rightarrow \qquad EIv'' = -14000$$

lo cual explica la curvatura negativa para un momento flector positivo.

Los esfuerzos en las restantes barras se calculan siguiendo el mismo procedimiento, y su obtención se deja como ejercicio. El diagrama de momentos flectores de la estructura, representado con el criterio ingenieril, se muestra en la figura 8.47.

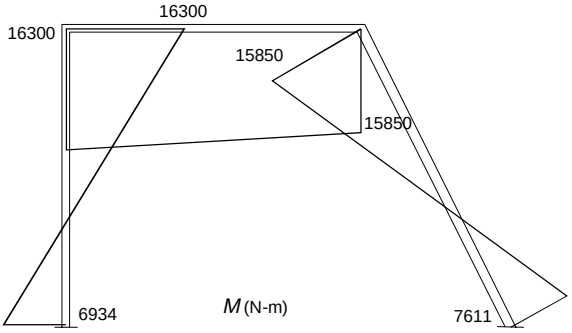


Figura 8.47

8.21.4 Calcular las deformaciones de los nudos y el esfuerzo en el muelle de la estructura mostrada en la figura 8.48. Las vigas tienen una rigidez a flexión de valor $EI = 10^7$ N m^2 y la rigidez del muelle es de 10^5 N/m.

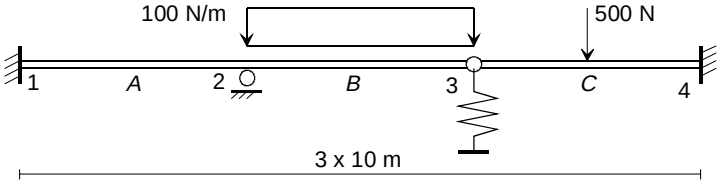


Figura 8.48

Se prescinde de los grados de libertad según X, que corresponden a la deformación axial y que son todos nulos pues están desacoplados de la flexión y no hay cargas axiales.

Los grados de libertad considerados son:

$$\boldsymbol{\Delta}_I = \begin{Bmatrix} \theta_2 \\ \Delta_{3y} \\ \theta_{3i} \end{Bmatrix}$$

En el nudo 3 se ha considerado como incógnita el giro por la izquierda, pero no el giro por la derecha, como se indica en la figura 8.49.

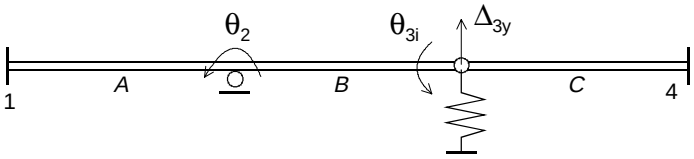


Figura 8.49

Para cada uno de los 4 elementos se calcula su colaboración a la rigidez de toda la estructura. Todos ellos tienen la misma longitud L y rigidez a flexión EI.

Elemento A. Se trata de una viga empotrada en ambos extremos:

$$\mathbf{K}_{II}^{(A)} = \begin{bmatrix} \frac{4EI}{L} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{matrix} \theta_2 \\ \Delta_{3y} \\ \theta_{3i} \end{matrix}$$

Elemento B. Se trata de una viga empotrada en ambos extremos:

$$\mathbf{K}_{II}^{(B)} = \begin{bmatrix} \frac{4EI}{L} & -\frac{6EI}{L^2} & \frac{2EI}{L} \\ -\frac{6EI}{L^2} & \frac{12EI}{L^3} & -\frac{6EI}{L^2} \\ \frac{2EI}{L} & -\frac{6EI}{L^2} & \frac{4EI}{L} \end{bmatrix} \begin{matrix} \theta_2 \\ \Delta_{3y} \\ \theta_{3i} \end{matrix}$$

Elemento C. Se trata de una viga articulada en el nudo 3 y empotrada en el nudo 4. Su colaboración a la rigidez de toda la estructura es:

$$\mathbf{K}_{II}^{(C)} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{3EI}{L^3} & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{matrix} \theta_2 \\ \Delta_{3y} \\ \theta_{3i} \end{matrix}$$

Muelle. Colabora a la rigidez de la deformación vertical del nudo 3:

$$\mathbf{K}_{II}^{(m)} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & K & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{matrix} \theta_2 \\ \Delta_{3y} \\ \theta_{3i} \end{matrix}$$

Sumando las matrices anteriores se obtiene la matriz de rigidez de la estructura:

$$\mathbf{K}_{II} = \mathbf{K}_{II}^{(A)} + \mathbf{K}_{II}^{(B)} + \mathbf{K}_{II}^{(C)} + \mathbf{K}_{II}^{(m)} = \begin{bmatrix} \frac{4EI}{L} + \frac{4EI}{L} & -\frac{6EI}{L^2} & \frac{2EI}{L} \\ -\frac{6EI}{L^2} & \frac{12EI}{L^3} + \frac{3EI}{L^3} + K & -\frac{6EI}{L^2} \\ \frac{2EI}{L} & -\frac{6EI}{L^2} & \frac{4EI}{L} \end{bmatrix} \begin{matrix} \theta_2 \\ \Delta_{3y} \\ \theta_{3i} \end{matrix}$$

El vector de fuerzas nodales equivalentes tiene contribución de las dos cargas aplicadas.

Carga distribuida sobre B. Las fuerzas de fase 0 debidas a esta carga son (figura 8.50):

$$F_{2y}^0 = \frac{qL}{2} = 500 \text{ N} \qquad M_2^0 = \frac{qL^2}{12} = 833 \text{ Nm}$$

$$F_{3y}^0 = \frac{qL}{2} = 500 \text{ N} \qquad M_{3i}^0 = -\frac{qL^2}{12} = -833 \text{ Nm}$$

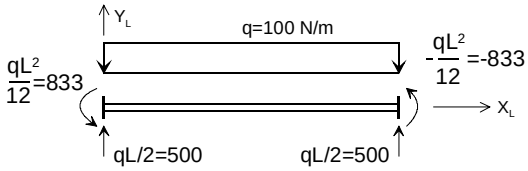


Figura 8.50

El vector de fuerzas de fase 0 correspondiente a esta fuerza distribuida es:

$$\mathbf{F}^{0B} = \begin{Bmatrix} F_{2y} = 500 \\ M_2 = 833 \\ F_{3y} = 500 \\ M_{3i} = -833 \end{Bmatrix}$$

Carga puntual sobre C. Las fuerzas de fase 0 debidas a esta carga son las producidas por una carga puntual sobre una viga articulada - empotrada (figura 8.51):

$$F_{3y}^0 = \frac{5P}{16} = 156 \text{ N} \qquad M_{3d}^0 = 0 \qquad F_{4y}^0 = \frac{11P}{16} = 344 \text{ N} \qquad M_4^0 = -\frac{3PL}{16} = -937 \text{ Nm}$$

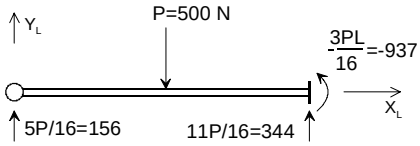


Figura 8.51

El vector de fuerzas de fase 0 correspondiente a esta fuerza es:

$$\mathbf{F}^{0C} = \begin{Bmatrix} P_{3y} = 156 \\ M_{3d} = 0 \\ P_{4y} = 344 \\ M_4 = -937 \end{Bmatrix}$$

El vector de fuerzas nodales equivalentes de toda la estructura se obtiene ensamblando los dos anteriores, y se muestra en la figura 8.52.

$$\mathbf{F}_I = \begin{Bmatrix} M_2 \\ F_{3y} \\ M_{3i} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} -833 \\ -500-156 \\ 833 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} -833 \\ -656 \\ 833 \end{Bmatrix}$$

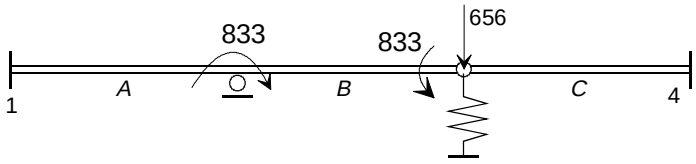


Figura 8.52

Las deformaciones de los nudos son:

$$\boldsymbol{\Delta}_I = \mathbf{K}_{II}^{-1}\mathbf{F}_I = \begin{Bmatrix} \theta_2 \\ \Delta_{3y} \\ \theta_{3i} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} -0.349 \\ -3.97 \\ -0.213 \end{Bmatrix} 10^{-3}$$

La fuerza en el muelle es:

$$F_m = K\Delta_{3y} = 10^5\,(-3.97\cdot 10^{-3}) = -397 \quad \text{N}$$

El giro por la derecha de 3 puede obtenerse como suma del giro en la fase 0 y en la fase 1 en la barra C. El giro en la fase 0 es el giro producido en el apoyo de una viga articulada - empotrada por una carga puntual situada en su centro (figura 8.53). El valor de este giro puede calcularse fácilmente aplicando el primer teorema de Mohr entre los puntos 3 y 4.

$$\theta_4 - \theta_{3d}^0 = -\theta_{3d}^0 = \frac{10}{2EI}1562.5 - \frac{5}{2EI}2500 = \frac{1562.5}{EI} = 1562.5\cdot 10^{-7} \quad \text{rad}$$

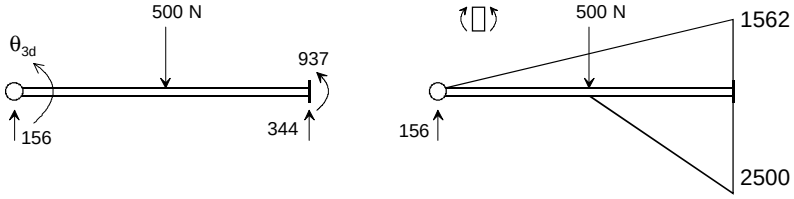


Figura 8.53

El giro de fase 1 se calcula mediante la expresión (7.116):

$$\theta_{3d}^1 = \frac{3}{2L}\left(\Delta_{4y} - \Delta_{3y}\right) - \frac{\theta_4}{2} = -\frac{3\Delta_{3y}}{2L} = 5.95\cdot 10^{-4} \quad \text{rad}$$

Por lo tanto el giro total por la derecha en el nudo 3 es:

$$\theta_{3d} = \theta_{3d}^0 + \theta_{3d}^1 = 0.439\cdot 10^{-3} \quad \text{rad}$$

8.21.5 Calcular las deformaciones y los esfuerzos en el pórtico de la figura 8.54 cuando el apoyo 4 sufre un descenso de 2 cm. Todas las barras son del mismo material, con módulo de elasticidad 200 GPa, y tienen un área de 0.01 m^2 y un momento de inercia de 2 10^{-4} m^4.

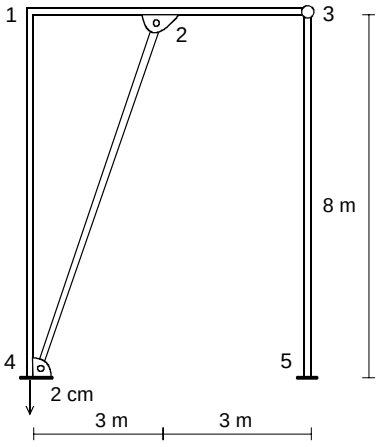


Figura 8.54

En el nudo 3 sólo se consideran sus dos desplazamientos como incógnitas, no incluyéndose los giros. Con esto la estructura tiene 8 grados de libertad desconocidos y un grado de libertad de valor conocido, como se muestra en la figura 8.55.

Estos grados de libertad se agrupan de la forma siguiente:

$$\Delta_I = \begin{Bmatrix} \Delta_I \\ \Delta_C \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \Delta_{1x} \\ \Delta_{1y} \\ \theta_1 \\ \Delta_{2x} \\ \Delta_{2y} \\ \theta_2 \\ \Delta_{3x} \\ \Delta_{3y} \\ \Delta_{4y} \end{Bmatrix}$$

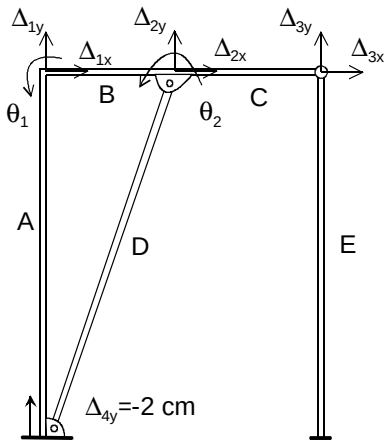


Figura 8.55

A continuación se obtienen las matrices de rigidez de los distintos elementos estructurales, pero sólo se calculan aquellos términos que se corresponden con los grados de libertad.

Elemento A. Se trata de un elemento empotrado en ambos extremos.

Nudo inicial: 4. Nudo final: 1. Ángulo: 90º. Longitud: 8 m. cosα=0, sinα=1.

$$\mathbf{K}_G^A = 10^8 \begin{bmatrix} 2.5 & 0 & -2.5 & 0 \\ 0 & 0.0094 & 0 & 0.0375 \\ -2.5 & 0 & 2.5 & 0 \\ 0 & 0.0375 & 0 & 0.2 \end{bmatrix} \begin{matrix} \Delta_{4y} \\ \Delta_{1x} \\ \Delta_{1y} \\ \theta_1 \end{matrix}$$

Elemento B. Se trata de un elemento empotrado en ambos nudos extremos.

Nudo inicial: 1. Nudo final: 2. Ángulo: 0º. Longitud: 3 m. cosα=1, sinα=0.

$$\mathbf{K}_G^B = 10^8 \begin{bmatrix} 6.667 & 0 & 0 & -6.667 & 0 & 0 \\ 0 & 0.1778 & 0.2666 & 0 & -0.1778 & 0.2666 \\ 0 & 0.2666 & 0.5333 & 0 & -0.2666 & 0.2666 \\ -6.667 & 0 & 0 & 6.667 & 0 & 0 \\ 0 & -0.1778 & -0.2666 & 0 & 0.1778 & -0.2666 \\ 0 & 0.2666 & 0.2666 & 0 & -0.2666 & 0.5333 \end{bmatrix} \begin{matrix} \Delta_{1x} \\ \Delta_{1y} \\ \theta_1 \\ \Delta_{2x} \\ \Delta_{2y} \\ \theta_2 \end{matrix}$$

Elemento C. Se trata de un elemento empotrado en el nudo 2 y articulado en el nudo 3.

Nudo inicial: 2. Nudo final: 3. Ángulo: 0º. Longitud: 3 m. cosα=1, sinα=0.

$$\mathbf{K}_G^C = 10^8 \begin{bmatrix} 6.667 & 0 & 0 & -6.667 & 0 & 0 \\ 0 & 0.0444 & 0.1333 & 0 & -0.0444 & 0 \\ 0 & 0.1333 & 0.4000 & 0 & -0.1333 & 0 \\ -6.667 & 0 & 0 & 6.667 & 0 & 0 \\ 0 & -0.0444 & -0.1333 & 0 & 0.0444 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{matrix} \Delta_{2x} \\ \Delta_{2y} \\ \theta_2 \\ \Delta_{3x} \\ \Delta_{3y} \\ \theta_3 \end{matrix}$$

Elemento D. Se trata de un elemento articulado en ambos extremos.

Nudo inicial: 4. Nudo final: 2. Ángulo: 69.44º. Longitud: 8.54 m. cosα=0.351, sinα=0.93.

$$\mathbf{K}_G^D = 10^8 \begin{bmatrix} 2.0522 & -0.7696 & -2.0522 \\ -0.7696 & 0.2886 & 0.7696 \\ -2.0522 & 0.7696 & 2.0522 \end{bmatrix} \begin{matrix} \Delta_{4y} \\ \Delta_{2x} \\ \Delta_{2y} \end{matrix}$$

Elemento E. Se trata de un elemento empotrado en el nudo 5 y articulado en el nudo 3.

Nudo inicial: 5. Nudo final: 3. Ángulo: 90º. Longitud: 8 m. cosα=0, sinα=1.

De sus 5 posibles grados de libertad, sólo intervienen en la estructura los correspondientes al nudo final, que son los de las filas y columnas 4 y 5 de su matriz de rigidez:

$$\mathbf{K}_G^E = 10^8 \begin{bmatrix} 0.023 & 0 \\ 0 & 2.5 \end{bmatrix} \begin{matrix} \Delta_{3x} \\ \Delta_{3y} \end{matrix}$$

La matriz de rigidez de la estructura se obtiene ensamblando las matrices de los distintos elementos, según los grados de libertad correspondientes.

$$\mathbf{K} = 10^8 \left[\begin{array}{rrrrrrrrr} 6.676 & 0. & 0.0375 & -6.667 & 0. & 0. & 0. & 0. & 0. \\ 0. & 2.6778 & 0.2667 & 0. & -0.1778 & 0.2667 & 0. & 0. & -2.5 \\ 0.0375 & 0.2667 & 0.7333 & 0. & -0.2667 & 0.2667 & 0. & 0. & 0. \\ -6.667 & 0. & 0. & 13.622 & 0.7696 & 0. & -6.667 & 0. & -0.7696 \\ 0. & -0.1778 & -0.2667 & 0.7696 & 2.2745 & -0.1333 & 0. & -0.0444 & -2.0522 \\ 0. & 0.2667 & 0.2667 & 0. & -0.1333 & 0.9333 & 0. & -0.1333 & 0. \\ 0. & 0. & 0. & -6.667 & 0. & 0. & 6.669 & 0. & 0. \\ 0. & 0. & 0. & 0. & -0.0444 & -0.1333 & 0. & 2.5444 & 0. \\ \hline 0. & -2.5 & 0. & -0.7696 & -2.0522 & 0. & 0. & 0. & 4.5522 \end{array}\right]$$

Donde se identifican las distintas matrices:

$$\mathbf{K} = \begin{bmatrix} \mathbf{K}_{II} & \mathbf{K}_{IC} \\ \mathbf{K}_{CI} & \mathbf{K}_{CC} \end{bmatrix}$$

Las fuerzas nodales correspondientes a la deformación se obtienen mediante la ecuación (8.99).

$$\mathbf{F}_C^* = -\mathbf{K}_{IC}\boldsymbol{\Delta}_C \qquad \begin{Bmatrix} F_{1x} \\ F_{1y} \\ M_1 \\ F_{2x} \\ F_{2y} \\ M_2 \\ F_{3x} \\ F_{3y} \end{Bmatrix} = -10^8 \begin{bmatrix} 0. \\ -2.5 \\ 0. \\ -0.7696 \\ -2.0522 \\ 0. \\ 0. \\ 0. \end{bmatrix} \{-0.02\} = \begin{Bmatrix} 0. \\ -5.0 \\ 0. \\ -1.539 \\ -4.104 \\ 0. \\ 0. \\ 0. \end{Bmatrix} 10^6$$

Se observa que aparecen fuerzas nodales en todos aquellos grados de libertad que están relacionados, a través de la matriz de rigidez, con el grado de libertad cuyo movimiento está impuesto. La figura 8.56 muestra las distintas componentes del vector de fuerzas equivalentes al desplazamiento.

Este vector constituye el vector de fuerzas nodales de la estructura, ya que en este caso no hay ningún otro tipo de fuerzas aplicadas sobre ella.

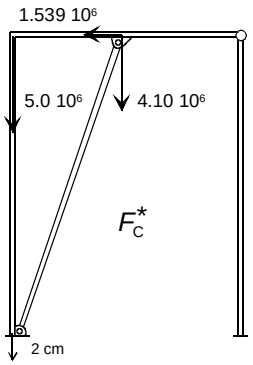


Figura 8.56

El sistema de ecuaciones final es:

$$10^{8}\begin{bmatrix} 6.676 & 0. & 0.0375 & -6.667 & 0. & 0. & 0. & 0. \\ 0. & 2.6778 & 0.2667 & 0. & -0.1778 & 0.2667 & 0. & 0. \\ 0.0375 & 0.2667 & 0.7333 & 0. & -0.2667 & 0.2667 & 0. & 0. \\ -6.667 & 0. & 0. & 13.622 & 0.7696 & 0. & -6.667 & 0. \\ 0. & -0.1778 & -0.2667 & 0.7696 & 2.2745 & -0.1333 & 0. & -0.0444 \\ 0. & 0.2667 & 0.2667 & 0. & -0.1333 & 0.9333 & 0. & -0.1333 \\ 0. & 0. & 0. & -6.667 & 0. & 0. & 6.669 & 0. \\ 0. & 0. & 0. & 0. & -0.0444 & -0.1333 & 0. & 2.5444 \end{bmatrix}\begin{Bmatrix} \Delta_{1x} \\ \Delta_{1y} \\ \theta_1 \\ \Delta_{2x} \\ \Delta_{2y} \\ \theta_2 \\ \Delta_{3x} \\ \Delta_{3y} \end{Bmatrix} = 10^{6}\begin{Bmatrix} 0. \\ -5. \\ 0. \\ -1.539 \\ -4.104 \\ 0. \\ 0. \\ 0. \end{Bmatrix}$$

Los desplazamientos de los nudos son:

$$\mathbf{\Delta}_I = \mathbf{K}_{II}^{-1}\mathbf{F}_C^{*} \qquad \mathbf{\Delta}_I = \begin{Bmatrix} \Delta_{1x} \\ \Delta_{1y} \\ \theta_1 \\ \Delta_{2x} \\ \Delta_{2y} \\ \theta_2 \\ \Delta_{3x} \\ \Delta_{3y} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} -1.892 \\ -2.008 \\ 0.247 \\ -1.894 \\ -1.273 \\ 0.320 \\ -1.893 \\ -0.005 \end{Bmatrix} 10^{-2}$$

La reacción exterior en la dirección Y del nudo 3, es decir la fuerza que es necesario aplicar en dicho punto para imponer el descenso, se calcula mediante la expresión:

$$\mathbf{R}_C = \mathbf{K}_{CI}\mathbf{\Delta}_I + \mathbf{K}_{CC}\mathbf{\Delta}_I - \mathbf{F}_F$$

$$\{R_{4y}\} = 10^{8}\begin{bmatrix} 0. & -2.5 & 0. & -0.7696 & -2.0522 & 0. & 0. & 0. \end{bmatrix}\begin{Bmatrix} -1.892 \\ -2.008 \\ 0.247 \\ -1.894 \\ -1.273 \\ 0.320 \\ -1.893 \\ -0.005 \end{Bmatrix} 10^{-2} +$$

$$+\left[4.5522 \cdot 10^{8}\right]\{-0.02\} = -13617 \quad \text{N}$$

Esfuerzos en los elementos: como ejemplo se calculan los esfuerzos en la barra A. Las deformaciones de los nudos de este elemento en los sistemas general y local son:

$$\mathbf{\Delta}^{A} = \begin{Bmatrix} \Delta_{4x} \\ \Delta_{4y} \\ \theta_4 \\ \Delta_{1x} \\ \Delta_{1y} \\ \theta_1 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 0. \\ -2. \\ 0. \\ -1.892 \\ -2.008 \\ 0.247 \end{Bmatrix} 10^{-2}$$

$$\boldsymbol{\delta}^A = \begin{Bmatrix} \delta_{3x} \\ \delta_{3y} \\ \theta_3 \\ \delta_{1x} \\ \delta_{1y} \\ \theta_1 \end{Bmatrix} = \mathbf{T}_2 \boldsymbol{\Delta}^A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} 0. \\ -2. \\ 0. \\ -1.892 \\ -2.008 \\ 0.247 \end{Bmatrix} 10^{-2} = \begin{Bmatrix} -2 \\ 0. \\ 0. \\ -2.008 \\ 1.892 \\ 0.247 \end{Bmatrix} 10^{-2}$$

con lo que los esfuerzos en sus extremos, calculados en el sistema local, son:

$$\mathbf{P}^A = \mathbf{K}_L^A \boldsymbol{\delta}^A$$

$$\begin{Bmatrix} P_{4x} \\ P_{4y} \\ M_4 \\ P_{1x} \\ P_{1y} \\ M_1 \end{Bmatrix} = 10^8 \begin{bmatrix} 2.5 & 0 & 0 & -2.5 & 0 & 0 \\ 0 & 0.0094 & 0.0375 & 0 & -0.0094 & 0.0375 \\ 0 & 0.0375 & 0.2 & 0 & -0.0375 & 0.1 \\ -2.5 & 0 & 0 & 2.5 & 0 & 0 \\ 0 & -0.0094 & -0.0375 & 0 & 0.0094 & -0.0375 \\ 0 & 0.0375 & 0.1 & 0 & -0.0375 & 0.2 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} -2 \\ 0. \\ 0. \\ -2.008 \\ 1.892 \\ 0.247 \end{Bmatrix} 10^{-2} = \begin{Bmatrix} 20766 \\ -8457 \\ -46208 \\ -20766 \\ 8457 \\ -21445 \end{Bmatrix}$$

La figura 8.57 muestra el diagrama de momentos flectores de la estructura y los esfuerzos axiales en las barras. Nótese que por efecto de la deformación impuesta en el nudo 4 la barra A está a compresión y la E a tracción. Ambos esfuerzos se equilibran con la reacción exterior de valor 13617 N.

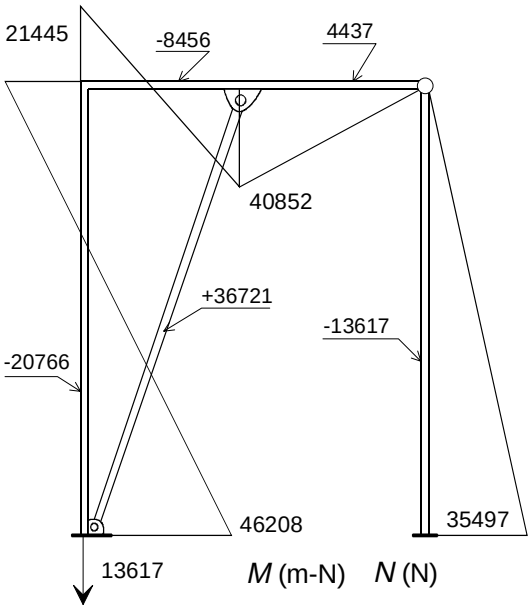


Figura 8.57

8.21.6 En el pórtico de la figura 8.58 existe un empotramiento deslizante en el nudo 1, orientado a 45º con respecto a la horizontal. Calcular las deformaciones y los esfuerzos en la barra A, bajo la acción de las cargas indicadas. Todas las

barras son del mismo material, con módulo de elasticidad 210000 MPa, área 0.01 m^2 e inercia 10^{-4} m^4.

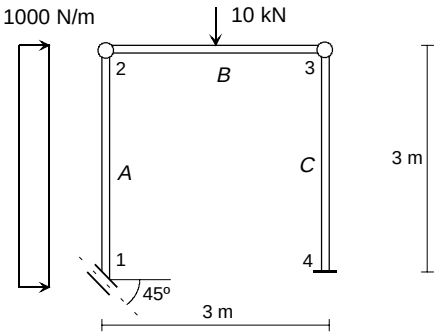


Figura 8.58

Se adopta un sistema de ejes local en el nudo 1, tal y como se indica en la figura 8.59, con objeto de imponer con sencillez en él la condición de ligadura introducida por la deslizadera inclinada. Los grados de libertad de la estructura en el sistema de ejes general y en el sistema de ejes mixto, considerando el sistema local del nudo 1, son:

$$\boldsymbol{\Delta} = \begin{Bmatrix} \Delta_{1x} \\ \Delta_{1y} \\ \Delta_{2x} \\ \Delta_{2y} \\ \Delta_{3x} \\ \Delta_{3y} \end{Bmatrix} \qquad \boldsymbol{\Delta}^N = \begin{Bmatrix} \Delta^N_{1x} \\ \Delta^N_{1y} \\ \Delta_{2x} \\ \Delta_{2y} \\ \Delta_{3x} \\ \Delta_{3y} \end{Bmatrix}$$

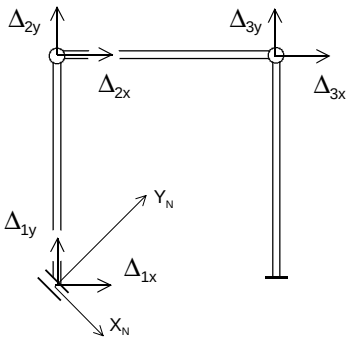


Figura 8.59

La relación entre los grados de libertad del nudo 1 en los sistemas general y local se muestra en la figura 8.60, y es

$$\begin{Bmatrix} \Delta^N_{1x} \\ \Delta^N_{1y} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos(-45) & \sin(-45) \\ -\sin(-45) & \cos(-45) \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \Delta_{1x} \\ \Delta_{1y} \end{Bmatrix}$$

$$\boldsymbol{\Delta}^N_1 = \mathbf{T}^N_1 \boldsymbol{\Delta}_1$$

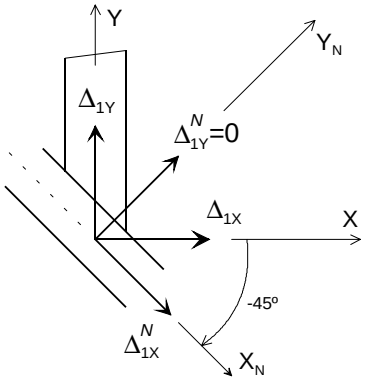


Figura 8.60

La matriz de rigidez de la estructura en el sistema general es:

$$\mathbf{K}=\begin{bmatrix}\mathbf{K}_{G11}^{A} & \mathbf{K}_{G12}^{A} & \mathbf{0}\\ \mathbf{K}_{G21}^{A} & \mathbf{K}_{G22}^{A}+\mathbf{K}_{G22}^{B} & \mathbf{K}_{G23}^{B}\\ \mathbf{0} & \mathbf{K}_{G32}^{B} & \mathbf{K}_{G33}^{B}+\mathbf{K}_{G33}^{C}\end{bmatrix}$$

donde todas las submatrices son de tamaño 2x2. Esta matriz, expresada en el sistema mixto de grados de libertad, es:

$$\mathbf{K}^{N}=\begin{bmatrix}\mathbf{T}_1^{N}\mathbf{K}_{G11}^{A}\mathbf{T}_1^{N^T} & \mathbf{T}_1^{N}\mathbf{K}_{G12}^{A} & \mathbf{0}\\ \mathbf{K}_{G21}^{A}\mathbf{T}_1^{N^T} & \mathbf{K}_{G22}^{A}+\mathbf{K}_{G22}^{B} & \mathbf{K}_{G23}^{B}\\ \mathbf{0} & \mathbf{K}_{G32}^{B} & \mathbf{K}_{G33}^{B}+\mathbf{K}_{G33}^{C}\end{bmatrix}$$

A continuación se obtienen las matrices de rigidez de los distintos elementos, pero sólo se calculan aquellos términos que se corresponden con los grados de libertad no nulos.

Elemento A. Se trata de un elemento empotrado en el nudo 1 y articulado en el nudo 2. Se adopta un sistema de ejes local con su origen en el nudo 1. La matriz de rigidez de la barra, expresada en el sistema de ejes general es:

$$\mathbf{K}_G^{A}=\begin{bmatrix}\mathbf{K}_{G11}^{A} & \mathbf{K}_{G12}^{A}\\ \mathbf{K}_{G21}^{A} & \mathbf{K}_{G22}^{A}\end{bmatrix}=10^8\begin{bmatrix}0.0233 & 0 & -0.0233 & 0\\ 0 & 7. & 0 & -7.\\ -0.0233 & 0 & 0.0233 & 0\\ 0 & -7. & 0 & 7.\end{bmatrix}\begin{matrix}\Delta_{1x}\\ \Delta_{1y}\\ \Delta_{2x}\\ \Delta_{2y}\end{matrix}$$

Elemento B. Se trata de un elemento articulado en ambos nudos extremos. Se adopta un sistema de ejes local con su origen en el nudo 2, con lo que coincide con el general.

$$\mathbf{K}_G^{B}=\begin{bmatrix}\mathbf{K}_{G22}^{B} & \mathbf{K}_{G23}^{B}\\ \mathbf{K}_{G23}^{B} & \mathbf{K}_{G33}^{B}\end{bmatrix}=10^8\begin{bmatrix}7. & 0. & -7. & 0.\\ 0. & 0. & 0. & 0.\\ -7 & 0. & 7. & 0.\\ 0. & 0. & 0. & 0.\end{bmatrix}\begin{matrix}\Delta_{2x}\\ \Delta_{2y}\\ \Delta_{3x}\\ \Delta_{3y}\end{matrix}$$

Elemento C. Se trata de un elemento empotrado en el nudo 4 y articulado en el nudo 3. Se adopta un sistema de ejes local con su origen en el nudo 4.

$$\mathbf{K}_{G33}^{C}=10^8\begin{bmatrix}0.0233 & 0\\ 0 & 7.\end{bmatrix}\begin{matrix}\Delta_{3x}\\ \Delta_{3y}\end{matrix}$$

La matriz de rigidez de la estructura se obtiene ensamblando las matrices de los distintos elementos, según los grados de libertad correspondientes a cada uno de ellos:

$$\mathbf{K}=10^8\begin{bmatrix}0.0233 & 0. & -0.0233 & 0. & 0. & 0.\\ 0. & 7. & 0. & -7. & 0. & 0.\\ -0.0233 & 0. & 7.0233 & 0. & -7. & 0.\\ 0. & -7 & 0. & 7. & 0. & 0.\\ 0. & 0. & -7. & 0. & 7.0233 & 0.\\ 0. & 0. & 0. & 0. & 0. & 7.\end{bmatrix}\begin{matrix}\Delta_{1x}\\ \Delta_{1y}\\ \Delta_{2x}\\ \Delta_{2y}\\ \Delta_{3x}\\ \Delta_{3y}\end{matrix}$$

Con objeto de transformar esta matriz al sistema de ejes local del nudo 1, se pre y post multiplican las dos primeras filas y columnas por la matriz de rotación del nudo 1, $\mathbf{T}_1^N$, con lo que se obtiene:

$$\mathbf{K}^N = 10^8 \begin{bmatrix} 3.5117 & -3.488 & -0.0165 & 4.9497 & 0. & 0. \\ -3.488 & 3.5117 & -0.0165 & -4.9497 & 0. & 0. \\ -0.0165 & -0.0165 & 7.0233 & 0. & -7. & 0. \\ 4.9497 & -4.9497 & 0. & 7. & 0. & 0. \\ 0. & 0. & -7. & 0. & 7.0233 & 0. \\ 0. & 0. & 0. & 0. & 0. & 7. \end{bmatrix} \begin{matrix} \Delta_{1x}^N \\ \Delta_{1y}^N \\ \Delta_{2x} \\ \Delta_{2y} \\ \Delta_{3x} \\ \Delta_{3y} \end{matrix}$$

En esta matriz es fácil introducir la condición de ligadura impuesta por la deslizadera, que es $\Delta_{1y}^N = 0$. Para ello basta con borrar la segunda fila y la segunda columna, con lo que se obtiene la matriz de rigidez final, que está referida a los grados de libertad no nulos y entre ellos a la deformación en la dirección local de la deslizadera.

$$\mathbf{K}_{II}^N = 10^8 \begin{bmatrix} 3.5117 & -0.0165 & 4.9497 & 0. & 0. \\ -0.0165 & 7.0233 & 0. & -7 & 0. \\ 4.9497 & 0. & 7. & 0. & 0. \\ 0. & -7. & 0. & 7.0233 & 0. \\ 0. & 0. & 0. & 0. & 7. \end{bmatrix} \begin{matrix} \Delta_{1x}^N \\ \Delta_{2x} \\ \Delta_{2y} \\ \Delta_{3x} \\ \Delta_{3y} \end{matrix}$$

El cálculo de las fuerzas nodales sigue el proceso habitual. La carga distribuida aplicada sobre la barra A genera unas fuerzas de fase 0 cuyo valor es (figura 8.61):

$$P_{1y}^0 = \frac{5qL}{8} = 1875 \text{ N}$$

$$M_1^0 = \frac{qL^2}{8} = 1125 \text{ Nm}$$

$$P_{2y}^0 = \frac{3qL}{8} = 1125 \text{ N}$$

$$M_2^0 = 0$$

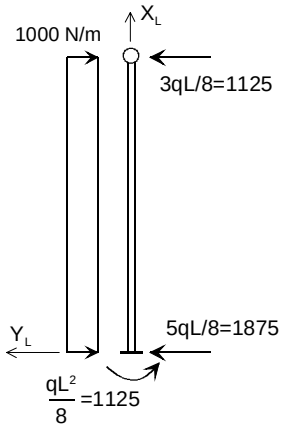


Figura 8.61

El vector de fuerzas de fase 0, referido a los sistemas de ejes local y general, es:

$$\mathbf{P}^{0A} = \begin{Bmatrix} P_{1x} \\ P_{1y} \\ M_1 \\ P_{2x} \\ P_{2y} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 0 \\ 1875 \\ 1125 \\ 0 \\ 1125 \end{Bmatrix}$$

$$\mathbf{F}^{0A} = \begin{Bmatrix} F_{1x} \\ F_{1y} \\ M_1 \\ F_{2x} \\ F_{2y} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} -1875 \\ 0 \\ 1125 \\ -1125 \\ 0 \end{Bmatrix}$$

La carga puntual en la barra B genera unas fuerzas en los extremos de la barra cuyo valor es (figura 8.62):

$$P_{2y}^0 = \frac{PL}{2} = 5000 \text{ N}$$

$$M_2^0 = 0$$

$$P_{3y}^0 = \frac{PL}{2} = 5000 \text{ N}$$

$$M_3^0 = 0$$

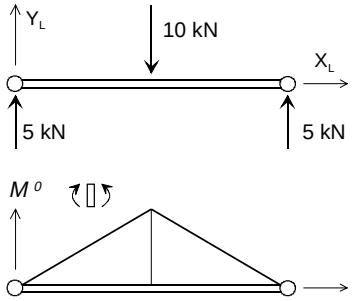


Figura 8.62

No aparecen momentos en los extremos, ya que la barra está articulada en ellos, pero sin embargo sí que existe un diagrama de momentos triangular, debido a la carga puntual. El vector de fuerzas de fase 0 para esta barra, en el sistema general, es:

$$\mathbf{F}^{0B} = \begin{Bmatrix} F_{2x} \\ F_{2y} \\ F_{3x} \\ F_{3y} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 0. \\ 5000 \\ 0. \\ 5000 \end{Bmatrix}$$

El vector de fuerzas nodales de la estructura se obtiene ensamblando, con signo menos, los vectores de fase 0 producidos por las dos cargas estudiadas, según los grados de libertad correspondientes.

$$\mathbf{F} = \begin{Bmatrix} F_{1x} \\ F_{1y} \\ F_{2x} \\ F_{2y} \\ F_{3x} \\ F_{3y} \end{Bmatrix} = -\begin{Bmatrix} -1875 \\ 0. \\ -1125 \\ 0. \\ 0. \\ 0. \end{Bmatrix} - \begin{Bmatrix} 0. \\ 0. \\ 0. \\ 5000 \\ 0. \\ 5000 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 1875 \\ 0. \\ 1125 \\ -5000 \\ 0. \\ -5000 \end{Bmatrix}$$

Este vector se transforma al sistema de grados de libertad mixto, a base de proyectar las fuerzas aplicadas en el nudo 1 al sistema local de dicho nudo.

$$\mathbf{F}_1^N = \mathbf{T}_1^N \mathbf{F}_1 \qquad \begin{Bmatrix} F_{1x}^N \\ F_{1y}^N \end{Bmatrix} = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} F_{1x} \\ F_{1y} \end{Bmatrix} \qquad \begin{Bmatrix} F_{1x}^N \\ F_{1y}^N \end{Bmatrix} = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} 1875 \\ 0 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 1326 \\ 1326 \end{Bmatrix}$$

La figura 8.63 muestra las distintas componentes del vector de fuerzas nodales equivalentes.

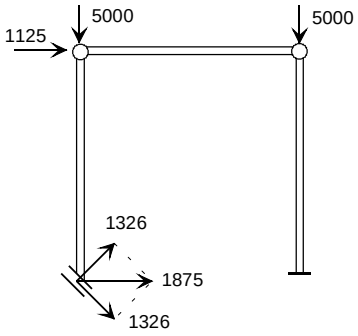


Figura 8.63

El sistema de ecuaciones final es:

$$\mathbf{K}_{II}^{N}\boldsymbol{\Delta}^{N}=\mathbf{F}^{N} \qquad 10^{8}\begin{bmatrix} 3.5117 & -0.0165 & 4.9497 & 0. & 0. \\ -0.0165 & 7.0233 & 0. & -7 & 0. \\ 4.9497 & 0. & 7. & 0. & 0. \\ 0. & -7. & 0. & 7.0233 & 0. \\ 0. & 0. & 0. & 0. & 7. \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \Delta_{1x}^{N} \\ \Delta_{2x} \\ \Delta_{2y} \\ \Delta_{3x} \\ \Delta_{3y} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 1326. \\ 1125. \\ -5000. \\ 0. \\ -5000. \end{Bmatrix}$$

Los desplazamientos de los nudos que se obtienen son:

$$\boldsymbol{\Delta}^{N}=\begin{Bmatrix} \Delta_{1x}^{N} \\ \Delta_{2x} \\ \Delta_{2y} \\ \Delta_{3x} \\ \Delta_{3y} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 0.9032 \\ 0.3440 \\ -0.6394 \\ 0.3429 \\ -0.007 \end{Bmatrix} 10^{-2}$$

Esfuerzos en la barra A: para calcularlos es necesario transformar previamente los desplazamientos del nudo 1 desde su sistema local al sistema general de la estructura. Esto se hace empleando la matriz de orientación del sistema local del nudo 1.

$$\boldsymbol{\Delta}_{1}=\mathbf{T}_{1}^{N^{T}}\boldsymbol{\Delta}_{1}^{N}$$

$$\begin{Bmatrix} \Delta_{1x} \\ \Delta_{1y} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos(-45) & \sin(-45) \\ -\sin(-45) & \cos(-45) \end{bmatrix}^{T} \begin{Bmatrix} \Delta_{1x}^{N} \\ \Delta_{1y}^{N} \end{Bmatrix} = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} 0.9032 \\ 0. \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 0.6386 \\ -0.6386 \end{Bmatrix}$$

Los valores de los grados de libertad del elemento A, en el sistema general son (figura 8.64):

$$\boldsymbol{\Delta}^{A}=\begin{Bmatrix} \Delta_{1x} \\ \Delta_{1y} \\ \theta_{1} \\ \Delta_{2x} \\ \Delta_{2y} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 0.6386 \\ -0.6386 \\ 0. \\ 0.3440 \\ -0.6394 \end{Bmatrix} 10^{-2}$$

Su proyección sobre el sistema local de la barra es:

$$\boldsymbol{\delta}^A = \begin{Bmatrix} \delta_{1x} \\ \delta_{1y} \\ \theta_1 \\ \delta_{2x} \\ \delta_{2y} \end{Bmatrix} = \mathbf{T}_2 \boldsymbol{\Delta}^A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & 0 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} 0.6386 \\ -0.6386 \\ 0. \\ 0.3440 \\ -0.6394 \end{Bmatrix} 10^{-2} = \begin{Bmatrix} -0.6386 \\ -0.6386 \\ 0. \\ -0.6394 \\ -0.3440 \end{Bmatrix} 10^{-2}$$

Los esfuerzos en sus extremos, calculados en el sistema local, son:

$$\mathbf{P}^A = \mathbf{P}^{0A} + \mathbf{K}_L^A \boldsymbol{\delta}^A$$

$$\begin{Bmatrix} P_{1x} \\ P_{1y} \\ M_1 \\ P_{2x} \\ P_{2y} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 0 \\ 1875 \\ 1125 \\ 0 \\ 1125 \end{Bmatrix} + 10^8 \begin{bmatrix} 7 & 0 & 0 & -7 & 0 \\ 0 & 0.0233 & 0.07 & 0 & -0.0233 \\ 0 & 0.07 & 0.21 & 0 & -0.07 \\ -7 & 0 & 0 & 7 & 0 \\ 0 & -0.0233 & -0.07 & 0 & 0.0233 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} -0.6386 \\ -0.6386 \\ 0 \\ -0.6394 \\ -0.3440 \end{Bmatrix} 10^{-2} = \begin{Bmatrix} 5000 \\ -5000 \\ -19500 \\ -5000 \\ 8000 \end{Bmatrix}$$

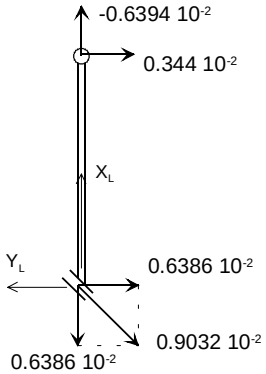


Figura 8.64

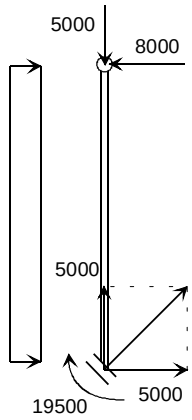


Figura 8.65

Se observa que, en el nudo 1, las dos fuerzas de reacción iguales según los ejes generales producen una resultante en dirección perpendicular a la deslizadera, mientras que su proyección en la dirección de la deslizadera es nula (figura 8.65).

El diagrama de momentos flectores en la barra A se obtiene como suma de los diagramas de las fases 0 y 1, y se muestra en la figura 8.66.

La figura 8.67 muestra el diagrama de momentos de la estructura.

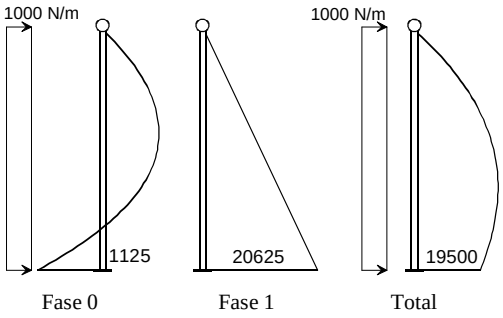


Figura 8.66

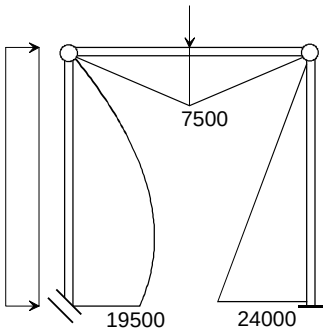


Figura 8.67

8.21.7 Calcular las deformaciones de los nudos y los esfuerzos en las barras de la celosía espacial de la figura 8.68. Todas las barras son del mismo material, con módulo de elasticidad 200 GPa, y área 0.0005 m^2.

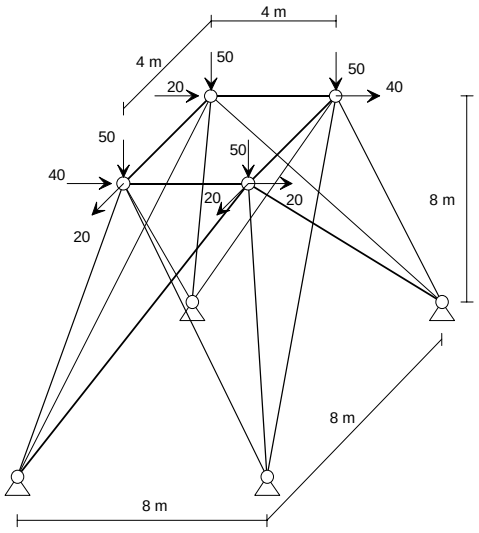


Figura 8.68

La estructura tiene 8 nudos, de los cuales los 4 de la base están fijos, y 18 barras. Se adopta un sistema de ejes general situado en el centro de la base. La numeración de nudos y barras se muestra en la figura 8.69.

Cada nudo tiene tres grados de libertad de traslación, con lo que la estructura tiene 12 grados de libertad no nulos, correspondientes a los nudos 1, 2, 3 y 4, que son:

$$\boldsymbol{\Delta}_I = \begin{Bmatrix} \boldsymbol{\Delta}_1 \\ \boldsymbol{\Delta}_2 \\ \boldsymbol{\Delta}_3 \\ \boldsymbol{\Delta}_4 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \Delta_{1x} \\ \Delta_{1y} \\ \Delta_{1z} \\ \Delta_{2x} \\ \Delta_{2y} \\ \Delta_{2z} \\ \Delta_{3x} \\ \Delta_{3y} \\ \Delta_{3z} \\ \Delta_{4x} \\ \Delta_{4y} \\ \Delta_{4z} \end{Bmatrix}$$

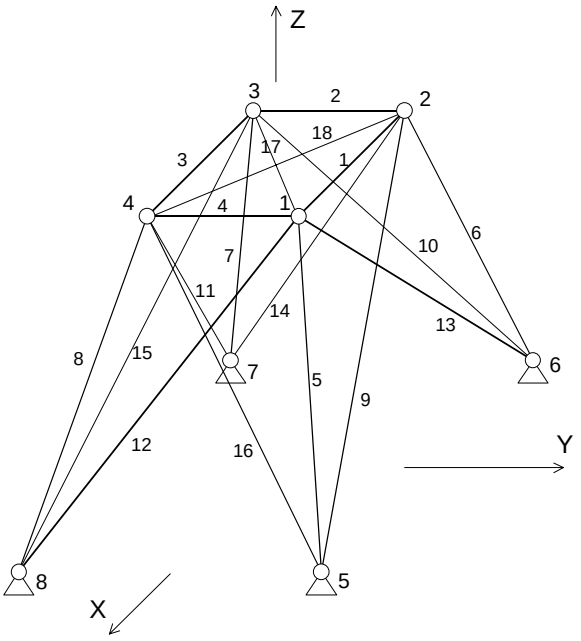


Figura 8.69

La ecuación de equilibrio de la estructura en el sistema general, referida a los grados de libertad no nulos, es:

$$\begin{Bmatrix} \mathbf{F}_1 \\ \mathbf{F}_2 \\ \mathbf{F}_3 \\ \mathbf{F}_4 \end{Bmatrix} = \mathbf{K}_{II} \begin{Bmatrix} \boldsymbol{\Delta}_1 \\ \boldsymbol{\Delta}_2 \\ \boldsymbol{\Delta}_3 \\ \boldsymbol{\Delta}_4 \end{Bmatrix}$$

$$\mathbf{K}_{II} = \begin{bmatrix} \mathbf{K}^1_{G11} + \mathbf{K}^4_{G11} + \mathbf{K}^5_{G11} + \mathbf{K}^{12}_{G11} + \mathbf{K}^{13}_{G11} + \mathbf{K}^{17}_{G11} & \mathbf{K}^1_{G12} & \mathbf{K}^{17}_{G13} & \mathbf{K}^4_{G14} \\ \mathbf{K}^1_{G21} & \mathbf{K}^2_{G22} + \mathbf{K}^1_{G22} + \mathbf{K}^6_{G22} + \mathbf{K}^9_{G22} + \mathbf{K}^{14}_{G22} + \mathbf{K}^{18}_{G22} & \mathbf{K}^2_{G23} & \mathbf{K}^{18}_{G24} \\ \mathbf{K}^{17}_{G31} & \mathbf{K}^2_{G32} & \mathbf{K}^3_{G33} + \mathbf{K}^2_{G33} + \mathbf{K}^7_{G33} + \mathbf{K}^{10}_{G33} + \mathbf{K}^{15}_{G33} + \mathbf{K}^{17}_{G33} & \mathbf{K}^3_{G34} \\ \mathbf{K}^4_{G41} & \mathbf{K}^{18}_{G42} & \mathbf{K}^3_{G43} & \mathbf{K}^4_{G44} + \mathbf{K}^3_{G44} + \mathbf{K}^8_{G44} + \mathbf{K}^{11}_{G44} + \mathbf{K}^{16}_{G44} + \mathbf{K}^{18}_{G44} \end{bmatrix}$$

donde todas las submatrices son de tamaño 3x3.

A continuación se obtienen las matrices de rigidez de los distintos elementos estructurales, calculando sólo aquellos términos que se corresponden con los grados de libertad no nulos, siguiendo el esquema indicado por la matriz anterior. Todas las matrices de rigidez vienen

dadas por la expresión (7.53), que es función del producto *EA/L* de la viga y de sus cosenos directores respecto a los ejes generales. La tabla 8.1 contiene la información necesaria para calcular la matriz de rigidez de cada barra.

Barra	Nudo I	Nudo J	Long. (m)	λ	μ	ν
1	1	2	4	-1.	0.	0.
2	2	3	4	0.	-1.	0.
3	3	4	4	1.	0.	0.
4	4	1	4	0.	1.	0.
5	5	1	8.485	-0.2357	-0.2357	0.9428
6	6	2	8.485	0.2357	-0.2357	0.9428
7	7	3	8.485	0.2357	0.2357	0.9428
8	8	4	10.198	-0.2357	0.2357	0.9428
9	5	2	10.198	-0.5883	-0.1961	0.7845
10	6	3	10.198	0.1961	-0.5883	0.7845
11	7	4	10.198	0.5883	0.1961	0.7845
12	8	1	10.198	-0.1961	0.5883	0.7845
13	6	1	10.198	0.5883	-0.1961	0.7845
14	7	2	10.198	0.1961	0.5883	0.7845
15	8	3	10.198	-0.5883	0.1961	0.7845
16	5	4	10.198	-0.1961	-0.5883	0.7845
17	3	1	5.657	0.7071	0.7071	0.
18	4	2	5.657	-0.7071	0.7071	0.

Tabla 8.1

Ensamblando las matrices de los distintos elementos, según los grados de libertad correspondientes a cada uno de ellos, se obtiene la matriz de rigidez de la estructura:

$$\mathbf{K}_{II} = 10^7 \begin{bmatrix}
3.826 & 0.723 & 0.04 & -2.5 & 0. & 0. & -0.884 & -0.884 & 0. & 0. & 0. & 0. \\
0.723 & 3.826 & 0.04 & 0. & 0. & 0. & -0.884 & -0.884 & 0. & 0. & -2.5 & 0. \\
0.04 & 0.04 & 2.254 & 0. & 0. & 0. & 0. & 0. & 0. & 0. & 0. & 0. \\
-2.5 & 0. & 0. & 3.826 & -0.723 & -0.04 & 0. & 0. & 0. & -0.884 & 0.884 & 0. \\
0. & 0. & 0. & -0.723 & 3.826 & 0.04 & 0. & -2.5 & 0. & 0.884 & -0.884 & 0. \\
0. & 0. & 0. & -0.04 & 0.04 & 2.254 & 0. & 0. & 0. & 0. & 0. & 0. \\
-0.884 & -0.884 & 0. & 0. & 0. & 0. & 3.826 & 0.723 & -0.04 & -2.5 & 0. & 0. \\
-0.884 & -0.884 & 0. & 0. & -2.5 & 0. & 0.723 & 3.826 & -0.04 & 0. & 0. & 0. \\
0. & 0. & 0. & 0. & 0. & 0. & -0.04 & -0.04 & 2.254 & 0. & 0. & 0. \\
0. & 0. & 0. & -0.884 & 0.884 & 0. & -2.5 & 0. & 0. & 3.826 & -0.723 & 0.04 \\
0. & -2.5 & 0. & 0.884 & -0.884 & 0. & 0. & 0. & 0. & -0.723 & 3.826 & -0.04 \\
0. & 0. & 0. & 0. & 0. & 0. & 0. & 0. & 0. & 0.04 & -0.04 & 2.254
\end{bmatrix}$$

El vector de fuerzas nodales de la estructura contiene las distintas fuerzas puntuales aplicadas sobre los nudos:

$$\mathbf{F}_I = \begin{Bmatrix} F_{1x} \\ F_{1y} \\ F_{1z} \\ F_{2x} \\ F_{2y} \\ F_{2z} \\ F_{3x} \\ F_{3y} \\ F_{3z} \\ F_{4x} \\ F_{4y} \\ F_{4z} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 20000 \\ 20000 \\ -50000 \\ 0 \\ 40000 \\ -50000 \\ 0 \\ 20000 \\ -50000 \\ 20000 \\ 40000 \\ -50000 \end{Bmatrix}$$

Los desplazamientos de los nudos que se obtienen son:

$$\boldsymbol{\Delta}_I = \mathbf{K}_{II}^{-1}\mathbf{F}_I \qquad \boldsymbol{\Delta}_I = \begin{Bmatrix} \Delta_{1x} \\ \Delta_{1y} \\ \Delta_{1z} \\ \Delta_{2x} \\ \Delta_{2y} \\ \Delta_{2z} \\ \Delta_{3x} \\ \Delta_{3y} \\ \Delta_{3z} \\ \Delta_{4x} \\ \Delta_{4y} \\ \Delta_{4z} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 2.579 \\ 6.723 \\ -2.382 \\ 1.860 \\ 6.958 \\ -2.308 \\ 2.268 \\ 6.768 \\ -2.058 \\ 2.172 \\ 7.003 \\ -2.133 \end{Bmatrix} 10^{-3} \quad \text{m}$$

Para calcular los esfuerzos en las barras se sigue el proceso habitual. Como ejemplo se calculan los esfuerzos en el elemento 4. Éste tiene su nudo inicial en el nudo 4 y su nudo final en el 1, por lo que sus grados de libertad en el sistema general son:

$$\boldsymbol{\Delta}^4 = \begin{Bmatrix} \Delta_{4x} \\ \Delta_{4y} \\ \Delta_{4z} \\ \Delta_{1x} \\ \Delta_{1y} \\ \Delta_{1z} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 2.172 \\ 7.003 \\ -2.133 \\ 2.579 \\ 6.723 \\ -2.382 \end{Bmatrix} 10^{-3}$$

Estas deformaciones se transforman al sistema local de la barra mediante la matriz de rotación definida en la expresión (7.50). No se ha definido la orientación de los ejes Y, Z locales del elemento, por lo que sus cosenos directores se dejan indicados, y no se pueden calcular las deformaciones según dichos ejes Y, Z locales. Esto no tiene importancia pues sólo las deformaciones según X local intervienen en el cálculo del esfuerzo.

$$\boldsymbol{\delta}^4 = \mathbf{T}_2\boldsymbol{\Delta}^4 \qquad \begin{Bmatrix}\delta_{4x}\\ \delta_{4y}\\ \delta_{4z}\\ \delta_{1x}\\ \delta_{1y}\\ \delta_{1z}\end{Bmatrix} = \begin{bmatrix}0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0\\ \lambda_y & \mu_y & \nu_y & 0 & 0 & 0\\ \lambda_z & \mu_z & \nu_z & 0 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 0 & \lambda_y & \mu_y & \nu_y\\ 0 & 0 & 0 & \lambda_z & \mu_z & \nu_z\end{bmatrix}\begin{Bmatrix}2.172\\ 7.003\\ -2.133\\ 2.579\\ 6.723\\ -2.382\end{Bmatrix}10^{-3} = \begin{Bmatrix}7.003\\ \delta_{4y}\\ \delta_{4z}\\ 6.723\\ \delta_{1y}\\ \delta_{1z}\end{Bmatrix}10^{-3}$$

con lo que los esfuerzos en sus extremos, calculados en el sistema local, son:

$$\mathbf{P}^4 = \mathbf{K}_L^4\boldsymbol{\delta}^4$$

$$\begin{Bmatrix}P_{4x}\\ P_{4y}\\ P_{4z}\\ P_{1x}\\ P_{1y}\\ P_{1z}\end{Bmatrix} = 10^6\begin{bmatrix}25 & 0 & 0 & -25 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0\\ -25 & 0 & 0 & 25 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0\end{bmatrix}\begin{Bmatrix}7.003\\ \delta_{4y}\\ \delta_{4z}\\ 6.723\\ \delta_{1y}\\ \delta_{1z}\end{Bmatrix}10^{-3} = \begin{Bmatrix}7019\\ 0\\ 0\\ -7019\\ 0\\ 0\end{Bmatrix}$$

Obsérvese que sean cuales sean las deformaciones según los ejes Y, Z locales, éstas no influyen en el esfuerzo axial en el elemento.

La tabla 8.2 muestra los esfuerzos axiales en todas las barras.

Barra	Esfuerzo (N)	Barra	Esfuerzo (N)	Barra	Esfuerzo (N)
1	17983	7	2229	13	-16371
2	4769	8	-10274	14	25969
3	-2387	9	-41866	15	-15900
4	-7019	10	-50516	16	-60985
5	-52308	11	9595	17	3337
6	-39806	12	15500	18	3337

Tabla 8.2

Las reacciones en los apoyos se calculan empleando la ecuación (8.94). Al no haber fuerzas exteriores aplicadas sobre los nudos fijos se puede poner:

$$\mathbf{R}_F = \mathbf{K}_{FI}\boldsymbol{\Delta}_I$$

El esquema de la matriz $\mathbf{K}_{FI}$ es:

$$\begin{Bmatrix}\mathbf{R}_5\\ \mathbf{R}_6\\ \mathbf{R}_7\\ \mathbf{R}_8\end{Bmatrix} = \begin{bmatrix}\mathbf{K}_{G51}^5 & \mathbf{K}_{G52}^9 & \mathbf{0} & \mathbf{K}_{G54}^{16}\\ \mathbf{K}_{G61}^{13} & \mathbf{K}_{G62}^6 & \mathbf{K}_{G63}^{10} & \mathbf{0}\\ \mathbf{0} & \mathbf{K}_{G72}^{14} & \mathbf{K}_{G73}^7 & \mathbf{K}_{G74}^{11}\\ \mathbf{K}_{G81}^{12} & \mathbf{0} & \mathbf{K}_{G83}^{15} & \mathbf{K}_{G84}^8\end{bmatrix}\begin{Bmatrix}\boldsymbol{\Delta}_1\\ \boldsymbol{\Delta}_2\\ \boldsymbol{\Delta}_3\\ \boldsymbol{\Delta}_4\end{Bmatrix}$$

Su valor numérico se calcula en base a las matrices de rigidez de los distintos elementos involucrados. Nótese que en ella únicamente intervienen los elementos que conectan los nudos libres (1 a 4) con los nudos fijos (5 a 8).

$$\mathbf{K}_{FI} = 10^7 \begin{bmatrix}
-0.065 & -0.065 & 0.262 & -0.339 & -0.113 & 0.453 & 0 & 0 & 0 & -0.038 & -0.113 & 0.151 \\
-0.065 & -0.065 & 0.262 & -0.113 & -0.038 & 0.151 & 0 & 0 & 0 & -0.113 & -0.339 & 0.453 \\
0.262 & 0.262 & -1.048 & 0.453 & 0.151 & -0.603 & 0 & 0 & 0 & 0.151 & 0.453 & -0.603 \\
-0.339 & 0.113 & -0.453 & -0.065 & 0.065 & -0.262 & -0.038 & 0.113 & -0.151 & 0 & 0 & 0 \\
0.113 & -0.038 & 0.151 & 0.065 & -0.065 & 0.262 & 0.113 & -0.339 & 0.453 & 0 & 0 & 0 \\
-0.453 & 0.151 & -0.603 & -0.262 & 0.262 & -1.048 & -0.151 & 0.453 & -0.603 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & -0.038 & -0.113 & -0.151 & -0.065 & -0.065 & -0.262 & -0.339 & -0.113 & -0.453 \\
0 & 0 & 0 & -0.113 & -0.339 & -0.453 & -0.065 & -0.065 & -0.262 & -0.113 & -0.038 & -0.151 \\
0 & 0 & 0 & -0.151 & -0.453 & -0.603 & -0.262 & -0.262 & -1.048 & -0.453 & -0.151 & -0.603 \\
-0.038 & 0.113 & 0.151 & 0 & 0 & 0 & -0.339 & 0.113 & 0.453 & -0.065 & 0.065 & 0.262 \\
0.113 & -0.339 & -0.453 & 0 & 0 & 0 & 0.113 & -0.038 & -0.151 & 0.065 & -0.065 & -0.262 \\
0.151 & -0.453 & -0.603 & 0 & 0 & 0 & 0.453 & -0.151 & -0.603 & 0.262 & -0.262 & -1.048
\end{bmatrix}$$

Por lo tanto las reacciones son:

$$\mathbf{R}_F = \begin{Bmatrix} R_{1x} \\ R_{1y} \\ R_{1z} \\ R_{2x} \\ R_{2y} \\ R_{2z} \\ R_{3x} \\ R_{3y} \\ R_{3z} \\ R_{4x} \\ R_{4y} \\ R_{4z} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} -48920 \\ -56420 \\ 130000 \\ 28920 \\ -42310 \\ 90000 \\ -11260 \\ -17690 \\ -30000 \\ -8740 \\ -3580 \\ 10000 \end{Bmatrix}$$

8.21.8 Plantear las ecuaciones de equilibrio en la estructura de emparrillado plano mostrada en la figura 8.70 y en base a ellas obtener las deformaciones de sus nudos. El nudo 2 está unido a la sustentación elásticamente, a través de dos resortes al giro.

Todas las barras tienen módulo de elasticidad $E = 2\ 10^5$ MPa, módulo de elasticidad en cortadura $G = 8\ 10^4$ MPa, momento de inercia $I = 5000$ cm^4 y momento polar de inercia $J = 500$ cm^4. La rigidez de los muelles al giro es $K_C = 5\ 10^6$ mN/rad y $K_D = 10^4$ mN/rad.

El voladizo se elimina y se sustituye por sus acciones sobre el resto de la estructura, con lo que ésta queda reducida a las barras A y B y los dos muelles.

Las unidades empleadas son N y m.

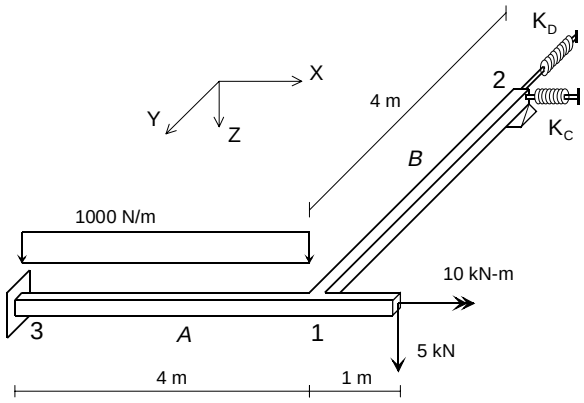


Figura 8.70

Los grados de libertad de la estructura son (figura 8.71).

$$\boldsymbol{\Delta}_I = \begin{Bmatrix} \theta_{1x} \\ \theta_{1y} \\ \Delta_{1z} \\ \theta_{2x} \\ \theta_{2y} \end{Bmatrix}$$

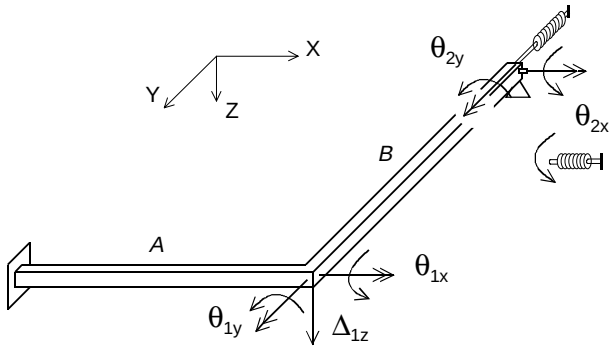


Figura 8.71

Los sistemas de ejes locales de las barras se muestran en la figura 8.72.

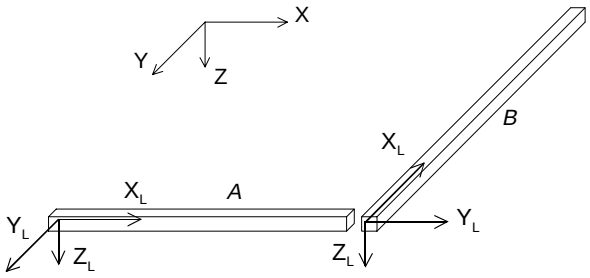


Figura 8.72

A continuación se calculan las matrices de rigidez de los elementos estructurales, considerando sólo los grados de libertad no nulos.

Elemento A. El sistema de ejes local tiene su origen en el nudo 3, con lo que coincide con el general de la estructura. La matriz de rigidez de la barra, expresada en el sistema de ejes general de la estructura, viene dada por la ecuación (7.82):

$$\mathbf{K}_G^A = 10^7 \begin{bmatrix} 0.01 & 0. & 0. \\ 0. & 1. & 0.375 \\ 0. & 0.375 & 0.1875 \end{bmatrix} \begin{matrix} \theta_{1x} \\ \theta_{1y} \\ \Delta_{1z} \end{matrix}$$

Elemento B. El sistema de ejes local tiene su origen en el nudo 1, con lo que el ángulo de orientación respecto al sistema general es α=-90. Su matriz de rigidez en el sistema general es:

$$\mathbf{K}_G^B = 10^7 \begin{bmatrix} 1. & 0. & -0.375 & 0.5 & 0. \\ 0. & 0.01 & 0. & 0. & -0.01 \\ -0.375 & 0. & 0.1875 & -0.375 & 0. \\ 0.5 & 0. & -0.375 & 1. & 0. \\ 0. & -0.01 & 0. & 0. & 0.01 \end{bmatrix} \begin{matrix} \theta_{1x} \\ \theta_{1y} \\ \Delta_{1z} \\ \theta_{2x} \\ \theta_{2y} \end{matrix}$$

Muelle C. Se trata de un muelle que conecta el giro X del nudo 2 con el suelo. Por lo tanto su rigidez se suma al grado de libertad θ_{2x}. Su matriz de rigidez es (ecuación 7.140):

$$\mathbf{K}^C = \begin{bmatrix} 5 \cdot 10^6 \end{bmatrix} \quad \theta_{2x}$$

Muelle D. Este muelle conecta el giro Y del nudo 2 con el suelo y por lo tanto su rigidez se suma al grado de libertad θ_{2y}. Su matriz de rigidez es:

$$\mathbf{K}^D = \begin{bmatrix} 10^4 \end{bmatrix} \quad \theta_{2y}$$

Ensamblando las matrices de los distintos elementos, según los grados de libertad correspondientes a cada uno de ellos, se obtiene la matriz de rigidez de la estructura:

$$\mathbf{K}_{II} = 10^7 \begin{bmatrix} 1.010 & 0. & -0.375 & 0.5 & 0. \\ 0. & 1.010 & 0.375 & 0. & -0.010 \\ -0.375 & 0.375 & 0.375 & -0.375 & 0. \\ 0.5 & 0. & -0.375 & 1.500 & 0. \\ 0. & -0.010 & 0. & 0. & 0.011 \end{bmatrix} \begin{matrix} \theta_{1x} \\ \theta_{1y} \\ \Delta_{1z} \\ \theta_{2x} \\ \theta_{2y} \end{matrix}$$

El cálculo de las fuerzas nodales sigue el proceso habitual. La carga distribuida aplicada sobre la barra A genera las fuerzas de fase 0 mostradas en la figura 8.73. Su valor es:

$$P_{3z}^0 = \frac{-qL}{2} = -2000 \text{ N}$$

$$M_{3y}^0 = \frac{qL^2}{12} = 1333 \text{ Nm}$$

$$P_{1z}^0 = \frac{-qL}{2} = -2000 \text{ N}$$

$$M_{1y}^0 = \frac{-qL^2}{12} = -1333 \text{ Nm}$$

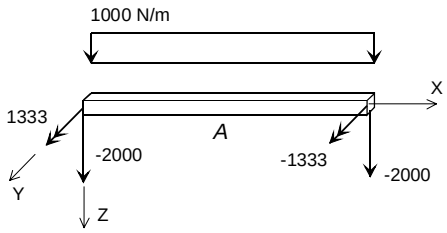


Figura 8.73

El vector de fuerzas de fase 0, referido al sistema general, es:

$$\mathbf{F}^{0A} = \begin{Bmatrix} M_{3x} \\ M_{3y} \\ F_{3z} \\ M_{1x} \\ M_{1y} \\ F_{1z} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 0. \\ 1333 \\ -2000 \\ 0. \\ -1333 \\ -2000 \end{Bmatrix}$$

El vector de fuerzas nodales de la estructura se obtiene ensamblando las fuerzas aplicadas directamente en el nudo 1 y las fuerzas de fase 0 producidas por la carga distribuida en A.

$$\mathbf{F}_I = \begin{Bmatrix} M_{1x} \\ M_{1y} \\ F_{1z} \\ M_{2x} \\ M_{2y} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 10000 \\ -5000 \\ 5000 \\ 0. \\ 0. \end{Bmatrix} - \begin{Bmatrix} 0. \\ -1333 \\ -2000 \\ 0. \\ 0. \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 10000 \\ -3666 \\ 7000 \\ 0. \\ 0. \end{Bmatrix}$$

La figura 8.74 muestra las distintas componentes de este vector.

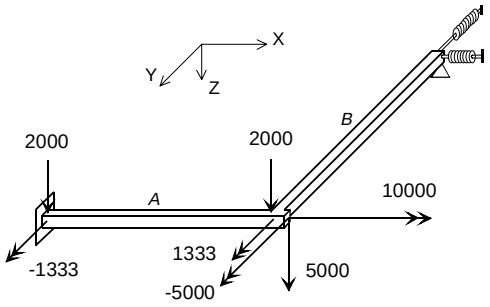


Figura 8.74

Los desplazamientos de los nudos que se obtienen son:

$$\boldsymbol{\Delta}_I = \mathbf{K}_{II}^{-1}\mathbf{F}_I \qquad \boldsymbol{\Delta}_I = \begin{Bmatrix} \theta_{1x} \\ \theta_{1y} \\ \Delta_{1z} \\ \theta_{2x} \\ \theta_{2y} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 0.6229 \\ -0.6741 \\ 1.7014 \\ 0.2177 \\ -0.6128 \end{Bmatrix} 10^{-2}$$

Para calcular los esfuerzos en la barra A se determinan en primer lugar las deformaciones en sus extremos, en su sistema de ejes local:

$$\boldsymbol{\delta}^A = \begin{Bmatrix} \theta_{3x} \\ \theta_{3y} \\ \Delta_{3z} \\ \theta_{1x} \\ \theta_{1y} \\ \Delta_{1z} \end{Bmatrix} == \begin{Bmatrix} 0. \\ 0. \\ 0. \\ 0.6229 \\ -0.6741 \\ 1.7014 \end{Bmatrix} 10^{-2}$$

Los esfuerzos en sus extremos, calculados en el sistema local, son:

$$\mathbf{P}^A = \mathbf{P}^{0A} + \mathbf{K}_L^A \boldsymbol{\delta}^A$$

$$\begin{Bmatrix} m_{3x} \\ m_{3y} \\ P_{3z} \\ m_{1x} \\ m_{1y} \\ P_{1z} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 0. \\ 1333 \\ -2000 \\ 0. \\ -1333 \\ -2000 \end{Bmatrix} + 10^7 \begin{bmatrix} 0.01 & 0. & 0. & -0.01 & 0. & 0. \\ 0. & 1. & -0.375 & 0. & 0.5 & 0.375 \\ 0. & -0.375 & 0.1875 & 0. & -0.375 & -0.1875 \\ -0.01 & 0. & 0. & 0.01 & 0. & 0. \\ 0. & 0.5 & -0.375 & 0. & 1. & 0.375 \\ 0. & 0.375 & -0.1875 & 0. & 0.375 & 0.1875 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} 0. \\ 0. \\ 0. \\ 0.6229 \\ -0.6741 \\ 1.7014 \end{Bmatrix} 10^{-2} = \begin{Bmatrix} -623 \\ 31431 \\ -8623 \\ 623 \\ -4939 \\ 4623 \end{Bmatrix}$$

El diagrama de momentos flectores en la barra A se obtiene como suma de los diagramas de las fases 0 y 1, y se muestra en la figura 8.75.

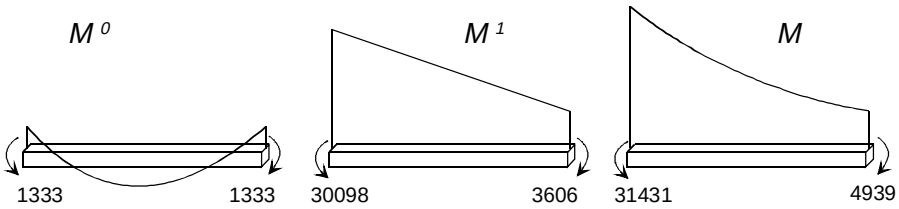


Figura 8.75

De forma similar se obtienen los esfuerzos en la barra B, resultando:

$$\mathbf{P}^B = \mathbf{K}_L^B \boldsymbol{\delta}^B \qquad \mathbf{P}^B = \begin{Bmatrix} m_{1x} \\ m_{1y} \\ P_{1z} \\ m_{2x} \\ m_{2y} \\ P_{2z} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 61 \\ 9377 \\ 377 \\ -61 \\ -10885 \\ -377 \end{Bmatrix}$$

El momento en el muelle C se obtiene aplicando su ecuación de equilibrio:

$$\mathbf{M}^C = \mathbf{K}^C \boldsymbol{\delta}^C \qquad M_C = \left[5 \cdot 10^6\right] \{\theta_{2x}\} = \left[5 \cdot 10^6\right] \left\{0.2177 \cdot 10^{-2}\right\} = 10885 \quad \text{mN}$$

El momento en el muelle D es:

$$\mathbf{M}^D = \mathbf{K}^D \boldsymbol{\delta}^D \qquad M_D = \left[5 \cdot 10^6\right] \{\theta_{2y}\} = \left[10^4\right] \left\{-0.6128 \cdot 10^{-2}\right\} = 61 \quad \text{mN}$$

La figura 8.76 muestra los esfuerzos en los extremos de las barras A y B, y en el nudo 2.

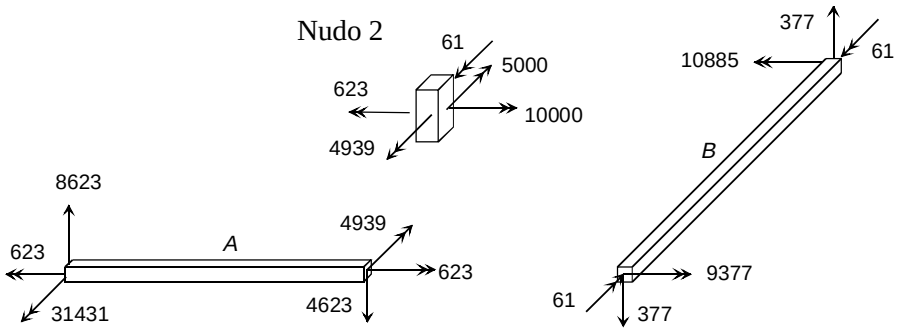


Figura 8.76

8.21.9 En la estructura del ejercicio 8.21.8 la barra B sufre una variación de temperaturas, tal que su cara inferior (Z positivo) se calienta 20 ºC y su cara superior (Z negativo) se enfría 20 ºC. Calcular las deformaciones originadas en los nudos y los esfuerzos en la barra B. Suponer un canto de valor *h* = 50 cm y un coeficiente de dilatación térmica $\alpha = 10^{-5}$ ºC^{-1}.

Los coeficientes de rigidez son los mismos ya calculados en el ejercicio 8.21.8. Por lo tanto se debe calcular únicamente el vector de fuerzas nodales equivalentes a la variación de temperatura, que viene dado por la expresión (8.65).

El gradiente térmico vale: $T_g = \dfrac{2T_S}{h} = \dfrac{2 \cdot 20}{0.5} = 80 \quad ^\circ\text{C / m}$

El vector de fuerzas nodales de fase 0, en el sistema local (figura 8.77), es:

$$\mathbf{P}_T^{0B} = \begin{Bmatrix} m_{1x} \\ m_{1y} \\ P_{1z} \\ m_{2x} \\ m_{2y} \\ P_{2z} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 0 \\ EI\alpha T_g \\ 0 \\ 0 \\ -EI\alpha T_g \\ 0 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 0 \\ 8000 \\ 0 \\ 0 \\ -8000 \\ 0 \end{Bmatrix}$$

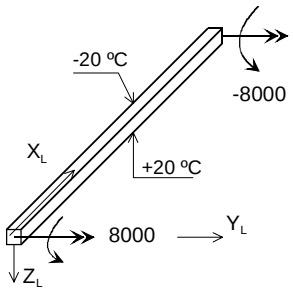


Figura 8.77

Proyectando sobre el sistema general de la estructura se obtiene:

$$\mathbf{F}_T^{0B} = \begin{Bmatrix} M_{1x} \\ M_{1y} \\ P_{1z} \\ M_{2x} \\ M_{2y} \\ P_{2z} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 8000 \\ 0 \\ 0 \\ -8000 \\ 0 \\ 0 \end{Bmatrix}$$

Este vector se ensambla, con signo menos, en el vector de fuerzas nodales de la estructura, resultando el siguiente vector, que se muestra en la figura 8.78.

$$\mathbf{F}_I = \begin{Bmatrix} M_{1x} \\ M_{1y} \\ F_{1z} \\ M_{2x} \\ M_{2y} \end{Bmatrix} = -\begin{Bmatrix} 8000. \\ 0. \\ 0. \\ -8000. \\ 0. \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} -8000 \\ 0. \\ 0. \\ 8000. \\ 0. \end{Bmatrix}$$

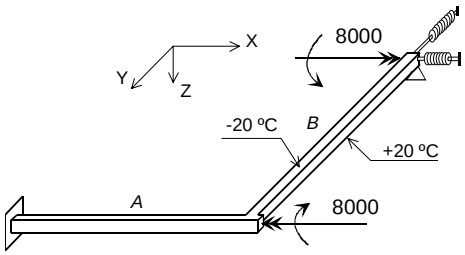


Figura 8.78

Las deformaciones que se producen en los nudos son:

$$\boldsymbol{\Delta}_I = \mathbf{K}_{II}^{-1}\mathbf{F}_I \qquad \boldsymbol{\Delta}_I = \begin{Bmatrix} \theta_{1x} \\ \theta_{1y} \\ \Delta_{1z} \\ \theta_{2x} \\ \theta_{2y} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} -0.1782 \\ 0.0653 \\ -0.1744 \\ 0.0691 \\ 0.0594 \end{Bmatrix} 10^{-2}$$

Los esfuerzos en los extremos de la barra B son:

$$\mathbf{P}^B = \mathbf{P}_T^{0B} + \mathbf{K}_L^B \boldsymbol{\delta}^B$$

$$\begin{Bmatrix} m_{1x} \\ m_{1y} \\ P_{1z} \\ m_{2x} \\ m_{2y} \\ P_{2z} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 0. \\ 8000 \\ 0. \\ 0. \\ -8000. \\ 0. \end{Bmatrix} + 10^7 \begin{bmatrix} 0.01 & 0. & 0. & -0.01 & 0. & 0. \\ 0. & 1. & -0.375 & 0. & 0.5 & 0.375 \\ 0. & -0.375 & 0.1875 & 0. & -0.375 & -0.1875 \\ -0.01 & 0. & 0. & 0.01 & 0. & 0. \\ 0. & 0.5 & -0.375 & 0. & 1. & 0.375 \\ 0. & 0.375 & -0.1875 & 0. & 0.375 & 0.1875 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} -0.1782 \\ 0.0653 \\ -0.1744 \\ 0.0691 \\ 0.0594 \\ 0. \end{Bmatrix} 10^{-2}$$

Se obtienen los valores siguientes (figura 8.79):

$$\begin{Bmatrix} m_{1x} \\ m_{1y} \\ P_{1z} \\ m_{2x} \\ m_{2y} \\ P_{2z} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} -6 \\ 178 \\ 819 \\ 6 \\ -3456 \\ -819 \end{Bmatrix}$$

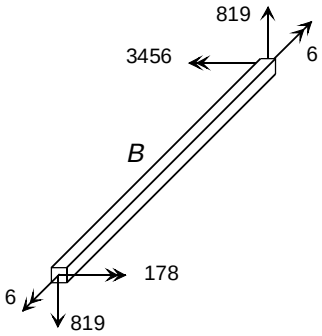


Figura 8.79

8.21.10 Calcular las fuerzas de fase 0 de un arco parabólico de flecha *f* y luz *L*, articulado en ambos extremos, y cargado con una fuerza distribuida *q*. Suponer que su inercia varía según la ley de la secante $I = I_0 \sec\alpha$, donde I_0 es el valor en la clave y despreciar la energía del esfuerzo axial.

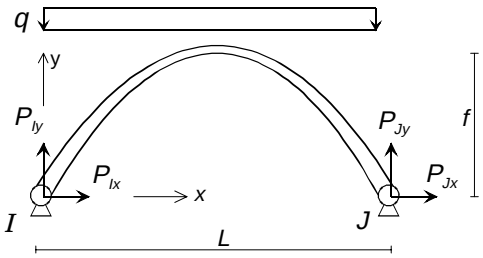


Figura 8.80

Las fuerzas de fase 0 son las reacciones en los dos apoyos del arco bajo la carga distribuida. Se trata de un problema hiperestático de grado 1, que fue resuelto en el ejercicio 6.9.1. Las reacciones horizontales son:

$$A_x = \frac{qL^2}{8f} \qquad B_x = -\frac{qL^2}{8f}$$

Las reacciones verticales se calculan por simple equilibrio de momentos y de fuerzas verticales, y valen:

$$A_y = B_y = \frac{qL}{2}$$

El vector de fuerzas de fase 0 es por lo tanto:

$$\mathbf{P}^0 = \begin{Bmatrix} P_{Ix} \\ P_{Iy} \\ P_{Jx} \\ P_{Jy} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \frac{qL^2}{8f} \\ \frac{qL}{2} \\ -\frac{qL^2}{8f} \\ \frac{qL}{2} \end{Bmatrix}$$

8.21.11 Calcular las fuerzas de fase 0 en un arco circular de radio *R*, articulado en ambos extremos, y cargado con una fuerza distribuida *q*, como se muestra en la figura 8.81. Suponer que la rigidez a flexión *EI* es constante, y despreciar la energía del esfuerzo axial.

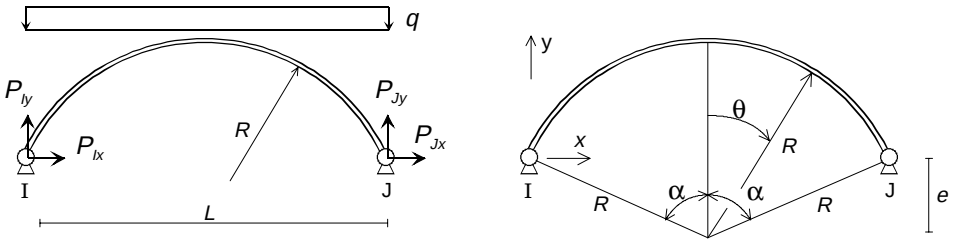


Figura 8.81

Las fuerzas de fase 0 son las reacciones en los dos apoyos del arco bajo la carga distribuida. Se trata de un problema hiperestático de grado 1, que se resuelve empleando el método de flexibilidad. Se adopta como incógnita hiperestática la reacción horizontal en I. El momento flector en los dos casos básicos es (figura 8.82):

$$M^0 = \frac{q}{2}(Lx - x^2): \qquad M^1 = -y = -R\cos\theta + e$$

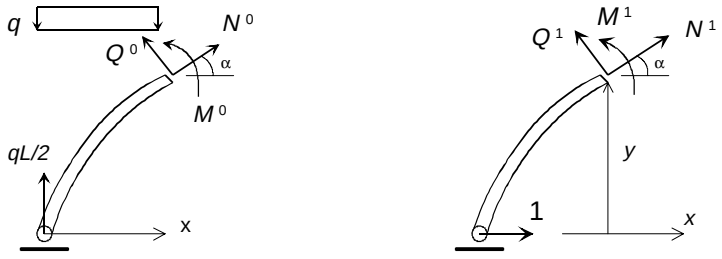


Figura 8.82

La ecuación de compatibilidad es: $f_{11}A_x = D_1$

El coeficiente de flexibilidad se calculó en el ejemplo 7.17.3 y vale:

$$f_{11} = \int \mu y^2 ds = \int_{-\alpha}^{+\alpha} \mu (R\cos\theta - e)^2 R d\theta = \frac{1}{2EI}\left(sR^2 + 2se^2 - 3eLR\right)$$

El término independiente es:

$$D_1 = -\int M^0 \mu M^1 ds = -\int_{-\alpha}^{+\alpha} \frac{q}{2}(Lx - x^2)\mu(-y)Rd\theta$$

Sustituyendo las coordenadas paramétricas del arco $x = R\sin\theta + L/2 \quad y = R\cos\theta - e$, y efectuando la integral se obtiene:

$$D_1 = \frac{q}{24EI}\left(2RL^3 - 3L^2 es - 6e^2 RL + 6R^2 es\right)$$

En esta expresión se ha introducido el valor de la longitud del arco $s=2R\alpha$.

La reacción buscada es:

$$A_x = \frac{D_1}{f_{11}} = \frac{q}{12}\frac{2RL^3 - 3L^2 es - 6e^2 RL + 6R^2 es}{sR^2 + 2se^2 - 3eLR}$$

Por equilibrio, la reacción en el nudo B es igual y de sentido contrario a la reacción en A. Las reacciones verticales se calculan por equilibrio de fuerzas verticales y de momentos, resultando ser:

$$A_y = B_y = \frac{qL}{2}$$

El vector de fuerzas de fase 0 es por lo tanto:

$$\mathbf{P}^0 = \begin{Bmatrix} P_{Ix} \\ P_{Iy} \\ P_{Jx} \\ P_{Jy} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} A_x \\ \frac{qL}{2} \\ -A_x \\ \frac{qL}{2} \end{Bmatrix}$$

8.21.12 Calcular las fuerzas de fase 0 de un arco empotrado en ambos extremos, de directriz parabólica con flecha *f* y luz *L*, y cargado con una fuerza distribuida *q* (figura 8.83). Suponer que la rigidez a flexión varía según la ley de la secante $EI = EI_0 \sec\alpha$, donde I_0 es el momento de inercia en la clave y despreciar la energía del esfuerzo axial.

Se trata de un problema hiperestático *h*=3. Para su resolución se adoptan como incógnitas hiperestáticas las tres reacciones en el nudo I.

$$X_1 = P_{Ix}^0 \qquad X_2 = P_{Iy}^0 \qquad X_3 = M_I^0$$

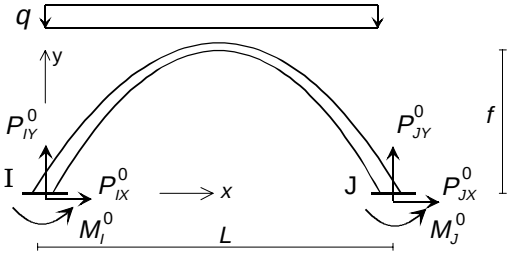


Figura 8.83

Los coeficientes de flexibilidad para las tres incógnitas hiperestáticas fueron determinados en el ejercicio 7.17.4, para el calculo de la matriz de rigidez del arco, y forman la matriz $\mathbf{f}_{II}$.

El caso 0 se muestra en la figura 8.84. El momento flector en él es

$$M^0 = -\frac{qx^2}{2}$$

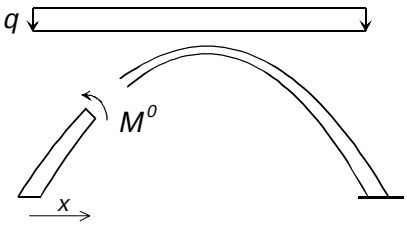


Figura 8.84

Los momentos en los casos 1, 2 y 3 se obtuvieron asimismo en el ejercicio 7.17.4:

$$M^1 = -y = -\frac{4f}{L^2}\left(Lx - x^2\right) \qquad M^2 = x \qquad M^3 = -1$$

Los coeficientes del término independiente de las ecuaciones de compatibilidad son:

$$D_j = -\int M^0 \mu M^j ds = -\int M^0 \mu_0 \cos\alpha M^j ds = -\int M^0 \mu_0 M^j dx$$

$$D_1 = -\int_0^L M^0 \mu_0 (-y) dx = -\frac{qL^3 f \mu_0}{10}$$

$$D_2 = -\int_0^L M^0 \mu_0 x\, dx = \frac{qL^4 \mu_0}{8}$$

$$D_3 = -\int_0^L M^0 \mu_0 x(-1) dx = -\frac{qL^3 \mu_0}{6}$$

El sistema de ecuaciones de compatibilidad es: $\mathbf{f}_{II}\mathbf{X} = \mathbf{D}$, y su solución proporciona las tres fuerzas en el apoyo I:

$$X_1 = P_{Ix}^0 = \frac{qL^2}{8f} \qquad X_2 = P_{Iy}^0 = \frac{qL}{2} \qquad X_3 = M_I^0 = 0$$

Nótese que en este caso tampoco aparecen momentos en los empotramientos. El vector de fuerzas de fase 0 es:

$$\mathbf{P}^0 = \begin{Bmatrix} P_{Ix}^0 \\ P_{Iy}^0 \\ M_I^0 \\ P_{Jx}^0 \\ P_{Jy}^0 \\ M_J^0 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \frac{qL^2}{8f} \\ \frac{qL}{2} \\ 0 \\ -\frac{qL^2}{8f} \\ \frac{qL}{2} \\ 0 \end{Bmatrix}$$

8.22 BIBLIOGRAFÍA

1. Alarcón Alvarez, E., *Cálculo Matricial de Estructuras*, Ed. Reverté, Barcelona, 1986.
2. Arbabi, F., *Structural Analysis and Behavior*, McGraw-Hill, New York, 1991.
3. Beaufait, F., Rowan, W., Hoadley, P., y Hackett, R. M., *Computer Methods of Structural Analysis*, Prentice-Hall, New Jersey, 1970.
4. Dawe, D. J., *Matrix and Finite Element Displacement Analysis of Structures*, Clarendon Press, Oxford, 1984.
5. Harrison, H. B., *Structural Analysis and Design - Parts 1 and 2*, Pergamon Press, Oxford, 1979.
6. Hibbeler, R. C., *Structural Analysis*, Prentice-Hall, New Jersey, 1996.
7. Kardestuncer, H., *Introducción al Análisis Estructural con Matrices*, McGraw-Hill, Mexico, 1975.
8. Livesley, R. K., *Métodos Matriciales para Cálculo de Estructuras*, Editorial Blume, Madrid, 1970.
9. Meek, J. L., *Matrix Structural Analysis*, McGraw-Hill, New York, 1971.
10. Pilkey, W. D., Wunderlich, W., *Mechanics of Structures, Variational and Computational Methods*, CRC Press, Boca Ratón, 1994.
11. Przemieniecki, J. S., *Theory of Matrix Structural Analysis*, McGraw-Hill, New York, 1968.
12. Rubinstein, M. F., *Matrix Computer Analysis of Structures*, Prentice-Hall, Englewood Cliffs, N. J., 1966.
13. Santiago Rico, F., *Teoría y Cálculo sobre Estructuras Resistentes de Prismas Rectos*, Editorial Bellisco, Madrid, 1996.
14. Sennett, R. E., *Matrix Analysis of Structures*, Prentice-Hall, Englewood Cliffs, 1994.
15. Tuma, J. J., *Análisis Estructural*, Serie Schaum, McGraw-Hill, New York, 1970.

16. Vanderbilt, M. D., *Matrix Structural Analysis*, Quantum Publishers Inc., New York, 1974.

17. Wang, C. K., *Intermediate Structural Analysis*, McGraw-Hill, New York, 1983.

18. Wang, C. K., *Structural Analysis on Microcomputers*, MacMillan, New York, 1986.

8.23 PROBLEMAS

8.23.1 Calcular el descenso del punto A en la estructura de la figura P8.1, bajo la acción de la carga de 10 Tn, teniendo en cuenta además que el elemento AD sufre un incremento de temperatura uniforme de 50 ºC.
Datos para todas las barras: $E = 2\ 10^6$ kg/cm^2 $A = 100$ cm^2 $I = 10000$ cm^4 $\alpha = 10^{-5}$ ºC^{-1}

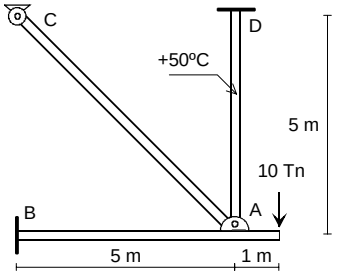


Figura P8.1

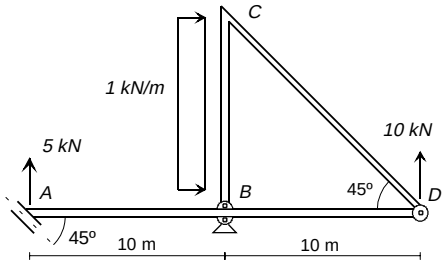


Figura P8.2

8.23.2 Resolver el problema 3.13.10 empleando el método de rigidez.

8.23.3 Calcular las deformaciones de los nudos C y D, así como las reacciones en A en la estructura de la figura P8.2. Además de las cargas indicadas, la barra AB sufre un calentamiento uniforme de 100 ºC.
Datos para todas las barras: $E = 2.1\ 10^6$ kg/cm^2 $\alpha = 10^{-6}$ ºC^{-1} $A = 200$ cm^2 $I = 4000$ cm^4

8.23.4 Resolver el ejercicio 5.13.2 empleando el método de rigidez.

8.23.5 Resolver el ejercicio 5.13.5 empleando el método de rigidez.

8.23.6 Resolver el problema 5.15.1 empleando el método de rigidez.

8.23.7 Resolver el problema 5.15.2 empleando el método de rigidez.

8.23.8 Plantear el sistema de ecuaciones de equilibrio de la estructura de la figura P8.3. Suponiendo conocidos los desplazamientos de los nudos, calcular las reacciones en el apoyo B. Datos para todas las barras: $E = 2\ 10^6$ kg /cm^2 $A = 100$ cm^2 $I = 10000$ cm^4

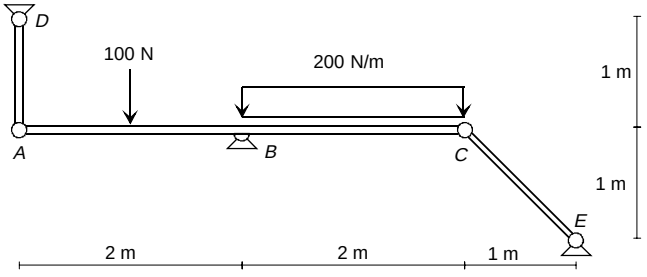


Figura P8.3

8.23.9 Determinar las deformaciones de los nudos de la estructura de la figura P8.4. La barra AC es 5 mm más corta que su longitud teórica, y la BC tiene la variación de temperatura indicada. Datos: E=2 10^6 kg/cm^2 A=100 cm^2 I=10^4 cm^4 K=1 Tn/cm α=10^{-6} C^{-1}

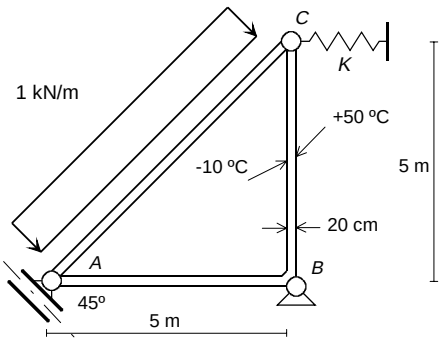


Figura P8.4

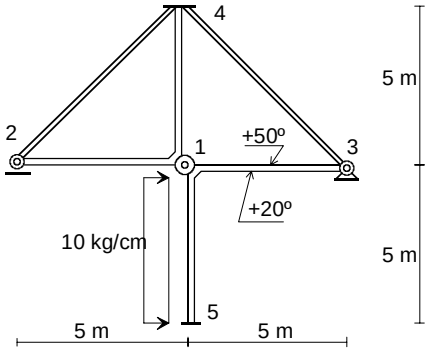


Figura P8.5

8.23.10 Calcular las deformaciones de los nudos en la estructura de la figura P8.5, sometida a las acciones representadas. Todas las barras tienen las mismas propiedades: área: 100 cm^2, momento de inercia: 4000 cm^4, módulo de elasticidad: 2 10^6 kg/cm^2, coeficiente de dilatación lineal: 10^{-6} ºC^{-1}.
Solución: $\Delta_{1x} = -97 \cdot 10^{-4}$, $\Delta_{1y} = -2 \cdot 10^{-4}$, $\theta_{1i} = -0.17 \cdot 10^{-4}$, $\theta_{1d} = 22 \cdot 10^{-4}$

8.23.11 Resolver el problema 5.15.7 empleando el método de rigidez.

8.23.12 Resolver el problema 5.15.8 empleando el método de rigidez.

8.23.13 Resolver el problema 5.15.11 empleando el método de rigidez.

8.23.14 En la estructura de la figura P8.6, determinar el valor de la pretensión de montaje que debe aplicarse al tensor BD para que el momento en el punto C disminuya un 10% con respecto a la situación sin pretensión en el tensor. La rigidez del tensor es 100 kN/cm. Todos los perfiles de la estructura tienen A=100 cm^2, I=20000 cm^4. El material es acero con E = 200 GPa. Hacer uso de la simetría del problema.

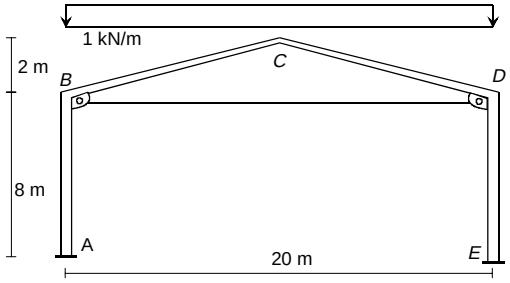


Figura P8.6

8.23.15 Calcular los esfuerzos internos en las barras de la estructura de la figura P8.7. Las barras AB y BC son de sección cuadrada hueca con lado 160 mm y espesor 8 mm Las barras CD y CE son de sección circular hueca con diámetro exterior 125 mm y espesor 6 mm. La cara delantera de la barra BC sufre un calentamiento de 20 ºC. El material es acero, con E= 200 GPa, G = 80 GPa y coeficiente de dilatación 10^{-6} ºC^{-1}.

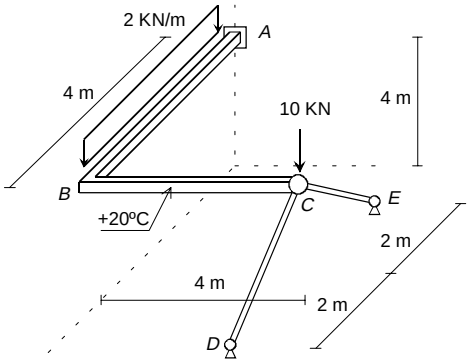


Figura P8.7

8.23.16 Calcular las deformaciones de los nudos de la estructura de la figura P8.8. Todas las barras son de sección cuadrada hueca con lado 200 mm y espesor 8 mm. El material es acero con E = 200 GPa y G = 80 GPa.

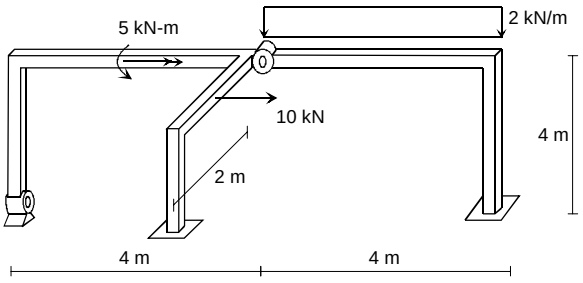


Figura P8.8

8.23.17 Resolver el problema 5.15.12 empleando el método de rigidez.

8.23.18 Resolver el problema 5.15.13 empleando el método de rigidez.

8.23.19 Resolver el problema 5.15.14 empleando el método de rigidez.

Capítulo 9

Análisis de estructuras simétricas

9.1 INTRODUCCIÓN

En la concepción de sistemas estructurales se trata, siempre que es posible, de diseñar conjuntos que tengan alguna propiedad de simetría, pues así se facilita su cálculo y construcción. La simetría más frecuentemente empleada es la simetría especular respecto de un plano, que es la única que se considera en este tema. Con este tipo de simetría la mitad de la estructura es igual (simétrica) a la otra mitad, por lo que parece interesante disponer de un método que permita calcular sólo la mitad.

Sin embargo muchas de las cargas exteriores no son simétricas por su propia naturaleza (viento…) por lo que aunque actúen sobre una estructura simétrica, la respuesta obtenida (deformaciones, esfuerzos…) no es en general simétrica. La solución a este problema consiste en descomponer el sistema de cargas en dos sistemas distintos, que cumplen relaciones de simetría diferentes, denominados sistemas simétrico y antisimétrico, de tal forma que sea más fácil calcular la respuesta de la mitad de la estructura para cada uno de ellos, y finalmente sumarlas. Así pues se deberá calcular la mitad de la estructura dos veces, bajo cada uno de los dos sistemas de cargas. Esto siempre es más ventajoso que calcular la estructura completa (salvo para casos muy pequeños) pues la complejidad del cálculo de una estructura crece al menos cuadráticamente con su tamaño.

En general, se dice que una estructura es simétrica cuando su disposición geométrica, su propiedades resistentes (área, inercia…), las propiedades del material y las condiciones de ligadura cumplen al menos con una relación de simetría especular respecto de un plano. En este caso puede calcularse sólo la mitad de la estructura. Si existen relaciones de simetría respecto de varios planos, puede simplificarse aún más el problema y estudiar sólo la cuarta o la octava parte de la estructura. Para el caso de una estructura plana la simetría es respecto de una recta.

En el sistema de cargas se deben incluir todas las acciones aplicadas sobre la estructura: fuerzas exteriores, efectos térmicos, errores de forma y desplazamientos impuestos. Todas ellas se deben descomponer en los dos sistemas, simétrico y antisimétrico, mencionados anteriormente.

9.2 SISTEMAS SIMÉTRICOS Y ANTISIMÉTRICOS EN EL PLANO

Un sistema de magnitudes vectoriales en dos dimensiones se dice *simétrico* o *antisimétrico* respecto a un eje cuando cumple las relaciones de igualdad indicadas en la figura 9.1.

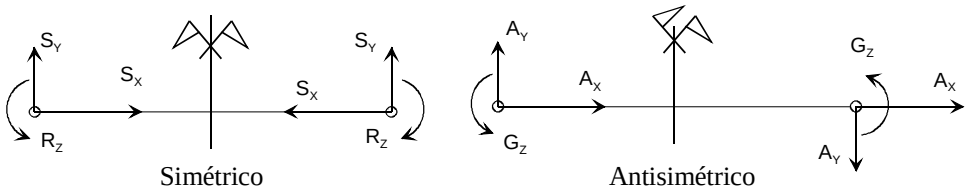


Figura 9.1

En ambos sistemas, cada vector tiene su homólogo simétrico o antisimétrico, de tal forma que todas las componentes van por parejas del mismo módulo y sólo cambian sus orientaciones. Por conveniencia se supone que el eje de simetría es vertical (eje Y), con lo cual el movimiento perpendicular al eje de simetría es sencillamente el movimiento X.

Estas leyes pueden aplicarse tanto a deformaciones (desplazamientos y giros) como a esfuerzos (fuerzas y momentos).

9.3 DESCOMPOSICIÓN DEL SISTEMA DE CARGAS

En general cualquier magnitud vectorial puede descomponerse en suma de dos componentes, una simétrica y otra antisimétrica, como se muestra en la figura 9.2.

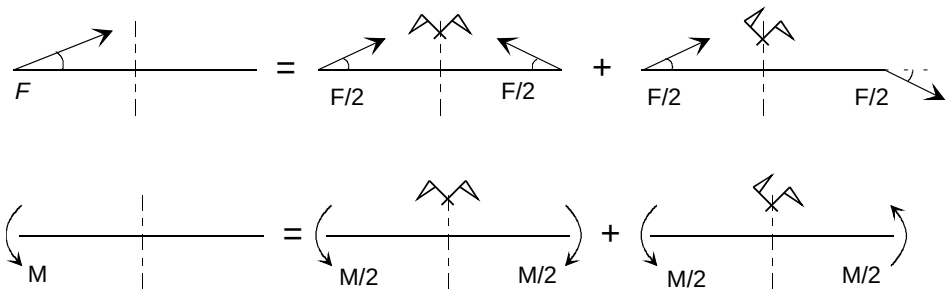


Figura 9.2

Este proceso de descomposición se debe efectuar para todas las fuerzas y momentos actuantes sobre la estructura, así como para los desplazamientos impuestos. Para aquellas acciones que no sean directamente vectores, como las variaciones de temperatura o los errores en forma, debe efectuarse la descomposición de las fuerzas nodales equivalentes de

fase 0 por ellas producidas. Estas fuerzas nodales equivalentes son siempre proporcionales al efecto que las provoca, por lo que es suficiente con descomponer en componentes simétrica y antimétrica a dicho efecto (p.e. la temperatura).

9.4 ESTRUCTURAS PLANAS CON CARGAS SIMÉTRICAS

Una estructura plana simétrica, sometida a un sistema de cargas simétrico se deforma de manera simétrica, y las solicitaciones internas tienen asimismo una distribución simétrica. La figura 9.3 muestra las relaciones que cumplen las deformaciones y las solicitaciones internas.



Figura 9.3

Esta relación entre las deformaciones se satisface para cualquier pareja de puntos de la estructura, y en particular también se tiene que satisfacer en los puntos situados precisamente en el eje de simetría. Esta consideración permite determinar las condiciones de contorno que se deben aplicar en el eje de simetría a la estructura mitad, a fin de respetar el estado de deformación simétrico. Al determinar estas condiciones de contorno en el eje de simetría pueden presentarse dos casos diferentes que se estudian a continuación.

9.4.1 Nudos contenidos en el eje de simetría

En un nudo situado en el eje de simetría las deformaciones deben satisfacer a la vez las condiciones de deformación simétrica y de compatibilidad geométrica. Aplicando estas condiciones al elemento diferencial situado justo en el eje de simetría se obtiene el valor que deben tener sus deformaciones para respetarlas (figura 9.4).

Deformación X: no es posible	$\Delta_X = 0$
Deformación Y: sí es posible	$\Delta_Y \neq 0$
Giro Z: no es posible	$\theta_Z = 0$

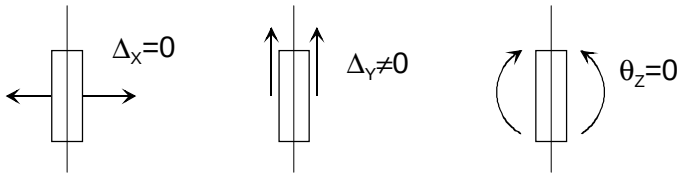


Figura 9.4

Así pues un punto situado en el eje de simetría sólo puede tener desplazamiento según Y, siendo nulos el desplazamiento X y el giro Z. La condición de contorno a aplicar en este punto es por lo tanto la de *empotramiento* ($\theta_Z = 0$) *deslizante según* Y ($\Delta_X = 0, \Delta_Y \neq 0$), como se muestra en la figura 9.5.

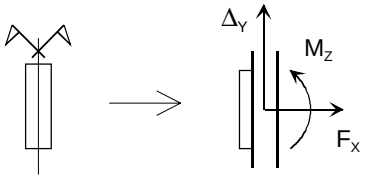


Figura 9.5

Al mismo resultado se llega si se efectúa el razonamiento con las fuerzas, aplicando las condiciones de equilibrio del nudo, como se muestra en la figura 9.6.

Fuerza X: sí es posible $F_X \neq 0$

Fuerza Y: no es posible $F_Y = 0$

Momento Z: sí es posible $M_Z \neq 0$

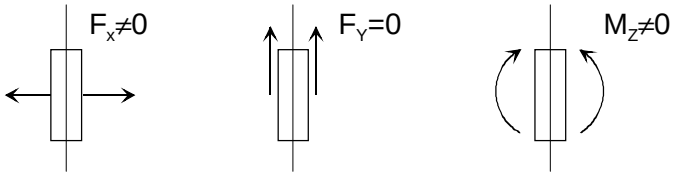
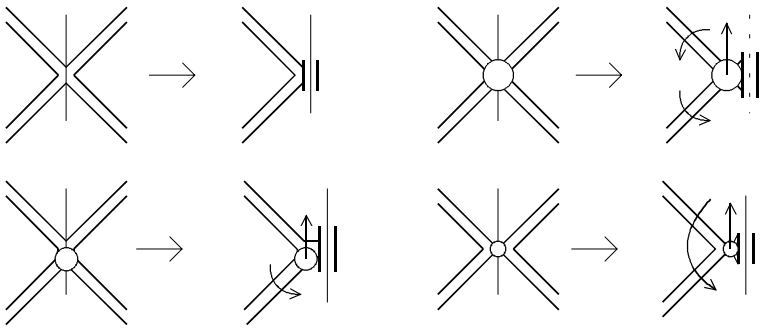


Figura 9.6

Por lo tanto, el nudo debe ser un empotramiento deslizante según Y para poder absorber este sistema de fuerzas, como ya se había deducido.

Ejemplos



9.4.2 Barras contenidas en el eje de simetría

Cuando una barra está contenida en el eje de simetría se debe separar en dos semi-barras, situadas cada una de ellas en una de las dos mitades de la estructura. Esta separación debe hacerse con la condición de que la energía acumulada en cada semi-barra U_S sea la mitad de la energía acumulada en la barra completa U. Además, las deformaciones de la barra original y de las dos semi-barras deben ser iguales y se denominan $\boldsymbol{\delta}$.

La expresión de la energía acumulada en la barra completa es:

$$U = \frac{1}{2}\boldsymbol{\delta}^T \mathbf{K}_L \boldsymbol{\delta} \tag{9.1}$$

La energía acumulada en cada semi-barra es:

$$U_S = \frac{1}{2}\boldsymbol{\delta}^T \mathbf{K}_L^S \boldsymbol{\delta} \tag{9.2}$$

donde $\mathbf{K}_L^S$ es la matriz de rigidez de la semi-barra. Igualando $U_S = U/2$ se deduce que

$$\mathbf{K}_L^S = \frac{1}{2}\mathbf{K}_L \tag{9.3}$$

es decir que la semi-barra tiene que tener la mitad de rigidez que la barra original. Para ello basta con dar a la semi-barra unos valores *EA*/2 y *EI*/2 (figura 9.7).

Con este método se garantiza que se obtienen las deformaciones reales en el plano de simetría. Las solicitaciones obtenidas en la semi-barra, con su matriz de rigidez $\mathbf{K}_L^S$, son la mitad de las solicitaciones en la barra completa.

Al ser la deformación simétrica, en los nudos extremos de la barra sólo hay deformación Y, sin giros Z ni deformaciones X. Por ello la barra no está sometida a flexión ni cortante y únicamente tiene deformación y esfuerzo axiales. Por lo tanto la propiedad *EI*/2 no influye en el comportamiento de la barra.

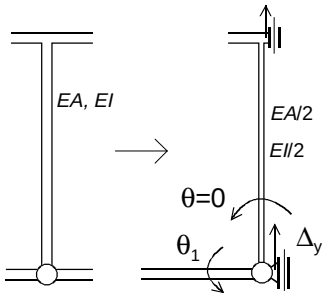


Figura 9.7

9.5 ESTRUCTURAS PLANAS CON CARGAS ANTISIMÉTRICAS

Una estructura plana simétrica, sometida a un sistema de cargas antisimétrico se deforma de manera antisimétrica. Las solicitaciones internas tienen asimismo una distribución antisimétrica, como se indica en la figura 9.8.

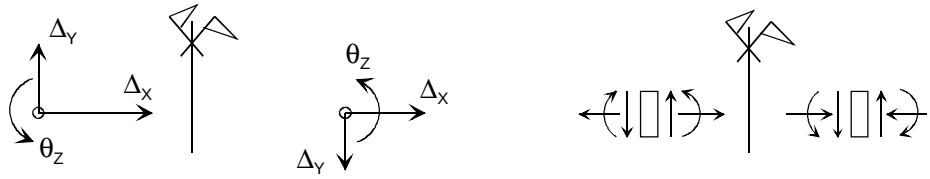


Figura 9.8

Esta relación entre las deformaciones se satisface para cualquier pareja de puntos de la estructura, y en particular se tiene que satisfacer también en los puntos situados precisamente en el eje de antisimetría. Esta consideración permite determinar las condiciones de contorno que se deben aplicar a la estructura mitad en el eje de antisimetría a fin de respetar el estado de deformación antisimétrico. Al determinar estas condiciones de contorno pueden presentarse dos casos diferentes que se estudian a continuación.

9.5.1 Nudos contenidos en el eje de antisimetría

En un nudo situado en el eje de antisimetría las deformaciones deben satisfacer a la vez las condiciones de deformación antisimétrica y de compatibilidad geométrica. Aplicando estas condiciones al elemento diferencial situado justo en el eje de antisimetría (figura 9.9) se obtienen los valores que deben tener sus deformaciones para respetar a la vez ambos criterios.

Deformación X: sí es posible $\Delta_X \neq 0$

Deformación Y: no es posible $\Delta_Y = 0$

Giro Z: sí es posible $\theta_Z \neq 0$

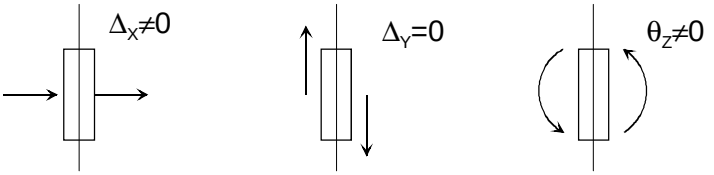


Figura 9.9

Así pues un punto situado en el eje de antisimetría puede tener desplazamiento según X y giro según Z, pero el desplazamiento vertical Y debe ser nulo. Nótese que estas deformaciones son las complementarias a las permitidas en el caso simétrico (figura 9.5). La condición de contorno a aplicar en este punto es por lo tanto la de *articulación* ($\theta_Z \neq 0$) *deslizante según X* ($\Delta_X \neq 0, \Delta_Y = 0$), como se muestra en la figura 9.10.

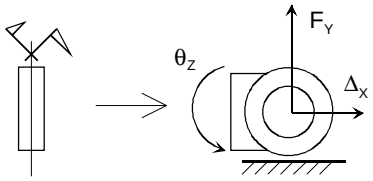


Figura 9.10

También se puede efectuar el razonamiento con las fuerzas, aplicando las condiciones de equilibrio en cada dirección, bajo la acción de una pareja de fuerzas antisimétricas (figura 9.11).

Fuerza X: no es posible $F_X = 0$

Fuerza Y: sí es posible $F_Y \neq 0$

Momento Z: no es posible $M_Z = 0$

Para poder absorber este sistema de fuerzas el nudo debe ser una articulación deslizante según X.

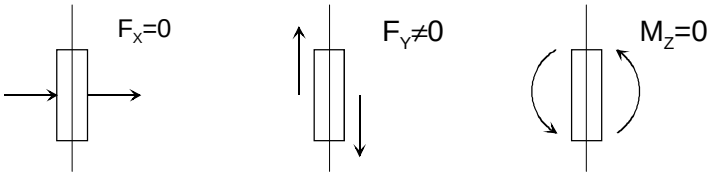
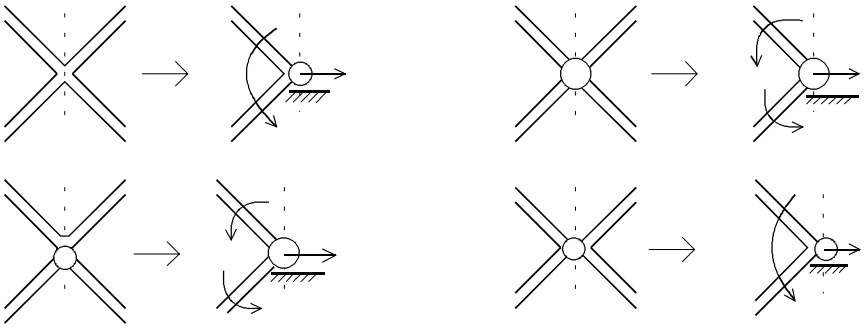


Figura 9.11

Ejemplos



9.5.2 Barras contenidas en el eje de antisimetría

Cuando una barra está contenida en el eje de antisimetría se debe separar en dos semi-barras, situadas cada una de ellas en una de las dos mitades de la estructura, con la condición de que la energía acumulada en cada semi-barra U_S sea la mitad de la energía acumulada en la barra completa U. Además las deformaciones $\boldsymbol{\delta}$ de la barra original y de las dos semi-barras deben ser iguales. La expresión de la energía acumulada en la barra completa es:

$$U = \frac{1}{2}\boldsymbol{\delta}^T \mathbf{K}_L \boldsymbol{\delta} \tag{9.4}$$

La energía acumulada en cada semi-barra es:

$$U_S = \frac{1}{2}\boldsymbol{\delta}^T \mathbf{K}_L^S \boldsymbol{\delta} \tag{9.5}$$

Igualando $U_S = U/2$ se deduce que

$$\mathbf{K}_L^S = \frac{1}{2}\mathbf{K}_L \tag{9.6}$$

Es decir que la semi-barra tiene que tener la mitad de rigidez que la barra original. Para ello basta con dar a la semi-barra unos valores $EA/2$ y $EI/2$ (figura 9.12). Con este método se garantiza que se obtienen las deformaciones reales en el plano de antisimetría. Las solicitaciones obtenidas en la semi-barra con la matriz de rigidez $\mathbf{K}_L^S$ son la mitad de las solicitaciones en la barra completa.

Al ser la deformación antisimétrica, en los nudos extremos de la barra hay desplazamiento X y giro Z, pero no hay desplazamiento Y. Por lo tanto los nudos extremos de la barra se mueven en dos líneas paralelas, y como consecuencia la barra no está sometida a esfuerzo axial. Únicamente tiene esfuerzos de flexión y cortante, producidos por la deformación X y el giro Z. En consecuencia, la propiedad $EA/2$ no influye en el comportamiento de la barra.

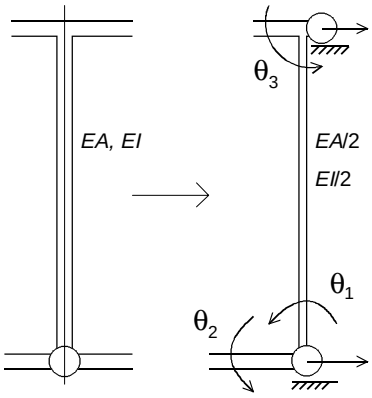


Figura 9.12

9.6 SISTEMAS SIMÉTRICOS Y ANTISIMÉTRICOS EN EL ESPACIO

Un sistema de magnitudes vectoriales en tres dimensiones se dice *simétrico* respecto a un plano, cuando las componentes correspondientes de dos vectores situados en dos puntos simétricos P y P' cumplen las relaciones de igualdad indicadas a continuación. Por conveniencia se adopta el plano de simetría como el plano YZ.

- Simetría para deformaciones y fuerzas: se indica en la figura 9.13.

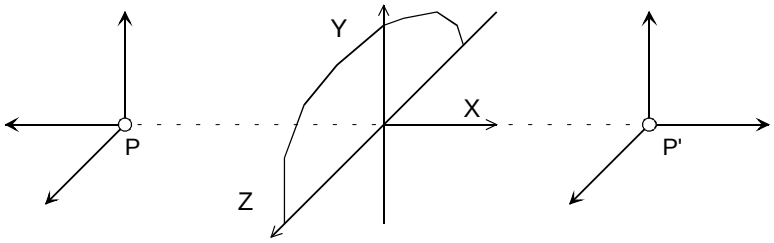


Figura 9.13

- Simetría para giros y momentos: se indica en la figura 9.14.

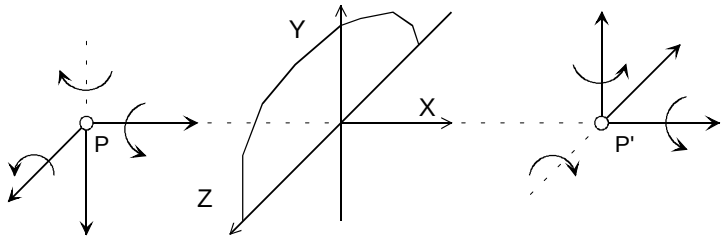


Figura 9.14

Un sistema de magnitudes vectoriales en tres dimensiones se dice *antisimétrico* respecto a un plano cuando las componentes correspondientes de dos vectores situados en dos puntos simétricos P y P' cumplen las relaciones de igualdad indicadas a continuación.

- Antisimetría para deformaciones y fuerzas: se indica en la figura 9.15.

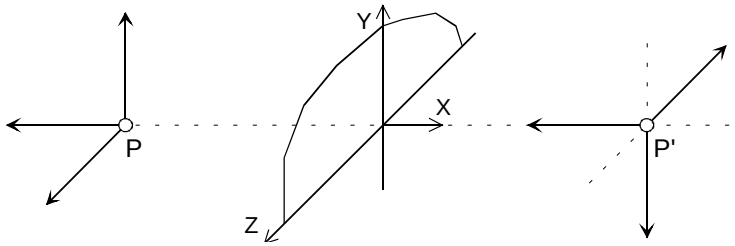


Figura 9.15

- Antisimetría para giros y momentos: se indica en la figura 9.16.

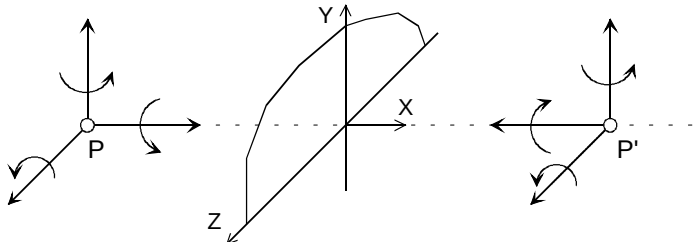


Figura 9.16

9.7 ESTRUCTURAS ESPACIALES CON CARGAS SIMÉTRICAS

Una estructura espacial simétrica, sometida a un sistema de cargas también simétrico se deforma de manera simétrica según se ha indicado en el apartado 9.6. Las solicitaciones internas tienen asimismo una distribución simétrica, y todas las fuerzas y momentos componentes de estas solicitaciones cumplen la ley de simetría definida en las figuras 9.13 y 9.14.

La simetría de deformaciones se satisface entre cualquier pareja de puntos de la estructura, y en particular también se tiene que satisfacer en los puntos situados precisamente en el plano de simetría. Esta consideración permite determinar qué condiciones de contorno se deben aplicar en el plano de simetría a la estructura mitad, a fin de respetar el estado de deformación simétrico. Pueden presentarse dos casos diferentes que se estudian a continuación.

9.7.1 Nudos contenidos en el plano de simetría

En un nudo situado en el plano de simetría las deformaciones deben satisfacer a la vez las condiciones de deformación simétrica y de compatibilidad geométrica. Aplicando estas condiciones al elemento diferencial situado justo en el plano de simetría se obtiene el valor que deben tener sus deformaciones para respetar dichas condiciones.

Deformación X: no es posible	$\Delta_X = 0$
Deformación Y: sí es posible	$\Delta_Y \neq 0$
Deformación Z: sí es posible	$\Delta_Z \neq 0$
Giro X: sí es posible	$\theta_X \neq 0$
Giro Y: no es posible	$\theta_Y = 0$

Giro Z: no es posible $\theta_Z = 0$

En consecuencia, un punto situado en el plano de simetría sólo puede tener desplazamientos contenidos en el propio plano de simetría (YZ) y rotación según el eje perpendicular a dicho plano (eje X), siendo cero las otras tres deformaciones (figura 9.17).

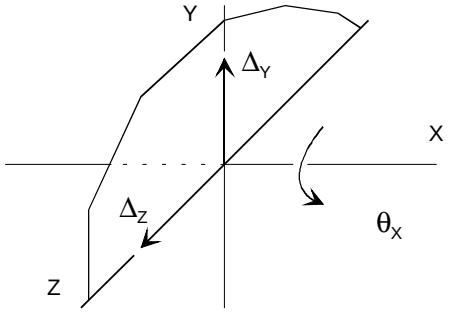


Figura 9.17

Se llega al mismo resultado si se efectúa el razonamiento con las fuerzas, aplicando las condiciones de equilibrio.

Fuerza X: sí es posible $F_X \neq 0$

Fuerza Y: no es posible $F_Y = 0$

Fuerza Z: no es posible $F_Z = 0$

Momento X: no es posible $M_X = 0$

Momento Y: sí es posible $M_Y \neq 0$

Momento Z: sí es posible $M_Z \neq 0$

Por lo tanto este punto puede absorber una fuerza de reacción perpendicular al plano de simetría (eje X) y dos momentos contenidos en el plano de simetría (YZ) como se indica en la figura 9.18. Se trata por lo tanto de un empotramiento deslizante en el plano de simetría, y sin capacidad de absorber momento perpendicular a dicho plano.

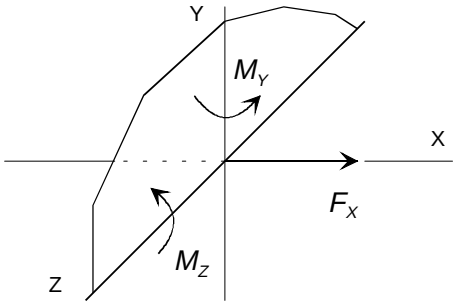


Figura 9.18

9.7.2 Barras contenidas en el plano de simetría

Cuando una barra está contenida en el plano de simetría, se debe separar en dos semi-barras situadas cada una de ellas en una de las dos mitades de la estructura. Esta separación debe

hacerse con la condición de que la energía acumulada en cada semi-barra sea la mitad de la energía acumulada en la barra completa.

Efectuando el mismo desarrollo que para el caso plano se deduce que la semi-barra debe tener la mitad de rigidez que la barra original. Para ello basta con dar a la semi-barra unos valores *GJ*/2, *EA*/2 y *EI*/2.

Al ser simétrica la deformación en los nudos extremos de la barra, sólo hay en ellos desplazamientos Y y Z, y giro X (figura 9.19). Con estas deformaciones en sus extremos, la barra está sometida únicamente a esfuerzo axial, producido por Δ_Y, y a flexión en el plano de simetría YZ, producido por Δ_Z y θ_X. No aparece en ella flexión en el plano perpendicular al de simetría (XY) ni torsión.

En resumen, la barra se comporta como una barra plana situada en el plano de simetría (YZ). Sólo influyen en su comportamiento los valores de $EA/2$ y de $EI_X/2$, y no intervienen $EI_Z/2$ ni $GJ/2$.

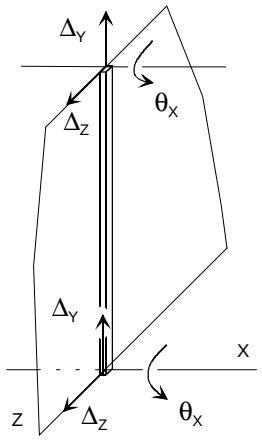


Figura 9.19

9.8 ESTRUCTURAS ESPACIALES CON CARGAS ANTISIMÉTRICAS

Una estructura espacial simétrica, sometida a un sistema de cargas antisimétrico se deforma de manera antisimétrica, según se ha indicado en el apartado 9.6. Las solicitaciones internas tienen asimismo una distribución antisimétrica, y todas las fuerzas y momentos componentes de estas solicitaciones cumplen la ley de antisimetría indicada en las figuras 9.15 y 9.16.

La antisimetría de deformaciones se satisface entre cualquier pareja de puntos de la estructura, y en particular también se tiene que satisfacer en los puntos situados precisamente en el plano de antisimetría. Esta consideración permite determinar las condiciones de contorno que se deben aplicar en el plano de antisimetría a la estructura mitad a fin de respetar el estado de deformación antisimétrico. Al determinar estas condiciones de contorno pueden presentarse los mismos casos ya estudiados anteriormente.

9.8.1 Nudos contenidos en el plano de antisimetría

En un nudo situado en el plano de antisimetría las deformaciones deben satisfacer a la vez las condiciones de deformación antisimétrica y de compatibilidad geométrica. Aplicando estas condiciones al elemento diferencial situado justo en el plano de antisimetría se obtiene el valor que deben tener sus deformaciones para respetar la condiciones anteriores.

Deformación X: sí es posible	$\Delta_X \neq 0$
Deformación Y: no es posible	$\Delta_Y = 0$
Deformación Z: no es posible	$\Delta_Z = 0$
Giro X: no es posible	$\theta_X = 0$
Giro Y: sí es posible	$\theta_Y \neq 0$
Giro Z: sí es posible	$\theta_Z \neq 0$

Así pues un punto situado en el plano de simetría sólo puede tener un desplazamiento perpendicular a dicho plano de simetría (eje X) y dos rotaciones contenidas en el propio plano (YZ), siendo cero las otras tres deformaciones (figura 9.20). Estas deformaciones son las complementarias a las existentes en el caso de cargas simétrico (figura 9.17).

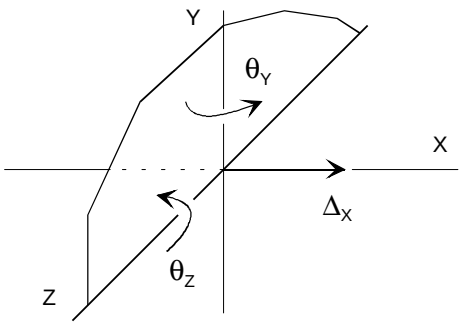


Figura 9.20

Efectuando el razonamiento con las fuerzas, y aplicando las condiciones de equilibrio al elemento diferencial, se obtiene el mismo resultado:

Fuerza X: no es posible	$F_X = 0$
Fuerza Y: sí es posible	$F_Y \neq 0$
Fuerza Z: sí es posible	$F_Z \neq 0$
Momento X: sí es posible	$M_X \neq 0$
Momento Y: no es posible	$M_Y = 0$
Momento Z: no es posible	$M_Z = 0$

Por lo tanto este punto puede absorber dos reacciones contenidas en el plano de antisimetría (YZ) y un momento perpendicular a dicho plano (eje X), como se indica en la figura 9.21. Nótese que estas reacciones son las complementarias de las existentes en el caso simétrico (figura 9.18).

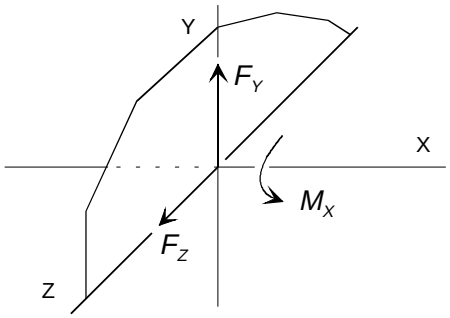


Figura 9.21

9.8.2 Barras contenidas en el plano de antisimetría

Una barra contenida en el plano de antisimetría se debe separar en dos semi-barras, situadas cada una de ellas en una de las dos mitades de la estructura, con la condición de que la energía acumulada en cada semi-barra sea la mitad de la energía acumulada en la barra completa.

Efectuando el mismo desarrollo que en el caso plano, se deduce que la semi-barra debe tener la mitad de rigidez que la barra original. Para ello basta con dar a la semi-barra unos valores *GJ*/2, *EA*/2 y *EI*/2.

Al ser la deformación en los nudos extremos de la barra antisimétrica, sólo hay en ellos giros Y y Z, y desplazamiento X (figura 9.22).

Con estas deformaciones en sus nudos extremos, la barra está sometida únicamente a un esfuerzo de torsión, debido a los giros θ_Y, y a flexión en el plano XY perpendicular al de antisimetría, debida a los giros θ_Z y al desplazamiento Δ_X. No aparece en ella flexión en el plano de antisimetría (YZ) ni esfuerzo axial.

En resumen la barra se comporta como una barra de emparrillado plano situada en el plano YZ y flectando en el XY. Sólo influirán en su comportamiento los valores de rigidez a torsión $GJ/2$ y a flexión $EI_Z/2$, no interviniendo ni $EI_X/2$ ni $EA/2$.

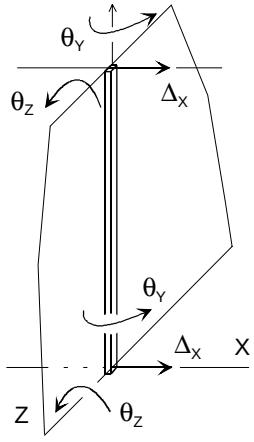


Figura 9.22

9.9 ESTRUCTURAS ESPACIALES CON VARIOS PLANOS DE SIMETRÍA

Es frecuente que las estructuras espaciales tengan varios planos de simetría perpendiculares entre sí, y en este caso el análisis puede simplificarse aún más. Hay dos casos relativamente habituales, para simetría especular.

Dos planos de simetría

En este caso es posible estudiar únicamente la cuarta parte de la estructura, limitada por los dos planos. Para ello se descompone el análisis en suma de cuatro casos, que se obtienen a base de aplicar la condición de simetría y antisimetría sucesivamente a ambos planos. Estos casos son: uno de doble simetría, otro de doble antimetría y dos casos mixtos de simetría y antimetría en cada uno de los planos.

La figura 9.23 indica las condiciones de igualdad que deben cumplir las distintas magnitudes vectoriales (deformaciones y esfuerzos) correspondientes a cuatro puntos simétricos.

Las condiciones de contorno a aplicar en los puntos que están situados en los planos de simetría se deducen aplicando las mismas condiciones explicadas para el caso de un plano de simetría, empleando la condición correspondiente del plano (simetría o antisimetría).

En los puntos situados en la recta de intersección de los dos planos de simetría se aplica la suma de todas las condiciones impuestas por ambos planos.

Tres planos de simetría

En este caso es posible estudiar la octava parte de la estructura, limitada por los tres planos. Para ello es necesario descomponer el análisis en suma de ocho casos, que se obtienen a base de aplicar la condición de simetría y antisimetría sucesivamente a los tres planos.

Los ocho casos posibles se obtienen simplemente por combinación de los casos de un sólo plano de simetría.

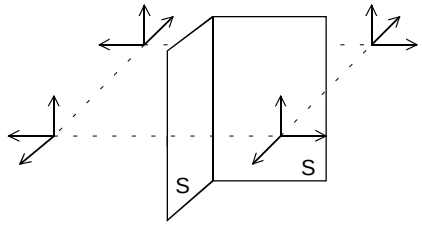
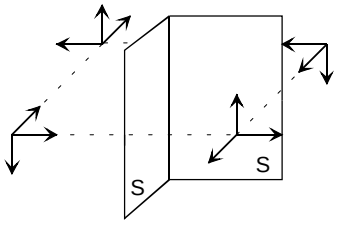
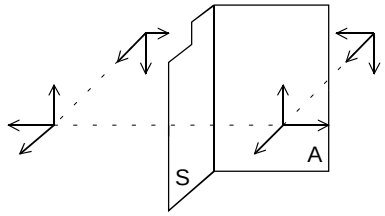
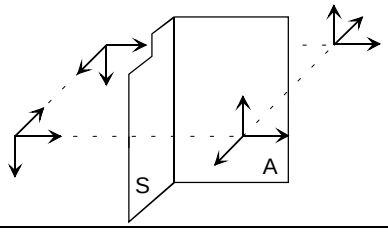
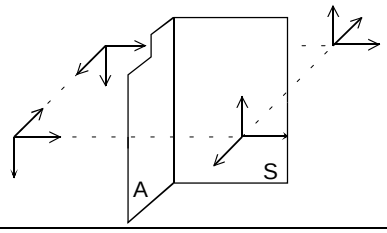
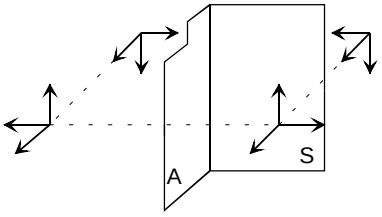
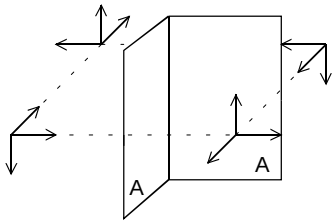
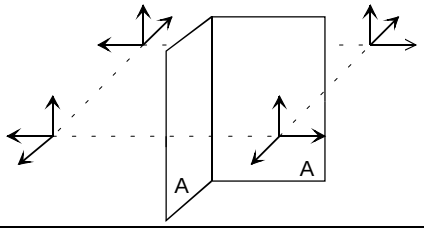
Condiciones para desplazamientos	**Condiciones para giros** *(representados como vectores)*
	
	
	
	

Figura 9.23

9.10 EJERCICIOS RESUELTOS

9.10.1 Descomponer la estructura de la figura 9.24 en suma de dos casos, simétrico y antimétrico.

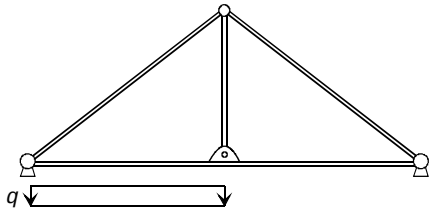


Figura 9.24

Los dos casos básicos se muestran en la figura 9.25, donde se indican los grados de libertad en los nudos del plano de simetría. En el caso antisimétrico la barra vertical no tiene esfuerzo axial, pues está situada entre dos puntos que no pueden moverse en dirección vertical.

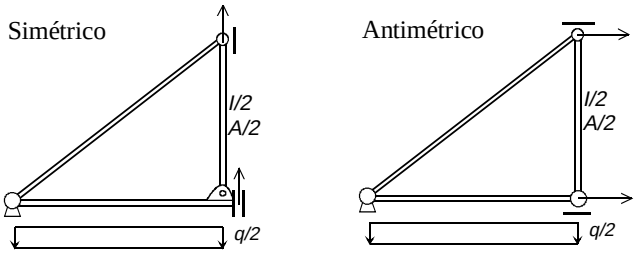


Figura 9.25

9.10.2 Descomponer la estructura de la figura 9.26 en suma de dos casos, simétrico y antimétrico. El incremento de temperatura *T* está aplicado en la cara derecha del pilar izquierdo de la estructura.

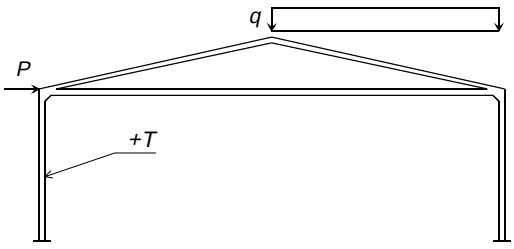


Figura 9.26

Las variaciones de temperatura se descomponen en sus componentes simétrica y antisimétrica de la misma forma que las restantes magnitudes. Los dos casos que se obtienen se muestran en la figura 9.27.

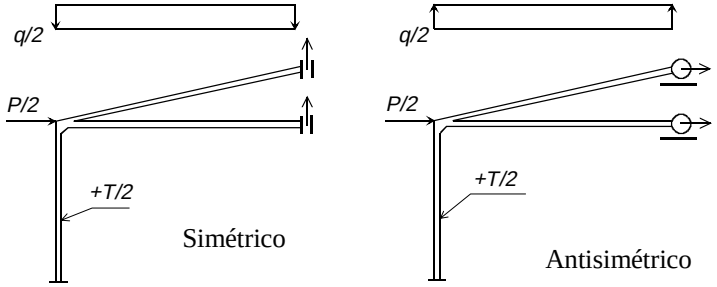


Figura 9.27

9.10.3 Descomponer la estructura de la figura 9.28 en suma de dos casos, simétrico y antimétrico. El muelle tiene un esfuerzo de pretensión inicial de valor N_0.

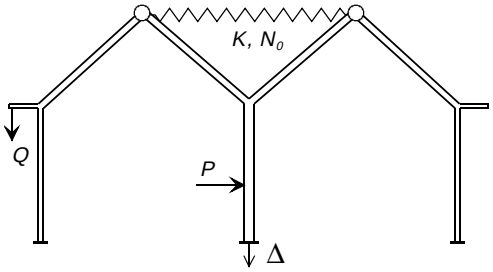


Figura 9.28

La figura 9.29 muestra los dos casos. En el caso simétrico la barra central no tiene momento flector ni esfuerzo cortante, y en el caso antisimétrico no tiene esfuerzo axial.

La deformación impuesta Δ, al estar en el plano de simetría, es de naturaleza simétrica. Sin embargo la fuerza *P* es esencialmente antisimétrica, por lo que se aplica toda ella en el caso antisimétrico. Nótese que en el caso antisimétrico el muelle no trabaja, pues en su extremo derecho no hay fuerza aplicada: sus dos extremos tendrán la misma deformación. La pretensión en el muelle se aplica toda ella en el caso simétrico.

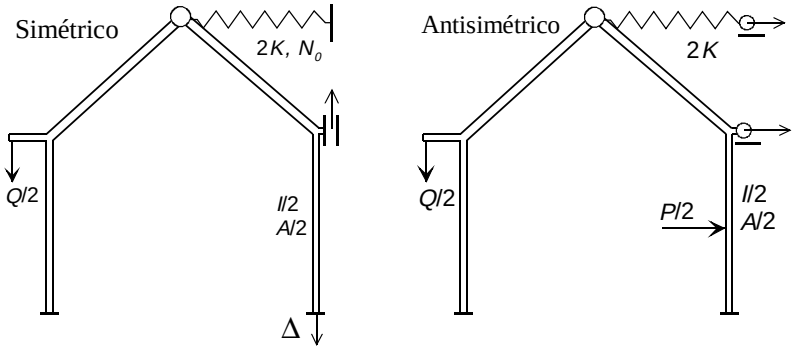


Figura 9.29

9.10.4 Descomponer la estructura de la figura 9.30 en suma de dos casos, simétrico y antimétrico.

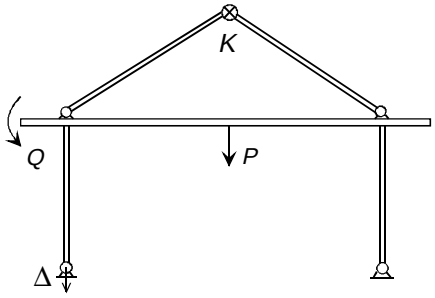


Figura 9.30

La figura 9.31 muestra los dos casos básicos. En esta estructura particular, el descenso de valor Δ/2 del caso simétrico no produce ningún esfuerzo, pues toda la estructura se desplaza verticalmente como un sólido rígido una magnitud Δ/2. Por lo tanto este descenso puede eliminarse del caso simétrico.

En el caso antisimétrico el muelle al giro está descargado, pues en el extremo que se corta no hay momento aplicado, por antimetría. Por lo tanto podría eliminarse del caso antisimétrico.

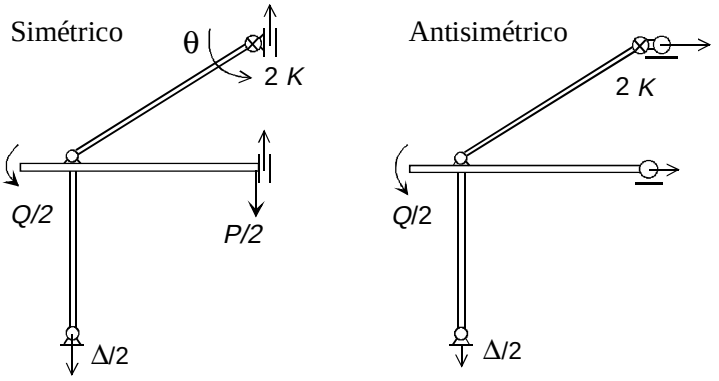


Figura 9.31

9.11 PROBLEMAS

9.11.1 En la estructura de la figura P9.1 se desea calcular las deformaciones de los nudos y el esfuerzo final en el muelle situado en A, empleando las simplificaciones de simetría y antimetría. Todas las barras tienen las mismas características. El muelle de A tiene una pretensión inicial de 100 m Tn, que actúa en sentido antihorario sobre la barra. Los restantes muelles están descargados en el estado inicial.

Datos: $E = 2\ 10^6$ kg/cm^2 $I = 5000$ cm^4 $A = 30$ cm^2 $\alpha = 10^{-6}$ ºC^{-1} Canto = 10 cm.

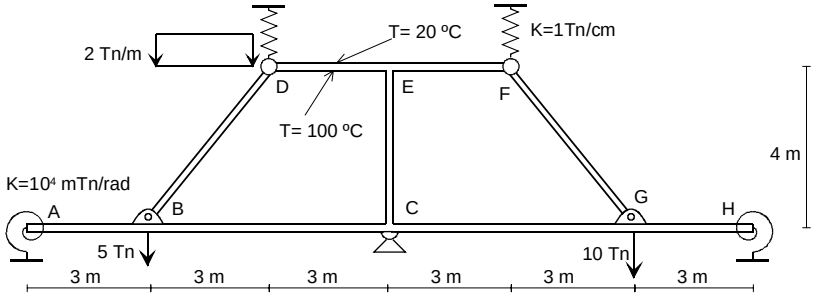


Figura P9.1

9.11.2 En la estructura de la figura P9.2, calcular la flecha en el extremo del voladizo de la derecha y la fuerza a efectuar en el punto 2 para moverlo 1 cm a 45º, como se indica.
Las uniones en los puntos 1, 3 y 1' son flexibles, y tienen una rigidez al giro relativo de valor de 10^4 mTn/rad. La articulación 3 tiene un defecto de fabricación, por lo que ha sido necesario girar sus extremos 5 mrad para montarla. El muelle 3-4 tiene una longitud natural de 3.98 m y su rigidez es de $K = 10^3$ Tn/m. La cara superior de la barra 2-4 sufre un calentamiento de +100ºC.
Datos para todas las barras: A=100 cm^2, I=10000 cm^4, E = 2 10^6 kg/cm^2, canto = 20 cm, $\alpha = 10^{-6}$ ºC^{-1}.

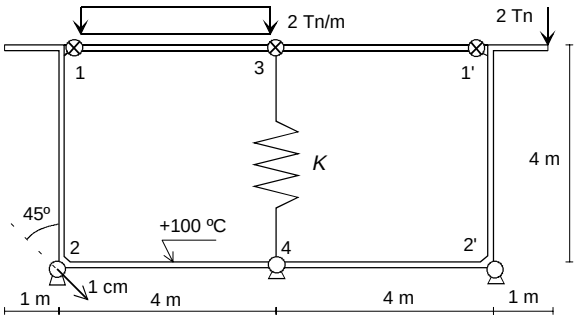


Figura P9.2

9.11.3 Calcular el diagrama de momentos flectores y el esfuerzo axial en el tensor BC de la estructura de la figura P9.3. Las propiedades de las barras AB y CD son: EA = 2 10^8 kg, EI = 2 10^{10} kg cm^2. La barra curva se considera infinitamente rígida a esfuerzo axial y tiene EI = 4 10^{10} kg cm^2. El tirante BC tiene una rigidez de 10^3 kg/cm.

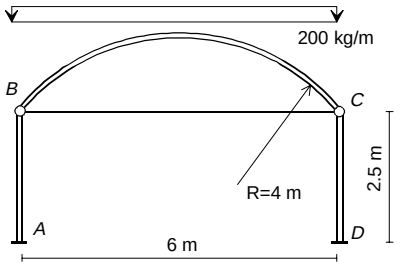


Figura P9.3

9.11.4 Calcular los esfuerzos internos en la estructura de la figura P9.4. Todas las barras tienen las siguientes propiedades: E=2 10^6 kg/cm^2, A=10 cm^2, I=10^4 cm^4. La rigidez del resorte GF es de 1000 Tn/m. Las poleas en E y J son de radio nulo, sin rozamiento y los hilos son inextensibles.

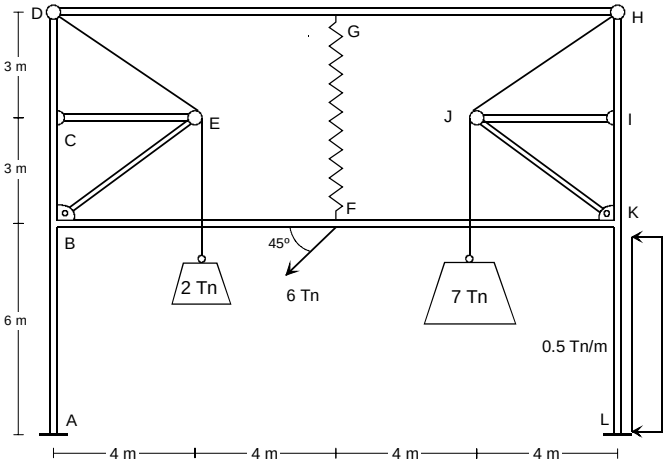


Figura P9.4

9.11.5 Descomponer en simétrico y antimétrico los pórticos espaciales mostrados en los ejemplos del apartado 5.2, cuando sea posible.

9.11.6 Resolver el problema 5.15.11 empleando la descomposición en casos simétrico y antisimétrico.

9.11.7 Resolver el problema 5.15.14 empleando la descomposición en casos simétrico y antisimétrico.

9.11.8 Resolver el problema 6.10.9 empleando la descomposición en casos simétrico y antisimétrico.

Capítulo 10

Líneas de influencia

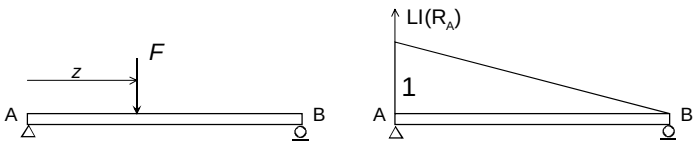
10.1 Definición

En la mayor parte de las estructuras las cargas exteriores actuantes tienen un único punto de aplicación fijo. Sin embargo hay también muchos casos en los que el punto de aplicación de alguna fuerza puede variar a lo largo de la estructura: por ejemplo un puente recorrido por un vehículo, o una viga carril sobre la que apoya una grúa. En estos casos los esfuerzos y deformaciones en la estructura dependen de la posición que ocupa la carga, y en particular el valor máximo de cada uno de ellos se produce en una cierta posición, en principio desconocida, de la carga. Al ser las cargas móviles se requiere por lo tanto un análisis más complejo que en el caso de cargas fijas, y para ello se utilizan las *líneas de influencia*.

Se define la línea de influencia de un esfuerzo o de una deformación como la función que proporciona la variación de dicho esfuerzo o deformación, para las distintas posiciones de la carga móvil a lo largo de la estructura, y para un valor unitario de dicha carga.

Por lo tanto hay una línea de influencia para cada esfuerzo o deformación de la estructura, y para cada carga móvil distinta que actúe sobre ella. Todas las líneas de influencia se expresan en función de algún parámetro que define la posición de la carga móvil en su trayectoria.

Ejemplo. *Considérese una viga biapoyada con una carga vertical móvil F.*



El valor de la reacción en A, es $R_A = F(L-z)/L$

La línea de influencia de la reacción en A es la función que define el valor de dicha reacción para un valor unitario de la fuerza móvil. Representa, para una abscisa determinada, el valor de la reacción R_A, al aplicar la carga unitaria en dicha abscisa.

$$LI(R_A) = 1 - z / L$$

Por medio del estudio de las líneas de influencia se puede determinar cúal es la posición más desfavorable de la carga para el esfuerzo o la deformación estudiados, así como dicho valor máximo.

Los primeros estudios sobre líneas de influencia para esfuerzos se deben a Winkler en 1868, quien posteriormente las aplicó al diseño de puentes en 1872. Al mismo tiempo Mohr presentó en 1868 el concepto de línea de influencia de una deformación, como resultado de sus estudios sobre la deformada elástica de una viga.

Los supuestos básicos que se emplean para estudiar las líneas de influencia son:

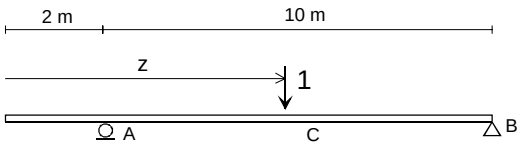
- ◊ Estructura con material elástico y lineal, con lo que es aplicable el principio de superposición.
- ◊ Una sola fuerza móvil de módulo unidad. Este supuesto se introduce para facilitar el estudio inicial, pero más adelante se estudian otros tipos de cargas.
- ◊ La carga es móvil sobre una trayectoria que se supone en principio recta, pero más adelante se verá que puede ser de forma cualquiera.
- ◊ La carga móvil mantiene siempre la misma dirección y sentido de aplicación, es decir que se traslada paralelamente a sí misma y no gira. Más adelante se verá que esta condición tampoco es indispensable.

10.2 LÍNEAS DE INFLUENCIA EN VIGAS ISOSTÁTICAS

En las vigas estáticamente determinadas, es posible calcular cualquier esfuerzo interno de la misma, utilizando nada más que las ecuaciones de equilibrio estático, por lo que éstas son suficientes para hallar cualquier línea de influencia.

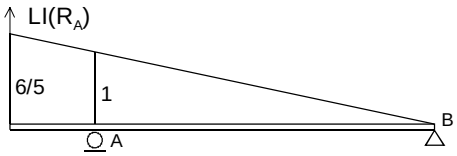
El proceso de cálculo suele consistir en determinar inicialmente las líneas de influencia de las reacciones en los apoyos, y posteriormente las de los esfuerzos internos, que se calculan con más facilidad cuando se conocen las reacciones.

Ejemplo. *Sea una viga con dos apoyos y un voladizo, recorrida por una carga unitaria vertical, como se indica en la figura.*



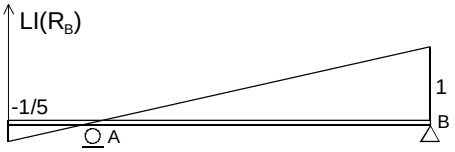
- *La línea de influencia de la reacción en A, supuesta positiva hacia arriba, se obtiene tomando momentos respecto de B.*

$$R_A = \frac{12 - z}{10}$$



- *La línea de influencia de la reacción en B, supuesta asimismo positiva hacia arriba, se obtiene del equilibrio vertical del conjunto.*

$$R_B = 1 - R_A = \frac{z - 2}{10}$$



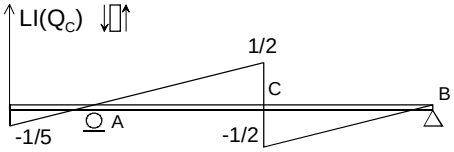
- *Para hallar la línea de influencia del cortante en C se aísla el tramo izquierdo o derecho de la viga, según interese.*

Si la carga está a la izquierda de C, se aísla el tramo derecho de la viga.

$$Q_C \equiv R_B = \frac{z - 2}{10} \qquad 0 < z < 7$$

Si la carga está a la derecha de C, se aísla el tramo izquierdo de la viga.

$$Q_C \equiv -R_A = \frac{z - 12}{10} \qquad 7 < z < 12$$



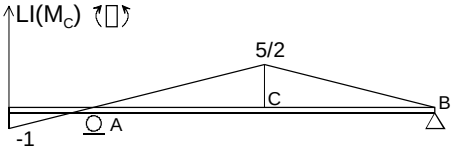
- *Para el momento flector en C se aplica la misma técnica:*

Si la carga está a la izquierda de C, se aísla el tramo derecho.

$$M_C \equiv R_B 5 = \frac{z - 2}{2} \qquad 0 < z < 7$$

Si la carga está a la derecha de C, se aísla el tramo izquierdo.

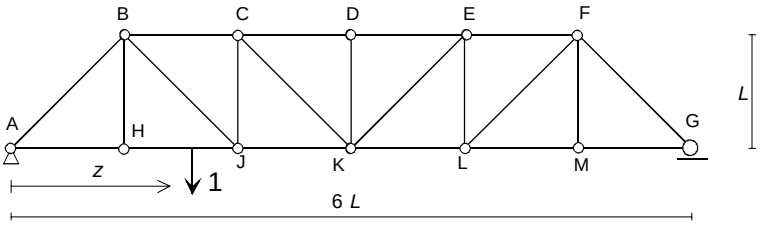
$$M_C \equiv R_A L = \frac{12 - z}{2} \qquad 7 < z < 12$$



10.3 LÍNEAS DE INFLUENCIA EN CELOSÍAS ISOSTÁTICAS

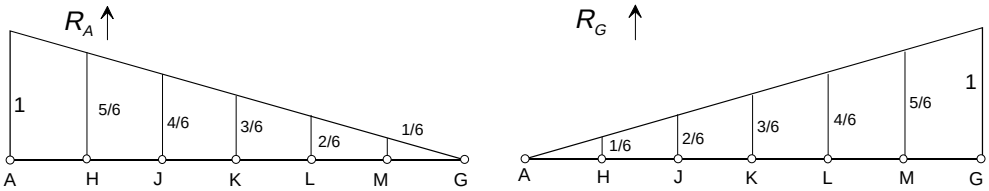
En este caso las líneas de influencia no son continuas, ya que las cargas sólo pueden estar situadas en los nudos. Como las diversas barras están desconectadas a flexión unas de otras, y su comportamiento es lineal, ocurre que la línea de influencia cuando la carga móvil está entre dos nudos es también lineal. Por tanto es suficiente con hallar la línea de influencia para la carga aplicada en los distintos nudos de su trayectoria, y unir los valores discretos obtenidos mediante líneas rectas. De esta forma se obtiene una línea quebrada que es la línea de influencia buscada.

Ejemplo. *En la celosía de la figura la carga unitaria se mueve en el cordón inferior.*

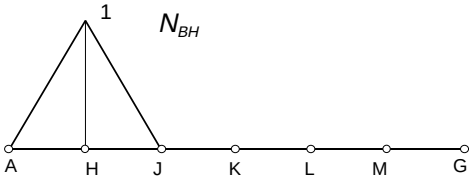


- *Las líneas de influencia de las reacciones se calculan aplicando el equilibrio de todo el conjunto*

$$R_A = 1 - \frac{z}{6L} \qquad R_G = \frac{z}{6L}$$

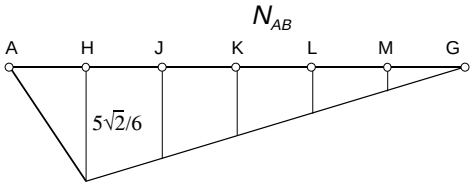


- *Para determinar el esfuerzo en el tirante vertical BH se considera el equilibrio vertical del nudo H: el elemento BH está sometido a un esfuerzo unidad cuando la fuerza está justo en H, y tiene un esfuerzo nulo cuando la fuerza está en otros nudos.*



- *Para la diagonal AB, el equilibrio vertical del nudo A indica que* $N_{AB} = -\sqrt{2}R_A$

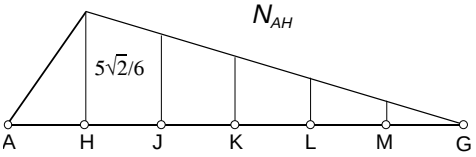
  La línea de influencia del esfuerzo en AB es igual a la de la reacción en A pero cambiada de escala. Sin embargo, hay que notar que cuando la carga está en A el esfuerzo en AB es nulo, por lo que la línea de influencia en el tramo AH es distinta y llega a cero en el punto A.



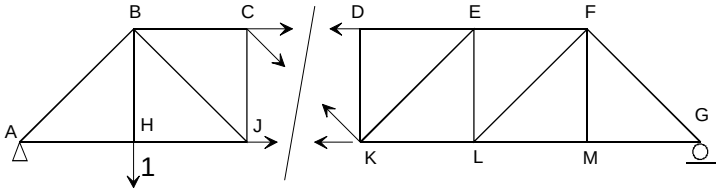
- *Para el elemento AH, el equilibrio horizontal del nudo A indica que:*

$$N_{AH} = -N_{AB} / \sqrt{2} = R_A$$

El esfuerzo en este elemento varía de la misma forma que la reacción en A. Pero, al igual que en el caso anterior, si la carga está justo en A el esfuerzo en AH es nulo, por lo que su línea de influencia cae hasta cero en el tramo AH.



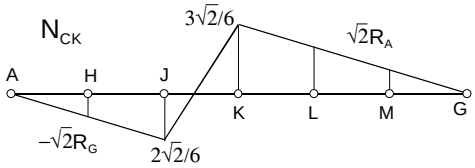
- *Para la diagonal CK es ventajoso usar el método de las secciones, efectuando un corte como se indica en la figura siguiente.*



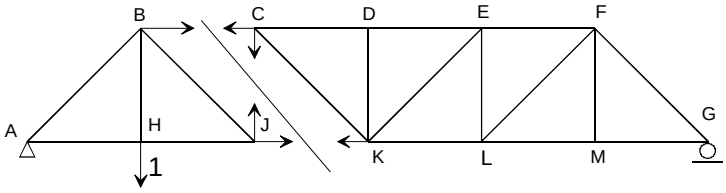
Si la carga está entre A y J, se aísla la parte derecha $N_{CK} = -\sqrt{2} R_G$

Si la carga está entre K y G se aísla la parte izquierda $N_{CK} = \sqrt{2} R_A$

Si la carga está en el tramo JK, la línea de influencia es lineal entre los dos valores obtenidos en J y K. La figura siguiente muestra el resultado.



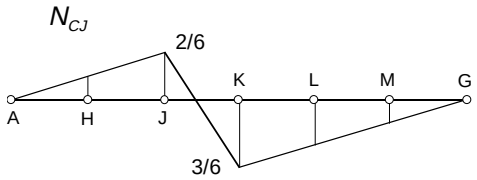
- *Para el montante CJ se aplica el método de las secciones con un corte como el indicado en la figura siguiente, y se aísla el trozo de estructura que interese en cada caso.*



Si la carga está entre A y J, se aísla la parte derecha $N_{CJ} = R_G$

Si la carga está entre K y G se aísla la parte izquierda $N_{CJ} = R_A$

Si la carga está en el tramo JK, la línea de influencia es lineal entre los dos valores obtenidos en J y K.

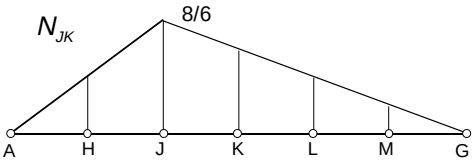


- *Para el cordón inferior JK se aplica el método de las secciones con el mismo corte anterior, y se toma momentos respecto al punto C, a fin de que aparezca sólo el esfuerzo en JK.*

Si la carga está entre A y J, se aísla la parte derecha $N_{JK} = 4R_G$

Si la carga está entre K y G se aísla la parte izquierda $N_{JK} = 2R_A$

Si la carga está en el tramo JK, la línea de influencia es lineal entre los dos valores obtenidos en J y K.



10.4 EMPLEO DEL PRINCIPIO DE LOS TRABAJOS VIRTUALES

El Principio de los Trabajos Virtuales brinda un método muy interesante para la determinación de líneas de influencia en estructuras isostáticas.

Si en una estructura isostática se elimina el esfuerzo cuya línea de influencia se desea hallar, la estructura se convierte en un mecanismo, con lo cual puede tener movimientos de sólido rígido, que se producen sin acumulación de energía elástica. De acuerdo con el Principio de los Trabajos Virtuales se cumple que el trabajo virtual de todas las fuerzas que actúan sobre la estructura es nulo, al no acumularse energía elástica:

$$\delta W = \delta U = 0 \qquad (10.1)$$

Sobre la estructura, transformada en mecanismo, actúan las siguientes fuerzas:

- ◊ la fuerza unitaria móvil,
- ◊ el esfuerzo cuya línea de influencia se desea hallar, llamado genéricamente *E*, y
- ◊ las reacciones en los apoyos, que no producen trabajo virtual.

Si se aplica sobre la estructura un desplazamiento virtual en la dirección del esfuerzo *E* cuya línea de influencia se busca, la estructura adopta una configuración deformada como sólido rígido. En esta configuración deformada se denomina δ_E al desplazamiento virtual en la dirección del esfuerzo buscado y δ_I al desplazamiento en la dirección de la fuerza unitaria móvil. El trabajo virtual producido por ambas fuerzas es:

$$\delta W = \delta_E \cdot E + \delta_I \cdot 1 = 0 \tag{10.2}$$

de donde se calcula el valor de la línea de influencia:

$$E = \frac{-\delta_I}{\delta_E} \tag{10.3}$$

Si se elige el desplazamiento virtual de tal manera que valga la unidad ($\delta_E = 1$) se obtiene:

$$E = -\delta_I \tag{10.4}$$

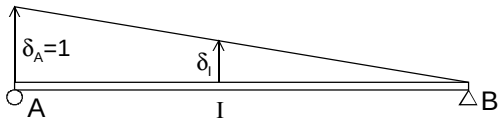
Esta expresión indica que la línea de influencia de un esfuerzo cualquiera en una estructura isostática es igual a la deformada - cambiada de signo - que adopta la trayectoria de la carga móvil, cuando se aplica un desplazamiento virtual unitario en la dirección del esfuerzo.

Esta deducción es general, sea cual sea el tipo de esfuerzo. Para reacciones, el desplazamiento virtual unitario se impone en la dirección supuesta para la reacción. Para esfuerzos internos, se debe imponer un desplazamiento virtual unitario relativo entre las dos caras donde actúa el esfuerzo interno. Además debe tenerse cuidado de que al imponerse esta deformación relativa unitaria se mantengan constantes las demás deformaciones, de tal forma que los otros esfuerzos existentes en la sección no produzcan trabajo virtual.

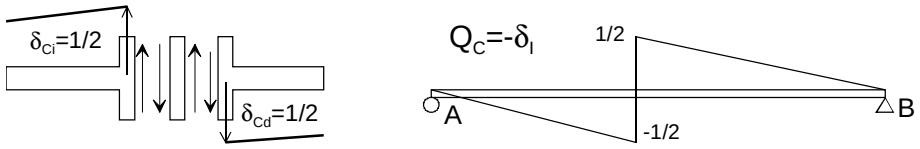
Es importante hacer notar que al haberse obtenido la línea de influencia como una deformada, el signo del esfuerzo *E* debe interpretarse como positivo cuando la fuerza móvil actúa en la dirección de la deformada y negativo cuando actúa en sentido contrario.

Aunque aquí se ha presentado como una mera utilización del Principio de los Trabajos Virtuales, este método fue presentado por Müller-Breslau en 1887, conjuntamente con su método para el cálculo de líneas de influencia en estructuras hiperestáticas, que se explica más adelante.

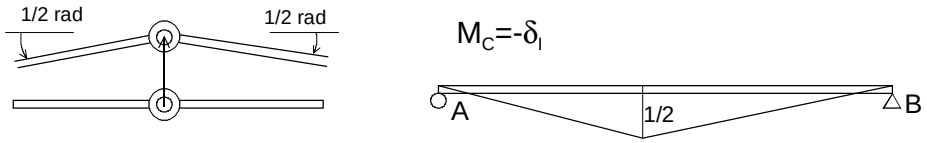
Ejemplo. *En una viga simplemente apoyada, la línea de influencia de la reacción en A se obtiene desplazando hacia arriba una unidad el apoyo A y calculando la deformada de la estructura, que gira como un sólido rígido alrededor de B.*



- *Para el esfuerzo cortante en C, punto medio de AB, se aplica un movimiento vertical relativo de valor unidad entre ambas caras, manteniendo el mismo giro en ambas. Con ello el momento flector en C no produce trabajo virtual.*



- *Para el momento flector en C se impone un giro relativo unitario entre ambas caras, manteniendo la flecha continua entre ellas, a fin de que el cortante no produzca trabajo virtual.*



10.5 OTROS TIPOS DE CARGAS MÓVILES

El concepto de línea de influencia ha sido presentado como la variación de una magnitud cualquiera de la estructura cuando una carga unitaria móvil se mueve sobre ella. En la realidad son muy pocos los casos en los que la carga móvil es una única y de módulo unidad: lo habitual es que se trate de conjuntos de cargas móviles situadas a distancias fijas unas de otras y con módulos diferentes (por ejemplo las cargas debidas a un vehículo). También puede ocurrir que sobre una viga muy larga actúen varias cargas puntuales situadas muy próximas unas a otras, que se pueden representar como una carga distribuida (por ejemplo las cargas debidas a un tren sobre un puente muy largo). Se hace por lo tanto necesario aplicar el concepto de línea de influencia a estas otras situaciones.

Al haberse supuesto comportamiento lineal, se cumple que la línea de influencia debida a un sistema de cargas cualquiera es igual a la suma de las líneas de influencia de cada una de las cargas. A su vez cada una de éstas es igual a la línea de influencia debida a la carga unidad, multiplicada por el valor real de la carga. Esta consideración general se puede expresar de forma analítica distinta según sea el tipo de carga.

Trenes de cargas puntuales

Sea un conjunto de N cargas puntuales P_i, situadas a unas distancias d_i a la primera de ellas (con d_1=0), como se indica en la figura 10.1, y sea $LI(z)$ la línea de influencia de un esfuerzo cualquiera E, calculada para una carga unitaria, y que se denomina línea de influencia básica. Para situar el tren de cargas en la viga se emplea la coordenada de posición de la primera carga z, por lo que las restantes cargas están situadas en unas posiciones $z_i = z\text{-}d_i$ $i=1,N$.

El valor del esfuerzo E en una posición cualquiera del tren de cargas es:

$$E = \sum_{i=1,N} P_i \; LI(z_i) = \sum_{i=1,N} P_i \; LI(z - d_i) \qquad (10.5)$$

Esta expresión indica que el valor del esfuerzo E debido al tren de cargas se calcula sencillamente sumando el valor que tiene la línea de influencia básica en la posición de cada carga, multiplicado por el valor de la carga correspondiente, con su signo.

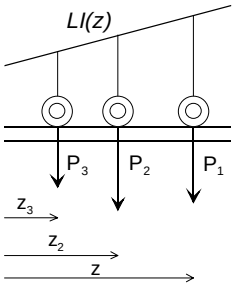


Figura 10.1

La expresión analítica de la línea de influencia correspondiente al tren de cargas se obtiene sumando, para cada carga, la línea de influencia básica, trasladada en la separación de dicha carga respecto de la primera (z-d_i) y multiplicada por el valor de la carga P_i.

En realidad la principal aplicación práctica de las líneas de influencia es la determinación de los valores máximos de los esfuerzos, por lo que raras veces se recurre a obtener la expresión analítica completa de la línea de influencia del tren de cargas. Para la determinación de los valores máximos de los esfuerzos se parte de la línea de influencia básica para una carga unidad y se determinan, por inspección, las posiciones críticas que puede adoptar el tren de cargas alrededor de cada punto máximo de dicha línea de influencia básica, teniendo en cuenta el módulo y la dirección de las cargas.

Cargas distribuidas

El caso de una carga distribuida móvil es similar al de un tren de cargas puntuales, pero considerando que las cargas están infinitamente próximas. Sea una carga distribuida móvil de módulo *q(x)*, actuando sobre una zona de la viga de longitud d (figura 10.2). La posición de esta carga en la viga se define mediante la coordenada z_i de su extremo izquierdo.

El valor del esfuerzo E, en una posición cualquiera z_i de la carga móvil es:

$$E = \int_{z_i}^{z_i+d} q(x) LI(x) dx \qquad (10.6)$$

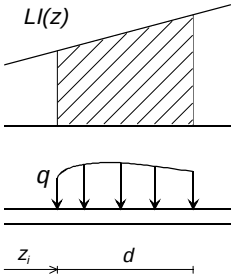


Figura 10.2

Es decir que el valor del esfuerzo E, para una posición determinada de la carga móvil, es igual al área situada bajo la curva que se obtiene al multiplicar la línea de influencia básica por la carga distribuida. Al igual que para el caso de fuerzas puntuales, lo habitual es utilizar este resultado para el cálculo de los valores máximos de los esfuerzos, determinando por inspección la situación pésima de la carga móvil.

10.6 TEOREMA DE MÜLLER-BRESLAU

Se considera una estructura elástica lineal cualquiera sobre la que actúa una fuerza unitaria móvil (figura 10.3). Sea I un punto cualquiera de aplicación de dicha fuerza móvil dentro de su trayectoria. Se quiere calcular la línea de influencia de la reacción en uno de los apoyos y en una determinada dirección, que se denomina R_B.

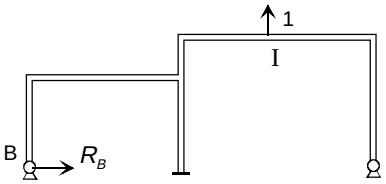


Figura 10.3

Se aplica el método de flexibilidad, de la forma siguiente:

- Se considera la reacción R_B como incógnita hiperestática.
- Se elimina la restricción originada por la reacción R_B. Se obtiene así una estructura que es hiperestática de grado *h*-1, sobre la que actúa la fuerza unitaria móvil. Esta estructura se denomina caso I (figura 10.4). Se calcula la deformación que aparece en este caso en la dirección de la reacción: Δ_B^I.

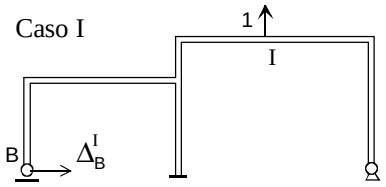


Figura 10.4

- Se aplica sobre la estructura una fuerza unitaria en la dirección de la reacción R_B, con lo que se genera un caso denominado B (figura 10.5), en el que se calculan las siguientes deformaciones:
  - ◊ Deformación en el punto B en la dirección de la reacción, debida al valor unitario de la propia reacción R_B: Δ_B^B.
  - ◊ Deformación en el punto I en la dirección de la carga móvil, debida al valor unitario de R_B: Δ_I^B.

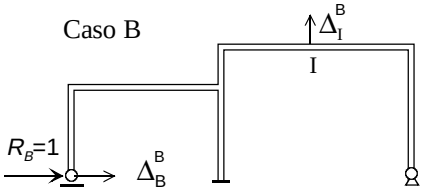


Figura 10.5

- Se aplica la ecuación de compatibilidad de deformaciones:

$$\Delta_B = \Delta_B^I + R_B \Delta_B^B = 0 \qquad (10.7)$$

que permite calcular la reacción:

$$R_B = \frac{-\Delta_B^I}{\Delta_B^B} \tag{10.8}$$

- Haciendo uso del teorema de reciprocidad de Maxwell, se cumple que $\Delta_B^I = \Delta_I^B$, por lo que el valor de la reacción buscada es:

$$R_B = \frac{-\Delta_I^B}{\Delta_B^B} \tag{10.9}$$

El numerador de esta expresión representa la deformación del punto I, donde está la carga móvil, en la dirección de dicha carga, al aplicarse una fuerza unitaria $R_B = 1$, y el denominador es la deformación del propio punto B al aplicar la $R_B = 1$. Esta expresión es válida para cualquier punto I, por lo tanto, pensando que I es un punto cualquiera de la trayectoria, representa la línea de influencia del esfuerzo buscado R_B.

La ecuación (10.9) representa el Teorema de Müller-Breslau, que puede enunciarse en la forma siguiente (figura 10.6):

> *La línea de influencia de la reacción en un apoyo de una estructura elástica lineal es igual al cociente, cambiado de signo, de la deformación en la dirección de la fuerza móvil, dividida por la deformación en el punto de aplicación de la reacción, ambas obtenidas para un valor unitario de la reacción.*

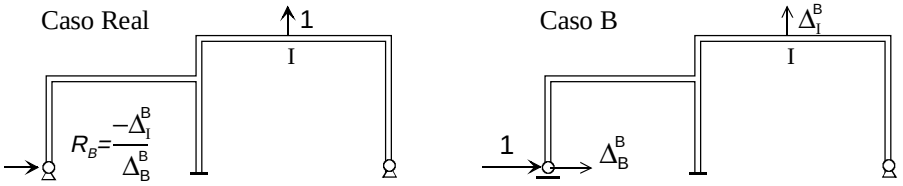


Figura 10.6

Es importante recordar que el numerador no es la deformación absoluta del punto I, sino su deformación medida (es decir proyectada) según la dirección de la carga móvil. Normalmente ambas direcciones no coincidirán.

Si la trayectoria de la carga móvil pasa por B, es decir que en alguna posición el punto I coincide con el B, y la dirección de la carga móvil coincide con la de R_B, ocurre que:

$$R_B = -\frac{\Delta_B^B}{\Delta_B^B} = -1 \tag{10.10}$$

Esto quiere decir que en esta caso toda la fuerza móvil es absorbida por la reacción, y el resto de la estructura está descargada.

Si en la ecuación (10.9) se sustituye $\Delta_B^B = 1$ se obtiene:

$$R_B = -\left(\Delta_I\right)_{\Delta_B = 1} \tag{10.11}$$

Lo cual permite enunciar el teorema de Müller-Breslau de otra forma distinta:

> *La línea de influencia de una reacción es igual a la deformación, cambiada de signo, de los puntos de aplicación de la carga móvil en la dirección de dicha carga móvil, cuando se impone una deformación unidad en la dirección de la reacción.*

El teorema de Müller-Breslau es una manera muy elegante de plantear el cálculo de líneas de influencia, pues transforma el cálculo de un esfuerzo en un cálculo de deformaciones. Resulta por lo tanto de gran interés cuando se dispone de un método que facilita el cálculo de deformaciones, como por ejemplo el método de rigidez.

Aplicación a momentos flectores

El teorema de Müller-Breslau está enunciado para reacciones, pero puede aplicarse a cualquier otro tipo de esfuerzo. Para el caso de un momento flector el proceso es el siguiente:

- Se considera el momento flector M_B como incógnita hiperestática. Se elimina de la estructura introduciendo una articulación en su lugar, y se obtiene así una estructura hiperestática de grado *h*-1, sobre la que sólo actúa la fuerza unitaria móvil. Esta estructura se denomina caso I (figura 10.7).
- Se calculan los giros que aparecen en el caso I, en el punto B por la izquierda y por la derecha, en la dirección de las dos componentes del momento flector: θ_{Bi}^{I} θ_{Bd}^{I}

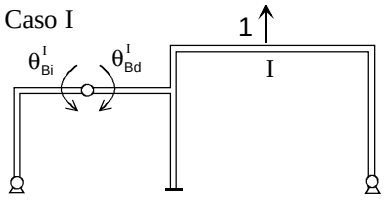


Figura 10.7

- Se aplica sobre la estructura un momento flector unitario en el punto B (figura 10.8), con lo que se genera un caso denominado B, en el que se calculan las deformaciones siguientes:
  - ◊ Giros en B por la izquierda y la derecha, en la dirección de las dos componentes del momento flector: θ_{Bi}^{B} θ_{Bd}^{B}.
  - ◊ Deformación en I en la dirección de la carga unitaria móvil: Δ_{I}^{B}.

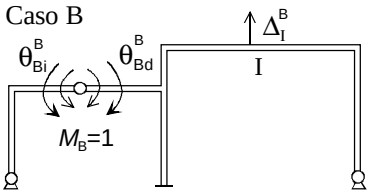


Figura 10.8

- Se aplica la ecuación de compatibilidad de deformaciones en el punto B,

$$\theta_{Bi} = -\theta_{Bd} \tag{10.12}$$

$$\theta_{Bi}^{I} + M_B \theta_{Bi}^{B} = -\theta_{Bd}^{I} - M_B \theta_{Bd}^{B} \tag{10.13}$$

que permite calcular el momento flector:

$$M_B = \frac{-(\theta_{Bi}^{I} + \theta_{Bd}^{I})}{\theta_{Bi}^{B} + \theta_{Bd}^{B}} \tag{10.14}$$

- Haciendo uso del teorema de reciprocidad de Maxwell generalizado se cumple que

$$\theta_{Bi}^{I} + \theta_{Bd}^{I} = \Delta_{I}^{B} \tag{10.15}$$

- El valor del momento flector buscado es:

$$M_B = \frac{-\Delta_{I}^{B}}{\theta_{Bi}^{B} + \theta_{Bd}^{B}} \tag{10.16}$$

El numerador de esta expresión representa la deformación del punto I donde está la carga móvil, y el denominador es la suma de los dos giros en la dirección de las dos componentes del momento, todos ellos obtenidos al aplicarse un momento unitario $M_B = 1$.

Se obtiene de esta manera una expresión muy similar a la obtenida para las reacciones, con la única diferencia de que en el denominador aparece la suma de los dos giros en la dirección de las dos componentes del momento.

Aplicación a esfuerzos cortantes

Siguiendo un proceso similar al de los momentos flectores se llega a la siguiente expresión de la línea de influencia para un esfuerzo cortante (figura 10.9):

$$Q_B = \frac{-\Delta_{I}^{B}}{\Delta_{Bi}^{B} + \Delta_{Bd}^{B}} \tag{10.17}$$

siendo:

◊ Desplazamientos en B por la izquierda y la derecha, en la dirección de las dos componentes del esfuerzo cortante: Δ_{Bi}^{B} Δ_{Bd}^{B}.

◊ Deformación en I en la dirección de la carga unitaria móvil: Δ_{I}^{B}.

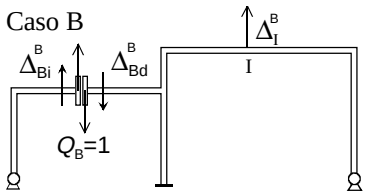


Figura 10.9

Aplicación a esfuerzos axiales

Siguiendo un proceso similar al de los momentos flectores se llega a la siguiente expresión de la línea de influencia para un esfuerzo axial (figura 10.10):

$$N_B = \frac{-\Delta_I^B}{\Delta_{Bi}^B + \Delta_{Bd}^B} \qquad (10.18)$$

siendo:

- ◊ Desplazamientos en B por la izquierda y la derecha, en la dirección de las dos componentes del esfuerzo axial: Δ_{Bi}^B Δ_{Bd}^B.
- ◊ Deformación en I en la dirección de la carga unitaria móvil: Δ_I^B.

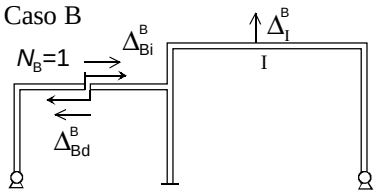


Figura 10.10

Generalización

En ninguna de las deducciones anteriores se ha empleado la suposición inicial de que la trayectoria es recta, ni que la carga móvil tiene dirección y sentido fijos, como se había supuesto inicialmente. Por lo tanto todo lo deducido hasta ahora es válido sea cual sea la trayectoria en la que se mueve la carga, y sea cual sea su dirección y sentido. Las expresiones de las líneas de influencia obtenidas son por lo tanto válidas para cualquier trayectoria, incluso curva, así como para fuerzas de orientación cambiante.

Las expresiones anteriores son también válidas cuando la carga móvil no es una fuerza sino un momento unitario. En este caso la deformación Δ_I^B se debe considerar como el giro según la dirección del momento móvil θ_I^B. Las expresiones del denominador son las mismas.

Todas las deducciones anteriores pueden englobarse en una descripción más general del teorema de Müller-Breslau: si se aplica en la dirección del esfuerzo cuya línea de influencia se busca, una fuerza tal que la deformación en dicha dirección valga la unidad ($\Delta_{Bi}^B + \Delta_{Bd}^B = 1$), ocurre que:

- ◊ La deformada (Δ_I^B) de la estructura que se obtiene, cambiada de signo, representa todas las líneas de influencia de dicho esfuerzo para cargas aplicadas en cualquier punto y dirección.
- ◊ Si se toma un punto cualquiera (el punto I), y se determina su posición deformada, la proyección de esta deformación sobre una dirección cualquiera es el valor de la línea de influencia para una carga unitaria que actúa según dicha dirección.

10.7 DISCUSIÓN SOBRE EL TEOREMA DE MÜLLER-BRESLAU

Se considera una estructura con grado de hiperestaticidad *h*, sometida a la fuerza unitaria móvil y se plantea el cálculo de la línea de influencia de un esfuerzo interior cualquiera. Se

emplea para ello el método de flexibilidad en su forma general, considerando las energías de esfuerzo axial y de flexión.

Se elige como única incógnita hiperestática el esfuerzo cuya línea de influencia se busca: X_1. Se obtiene así una estructura de grado *h*-1, y en ella se plantean dos casos.

- Caso I

En él sólo actúa la fuerza unitaria móvil (figura 10.11). Los esfuerzos que aparecen son función de la posición de la carga *z* y se denominan: $N^I(z),\ M^I(z)$

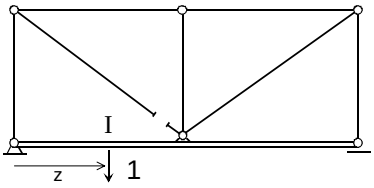


Figura 10.11

- Caso B

Se aplica un valor unitario del esfuerzo buscado (figura 10.12). Los esfuerzos que aparecen se denominan: $N^B,\ M^B$

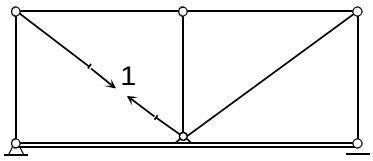


Figura 10.12

Por el principio de superposición los esfuerzos reales son:

$$N(z) = N^I(z) + N^B X_1 \qquad\qquad M(z) = M^I(z) + M^B X_1 \tag{10.19}$$

La condición de compatibilidad para la incógnita elegida es:

$$\sum N\rho N^B + \int M\mu M^B dx = 0 \tag{10.20}$$

Sustituyendo los esfuerzos y despejando se obtiene

$$X_1 = -\frac{\sum N^B \rho N^I + \int M^B \mu M^I dx}{\sum N^B \rho N^B + \int M^B \mu M^B dx} \tag{10.21}$$

que es la expresión de la línea de influencia buscada. Nótese que sólo el numerador es función de *z* (a través de los esfuerzos del caso I) y que el denominador es constante.

Discusión del resultado

- El numerador de la expresión de la línea de influencia corresponde a la deformación del punto I en el caso B

Para demostrarlo, se considera que en el caso B, los esfuerzos reales son $N^B\ M^B$, luego la deformación del punto I es:

$$\Delta_I^B = \sum N^B \rho N^V + \int M^B \mu M^V dx \tag{10.22}$$

En esta expresión los esfuerzos N^V y M^V son los esfuerzos que aparecen en el caso B cuando se carga con una fuerza virtual unitaria en el punto I (figura 10.13).

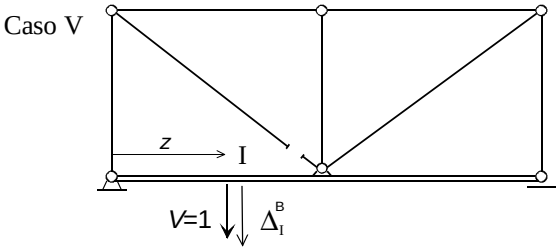


Figura 10.13

Pero este caso virtual es en realidad igual que el caso I (figura 10.11), pues éste sólo tiene una fuerza unitaria aplicada en I. Por lo tanto los esfuerzos en el caso V son:

$$N^V \equiv N^I \qquad M^V \equiv M^I \tag{10.23}$$

y la deformación buscada Δ_I^B vale:

$$\Delta_I^B = \sum N^B \rho N^I + \int M^B \mu M^I dx \tag{10.24}$$

que coincide con el numerador de la expresión (10.21) de la línea de influencia.

- El denominador de la línea de influencia es la suma de las deformaciones en los dos puntos donde se ha eliminado la incógnita hiperestática, en el caso B.

Se definen las dos deformaciones por la izquierda y por la derecha en el punto de corte de la incógnita hiperestática, en el caso B, como Δ_{Bi}^B y Δ_{Bd}^B.

Para hallar Δ_{Bi}^B se aplica una fuerza virtual unitaria en su dirección, y se obtiene un caso virtual, denominado Bi (figura 10.14), cuyos esfuerzos son N^{Bi}, M^{Bi}. Como los esfuerzos reales en el caso B son N^B M^B, la deformación es:

$$\Delta_{Bi}^B = \sum N^B \rho N^{Bi} + \int M^B \mu M^{Bi} dx \tag{10.25}$$

Para hallar Δ_{Bd}^B se aplica una fuerza virtual unitaria en su dirección, y se obtiene un caso virtual denominado Bd (figura 10.15), cuyos esfuerzos son N^{Bd}, M^{Bd}. La deformación es:

$$\Delta_{Bd}^B = \sum N^B \rho N^{Bd} + \int M^B \mu M^{Bd} dx \tag{10.26}$$

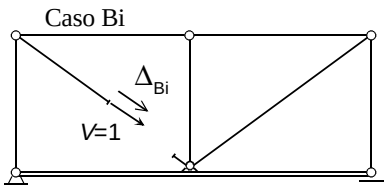


Figura 10.14

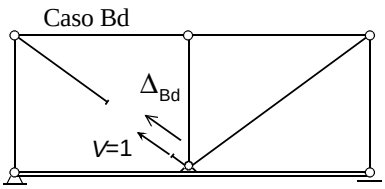


Figura 10.15

La suma de las dos deformaciones es:

$$\Delta_{Bi}^B + \Delta_{Bd}^B = \sum N^B \rho (N^{Bi} + N^{Bd}) + \int M^B \mu (M^{Bi} + M^{Bd}) dx \tag{10.27}$$

Pero el caso Bi más el caso Bd es igual al caso B, por lo que:

$$N^{Bi} + N^{Bd} = N^{B} \qquad M^{Bi} + M^{Bd} = M^{B} \tag{10.28}$$

Por lo tanto la suma de las deformaciones queda:

$$\Delta^{B}_{Bi} + \Delta^{B}_{Bd} = \sum N^{B} \rho N^{B} + \int M^{B} \mu M^{B} dx \tag{10.29}$$

que coincide con el denominador de la expresión (10.21) de la línea de influencia.

En consecuencia, la línea de influencia se puede poner como:

$$X_1 = -\frac{\Delta^{B}_{I}}{\Delta^{B}_{Bi} + \Delta^{B}_{Bd}} \tag{10.30}$$

que coincide con la expresión obtenida para las líneas de influencia de los esfuerzos internos en la estructura (ecuaciones (10.16), (10.17) y (10.18)).

La expresión anterior constituye una generalización del principio de Müller-Breslau para cualquier tipo de esfuerzo interno y cualquier grado de hiperestaticidad. La situación se resume en la figura 10.16: ha desaparecido la fuerza unitaria móvil, que se sustituye por un valor unitario de la incógnita hiperestática, en una estructura *h*-1. La expresión de la línea de influencia requiere el cálculo de la deformación del punto de aplicación de la carga móvil I, y de la deformación relativa en la sección de corte.

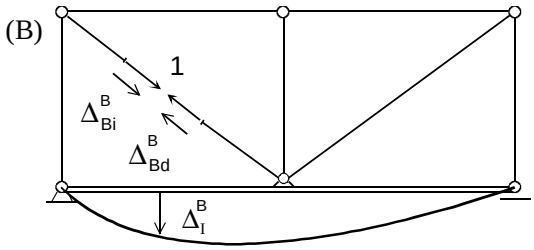


Figura 10.16

10.8 LÍNEAS DE INFLUENCIA DE DEFORMACIONES

La línea de influencia de una deformación en una estructura elástica lineal es aquella función que proporciona la variación de dicha deformación, cuando una carga unitaria móvil recorre una determinada trayectoria a lo largo de la estructura.

El cálculo de la línea de influencia de una deformación es inmediato empleando el teorema de reciprocidad de Maxwell. Sea la estructura cargada con la fuerza móvil en el punto I de la trayectoria, y supongamos que se desea calcular la línea de influencia de la deformación en el punto y la dirección B: Δ^{I}_{B}

En virtud del teorema de reciprocidad de Maxwell se cumple que:

$$\Delta^{I}_{B} = \Delta^{B}_{I} \tag{10.31}$$

Se deduce por lo tanto que la línea de influencia de una deformación es igual a la deformada de la trayectoria de la carga móvil, cuando la estructura se carga únicamente con

una carga unidad, en la dirección de la deformación cuya línea de influencia se busca, como se muestra en la figura 10.17.

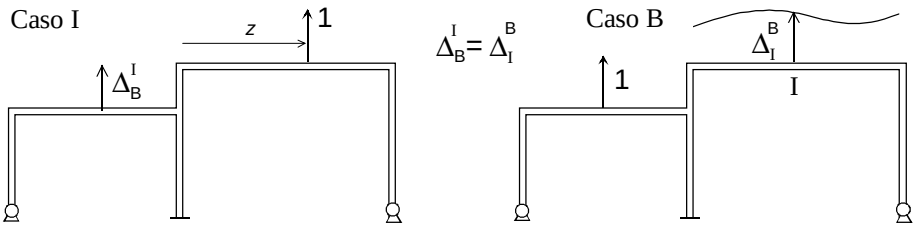


Figura 10.17

10.9 EJERCICIOS RESUELTOS

10.9.1 Calcular la línea de influencia de la reacción en el apoyo B en una viga empotrada apoyada, recorrida por una carga unitaria (figura 10.18).

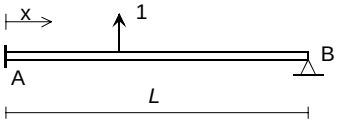


Figura 10.18

Empleando el principio de Müller-Breslau, se elimina el apoyo B y se aplica una fuerza de valor unidad en la dirección de la reacción buscada, que se ha supuesto hacia arriba. Con esto la viga se transforma en un voladizo cargado con una fuerza unitaria en su extremo. El valor de la reacción viene dado por la ecuación (10.9):

$$R_B = -\frac{\Delta_I^B}{\Delta_B^B}$$

El numerador de esta expresión corresponde a la curva deformada elástica del voladizo cargado con la fuerza unidad en su extremo, en dirección hacia arriba, y el denominador es la deformación de dicho voladizo en su extremo (figura 10.19). Se debe por lo tanto resolver un problema isostático de cálculo de deformaciones. Lo más sencillo en este caso es integrar directamente la ecuación de la elástica.

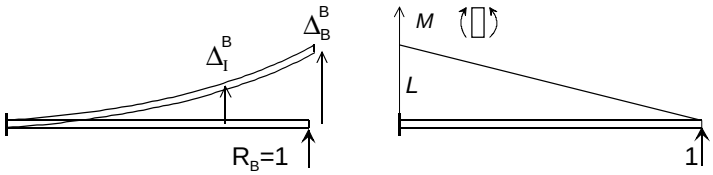


Figura 10.19

El valor del momento flector en el voladizo es: $M = L - x$

Por lo tanto la ecuación diferencial de la curva deformada elástica es:

$$M = EIv'' \qquad L - x = EIv''$$

que integrada es:

$$EIv' = Lx - \frac{x^2}{2} + A$$

$$EIv = \frac{Lx^2}{2} - \frac{x^3}{6} + Ax + B$$

Las condiciones de contorno son:

$$v(x=0) = 0 \quad \rightarrow \quad B = 0$$

$$v'(x=0) = 0 \quad \rightarrow \quad A = 0$$

Por lo tanto la deformada de la viga, que es directamente la expresión del numerador de la línea de influencia, es:

$$\Delta_I^B = v = \frac{Lx^2}{2EI} - \frac{x^3}{6EI}$$

La deformación en el extremo de la viga es:

$$\Delta_B^B = v(x=L) = \frac{L^3}{3EI}$$

Por lo tanto la línea de influencia buscada es:

$$R_B = -\frac{\Delta_I^B}{\Delta_B^B} = -\frac{3x^2}{2L^2} + \frac{x^3}{2L^3}$$

Nótese que es toda ella negativa, debido a que se ha supuesto que la reacción es hacia arriba, cuando en realidad es hacia abajo para cualquier posición de la carga (figura 10.20).

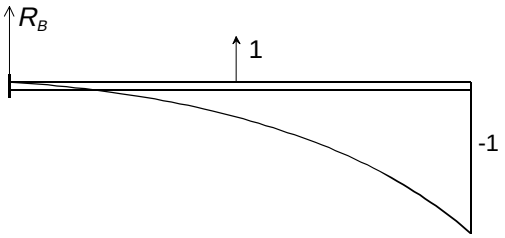


Figura 10.20

10.9.2 Calcular la línea de influencia del momento flector en el apoyo B en una viga de dos vanos, apoyada en sus dos extremos y recorrida por una carga unitaria, como se indica en la figura 10.21.

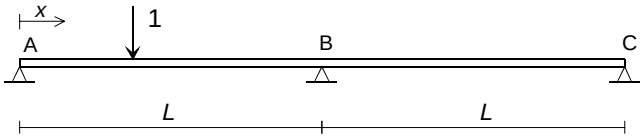


Figura 10.21

Empleando el principio de Müller-Breslau, se articula el punto B y se aplica un momento flector de valor unidad en él. Con esto la viga se transforma en dos vigas independientes, cada una apoyada en sus dos extremos, que comparten el apoyo B y están cargadas cada una con un momento unitario en su extremo (figura 10.22).

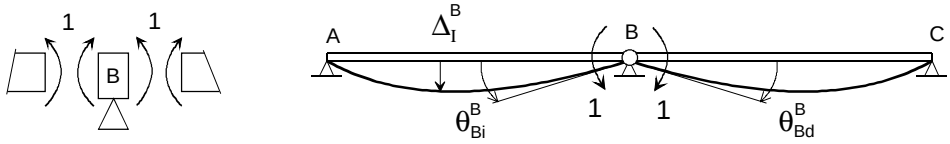


Figura 10.22

El valor de la línea de influencia buscada es:

$$M_B = -\frac{\Delta_I^B}{\theta_{Bi}^B + \theta_{Bd}^B}$$

El numerador de esta expresión corresponde a la deformada elástica de las dos vigas biapoyadas cargadas con el momento unidad, en la dirección de la carga, es decir hacia abajo. El denominador es el giro relativo entre las dos vigas en el punto B. El comportamiento de las dos vigas es simétrico por lo que basta con calcular una de ellas.

Se debe por lo tanto resolver un problema de cálculo de deformaciones en una viga biapoyada con un momento en uno de los apoyos (figura 10.23). Lo más ventajoso en este caso es integrar directamente la ecuación de la elástica.

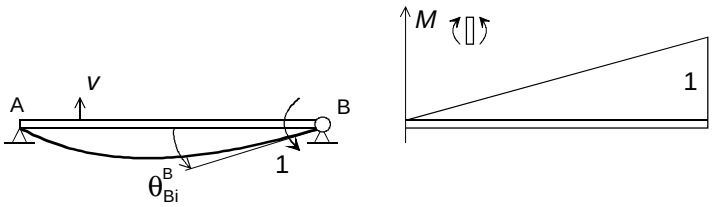


Figura 10.23

El valor del momento flector en la viga AB es: $M = x / L$

Por lo tanto la ecuación diferencial de la curva deformada elástica es:

$$M = EIv'' \qquad x / L = EIv''$$

que integrada es:

$$EIv' = \frac{x^2}{2L} + A$$

$$EIv = \frac{x^3}{6L} + Ax + B$$

Las condiciones de contorno son:

$$v(x = 0) = 0 \qquad \rightarrow \qquad B = 0$$

$$v'(x = L) = 0 \qquad \rightarrow \qquad A = -L / 6$$

Por lo tanto la deformada de la viga, que coincide con la expresión del numerador de la línea de influencia, cambiada de signo, es:

$$v = \frac{x^3}{6EIL} - \frac{Lx}{6EI}$$

$$\Delta_I^B = -v = -\frac{x^3}{6EIL} + \frac{Lx}{6EI}$$

El giro en el extremo B de la viga es:

$$\theta_{Bi}^B = v'(x=L) = \frac{L^2}{2EIL} - \frac{L}{6EI} = \frac{L}{3EI}$$

El giro por la derecha del apoyo B es igual al giro por la izquierda, por simetría:

$$\theta_{Bd}^B = \theta_{Bi}^B \qquad \rightarrow \qquad \theta_{Bd}^B = \frac{L}{3EI}$$

Por lo tanto la línea de influencia buscada es:

$$M_B = -\frac{\Delta_I^B}{\theta_{Bi}^B + \theta_{Bd}^B} = \frac{\frac{x^3}{6EIL} - \frac{Lx}{6EI}}{\frac{L}{3EI} + \frac{L}{3EI}} = \frac{x^3}{4L^2} - \frac{x}{4} \qquad 0 < x < L$$

Esta expresión es válida solamente cuando la carga está situada en el vano AB, es decir para $0<x<L$. Cuando la carga está en el vano BC, la línea de influencia es la simétrica de la anterior (figura 10.24). Nótese que el momento flector en B es siempre negativo para cualquier posición de la carga en la viga.

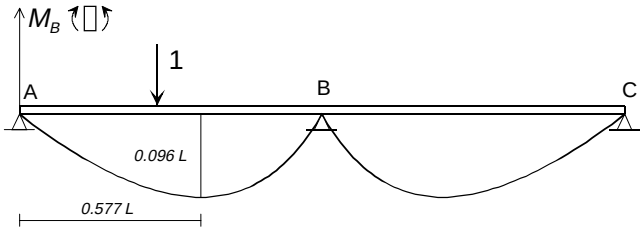


Figura 10.24

La posición de la carga que produce el máximo del momento flector en B se obtiene derivando la expresión anterior e igualando a cero:

$$\frac{dM_B}{dx} = \frac{3x^2}{4L^2} - \frac{1}{4} = 0 \qquad \rightarrow \qquad x = \frac{L}{\sqrt{3}} \approx 0.577L$$

El valor del momento máximo es:

$$M_{B\max} = -\frac{L\sqrt{3}}{18} \approx -0.096L$$

10.9.3 Calcular la línea de influencia del momento flector en el punto D, centro del vano AB, en una viga de dos vanos iguales apoyada en sus dos extremos y recorrida por una carga unitaria, como se indica en la figura 10.25.

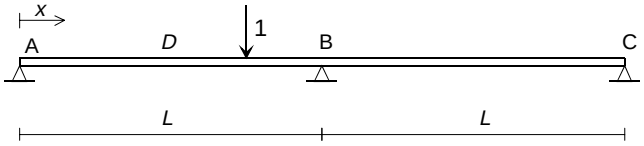


Figura 10.25

Empleando el principio de Müller-Breslau, se articula el punto D y se aplica un momento flector de valor unidad en él. Con esto se obtiene la viga de la figura 10.26.

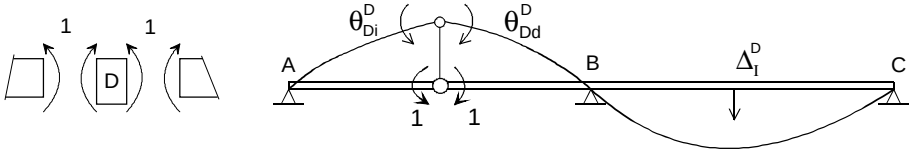


Figura 10.26

El valor de la línea de influencia buscada es:

$$M_D = -\frac{\Delta_I^D}{\theta_{Di}^D + \theta_{Dd}^D}$$

El numerador de esta expresión corresponde a la deformación de la viga cargada con el momento unidad en D, medida en la dirección de la carga móvil, es decir hacia abajo. El denominador es el giro relativo en el punto D.

La viga resultante es isostática, por lo que su diagrama de momentos flectores se puede calcular con sencillez aislando los distintos vanos de la viga, y se muestra en la figura 10.27.

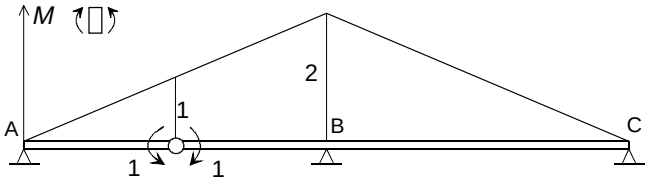


Figura 10.27

La deformada de esta viga se calcula por integración de la ecuación de la elástica.

Tramo BC

El valor del momento flector en este tramo es: $M_{BC} = 2 - \frac{2x}{L}$

Donde se ha empleado una coordenada *x* con origen en el punto B. La ecuación diferencial de la curva deformada elástica es:

$$M = EIv'' \qquad 2 - \frac{2x}{L} = EIv''_{BC}$$

que integrada es:

$$EIv'_{BC} = 2x - \frac{x^2}{L} + C_1 \qquad EIv_{BC} = x^2 - \frac{x^3}{3L} + C_1 x + C_2$$

Las condiciones de contorno son:

$$v_{BC}(x=0) = 0 \quad \rightarrow \quad C_2 = 0$$

$$v'_{BC}(x=L) = 0 \quad \rightarrow \quad C_1 = -\frac{2L}{3}$$

Por lo tanto la deformada de la viga en este tramo es:

$$v_{BC} = \frac{x^2}{EI} - \frac{x^3}{3EIL} - \frac{2Lx}{3EI} \qquad 0 < x < L$$

Tramo DB

El momento flector y la ecuación diferencial de la deformada en este tramo son:

$$M_{DB} = \frac{2x}{L} = EIv''_{DB}$$

donde se ha empleado una coordenada x con origen en el punto A. Integrando se obtiene es:

$$EIv'_{DB} = \frac{x^2}{L} + C_3 \qquad EIv_{DB} = \frac{x^3}{3L} + C_3 x + C_4$$

Las condiciones de contorno son el giro en el punto B, cuyo valor se conoce a partir de la deformada en BC, y la condición de flecha nula en el punto B:

$$v'_{DB}(x=L) = \theta_B = v'_{BC}(x=0) \quad \rightarrow \quad \frac{L^2}{EIL} + \frac{C_3}{EI} = -\frac{2L}{3EI} \quad \rightarrow \quad C_3 = -\frac{5L}{3}$$

$$v_{DB}(x=L) = 0 \quad \rightarrow \quad \frac{L^3}{3LEI} + \frac{C_3 L}{EI} + \frac{C_4}{EI} = 0 \quad \rightarrow \quad C_4 = \frac{4L^2}{3}$$

Por lo tanto la deformada de la viga en el tramo DB es:

$$v_{DB} = \frac{x^3}{3LEI} - \frac{5Lx}{3EI} + \frac{4L^2}{3EI} \qquad \frac{L}{2} < x < L$$

Tramo AD

La ecuación diferencial de la deformada en este tramo es:

$$M_{AD} = \frac{2x}{L} = EIv''_{AD}$$

que integrada es:

$$EIv'_{AD} = \frac{x^2}{L} + C_5 \qquad EIv_{AD} = \frac{x^3}{3L} + C_5 x + C_6$$

Las condiciones de contorno son la condición de flecha nula en A, y la coincidencia de flechas por la izquierda y por la derecha en D:

$$v_{AD}(x=0)=0 \qquad \rightarrow \qquad C_6=0$$

$$v_{AD}(x=\frac{L}{2})=v_{DB}(x=\frac{L}{2}) \quad \rightarrow \quad \frac{L^3}{24LEI}+\frac{C_5 L}{2EI}=\frac{L^3}{24LEI}-\frac{5L^2}{6LEI}+\frac{4L^2}{3EI} \quad \rightarrow \quad C_5=L$$

Por lo tanto la deformada de la viga en este tramo es:

$$v_{AD}=\frac{x^3}{3EIL}+\frac{Lx}{EI} \qquad 0<x<\frac{L}{2}$$

El giro por la izquierda de D es:

$$\theta_{Di}^{D}=v'_{AD}(x=\frac{L}{2})=\frac{5L}{4EI}$$

El giro por la derecha de D, considerando el criterio de signos adoptado, es:

$$\theta_{Dd}^{D}=-v'_{DB}(x=\frac{L}{2})=\frac{17L}{12EI}$$

La expresión de la línea de influencia buscada es:

$$M_D=-\frac{\Delta_I^D}{\theta_{Di}^D+\theta_{Dd}^D}=-\frac{(-v)}{\frac{5L}{4EI}+\frac{17L}{12EI}}=\frac{v}{\frac{8L}{3EI}}$$

Donde se ha considerado el cambio de signo $\Delta_I^D=-v$ debido al criterio de signos utilizado. Dado que v tiene expresiones distintas para cada tramo de la viga, la línea de influencia también tiene expresiones distintas para cada tramo en el que se mueve la carga:

Tramo AD: $$M_D^{(AD)}=\frac{\frac{x^3}{3EIL}+\frac{Lx}{EI}}{\frac{8L}{3EI}}=\frac{x^3}{8L^2}+\frac{3x}{8} \qquad 0<x<\frac{L}{2}$$

Tramo DB: $$M_D^{(DB)}=\frac{\frac{x^3}{3LEI}-\frac{5Lx}{3EI}+\frac{4L^2}{3EI}}{\frac{8L}{3EI}}=\frac{x^3}{8L^2}-\frac{5x}{8}+\frac{L}{2} \qquad \frac{L}{2}<x<L$$

Tramo BC: $$M_B^{(BC)}=\frac{\frac{x^2}{EI}-\frac{x^3}{3EIL}-\frac{2Lx}{3EI}}{\frac{8L}{3EI}}=\frac{3x^2}{8L}-\frac{x^3}{8L^2}-\frac{x}{4} \qquad 0<x<L$$

La figura 10.28 representa el aspecto de la línea de influencia. Se observa que el momento flector es positivo cuando la carga está en el vano AB y negativo cuando está en el vano BC.

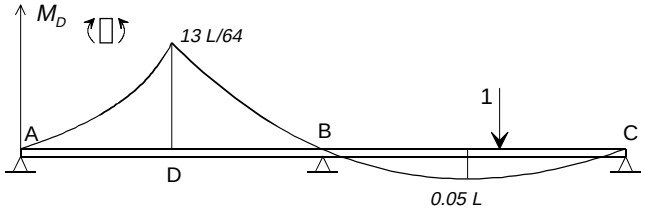


Figura 10.28

El máximo del momento flector en D se produce cuando la carga móvil está en el mismo punto D. Esta posición no se corresponde con un máximo matemático de la función sino con un valor extremo:

$$M_{D\max}^{(AB)} = \frac{13L}{64}$$

El máximo valor negativo del momento se produce cuando la carga recorre el vano BC. Derivando la expresión correspondiente se obtiene que el valor máximo del momento negativo es:

$$M_{D\max}^{(BC)} = -\frac{L\sqrt{3}}{36} \approx -0.05L$$

y se produce cuando la carga está a una distancia del apoyo B de valor 0.42 *L*.

10.9.4 Calcular la línea de influencia del esfuerzo cortante en el punto D, centro del vano AB, en una viga de dos vanos iguales, apoyada en sus dos extremos y recorrida por una carga unitaria en dirección vertical hacia arriba, como se indica en la figura 10.29.

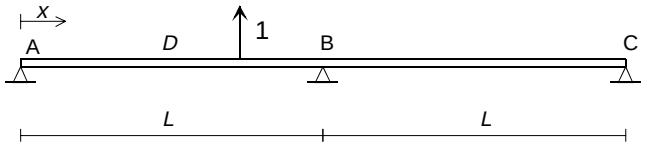


Figura 10.29

Empleando el principio de Müller-Breslau, se coloca una deslizadera vertical en el punto D y se aplica un esfuerzo cortante de valor unidad en ella. Con esto se obtiene la viga de la figura 10.30.

El valor de la línea de influencia buscada es:

$$Q_D = -\frac{\Delta_I^D}{\Delta_{Di}^D + \Delta_{Dd}^D}$$

El numerador de esta expresión corresponde a la deformación de la viga cargada con el cortante unidad en D, medida en la dirección de la carga móvil, es decir hacia arriba. El denominador es la flecha relativa entre las dos caras de la deslizadera, en el punto D.

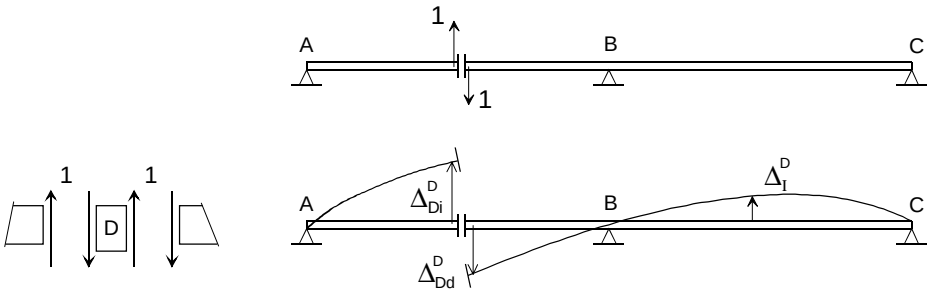


Figura 10.30

La viga resultante es isostática, por lo que su diagrama de momentos flectores se puede calcular con sencillez aislando los distintos vanos de la viga, y se muestra en la figura 10.31.

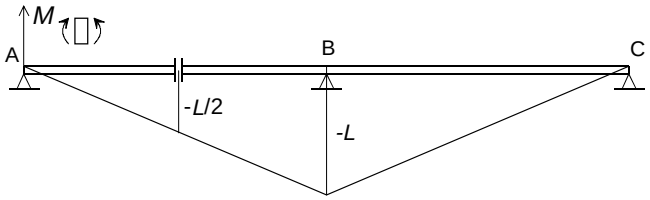


Figura 10.31

La viga conjugada de la viga original se muestra en la figura 10.32. Se trata de una viga apoyada en sus extremos A y C y articulada en B, y sometida a una carga distribuida triangular orientada hacia arriba, como corresponde al diagrama de momentos flectores de la viga original, que es todo él negativo.

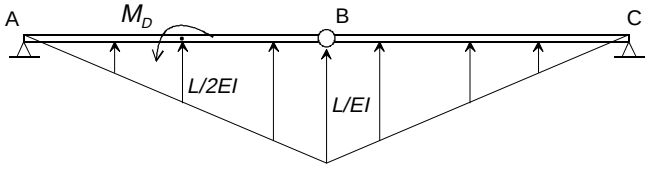


Figura 10.32

Al conjugar la deslizadera en D se obtiene un punto en el que hay un momento exterior aplicado, de valor en principio desconocido M_D. Por otra parte se observa que la viga conjugada es inestable al ser una viga apoyada en sus extremos, con una articulación situada en su centro. En realidad el momento situado en D debe tener un valor tal que la viga conjugada esté en equilibrio de fuerzas bajo la acción de la fuerza distribuida (originada por el momento flector de la viga original) y el propio momento aplicado en D.

El valor del momento aplicado en D y de las dos reacciones en A y C se pueden calcular empleando las ecuaciones de equilibrio de la viga conjugada.

Tomando momentos respecto de B del tramo BC se obtiene la reacción en C:

$$R_C^* L + \frac{1}{2} L \frac{L}{EI} \frac{L}{3} = 0 \qquad \rightarrow \qquad R_C^* = -\frac{L^2}{6EI}$$

Tomando momentos respecto de A en toda la viga ABC se obtiene el valor del momento en D:

$$M_D + \frac{1}{2} 2L \frac{L}{EI} L + R_C^* 2L = 0 \qquad \rightarrow \qquad M_D = -\frac{2L^3}{3EI}$$

Finalmente , el equilibrio vertical de toda la viga permite hallar la reacción en A:

$$R_A^* + R_C^* = \frac{1}{2} 2L \frac{L}{EI} \qquad \rightarrow \qquad R_A^* = -\frac{5L^2}{6EI}$$

Conociendo las reacciones es sencillo calcular el diagrama de flectores de la viga conjugada, que tiene expresiones distintas en cada tramo de la misma.

Tramo AD

El valor de la carga distribuida en este tramo es: $q^* = \frac{x}{EI}$

El momento flector conjugado en un punto situado a una distancia *x* del nudo A vale:

$$M_{AD}^* = -\frac{5L^2 x}{6EI} + \frac{x^3}{6EI} \qquad 0 < x < \frac{L}{2}$$

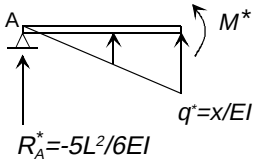


Figura 10.33

Tramo DB

La carga distribuida tiene la misma expresión que en el tramo AD, y el valor del momento flector conjugado en este tramo es:

$$M_{DB}^* = -\frac{5L^2 x}{6EI} + \frac{x^3}{6EI} + \frac{2L^3}{3EI} \qquad \frac{L}{2} < x < L$$

donde se sigue empleando la coordenada *x* con origen en el punto A.

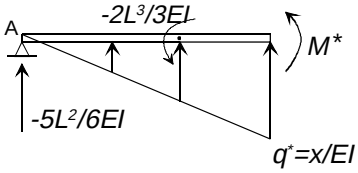


Figura 10.34

Tramo BC

El valor de la carga distribuida en este tramo es: $q^* = \frac{L-x}{EI}$

Donde se ha empleado una coordenada *x* medida desde el punto B. El momento flector conjugado vale:

$$M_{BC}^* = -\frac{L^2 (L-x)^2}{6EI} + \frac{(L-x)^3}{6EI} \qquad 0 < x < L$$

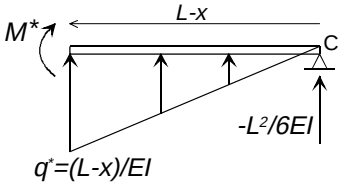


Figura 10.35

Los momentos conjugados por la izquierda y por la derecha de D son:

$$M^*_{Di} = M^*_{AD}(x = \frac{L}{2}) = \frac{-19L^3}{48EI}$$

$$M^*_{Dd} = M^*_{DB}(x = \frac{L}{2}) = \frac{13L^3}{48EI}$$

La expresión de la línea de influencia buscada se puede poner en función de las magnitudes de la viga conjugada como:

$$Q_D = -\frac{\Delta^D_I}{\Delta^D_{Di} + \Delta^D_{Dd}} = -\frac{v^D_I}{v^D_{Di} + \left(-v^D_{Dd}\right)} = -\frac{-M^*}{-M^*_{Di} + M^*_{Dd}}$$

En esta expresión se han ajustado los signos en función de los distintos criterios de signos. Sustituyendo los valores del denominador se obtiene:

$$Q_D = \frac{M^*}{-M^*_{Di} + M^*_{Dd}} = \frac{M^*}{\frac{19L^3}{48EI} + \frac{13L^3}{48EI}} = \frac{3EI}{2L^3} M^*$$

Dado que M^* tiene expresiones distintas para cada tramo de la viga, la línea de influencia también tiene expresiones distintas para cada tramo en el que se mueve la carga. Éstas son:

Tramo AD: $$Q^{(AD)}_D = -\frac{5x}{4L} + \frac{x^3}{4L^3} \qquad 0 < x < \frac{L}{2}$$

Tramo DB: $$Q^{(DB)}_D = -\frac{5x}{4L} + \frac{x^3}{4L^3} + 1 \qquad \frac{L}{2} < x < L$$

Tramo BC: $$Q^{(BC)}_D = -\frac{(L-x)}{4L} + \frac{(L-x)^3}{4L^3} \qquad 0 < x < L$$

La figura 10.36 representa el aspecto de la línea de influencia.

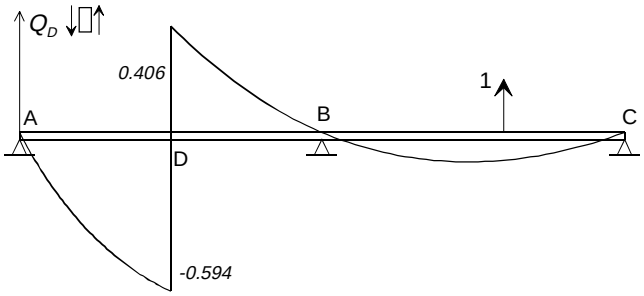


Figura 10.36

Las funciones que definen la línea de influencia en AD y DB no tienen ningún máximo en sus respectivos campos de validez, como puede comprobarse igualando a cero su derivada. El valor máximo del cortante se corresponde con los valores en los extremos y se produce cuando la carga móvil está en el mismo punto D. En esta posición se produce una discontinuidad del cortante, que pasa de valer -0.594 cuando la fuerza está a la izquierda de D a valer +0.406 cuando está a la derecha de D.

Cuando la carga recorre el vano BC se produce un máximo del cortante para una posición de la carga que se obtiene derivando la expresión de $Q^{(BC)}$ e igualando a cero. Esta posición que hace máximo el cortante, y el valor del cortante correspondiente resultan ser:

$$x_{\max} = (1-\sqrt{3}/3)L \qquad Q_{D\max}^{(BC)} = -\frac{L\sqrt{3}}{18} \approx -0.096$$

Este valor es muy inferior a los otros valores máximos.

10.9.5 La viga de la figura 10.37 está recorrida por dos cargas de 5000 N y 4000 N respectivamente, separadas 1 m entre sí. Calcular los valores máximos de las reacciones en A y B así como del esfuerzo cortante y del momento flector en C. El movimiento de las cargas puede producirse sobre toda la viga, y con las cargas situadas en los dos sentidos.

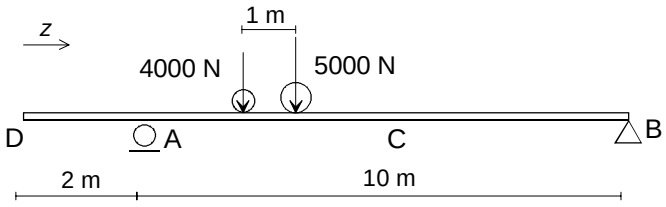


Figura 10.37

Las líneas de influencia de las distintas magnitudes, para una carga unitaria, están calculadas en el ejemplo del apartado 10.2, y se utilizan directamente para estudiar el efecto de las dos cargas móviles.

Observando la línea de influencia de la reacción en A se deduce que la posición más desfavorable de las cargas es cuando éstas se encuentran en el extremo izquierdo D, en la situación indicada en la figura 10.38.

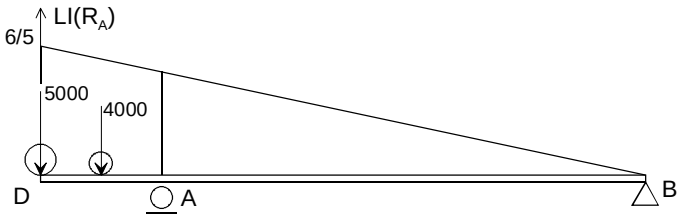


Figura 10.38

El valor de la máxima reacción en A se obtiene combinando los valores de la línea de influencia para cada carga. Denominando z_5 a la posición de la carga de 5000 N y z_4 a la posición de la carga de 4000 N, la situación pésima corresponde a z_5=0, z_4=1 m, y por lo tanto:

$$R_{A\max} = 5000\frac{12-0}{10} + 4000\frac{12-1}{10} = 10400 \quad \text{N}$$

La reacción en B puede tener valores positivos y negativos dependiendo de la posición de las cargas. La máxima reacción positiva se produce cuando las cargas están en la situación indicada en la figura 10.39, que corresponde a z_5=12, z_4=11 m, y su valor es:

$$R_{B\max}^{(+)} = 5000\frac{12-2}{10} + 4000\frac{11-2}{10} = 8600 \quad \text{N}$$

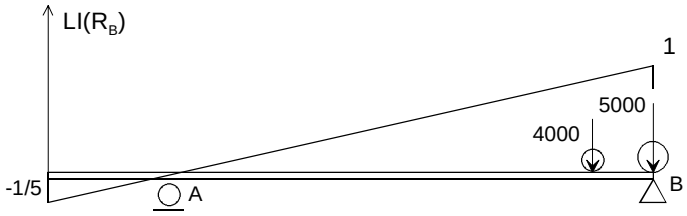


Figura 10.39

La máxima reacción negativa en B se produce cuando las cargas están en la situación indicada en la figura 10.40, que corresponde a z_5=0, z_4=1 m, y su valor es:

$$R_{B\max}^{(-)} = 5000\left(\frac{0-2}{10}\right) + 4000\left(\frac{1-2}{10}\right) = -1400 \quad \text{N}$$

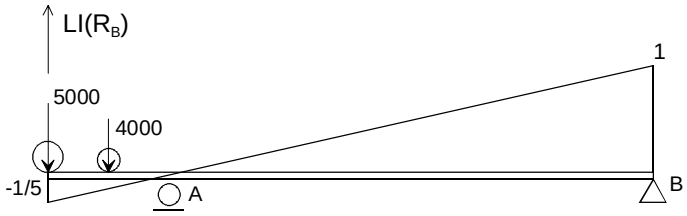


Figura 10.40

El máximo esfuerzo cortante en C se produce cuando las cargas están en la situación indicada en la figura 10.41, para la cual z_5=7, z_4=6 m. La situación simétrica de ésta produce un esfuerzo cortante igual y de signo contrario.

$$Q_{C\max} = 5000\frac{7-2}{10} + 4000\frac{6-2}{10} = 4100 \quad \text{N}$$

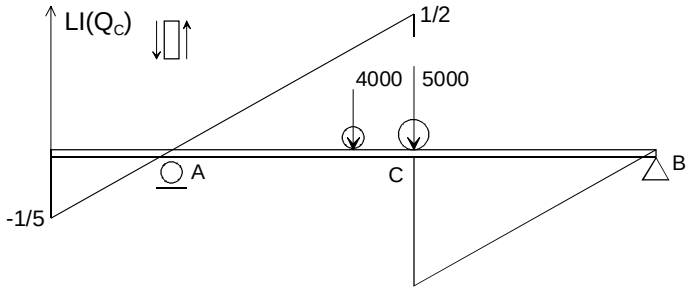


Figura 10.41

El momento flector en C puede adoptar valores positivos y negativos según sea la situación de las cargas. El máximo momento positivo se produce en la situación de las cargas mostrada en la figura 10.42, que corresponde a z_5=7, z_4=6 m, o en la situación simétrica respecto de C. El valor del momento flector en esa posición es:

$$M_{C\max}^{(+)} = 5000\frac{7-2}{2} + 4000\frac{6-2}{2} = 20500 \quad \text{Nm}$$

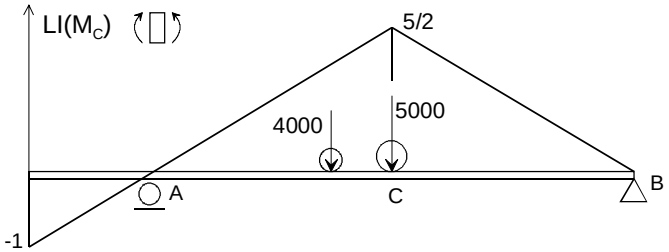


Figura 10.42

El máximo momento negativo en C se produce en la situación de las cargas mostrada en la figura 10.43. En ella z_5=0, z_4=1 m y el valor del momento es:

$$M_{C\max}^{(-)} = 5000\left(\frac{0-2}{2}\right)+4000\left(\frac{1-2}{2}\right)=-7000 \quad \text{Nm}$$

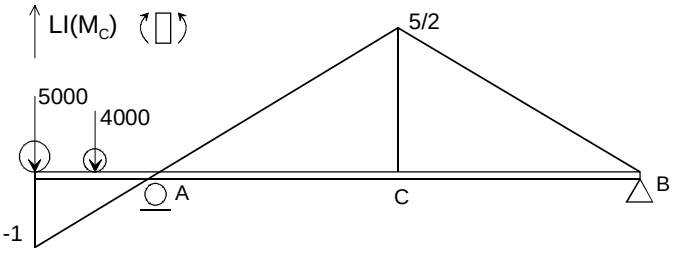


Figura 10.43

10.9.6 Calcular el valor máximo del momento flector en el centro de una viga simplemente apoyada recorrida por una carga distribuida uniforme de valor *q*, actuando parcialmente sobre una distancia *d* (figura 10.44).

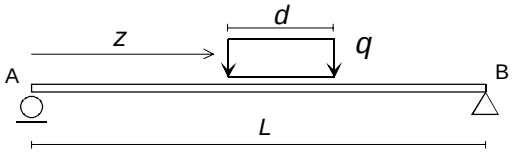


Figura 10.44

Se calcula en primer lugar la línea de influencia del momento flector en el punto medio C de la viga, para una carga unitaria. Para ello es ventajoso calcular antes las correspondientes a las reacciones en los apoyos.

La línea de influencia de la reacción en A, supuesta positiva hacia arriba, se obtiene tomando momentos respecto a B. La línea de influencia de la reacción en B, supuesta asimismo positiva hacia arriba, se obtiene considerando el equilibrio vertical del conjunto (figura 10.45).

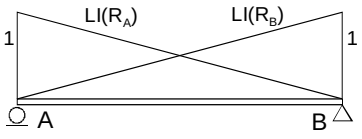


Figura 10.45

$$R_A = 1-\frac{z}{L} \qquad R_B = 1-R_A = \frac{z}{L}$$

La línea de influencia del momento flector en C tiene expresiones distintas según que la carga unitaria esté a la izquierda o a la derecha del punto C (figura 10.46).

Si la carga está a la izquierda de C:

$$M_C = R_B \frac{L}{2} = \frac{z}{2} \qquad 0 < z < \frac{L}{2}$$

Si la carga está a la derecha de C:

$$M_C = R_A \frac{L}{2} = \frac{L - z}{2} \qquad \frac{L}{2} < z < L$$

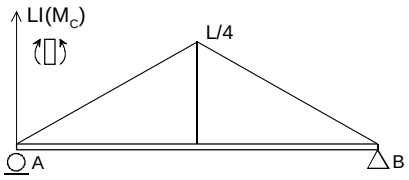


Figura 10.46

El máximo momento flector en C se produce cuando la carga distribuida está situada como se indica en la figura 10.47, a ambos lados del punto C.

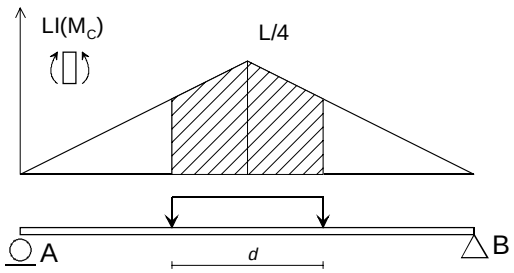


Figura 10.47

El valor de dicho momento máximo es igual al área rayada, multiplicada por el valor de la carga q.

$$M_{C\max} = q\frac{(2L - d)d}{8}$$

Evidentemente el máximo de este momento ocurre cuando la carga cubre toda la viga $d=L$, obteniéndose el conocido valor $qL^2/8$.

10.9.7 Calcular la línea de influencia del esfuerzo cortante en el punto D, centro del vano AB, en una viga de dos vanos iguales, empotrada en sus dos extremos y recorrida por una carga unitaria en dirección vertical hacia arriba, como se indica en la figura 10.48.

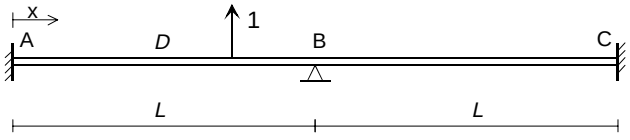


Figura 10.48

Empleando el principio de Müller-Breslau, se coloca una deslizadera vertical en el punto D y se aplica un esfuerzo cortante de valor unidad en ella. Con esto se obtiene la viga de la figura 10.49.

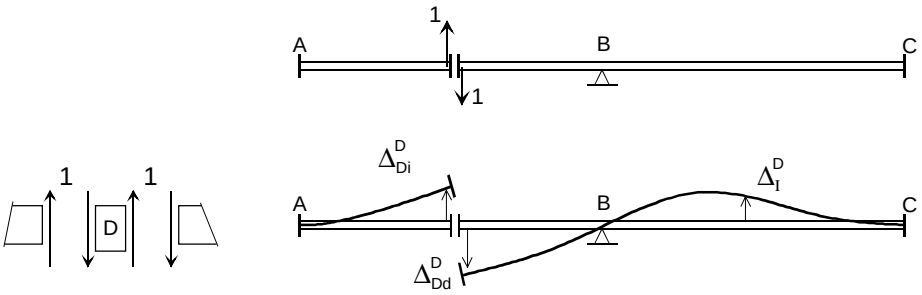


Figura 10.49

El valor de la línea de influencia buscada es:

$$Q_D = -\frac{\Delta_I^D}{\Delta_{Di}^D + \Delta_{Dd}^D}$$

El numerador de esta expresión corresponde a la deformación de la viga cargada con el cortante unitario en D, medida en la dirección de la carga móvil, es decir hacia arriba. El denominador es la flecha relativa entre las dos caras de la deslizadera, en el punto D.

La viga resultante es hiperestática de grado h=2. Para calcular su deformada se emplea el método de flexibilidad, por lo que es necesario previamente calcular su diagrama de momentos flectores. Éste es lineal entre los tres valores en los apoyos, denominados M_A, M_B y M_C (figura 10.50).

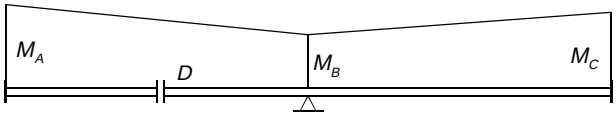


Figura 10.50

Para su determinación se imponen dos condiciones de compatibilidad geométrica:

- Giro relativo nulo entre los apoyos A y C. Según el primer teorema de Mohr el área del diagrama *M/EI* entre A y C debe ser nulo.

$$\theta_A - \theta_C = 0 \quad \rightarrow \quad \frac{1}{2}M_A L + \frac{1}{2}M_B L + \frac{1}{2}M_C L + \frac{1}{2}M_B L = 0$$

- La flecha del punto B respecto a la tangente en C es nula. Según el segundo teorema de Mohr, el momento estático respecto de B del diagrama *M/EI* entre A y C es nulo.

$$v_{B/A} = 0 \quad \rightarrow \quad \frac{1}{2}\frac{M_B}{EI}L\frac{L}{3} + \frac{1}{2}\frac{M_C}{EI}L\frac{2L}{3} = 0$$

Es necesario obtener una ecuación más, pero ésta no se puede obtener con facilidad de los teoremas de Mohr. Considerando que el tramo AB está sometido todo él a un esfuerzo cortante de valor unidad (figura 10.51), se aísla dicho tramo AB y se toman momentos respecto de A, con lo que se obtiene:

$$M_A = M_B + 1 \cdot L$$

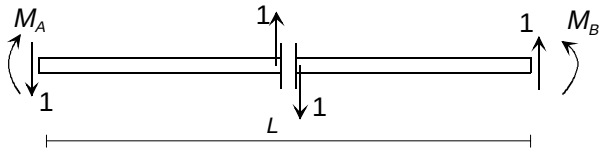


Figura 10.51

Resolviendo las tres ecuaciones anteriores se obtiene:

$$M_A = \frac{3L}{5} \qquad M_B = -\frac{2L}{5} \qquad M_C = \frac{L}{5}$$

El diagrama de momentos flectores se muestra en la figura 10.52.

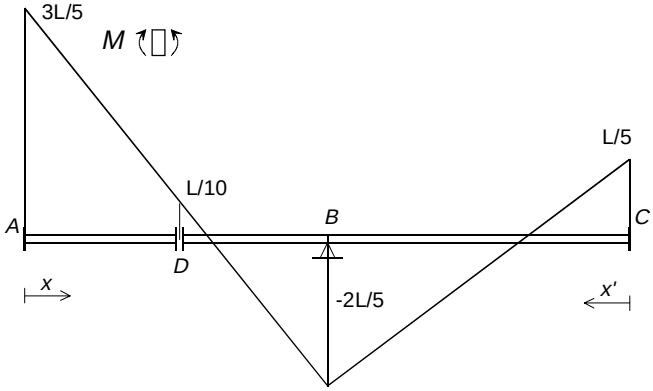


Figura 10.52

Su expresión analítica es:

Tramo AB: $$M^{AB} = M_A + \frac{M_B - M_A}{L}x = \frac{3L}{5} - x \qquad 0 < x < L$$

Tramo BC: $$M^{BC} = M_C + \frac{M_B - M_C}{L}x' = \frac{L}{5} - \frac{3}{5}x' \qquad 0 < x' < L$$

- El numerador de la línea de influencia coincide con la deformada de la viga, y se calcula por tramos. Para ello se considera un punto genérico I situado a lo largo de la viga y se calcula su deformación vertical.

Tramo AD

Se define un caso isotático virtual, cargado con una fuerza virtual unitaria en dirección vertical y hacia arriba en el punto I donde se halla la carga móvil. Para este caso isostático virtual se adoptan como incógnitas hiperestáticas el momento en el punto D y la reacción en B, con lo que la estructura queda reducida a dos voladizos independientes AD y DC (figura 10.53).

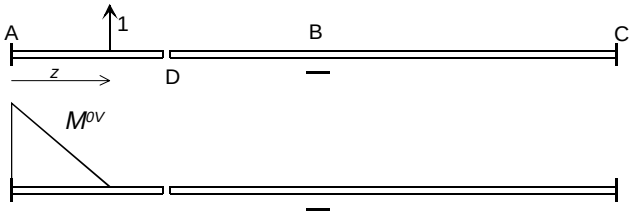


Figura 10.53

El diagrama de momento flector en el caso isostático virtual es:

$$M^{0V} = z - x \qquad 0 < x < z$$

La deformación del punto I es:

$$\Delta_I^{(AD)} = \int M\mu M^{0V} dx = \int_0^z \left(\frac{3L}{5} - x\right)\mu(z-x)dx = \frac{3Lz^2}{10EI} - \frac{z^3}{6EI} \qquad 0 < z < \frac{L}{2}$$

Tramo DB

Se adoptan ahora como incógnitas hiperestáticas para el caso isostático virtual, los momentos en los puntos B y C, con lo que la estructura queda reducida a dos vigas independientes AB y BC (figura 10.54).

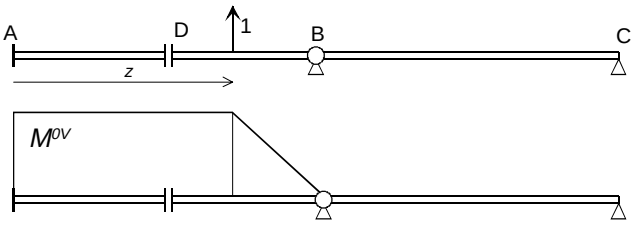


Figura 10.54

El diagrama de momento flector en el caso isostático virtual es:

$$M^{0V} = z - L \qquad 0 < x < z \qquad\qquad M^{0V} = x - L \qquad z < x < L$$

La deformación del punto I es:

$$\Delta_I^{(DB)} = \int_0^z \left(\frac{3L}{5} - x\right)\mu(z-L)dx + \int_z^L \left(\frac{3L}{5} - x\right)\mu(x-L)dx$$

$$\Delta_I^{(DB)} = \frac{3Lz^2}{10EI} - \frac{z^3}{6EI} - \frac{2L^3}{15EI} \qquad \frac{L}{2} < z < L$$

Tramo BC

Se adoptan ahora como incógnitas hiperestáticas para el caso isostático virtual, el momento flector y el cortante por la derecha en el punto B, con lo que la estructura queda reducida a una viga empotrada - apoyada AB y un voladizo BC (figura 10.55).

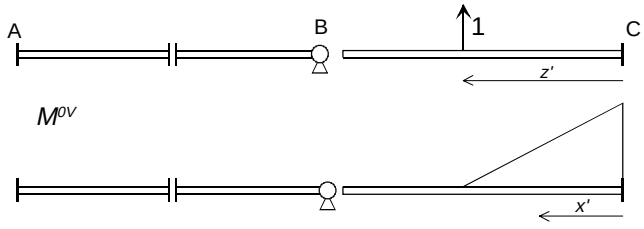


Figura 10.55

El diagrama de momento flector en el caso isostático virtual es:

$$M^{0V} = z' - x' \qquad 0 < x' < z'$$

La deformación del punto I es:

$$\Delta_I^{(BC)} = \int_0^{z'} \left(\frac{L}{5} - \frac{3x'}{5} \right) \mu (z' - x') dx = \frac{Lz'^2}{10EI} - \frac{z'^3}{10EI} \qquad 0 < z' < L$$

- El denominador de la línea de influencia es la suma de las deformaciones en la dirección de las dos fuerzas unitarias aplicadas, y su expresión es:

$$\Delta_{Dd}^D + \Delta_{Di}^D = \int M \mu M^V dx$$

donde M^V es la distribución de momentos flectores debida a dos fuerzas virtuales unitarias situadas en la dirección de las dos deformaciones buscadas. Estas fuerzas virtuales unitarias coinciden con la situación real de cargas, por lo tanto M^V coincide con M.

$$\Delta_{Dd}^D + \Delta_{Di}^D = \int M \mu M dx = \int_0^L \left(\frac{3L}{5} - x \right)^2 \mu dx + \int_0^L \left(\frac{L}{5} - \frac{3x'}{5} \right)^2 \mu dx' = \frac{2L^3}{15EI}$$

- La expresión analítica de la línea de influencia buscada es:

Tramo AD: $$Q_D^{(AD)} = \frac{15z^3}{12L^3} - \frac{45z^2}{20L^2} \qquad 0 < z < \frac{L}{2}$$

Tramo DB: $$Q_D^{(DB)} = \frac{15z^3}{12L^3} - \frac{45z^2}{20L^2} + 1 \qquad \frac{L}{2} < z < L$$

Tramo BC: $$Q_D^{(BC)} = \frac{15z'^3}{20L^3} - \frac{15z'^2}{20L^2} \qquad 0 < z' < L$$

La figura 10.56 muestra el aspecto de la línea de influencia. Las funciones que definen la línea de influencia en AD y DB no tienen ningún máximo en sus respectivos campos de validez, como puede comprobarse igualando a cero su derivada. El valor máximo del cortante se corresponde con los valores en los extremos y se produce cuando la carga móvil está en el mismo punto D. En este momento se produce una discontinuidad del cortante, que pasa de valer -0.406 cuando la fuerza está a la izquierda de D a valer +0.594 cuando la carga está a la derecha de D.

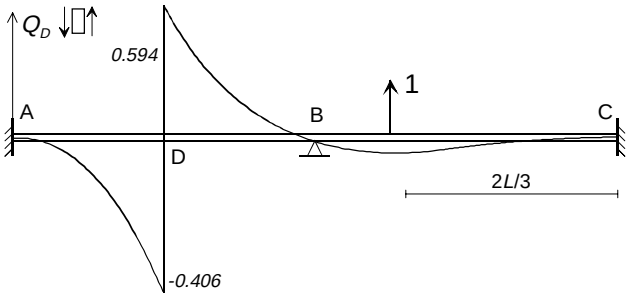


Figura 10.56

Cuando la carga recorre el vano BC se produce un máximo del cortante para una posición de la carga que se obtiene derivando la expresión de Q_{BC} e igualando a cero. La posición de la carga que hace máximo el cortante y el valor del cortante asociado resultan ser:

$$z'_{\max} = 2L/3 \qquad Q_{D\max}^{(BC)} = -0.111$$

Este valor es inferior a los otros valores máximos.

10.9.8 Calcular la línea de influencia del esfuerzo axial en la barra CH de la celosía de la figura 10.57, cuando una carga unitaria móvil recorre su cordón inferior. Todas las barras son del mismo material y tienen la misma área.

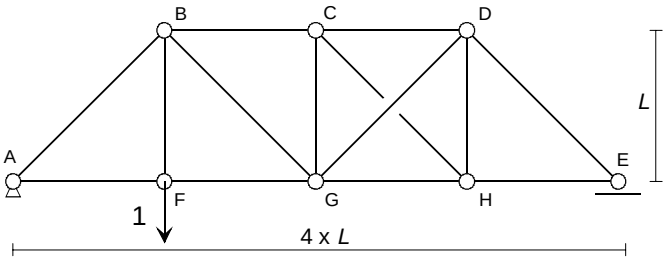


Figura 10.57

Se trata de una celosía con grado de hiperestaticidad h=1, que está localizada en el panel CDGH. Empleando el método de Müller-Breslau se adopta como incógnita hiperestática el esfuerzo en la barra CH. La expresión de su línea de influencia es:

$$N_{CH} = -\frac{\Delta_I^B}{\Delta_{Bi}^B + \Delta_{Bd}^B} = -\frac{\sum N^B \rho N^I}{\sum N^B \rho N^B}$$

Donde N^B son los esfuerzos en el caso denominado B, en el que se impone un valor unidad al esfuerzo en la barra C. Este caso B es isostático, ya que la estructura es hiperestática de grado 1, y se ha eliminado el esfuerzo en la barra CH (figura 10.58).

N^I son los esfuerzos en el caso I, en el que actúa una fuerza virtual unitaria en la dirección de la carga móvil, recorriendo su trayectoria. Este caso I es también isostático.

Al ser la trayectoria de la carga móvil el cordón inferior de la celosía, el caso I está en realidad formado por tres casos distintos, que corresponden a la posición de la carga en los nudos F, G y H, como se ve en la figura 10.58.

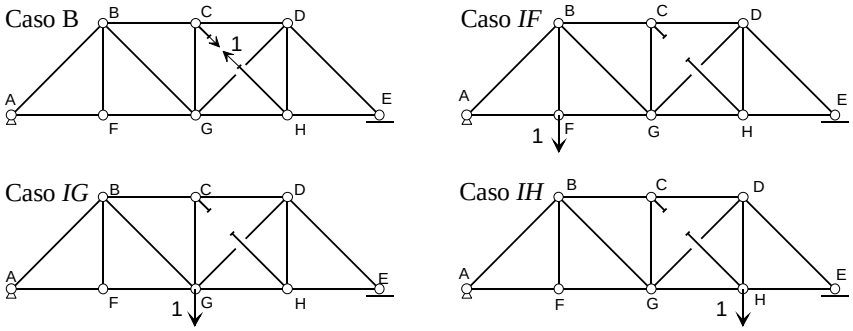


Figura 10.58

La tabla 10.1 muestra los resultados de calcular los esfuerzos en las barras, empleando el método de los nudos.

Barra	ρ	N^B	N^{IF}	N^{IG}	N^{IH}
AB	$L\sqrt{2}/EA$	0	$-3\sqrt{2}/4$	$-\sqrt{2}/4$	$-\sqrt{2}/4$
AF	L/EA	0	3/4	1/2	1/4
BF	L/EA	0	1	0	0
BC	L/EA	0	-1/2	-1	-1/2
BG	$L\sqrt{2}/EA$	0	$-\sqrt{2}/4$	$\sqrt{2}/2$	$\sqrt{2}/2$
FG	L/EA	0	3/4	1/2	1/2
CG	L/EA	$-1/\sqrt{2}$	0	0	0
CD	L/EA	$-1/\sqrt{2}$	-1/2	-1	-1/2
CH	$L\sqrt{2}/EA$	1	0	0	0
GD	$L\sqrt{2}/EA$	1	$\sqrt{2}/4$	$\sqrt{2}/2$	$-\sqrt{2}/4$
GH	L/EA	$-1/\sqrt{2}$	1/4	1/2	3/4
DH	L/EA	$-1/\sqrt{2}$	0	0	1
DE	$L\sqrt{2}/EA$	0	$-\sqrt{2}/4$	$-\sqrt{2}/2$	$-3\sqrt{2}/4$
HE	L/EA	0	1/2	1/2	3/4

Tabla 10.1

El valor de la línea de influencia para cada una de las tres posiciones de la carga móvil es:

$$N_{CH}^{IF} = -\frac{\sum N^B \rho N^{IF}}{\sum N^B \rho N^B} = -\frac{0.68\dfrac{L}{EA}}{4.83\dfrac{L}{EA}} = -0.14$$

$$N_{CH}^{IG} = -\frac{\sum N^B \rho N^{IG}}{\sum N^B \rho N^B} = -\frac{1.35\dfrac{L}{EA}}{4.83\dfrac{L}{EA}} = -0.28$$

$$N_{CH}^{IF} = -\frac{\sum N^B \rho N^{IF}}{\sum N^B \rho N^B} = -\frac{-1.38\dfrac{L}{EA}}{4.83\dfrac{L}{EA}} = 0.287$$

Para posiciones de la carga intermedias entre los nudos, la línea de influencia es lineal entre los valores obtenidos. El máximo esfuerzo de tracción en la barra CH es un 28.7% de la carga móvil, y el máximo esfuerzo de compresión es un 28% de la misma.

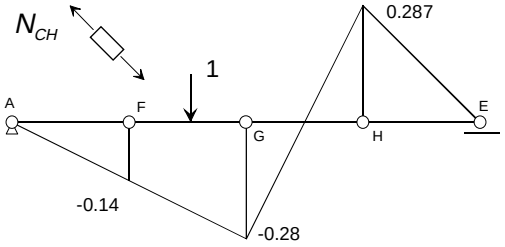


Figura 10.59

10.9.9 Calcular la línea de influencia del esfuerzo axial en la barra BE de la estructura de la figura 10.60, cuando una carga unitaria móvil recorre el vano BC. Todas las barras tienen las mismas propiedades: módulo de elasticidad: 210 GPa, área: 0.001 m^2, momento de inercia: 2140 10^{-8} m^4. La rigidez del resorte es K_C= 10^8 N/m.

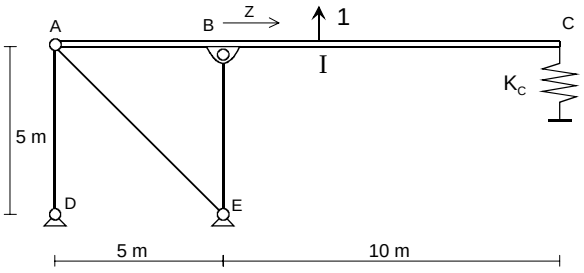


Figura 10.60

La estructura es hiperestática de grado 1. Aplicando el principio de Müller-Breslau se elimina la barra BE y se aplica un valor unidad a su esfuerzo axial, con lo que se obtiene el caso B, que es isostático. La línea de influencia buscada es:

$$N_{BE} = -\frac{\Delta_I^B}{\Delta_{Bi}^B + \Delta_{Bd}^B}$$

El numerador de esta expresión corresponde a la deformación de la barra BC cuando la estructura se carga con un valor unitario del esfuerzo axial en BE, medida en la dirección de la carga móvil, es decir hacia arriba. El denominador es la flecha relativa en el punto donde se corta la barra BE, cuando en dicho punto se impone un esfuerzo axial unidad.

Desarrollando las expresiones de las deformaciones se obtiene:

$$N_{BE} = -\frac{\Delta_I^B}{\Delta_{Bi}^B + \Delta_{Bd}^B} = -\frac{\sum N^B \rho N^I + \int M^B \mu M^I dx + S^B f S^I}{\sum N^B \rho N^B + \int M^B \mu M^B dx + S^B f S^B}$$

donde se ha añadido el término debido al muelle, siendo f su flexibilidad.

Caso B

La estructura está cargada con un valor unidad del esfuerzo en BE. Los esfuerzos que se producen se muestran en la figura 10.61.

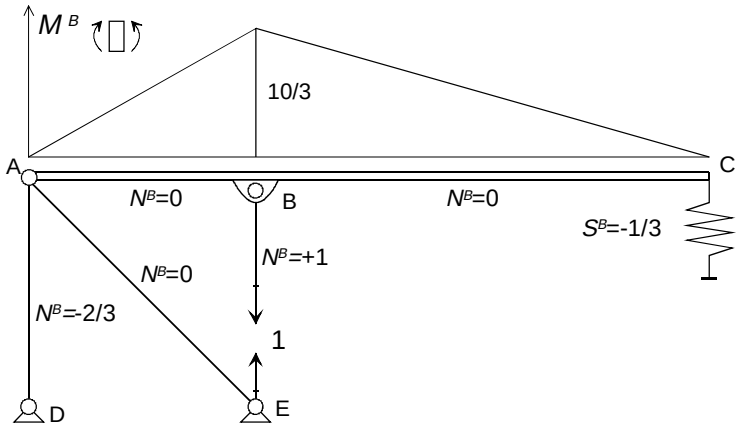


Figura 10.61

Los esfuerzos axiales en las barras y en el muelle son:

$$N_{AD}^{B} = -\frac{2}{3} \qquad N_{BE}^{B} = +1 \qquad S^{B} = -\frac{1}{3}$$

La expresión analítica del momento flector en las distintas barras es:

$$M_{AB}^{B} = \frac{2x}{3} \qquad 0 < x < 5 \qquad M_{BC}^{B} = \frac{15 - x}{3} \qquad 5 < x < 15$$

donde se ha empleado una misma coordenada *x*, con origen en A, para las barras AB y BC.

Caso I

En este caso la estructura está cargada con una fuerza unitaria en la dirección de la carga móvil. Los esfuerzos dependen de la posición de dicha carga móvil, y se muestran en la figura 10.62.

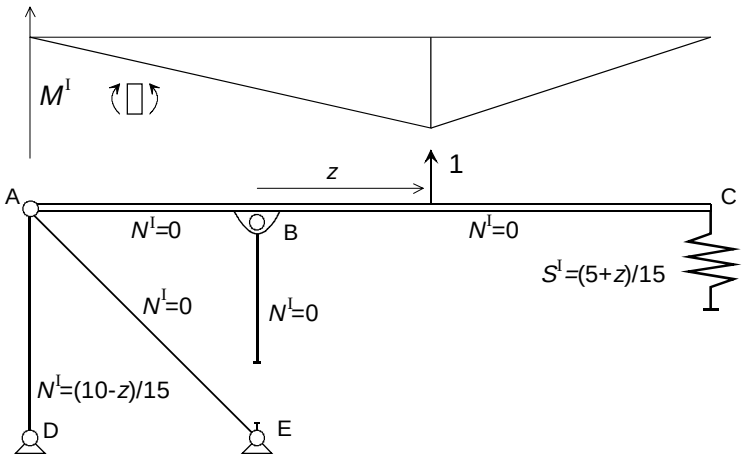


Figura 10.62

Los esfuerzos axiales en las barras y en el muelle son, en este caso:

$$N_{AD}^{I} = \frac{10-z}{15} \qquad\qquad S^{I} = \frac{5+z}{15}$$

La expresión analítica del momento flector en las distintas barras es:

$$M_{AB}^{I} = -\frac{(10-z)}{15}x \qquad 0 < x < 5+z \qquad\qquad M_{BC}^{I} = -\frac{5+z}{15}(15-x) \qquad 5+z < x < 15$$

- La deformación del numerador de la línea de influencia es:

$$\Delta_I^B = \sum N^B \rho N^I + \int M^B \mu M^I dx + S^B f S^I =$$

$$\left(-\frac{2}{3}\right)\frac{5}{EA}\frac{10-z}{15} + \int_0^5 \frac{2x}{3}\mu\frac{z-10}{15}x\,dx + \int_5^{5+z}\frac{15-x}{3}\mu\frac{z-10}{15}x\,dx +$$

$$+\int_{5+z}^{15}\frac{15-x}{3}\mu\frac{z+5}{15}(x-15)\,dx + \left(-\frac{1}{3}\right)\frac{1}{K_C}\frac{z+5}{15}$$

$$\Delta_I^B = \frac{2z-20}{9EA} + \frac{1}{EI}\left(\frac{5z^2}{3} - \frac{50z}{9} - \frac{500}{9} - \frac{z^3}{18}\right) - \frac{z+5}{45K_C}$$

Dando los valores numéricos se obtiene:

$$\Delta_I^B = -1.237\cdot 10^{-5} - 1.235\cdot 10^{-6} z - 1.236\cdot 10^{-8} z^3 + 3.798\cdot 10^{-7} z^2 \quad \text{m}$$

- El denominador de la línea de influencia es:

$$\Delta_{Bi}^B + \Delta_{Bd}^B = \sum N^B \rho N^B + \int M^B \mu M^B dx + S^B f S^B =$$

$$\left(\frac{-2}{3}\right)\frac{5}{EA}\left(\frac{-2}{3}\right) + 1\frac{5}{EA}1 + \int_0^5 \frac{2x}{3}\mu\frac{2x}{3}x\,dx + \int_5^{15}\frac{15-x}{3}\mu\frac{15-x}{3}dx + \left(\frac{-1}{3}\right)\frac{1}{K_C}\left(\frac{-1}{3}\right)$$

$$\Delta_{Bi}^B + \Delta_{Bd}^B = \frac{65}{9EA} + \frac{500}{9EI} + \frac{1}{9K_C} = 1.24\cdot 10^{-5} \text{ m}$$

- La expresión de la línea de influencia es:

$$N_{BE} = 0.99808 + 0.0996\,z - 0.0299\,z^2 + 0.000997\,z^3$$

La figura 10.63 muestra el aspecto de la línea de influencia. Se observa que la barra está siempre a tracción, con un valor máximo de 1.086, que se alcanza cuando la carga móvil está a 1.83 m del punto B.

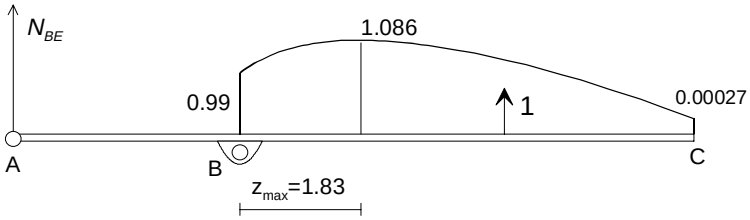


Figura 10.63

10.9.10 Calcular la línea de influencia del momento flector en el apoyo B de la viga continua de 4 vanos iguales mostrada en la figura 10.64, que está recorrida por una carga unitaria vertical y hacia arriba.

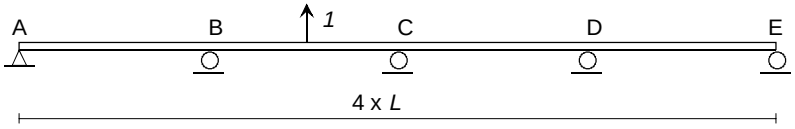


Figura 10.64

La expresión de la línea de influencia buscada es: $M_B = -\dfrac{\Delta_I^B}{\theta_{Bi}^B - \theta_{Bd}^B}$

donde las distintas deformaciones corresponden al caso B, cargado con un momento flector unitario, y se muestran en la figura 10.65.

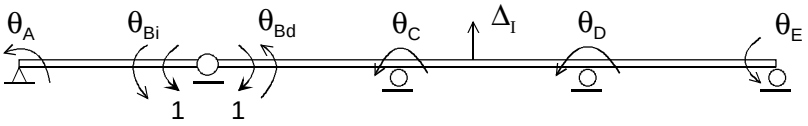


Figura 10.65

Empleando el método de rigidez, los grados de libertad de la estructura son:

$$\boldsymbol{\Delta}_I = \{\theta_A \quad \theta_{Bi} \quad \theta_{Bd} \quad \theta_C \quad \theta_D \quad \theta_E\}^T$$

La ecuación de equilibrio de la viga se obtiene sencillamente ensamblando las matrices de rigidez de los 4 vanos y considerando como cargas exteriores los dos momentos unitarios situados en B.

$$\frac{EI}{L}\begin{bmatrix} 4 & 2 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 2 & 4 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 4 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 8 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2 & 8 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 2 & 4 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \theta_A \\ \theta_{Bi} \\ \theta_{Bd} \\ \theta_C \\ \theta_D \\ \theta_E \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{Bmatrix}$$

Resolviendo este sistema se obtienen los giros en los nudos:

$$\Delta_I = \begin{Bmatrix} \theta_A \\ \theta_{Bi} \\ \theta_{Bd} \\ \theta_C \\ \theta_D \\ \theta_E \end{Bmatrix} = \frac{L}{EI} \begin{Bmatrix} -1/6 \\ 1/3 \\ -13/45 \\ 7/90 \\ -1/45 \\ 1/90 \end{Bmatrix}$$

El denominador de la línea de influencia es:

$$\theta_{Bi}^B - \theta_{Bd}^B = \frac{L}{3EI} + \frac{13L}{45EI} = \frac{28L}{45EI}$$

Conociendo los giros de los nudos se conoce la deformación de cualquier punto de la viga. Para ello se emplea la expresión de la deformación lateral *v* de una viga sin cargas, en función de los giros en sus extremos, que es:

$$v = (\xi - 2\xi^2 + \xi^3)L\theta_1 + (\xi^3 - \xi^2)L\theta_2$$

donde θ_1 y θ_2 son los giros en los apoyos izquierdo y derecho y $\xi = x/L$ es una coordenada local al vano, que varía entre 0 en el apoyo izquierdo y 1 en el derecho. Empleando esta expresión para cada vano se obtiene la línea de influencia buscada.

Vano AB

Sustituyendo los valores de $\theta_1 \equiv \theta_A = -L/6EI$ y $\theta_2 \equiv \theta_{Bi} = L/3EI$ se obtiene:

$$M_B^{(AB)} = -\frac{v^{(AB)}}{\frac{28L}{45EI}} = \frac{15L}{56}(\xi - 2\xi^2 + \xi^3) - \frac{15L}{28}(\xi^3 - \xi^2) = \frac{15L}{56}(\xi - \xi^3) \qquad 0 < \xi < 1$$

Vano BC

Sustituyendo los valores de $\theta_1 \equiv \theta_{Bd} = -13L/45EI$ y $\theta_2 \equiv \theta_C = 7L/90EI$, se obtiene:

$$M_B^{(BC)} = \frac{13L}{28}(\xi - 2\xi^2 + \xi^3) - \frac{L}{8}(\xi^3 - \xi^2) = \frac{13L}{28}\xi + \frac{19L}{56}\xi^3 - \frac{45L}{56}\xi^2 \qquad 0 < \xi < 1$$

Vano CD

Sustituyendo los valores de $\theta_1 \equiv \theta_C = 7L/90EI$ y $\theta_2 \equiv \theta_D = -L/45EI$, se obtiene:

$$M_B^{(CD)} = -\frac{L}{8}(\xi - 2\xi^2 + \xi^3) + \frac{L}{28}(\xi^3 - \xi^2) = -\frac{L}{8}\xi - \frac{5L}{56}\xi^3 + \frac{3L}{14}\xi^2 \qquad 0 < \xi < 1$$

Vano DE

Sustituyendo los valores de $\theta_1 \equiv \theta_D = -L/45EI$ y $\theta_2 \equiv \theta_E = L/90EI$, se obtiene:

$$M_B^{(DE)} = \frac{L}{28}(\xi - 2\xi^2 + \xi^3) - \frac{L}{56}(\xi^3 - \xi^2) = \frac{2L}{56}\xi + \frac{L}{56}\xi^3 - \frac{3L}{56}\xi^2 \qquad 0 < \xi < 1$$

La figura 10.66 muestra el aspecto de la línea de influencia. Cuando la carga recorre el vano AB, el máximo valor del momento se produce en la posición:

$$x_{\max}^{(AB)} = \frac{L}{\sqrt{3}} \approx 0.577L$$

y su valor es: $M_{\max}^{(AB)} = \frac{5\sqrt{3}L}{84} = 0.103L$

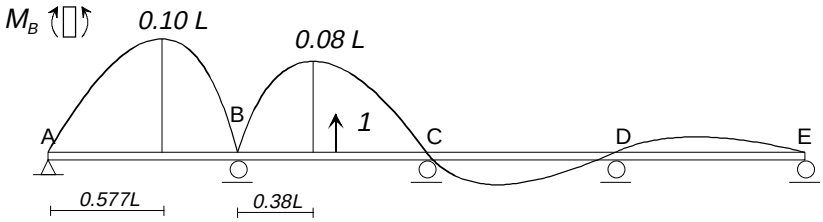


Figura 10.66

El máximo del momento flector cuando la carga móvil está en el vano BC se produce para una posición:

$$x_{\max}^{BC} = 0.3806L$$

y el valor del momento correspondiente es: $M_{\max}^{(BC)} = 0.079L$

10.9.11 Calcular las líneas de influencia de las reacciones en los apoyos de un arco biarticulado de directriz parabólica y apoyos al mismo nivel, recorrido por una carga unitaria vertical orientada hacia abajo (figura 10.67).
Suponer una variación del producto $EI = EI_0 \sec\alpha$, donde I_0 es el momento de inercia en la clave, y despreciar la energía de esfuerzo axial.

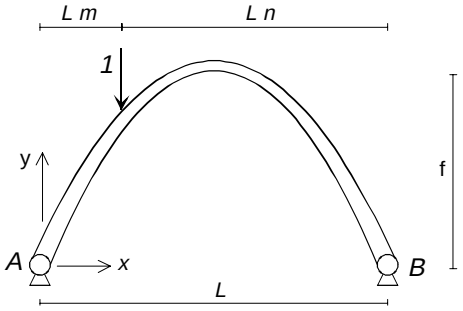


Figura 10.67

Se adopta como incógnita hiperestática la reacción horizontal en el apoyo A, cuya línea de influencia se quiere hallar. Su valor, no considerando la energía de esfuerzo axial, es:

$$A_x = -\frac{\Delta_I^A}{\Delta_A^A} = -\frac{\int M^I \mu M^A ds}{\int M^A \mu M^A ds}$$

donde M^I es el momento flector debido a la carga unidad en la estructura isostática (caso I), y M^A es el momento flector debido a un valor unidad de la reacción (caso A).

Caso A

La estructura está cargada con un valor unidad de la reacción horizontal en A (figura 10.68). No aparecen reacciones verticales, y el momento flector vale:

$$M^A = -y = -\frac{4f}{L^2}(Lx - x^2)$$

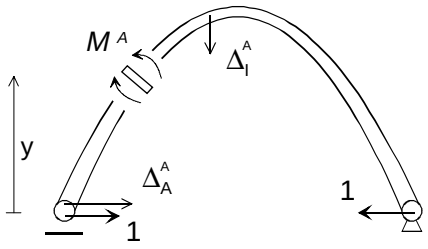


Figura 10.68

Por lo tanto la deformación del denominador de la línea de influencia es:

$$\Delta_A^A = \int (-y)^2 \mu ds = \int y^2 \mu_0 \cos\alpha \, ds = \mu_0 \int_0^L y^2 dx = \frac{8}{15}\mu_0 L f^2$$

Caso I

La estructura está cargada con una fuerza unitaria en la dirección de la carga móvil (figura 10.69).

El valor del momento flector es:

$$M^I = nx \qquad 0 < x < Lm$$

$$M^I = mx' \qquad 0 < x' < Ln$$

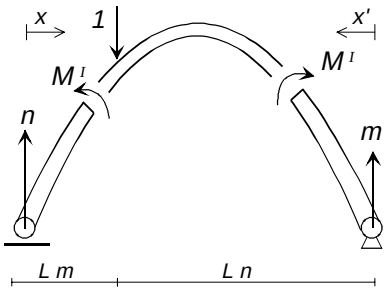


Figura 10.69

La deformación del numerador de la línea de influencia es:

$$\Delta_I^A = \int M^I \mu M^A ds = \int M^I M^A \mu_0 \cos\alpha \, ds = \int_0^L M^I M^A \mu_0 dx$$

$$\Delta_I^A = \int_0^{Lm} nx(-y)\mu_0 dx + \int_0^{Ln} mx'(-y)\mu_0 dx' = -\frac{fL^2}{3} mn(1+mn)$$

- La línea de influencia de la reacción horizontal es:

$$A_x = \frac{5}{8}\frac{L}{f} mn(1+mn) \qquad 0 < m < 1 \qquad n = 1 - m$$

Sustituyendo *n=1-m*, se obtiene:

$$A_x = \frac{5}{8}\frac{L}{f}(m - 2m^3 + m^4) \qquad 0 < m < 1$$

La figura 10.70 muestra su representación gráfica. El valor máximo está en el centro de la viga, *m=1/2*, y vale:

$$A_{x\max} = \frac{25L}{128f}$$

- La línea de influencia de la reacción vertical es inmediata y vale (figura 10.70):

$$A_y = n = (1-m) \qquad 0 < m < 1$$

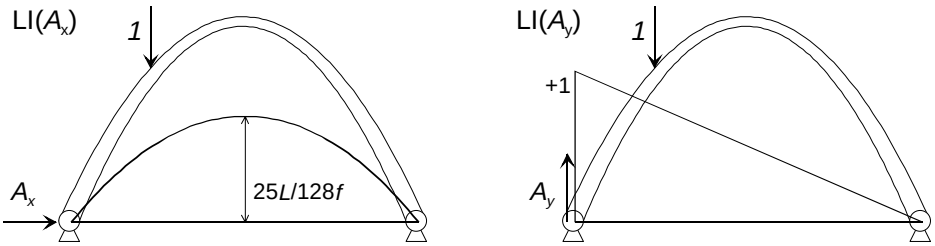


Figura 10.70

10.9.12 Calcular la línea de influencia del momento flector en un punto P del arco del ejercicio 10.9.11. El punto P está situado a una distancia *L·a* del apoyo izquierdo (figura 10.71).

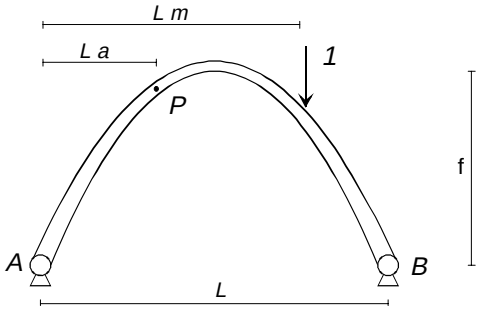


Figura 10.71

En el ejercicio 10.9.11 se han calculado las líneas de influencia de las reacciones en A, por lo que resulta ventajoso emplearlas para calcular el resultado pedido. La línea de influencia del momento en P tiene expresiones distintas según que la carga esté situada a la izquierda o a la derecha de P.

- Carga a la izquierda de P (figura 10.72).

Aislando el tramo AP, el momento flector en P vale:

$$M_P = A_y La - 1(La - Lm) - A_x y_P \qquad 0 < m < a$$

donde y_P es la coordenada Y del punto P, cuyo valor es: $y_P = y(x = La) = 4fa(1-a)$

Sustituyendo los distintos valores se obtiene:

$$M_P = Lm(1-a) - \frac{5}{2} La(1-a)(m - 2m^3 + m^4) \qquad 0 < m < a$$

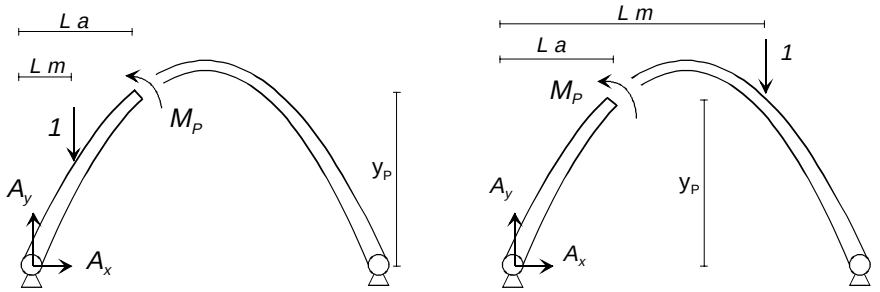


Figura 10.72

- Carga a la derecha de P (figura 10.72).

Aislando el tramo AP, el momento flector en P vale:

$$M_P = A_y La - A_x y_P \qquad a < m < 1$$

Sustituyendo los distintos valores se obtiene:

$$M_P = La(1-m) - \frac{5}{2} La(1-a)(m - 2m^3 + m^4) \qquad a < m < 1$$

La figura 10.73 muestra las líneas de influencia para 4 posiciones distintas del punto P. El máximo momento flector positivo siempre se alcanza en el punto P cuando la carga móvil pasa justo por dicho punto. El valor máximo se alcanza en el punto *a=0.2* para *m=0.2* y vale *0.086L*. En ese punto se produce también el máximo momento negativo, cuando la carga está en *m=0.65*.

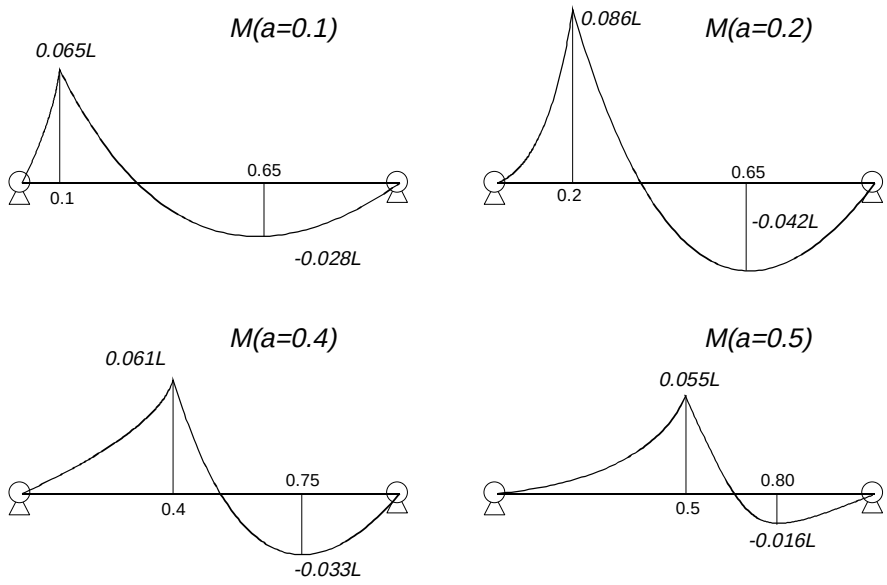


Figura 10.73

10.10 BIBLIOGRAFÍA

1. Hibbeler, R. C., *Structural Analysis*, Prentice-Hall, New Jersey, 1996.
2. Hsieh, Y-Y., *Teoría Elemental de Estructuras*, Prentice-Hall Int., Bogotá, 1973.
3. Müller-Breslau, H., *Die Neueren Methoden der Festigkeitslehre und der Statik der Baukonstruktionen*, 1886, editado por Kroner, Leipzig, 1924.
4. Müller-Breslau, H., *Die graphische Statik der Baukonstruktionen*, 1887, editado por Kroner, Leipzig, 1927.
5. Norris, C. H., Wilbur, J. B., y Ytku, S., *Análisis Elemental de Estructuras*, McGraw-Hill, New York, 1982.
6. Tuma, J. J., *Análisis Estructural*, Serie Schaum, McGraw-Hill, New York, 1970.
7. Timoshenko, S. P., y Young, D. H., *Teoría de las Estructuras*, Ed. Urmo, Bilbao, 1974.
8. Wang, C. K., *Intermediate Structural Analysis*, McGraw-Hill, New York, 1983.
9. Winkler, E., *Mitte. Architek. und Ing. Ver. Böhmen*, pág. 6, 1868.
10. Winkler, E., *Vorträge über Brückenbau - Theorie der Brücken*, Viena, 1872.

10.11 PROBLEMAS

10.11.1 En la estructura de la figura P10.1, se desea calcular la línea de influencia del momento flector en el apoyo B, cuando una carga unitaria vertical y hacia abajo recorre toda la viga AD. La viga es de características uniformes *E,I*. Emplear el teorema de Müller-Breslau y el método de la viga conjugada.

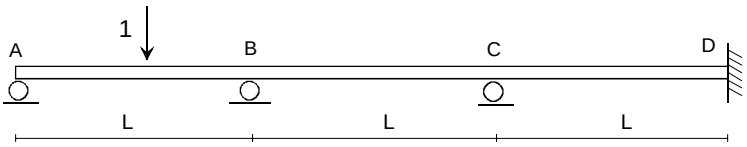


Figura P10.1

10.11.2 La viga de la figura P10.2 es de propiedades uniformes y sobre ella se mueve una carga unitaria vertical y hacia abajo. Calcular las líneas de influencia del momento flector en el apoyo B, y en el punto medio de BC. Emplear el teorema de Müller-Breslau, y el método de la viga conjugada.

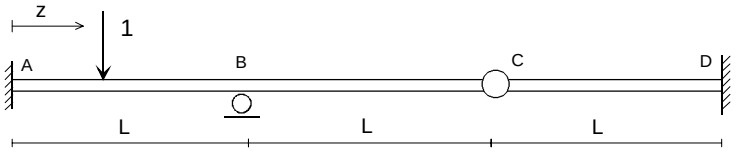


Figura P10.2

10.11.3 Hallar la línea de influencia del momento flector en el apoyo A, cuando una carga unitaria móvil recorre el tramo BC en la estructura de la figura P10.3
Propiedades de todas las barras: E=2.1 10^6 kg/cm^2, I=10^4 cm^4, A=20 cm^2.

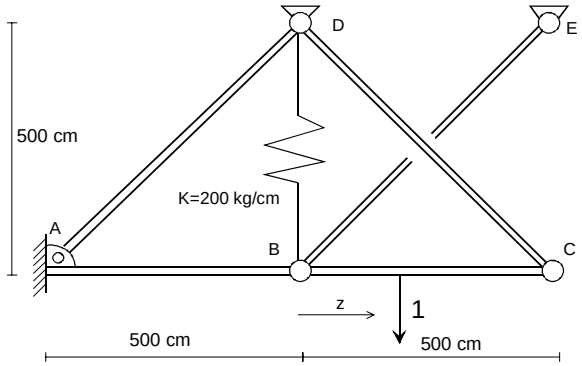


Figura P10.3

10.11.4 En la estructura de la figura P10.4 se desea calcular la línea de influencia del momento en el muelle B, cuando la fuerza de 2 Tn recorre la trayectoria BC. La deslizadera I encaja perfectamente en la viga, sin ninguna holgura ni rozamiento.
Datos: I = 2000 cm^4, K = 10000 m kg/rad, E = 2.1 10^6 kg/cm^2.

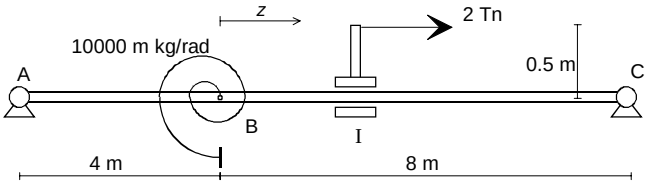


Figura P10.4

10.11.5 Sobre la estructura de la figura P10.5 se mueve una carga de 50 Tn. Se desea calcular el valor máximo del esfuerzo axial soportado por el elemento BE, y cuál es el punto en el que se halla la carga móvil cuando se produce dicho esfuerzo máximo. Además, se considera que la barra ABCD tiene un peso propio de 200 kg/m.
Datos para todas las barras: E=2 10^6 kg/cm^2, I=10^4 cm^4, A=10 cm^2.

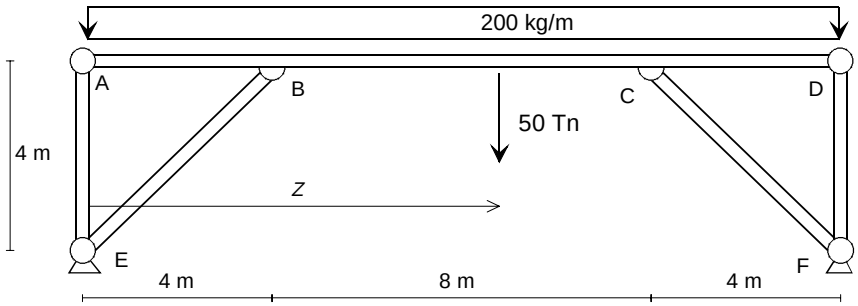


Figura P10.5

10.11.6 Sobre la estructura de la figura P10.6 se mueven dos ruedas separadas 1 m, que transmiten conjuntamente una fuerza unitaria. Calcular la línea de influencia del esfuerzo axial de la barra BD cuando la carga móvil recorre la trayectoria AC. Dividir el problema por simetría y antimetría y calcular las deformaciones necesarias empleando el método de rigidez. Características de las barras: E=2.1 10^6 kg/cm^2, I=10000 cm^4, A=10 cm^2.

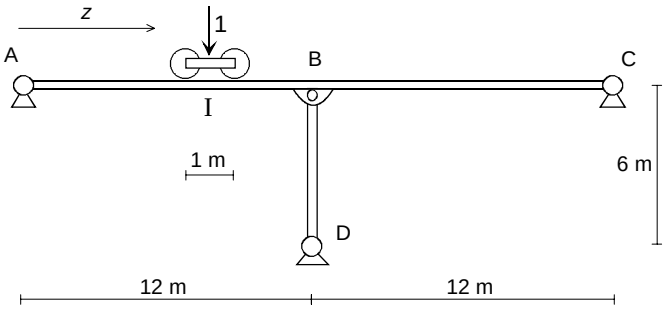


Figura P10.6

10.11.7 Calcular la línea de influencia del momento en el muelle C en la estructura de la figura P10.7, cuando dos fuerzas unitarias simétricas recorren los vanos AB y ED. El muelle C tiene un esfuerzo de pretensión de 10 m Tn como se indica en la figura y su rigidez es de 10^8 cm kg/rad.

Todas las barras tienen flexibilidad axial nula. La zona curva tiene forma parabólica y su rigidez a flexión viene dada por la ecuación $EI = 2\ 10^{10}\ \sec(\alpha)$ (kg cm^2), siendo α el ángulo que forma la recta tangente a la curva con la horizontal. Las barras AB y DE tienen $E\,I = 4\ 10^{10}$ kg cm^2.

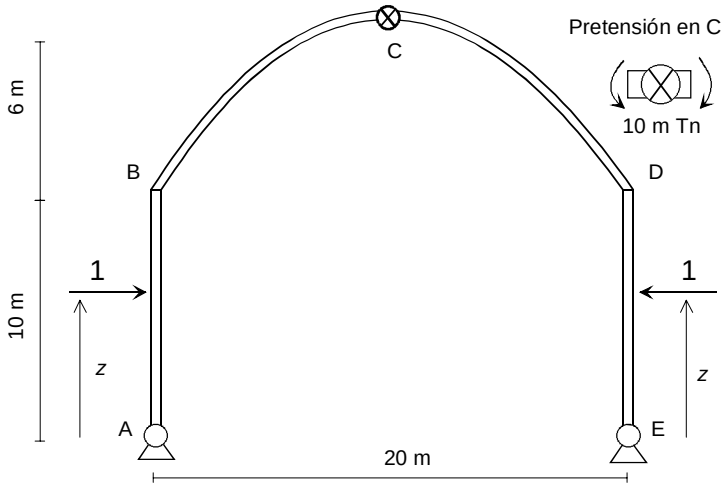


Figura P10.7

10.11.8 En la estructura de la figura P10.8 actúa una carga móvil de 1 Tn, que recorre las vigas ABCD, manteniéndose siempre vertical y hacia arriba. Además actúa la carga distribuida de 2 Tn/m sobre AE. Calcular las líneas de influencia del momento flector M_E en el apoyo E y del momento flector M_{BA}, en el extremo B de la barra AB, empleando el método de Müller-Breslau.

Todas las barras tienen: E=2 10^6 kg/cm^2, I=10000 cm^4. Su área es infinita, salvo la BC que tiene 10 cm^2. El muelle situado en el nudo C tiene una rigidez de 500 mTn/rad.

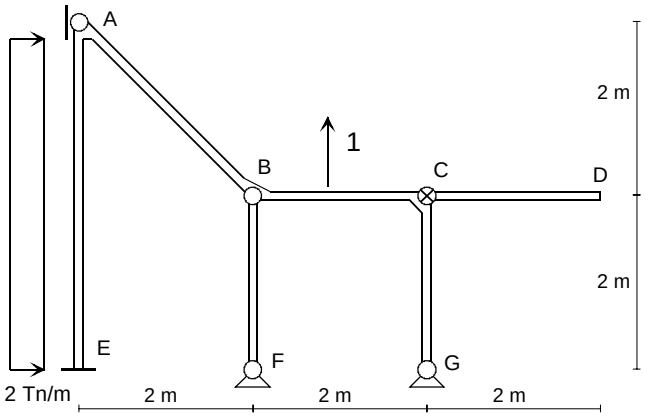


Figura P10.8

10.11.9 Calcular las líneas de influencia de los esfuerzos en las barras FG y GH en la celosía de la figura P10.9, cuando una carga unidad recorre el cordón superior AE. Todas las barras tienen E= 2 10^6 kg/cm^2, A=20 cm^2.

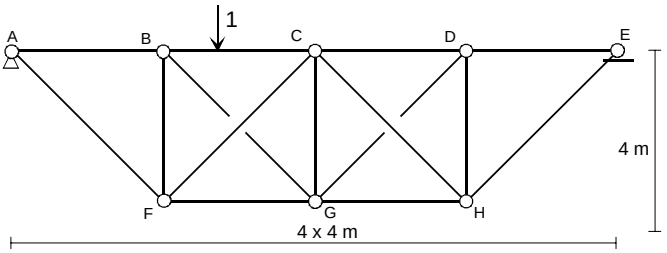


Figura P10.9

10.11.10 La estructura de la figura P10.10 representa un elemento ABC usado como guía en un sistema de transporte, que se modeliza mediante una viga continua de 2 vanos, empotrada en A y C. Simultáneamente hay dos piezas sobre la guía, una de ida, de 2 Tn, y otra de vuelta, de 1 Tn, cuyo movimiento sobre la guía se consigue mediante un sistema de poleas, y está sincronizado, quedando definido por un sólo parámetro *z*. El apoyo B se encuentra 2 cm por debajo de su posición correcta, debido a un error de fabricación. Calcular el valor máximo del momento flector en el punto B.
Datos: I= 2000 cm^4, A= 10 cm^2, E= 2 10^6 kg/cm^2.

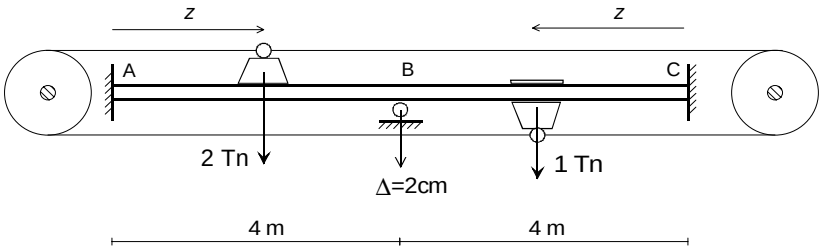


Figura P10.10

Capítulo 11

Vigas en fundación elástica

11.1 INTRODUCCIÓN

En el análisis convencional de vigas se supone que la viga está unida a la sustentación en una serie de puntos de apoyo discretos, y que todo el tramo de viga situado entre los apoyos puede deformarse libremente en dirección lateral, sin sufrir interacción exterior alguna, y estando sometido únicamente a las cargas exteriores, que son de magnitud conocida.

Existe sin embargo otra situación distinta, en la que la viga está apoyada en toda su longitud en algún medio material deformable que interacciona con ella, ejerciendo una fuerza de reacción lateral sobre la viga y oponiéndose en cierta medida a su deformación lateral (figura 11.1). En consecuencia la deformación y las solicitaciones en la viga son diferentes de las que habría si estuviese libre lateralmente.

A esta forma de trabajo en que la viga está en contacto con un medio material deformable se le llama viga sobre *fundación elástica*. Ya este nombre indica que para el medio material en que se apoya la viga se supone un comportamiento elástico, es decir que una vez eliminadas las cargas el medio de apoyo recupera su estado de deformación inicial nula. Esto es suficientemente aproximado para las aplicaciones prácticas en ingeniería, aunque hay otros modelos de comportamiento de la fundación más complejos.

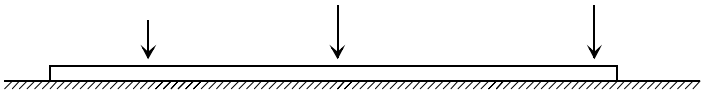


Figura 11.1

Otra forma de interpretar las vigas en fundación elástica es suponer una viga apoyada sobre una familia de muelles discretos, y que la distancia entre éstos se hace infinitamente pequeña, con lo que la viga queda apoyada sobre los muelles de una manera continua.

Los primeros estudios sobre vigas en fundación elástica son debidos a Winkler

(1875), considerando la viga como continua de infinitos vanos, sobre apoyos rígidos. Posteriormente Zimmermann (1906) estudió la viga como continua sobre apoyos flexibles, y Timoshenko (1915) extendió la teoría al estudio de las vías de ferrocarril. Además se han encontrado otros campos de aplicación como cimentaciones, tuberías enterradas...

11.2 COMPORTAMIENTO DEL TERRENO

Como ya se ha indicado el comportamiento del terreno se supone elástico, es decir que recupera su estado inicial cuando se eliminan las cargas, aunque existen modelos distintos para caracterizar esta respuesta elástica.

Se supone también que el terreno responde de manera bidireccional, es decir que la reacción del terreno se produce tanto si la viga se acerca a él como si se aleja. Esto no es cierto si la viga está simplemente apoyada, y requiere que la viga esté muy bien unida al terreno o enterrada en él. En todo caso el error introducido por esta suposición es pequeño en las aplicaciones prácticas, en las que la naturaleza de las cargas siempre tiende a acercar la viga al terreno. Además, estudiar el problema considerando un terreno con comportamiento unidireccional es extraordinariamente complejo.

Modelo lineal

En este modelo se supone que el terreno tiene un comportamiento lineal: la deformación vertical v que se produce en el terreno es proporcional a la presión p ejercida sobre él (figura 11.2). Se denomina *coeficiente de balasto del terreno* K_t a la constante de proporcionalidad entre la presión aplicada y la deformación:

$$K_t = \frac{p}{v} \tag{11.1}$$

El coeficiente de balasto del terreno representa por lo tanto la presión que hay que aplicar sobre el terreno para imponerle una deformación de valor unidad. Sus unidades son F/L^3 y habitualmente se utilizan kg/cm^3.

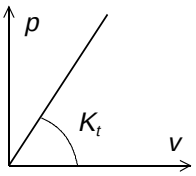


Figura 11.2

Los valores de K_t dependen fuertemente de la naturaleza del terreno. La tabla 11.1 contiene algunos valores típicos.

Terreno	K_t (kg/cm^3)
Arcilla arenosa húmeda	2 a 3
Arcilla arenosa seca	6 a 8
Grava arenosa fina	8 a 10
Grava arenosa gruesa	15 a 20

Tabla 11.1

Una fórmula muy habitual para placas rectangulares es la de Dimitrov (1955):

$$K_t = \frac{\rho E_s}{b(1-\nu^2)} \tag{11.2}$$

- b es la dimensión menor de la placa,
- ρ es un coeficiente que depende de la relación entre los lados (a/b) de la placa:

a/b	1	2	3	5	10	20	30	50
ρ	1.05	0.78	0.66	0.54	0.45	0.39	0.33	0.30

- ν es el coeficiente de dilatación transversal del terreno, que vale 0.125 a 0.50 para suelos arenosos y 0.20 a 0.40 para suelos arcillosos.
- E_s es el módulo de rigidez del suelo, cuyos valores típicos son:

Grava arenosa	1000	a	2000	kg/cm^2
Arena compacta	500	a	800	"
Arena suelta	100	a	200	"
Arcilla plástica	30	a	40	"
Lodo espeso	5	a	30	"

En todo caso, resulta difícil en la práctica determinar exactamente el valor de K_t por lo que muchas veces hay que utilizar diversos valores extremos para él. Para el cálculo de deformaciones y presiones en el suelo se está del lado de la seguridad si se utiliza un valor bajo de K_t, mientras que para el cálculo de esfuerzos en la viga es preferible elegir un valor alto de K_t.

Modelos no lineales

En estos modelos la relación entre la presión en el terreno y la deformación se establece a través de dos parámetros, en la forma:

$$p = K_t v + K_1 \frac{d^2 v}{dx^2} \tag{11.3}$$

Existen varios planteamientos basados en esta suposición, y que sólo se diferencian en el sentido físico que se da al segundo parámetro K_1. En todo caso la complejidad de determinar este segundo parámetro limita la aplicabilidad práctica de estos modelos a casos muy concretos, y no se abordarán aquí.

11.3 TEORÍA BÁSICA

Para el estudio de las vigas en fundación elástica se utilizará el mismo criterio de signos empleado para la flexión convencional de vigas, que se muestra en la figura 11.3.

- Se define el *coeficiente de balasto de la viga* K como:

$$K = bK_t \tag{11.4}$$

siendo b la anchura de la viga en contacto con el suelo. La unidades de K son F/L^2.

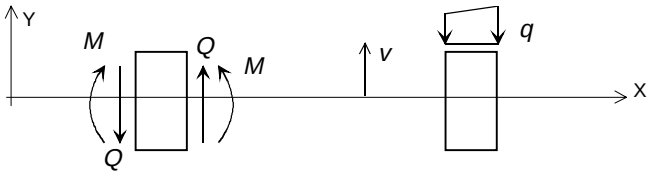


Figura 11.3

- Se adopta la hipótesis de deformación de Navier: las secciones planas de la viga se mantienen planas y perpendiculares a la fibra neutra, con lo que se desprecia la energía de esfuerzo cortante (apartado 4.3). La deformación unitaria en un punto cualquiera de la viga, situado a una distancia vertical *y* de la fibra neutra es:

$$\varepsilon = -y\frac{d^2v}{dx^2} \tag{11.5}$$

- La expresión del momento flector es:

$$M = -\int \sigma y dA = -\int E\varepsilon y dA = \int Ey^2 \frac{d^2v}{dx^2} bdx = E\frac{d^2v}{dx^2}\int y^2 bdx \tag{11.6}$$

$$M = EI\frac{d^2v}{dx^2} \tag{11.7}$$

La relación entre la curvatura y el momento flector es por lo tanto la misma que para vigas no en fundación elástica.

- El equilibrio de momentos de un elemento diferencial (figura 11.4) respecto a su centro es:

$$Qdx/2 + (Q+dQ)dx/2 + (M+dM) = M \tag{11.8}$$

Eliminando diferenciales de segundo orden y reordenando queda:

$$Q = -\frac{dM}{dx} \qquad \rightarrow \qquad Q = -EI\frac{d^3v}{dx^3} \tag{11.9}$$

Es decir que las relaciones entre el momento flector, el esfuerzo cortante y la deformación son las mismas que en las vigas convencionales.

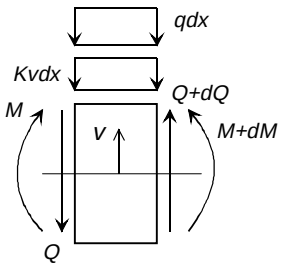


Figura 11.4

- El equilibrio vertical de un elemento diferencial es

$$dQ = Kvdx + qdx \tag{11.10}$$

Sustituyendo la expresión (11.9) del esfuerzo cortante, se llega a la ecuación de la

deformada elástica:

$$EI\frac{d^4v}{dx^4}+Kv+q=0 \tag{11.11}$$

Esta ecuación es diferente de la correspondiente a las vigas convencionales, en el sentido de que incluye un nuevo término Kv, que corresponde a la fuerza de reacción vertical que ejerce el terreno sobre la viga, por efecto de su comportamiento elástico. La ecuación es lineal en las cargas, por lo que el efecto de las distintas fuerzas exteriores puede sumarse.

11.4 SOLUCIÓN GENERAL DE LA ECUACIÓN DE LA ELÁSTICA

La ecuación (11.11) de la deformada elástica es una ecuación diferencial lineal completa, pues contiene al término independiente q que representa la carga exterior aplicada. La solución en el caso más general será la suma de una solución general de la ecuación homogénea (sin el término independiente q), más una solución particular de la ecuación completa.

A continuación se estudia la solución general de la ecuación homogénea, dejando las soluciones particulares para cada caso de carga. Esta solución general de la ecuación homogénea es válida como solución del problema en aquellos tramos de viga donde no hay cargas aplicadas. Para hallar la solución de la ecuación homogénea se prueban soluciones del tipo:

$$v=e^{ax} \tag{11.12}$$

Sustituyendo en la ecuación homogénea se obtiene:

$$a^4EIe^{ax}+Ke^{ax}=0 \tag{11.13}$$

de donde se puede calcular el valor de a:

$$a=\left(\frac{K}{EI}\right)^{1/4}(-1)^{1/4} \tag{11.14}$$

Las raíces 1/4 de -1 son cuatro números complejos de módulo 1 y ángulos 45º, 135º, 225º y 315º. Por lo tanto se puede poner a en la forma:

$$a=(\pm 1\pm i)\beta \tag{11.15}$$

donde la constante β es una medida de la rigidez relativa entre el terreno y la viga:

$$\beta=\left(\frac{K}{4EI}\right)^{1/4} \tag{11.16}$$

La solución de la ecuación diferencial homogénea es:

$$v=\sum_{i=1,4}A_ie^{a_ix} \tag{11.17}$$

Sustituyendo los valores de a y pasando las exponenciales complejas a trigonométricas se obtiene:

$$v = e^{\beta x}(C_1 \cos \beta x + C_2 \sin \beta x) + e^{-\beta x}(C_3 \cos \beta x + C_4 \sin \beta x) \qquad (11.18)$$

Esta expresión es válida en todos los tramos donde no hay cargas aplicadas. Las 4 constantes C_i se determinan en cada caso según las condiciones de contorno.

11.5 VIGA INFINITA

11.5.1 Carga puntual

Sea una viga infinita sometida a una sola carga puntual (figura 11.5). Se toma como origen del eje *x* el punto de aplicación de la carga. El caso es simétrico respecto a este punto, por lo que el estudio se hace sólo para *x*>0. La solución (11.18) obtenida para la ecuación homogénea es válida como solución de este problema para *x* distinto de 0, aunque estrictamente no vale en *x*=0, debido a la carga aplicada.

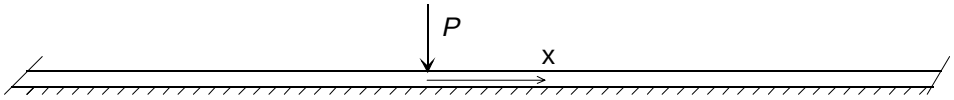


Figura 11.5

Las cuatro constantes de integración se determinan aplicando las condiciones de contorno específicas de este problema, que son:

◊ La flecha en el infinito es nula $x = \infty \quad v = 0$.

Se tiene que cumplir que $C_1 = C_2 = 0$ para que el primer sumando de la solución general sea nulo en el infinito. El segundo sumando tiende a cero en el infinito.

◊ Por simetría, el giro en el origen es nulo.

$$x = 0 \qquad \frac{dv}{dx} = 0 \qquad (11.19)$$

La derivada de la deformada, considerando que C_1 y C_2 son nulas, es:

$$\frac{dv}{dx} = \beta e^{-\beta x}((-C_3 + C_4)\cos \beta x + (-C_3 - C_4)\sin \beta x) \qquad (11.20)$$

Para que esta expresión sea nula en *x*=0 se debe cumplir que: $-C_3 + C_4 = 0$

◊ El equilibrio vertical del punto situado bajo la carga indica que

$$Q(x = 0) = \frac{P}{2} \qquad -EI\left(\frac{d^3 v}{dx^3}\right)_{x=0} = \frac{P}{2} \qquad (11.21)$$

Pero la derivada tercera de la deformada es (considerando que $-C_3 + C_4 = 0$)

$$-EI\left(4C_3 \beta^3 e^{-\beta x} \cos \beta x\right)_{x=0} = \frac{P}{2} \qquad (11.22)$$

de donde se obtiene:

$$C_3 = \frac{-P}{8EI\beta^3} = \frac{-P\beta}{2K} \tag{11.23}$$

- La deformada de la viga se obtiene sustituyendo los valores de las cuatro constantes:

$$v = \frac{-P\beta}{2K} F_1(\beta x) \tag{11.24}$$

donde se ha definido una función auxiliar:

$$F_1(\beta x) = e^{-\beta x}(\cos \beta x + \sin \beta x) \tag{11.25}$$

La representación gráfica de esta deformada se muestra en la figura 11.6, en la que se observa que es oscilante, con amplitud decreciente y tiende con rapidez a cero. El valor máximo se produce bajo la fuerza, y vale $P\beta/2K$.

Además, se comprueba que la viga se levanta en una serie de tramos, separándose del suelo. El primer punto en el que esto ocurre tiene una coordenada $x_s=3\pi/4\beta$ (nótese que este valor no depende de la carga aplicada P). Por lo tanto la solución hallada sólo es válida si, como se ha supuesto, el terreno tiene un comportamiento bidireccional. Si esto no ocurre la solución hallada no es válida y el problema es no lineal, pues hay que utilizar la ecuación diferencial anterior para la parte de viga en contacto con el terreno, o la clásica de las vigas, en las zonas donde haya separación. El problema es muy complicado y se ha comprobado que el error que se comete es pequeño, por lo que se suele admitir la solución que se ha hallado como buena, incluso en el caso de vigas apoyadas en el terreno, sin respuesta bidireccional. Por ejemplo, en un caso real, el error que se produce en la flecha es el 4% de la flecha máxima, que puede despreciarse a efectos prácticos.

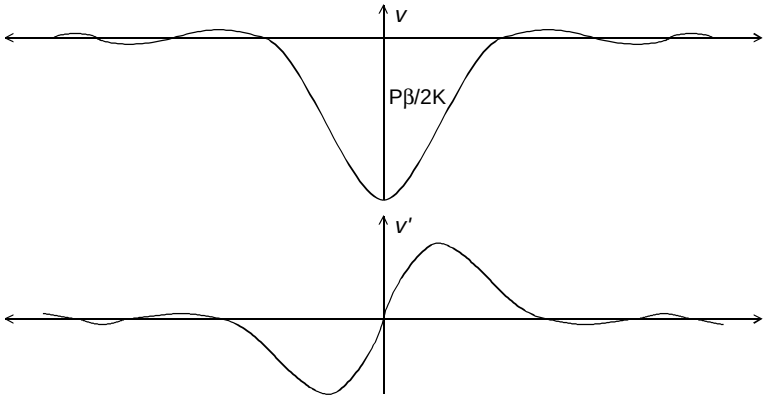


Figura 11.6

- La pendiente de la viga es:

$$\frac{dv}{dx} = \frac{P\beta^2}{K} F_2(\beta x) \tag{11.26}$$

donde la función auxiliar es:

$$F_2(\beta x) = e^{-\beta x}\sin\beta x = \frac{1}{2\beta}\frac{dF_1}{dx} \tag{11.27}$$

- El momento flector vale (figura 11.7):

$$M = EI\frac{d^2v}{dx^2} = \frac{P}{4\beta}F_3(\beta x) \tag{11.28}$$

$$F_3(\beta x) = e^{-\beta x}(\cos\beta x - \sin\beta x) \tag{11.29}$$

- El esfuerzo cortante es:

$$Q = -EI\frac{d^3v}{dx^3} = \frac{P}{2}F_4(\beta x) \tag{11.30}$$

$$F_4(\beta x) = e^{-\beta x}\cos\beta x \tag{11.31}$$

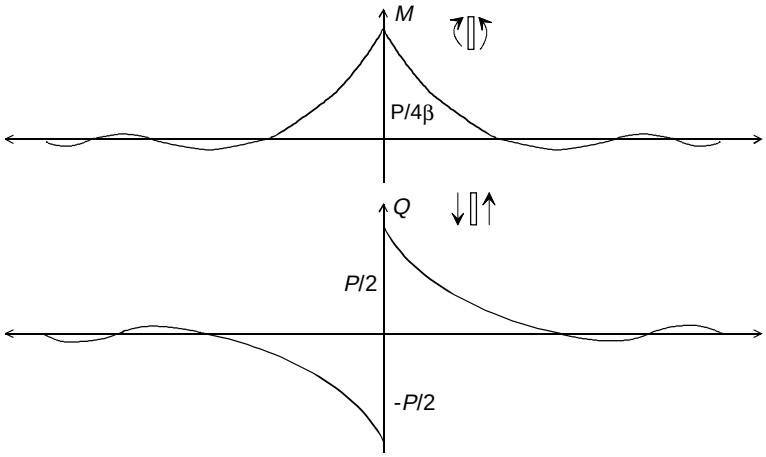


Figura 11.7

11.5.2 Dos cargas puntuales

Si sobre la viga actúan varias cargas, puede aplicarse el principio de superposición y el efecto de ambas es la suma de los efectos individuales de cada una de ellas. Para una viga con dos fuerzas P iguales separadas una distancia L (figura 11.8), la deformada adopta formas distintas según sea el valor de βL, pudiéndose alcanzar valores de la deformación en $L/2$ que son inferiores o superiores a los debidos a una sola carga

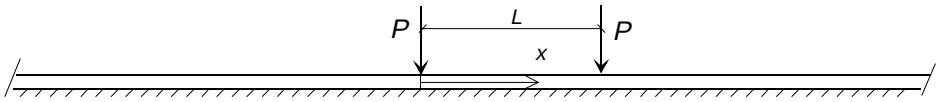


Figura 11.8

La figura 11.9 muestra una situación típica.

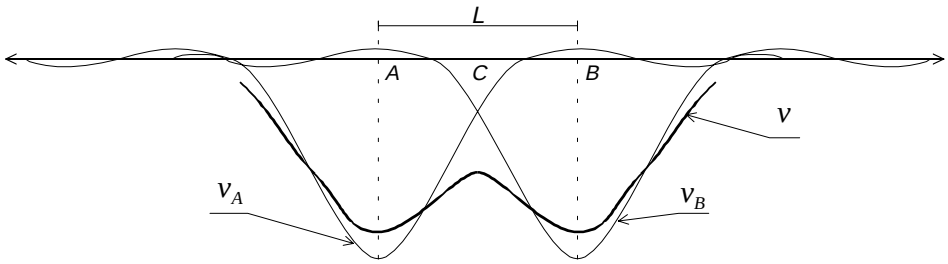


Figura 11.9

- El valor de la flecha bajo las cargas A o B es:

$$v_A = v_B = \frac{-P\beta}{2K}\left(F_1(0) + F_1(\beta L)\right) \tag{11.32}$$

- El valor de la flecha en el punto medio C es:

$$v_C = \frac{-P\beta}{2K}\left(F_1(\beta L/2) + F_1(\beta L/2)\right) \tag{11.33}$$

Imponiendo la condición de que $v_C < v_A$ se obtiene que $\beta L > 2$. Por lo tanto, si la separación de cargas es superior a $2/\beta$, la flecha en C es siempre inferior a la flecha en A.

Para evitar que la viga se levante entre las dos cargas, se debe garantizar que la distancia L sea inferior al doble del valor $3\pi/4\beta$, que es donde se produce la deformación hacia arriba, luego:

$$\beta L < 6\pi/4 = 4.71 \tag{11.34}$$

Por lo tanto para valores de βL comprendidos entre 2 y 4.71 se garantiza que no se produce un pico de flecha en el punto medio entre las cargas, ni se levanta la viga en dicho punto.

11.5.3 Momento puntual

Se considera una viga infinita sobre la que se aplica un momento puntual de valor M_0 (figura 11.10). Se toma el origen de coordenadas en el punto donde está aplicado el momento. Al igual que en el caso anterior, la solución obtenida para la ecuación homogénea es válida para este problema, al no haber cargas distribuidas.

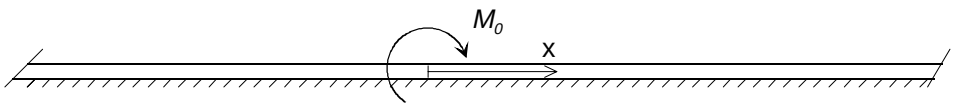


Figura 11.10

Las condiciones de contorno en este caso son:

◊ No hay flecha en el infinito $x = \infty \quad v = 0$.

Para satisfacer esta condición se tiene que cumplir que C_1=C_2=0 a fin de que el primer sumando de la solución general sea nulo en el infinito.

◊ Por simetría, la flecha en el origen es nula $v(x = 0) = 0$. Se obtiene C_3= 0.

◊ El equilibrio de momentos en el origen indica que el momento flector vale $M_0/2$, por lo tanto:

$$M_{x=0} = EI\left(\frac{d^2v}{dx^2}\right)_{x=0} = \frac{M_0}{2} \tag{11.35}$$

$$EI\left(-2C_4\beta^2 e^{-\beta x}\cos\beta x\right)_{x=0} = \frac{M_0}{2} \tag{11.36}$$

de donde se obtiene el valor de la constante C_4:

$$C_4 = \frac{-M_0}{4EI\beta^2} = \frac{-M_0\beta^2}{K} \tag{11.37}$$

A continuación se indican las magnitudes que definen la situación de la viga, empleando las funciones auxiliares definidas en 11.5.1. Se representan gráficamente en la figura 11.11.

$$v = \frac{-M_0\beta^2}{K}F_2(\beta x) \qquad \frac{dv}{dx} = \frac{-M_0\beta^3}{K}F_3(\beta x) \tag{11.38}$$

$$M = \frac{M_0}{2}F_4(\beta x) \qquad Q = \frac{M_0\beta}{2}F_1(\beta x) \tag{11.39}$$

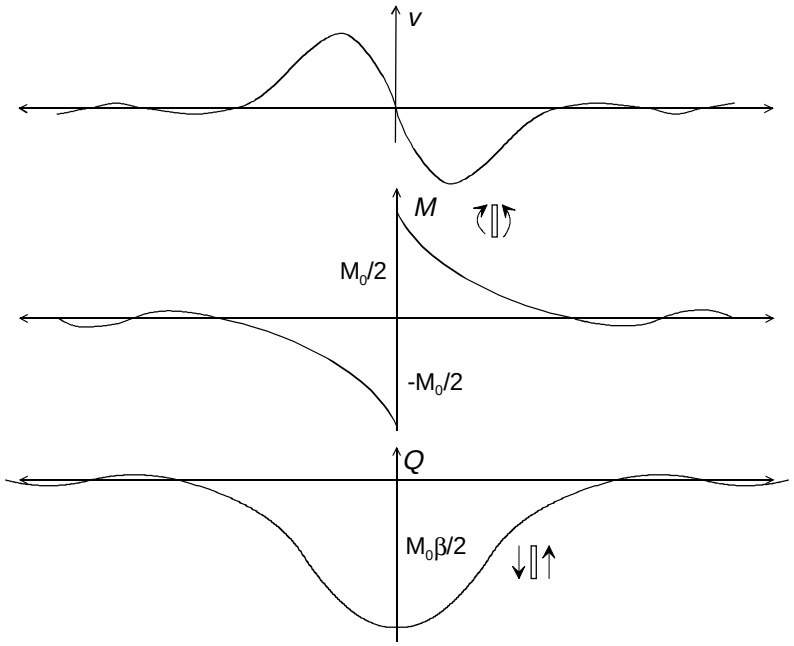


Figura 11.11

11.5.4 Carga uniforme sobre media viga

Sea una viga infinita, cargada con una fuerza distribuida q a partir de un cierto punto hasta el infinito (figura 11.12). Se toma como origen de coordenadas el punto de comienzo de la carga.

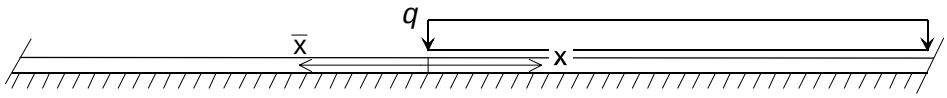


Figura 11.12

En el tramo de la derecha de la viga, la deformada es la suma de la solución ya hallada para la ecuación homogénea (11.18), más una solución particular de la ecuación completa. Una solución particular para dicha ecuación completa es sencillamente:

$$v_p = -\frac{q}{K} \tag{11.40}$$

En $x = \infty$ la viga debe tener una deformación vertical dada, finita, y de valor estacionario. Para que esto sea así, debe ocurrir que en la solución de la ecuación homogénea todos los coeficientes de los términos $e^{\beta x}$ deben ser nulos, pues en caso contrario dichos términos se harían infinitos en $x = \infty$. Por lo tanto se debe cumplir que $C_1 = C_2 = 0$.

La solución en el tramo de la derecha es por lo tanto:

$$v_d = e^{-\beta x}\left(A\cos\beta x + B sen\beta x\right) - \frac{q}{K} \tag{11.41}$$

En el tramo de la izquierda la solución es la obtenida para la ecuación homogénea (ecuación (11.18)). En este tramo se utiliza una coordenada $\bar{x}$ dirigida hacia la izquierda.

Se debe cumplir también que en el extremo de la izquierda la flecha debe ser nula: en $\bar{x} = \infty$ debe ser *v=0*, por lo que $C_1 = C_2 = 0$. Por lo tanto la solución para el tramo de la izquierda es:

$$v_i = e^{-\beta \bar{x}}\left(C\cos\beta\bar{x} + D\sin\beta\bar{x}\right) \tag{11.42}$$

Las condiciones de contorno en el origen son las de equilibrio y compatibilidad geométrica.

◊ Coincidencia de flechas:

$$v_i(\bar{x} = 0) = v_d(x = 0) \qquad \rightarrow \qquad C = A - \frac{q}{K} \tag{11.43}$$

◊ Coincidencia de giros (figura 11.13):

$$\left(\frac{dv_i}{d\bar{x}}\right)_{\bar{x}=0} = -\left(\frac{dv_d}{dx}\right)_{\bar{x}=0} \qquad \rightarrow \qquad -C + D = A - B \tag{11.44}$$

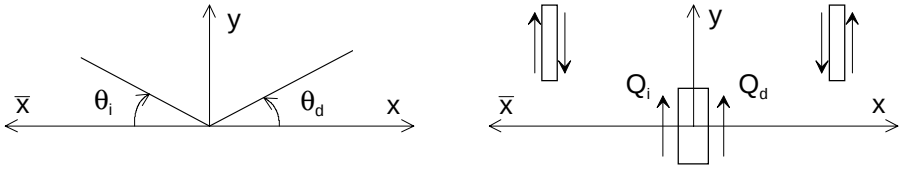


Figura 11.13

◊ Equilibrio de momentos:

$$M_i(\bar{x}=0) = M_d(x=0) \tag{11.45}$$

Esta condición es la misma que:

$$\left(EI\frac{d^2v_i}{d\bar{x}^2}\right)_{\bar{x}=0} = \left(EI\frac{d^2v_d}{dx^2}\right)_{x=0} \quad \rightarrow \quad D = B \tag{11.46}$$

◊ Equilibrio de cortantes:

$$Q_d + Q_i = 0 \tag{11.47}$$

$$-\left(EI\frac{d^3v_i}{d\bar{x}^3}\right)_{\bar{x}=0} - \left(EI\frac{d^3v_d}{dx^3}\right)_{x=0} = 0 \quad \rightarrow \quad C + D + A + B = 0 \tag{11.48}$$

Resolviendo las ecuaciones anteriores se obtienen las cuatro constantes de integración:

$$A = \frac{q}{2K} \qquad B = 0 \qquad C = -\frac{q}{2K} \qquad D = 0 \tag{11.49}$$

- La deformada de la viga es:

$$v_i = -\frac{q}{2K}F_4(\beta\bar{x}) \qquad v_d = -\frac{q}{K}\left(1 - \frac{F_4(\beta x)}{2}\right) \tag{11.50}$$

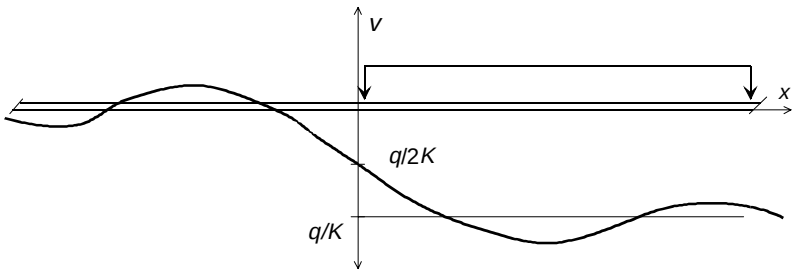


Figura 11.14

En la parte descargada la viga tiene una deformación v_i oscilante y de amplitud decreciente, como se ve en la figura 11.14. En la parte cargada la deformación v_d es también oscilante y de amplitud decreciente, oscilando alrededor del valor q/K, que es el valor en el infinito.

- El diagrama de momentos es (figura 11.15):

$$M_i = -\frac{q\beta}{4}F_2(\beta\bar{x}) \qquad M_d = \frac{q\beta}{4}F_2(\beta x) \tag{11.51}$$

- El diagrama de cortantes es:

$$Q_i = \frac{q\beta^2}{4} F_3(\beta x) \qquad Q_d = -\frac{q\beta^2}{4} F_3(\beta x) \tag{11.52}$$

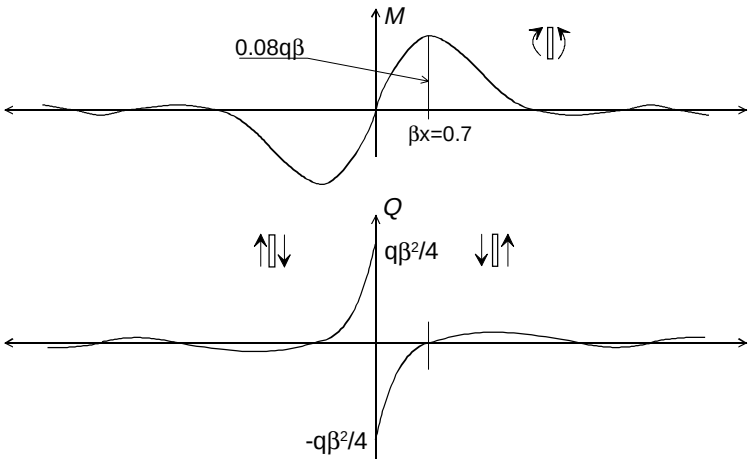


Figura 11.15

El momento máximo se produce donde $Q=0$, es decir donde la función $F_3(\beta x)$ vale cero. Esto ocurre para $\beta x = \pm 0.7$, y el valor del momento máximo es:

$$M_{\max} = \frac{q\beta}{4} F_2(0.7) = 0.080 q\beta \tag{11.53}$$

11.5.5 Carga distribuida según la ley seno

Se supone que el valor de la carga distribuida es:

$$q = q_0 \sin(2\pi x / \lambda) \tag{11.54}$$

siendo q_0 la amplitud y λ la longitud de onda.

Al igual que en los casos anteriores, para que la deformación en $x = \infty$ sea finita, deben ser cero los dos coeficientes $C_1 = C_2 = 0$.

La carga es periódica e infinita y la viga también es infinita: por simetría debe ocurrir que la deformación de la viga debe ser también periódica y además del mismo periodo que la carga. Sin embargo los coeficientes de C_3 y C_4 son ondas amortiguadas por el término $e^{-\beta x}$, que nunca pueden ser periódicas. Por lo tanto para que la solución total sea periódica ambas constantes C_3 y C_4 deben ser nulas. La solución general es por lo tanto toda ella nula en este caso.

La solución particular de la ecuación completa es del tipo:

$$v_p = A \sin(2\pi x / \lambda) \tag{11.55}$$

Sustituyendo esta solución particular en la ecuación diferencial (11.11), y considerando que las cuatro constantes de integración C_i son nulas, se obtiene una ecuación que permite determinar el coeficiente A, cuyo valor es:

$$A = -\frac{q_0}{K}\frac{1}{1+\left(\pi\sqrt{2}/\beta\lambda\right)^4} \tag{11.56}$$

La solución final es por lo tanto únicamente la solución particular:

$$v = A\sin(2\pi x/\lambda) \tag{11.57}$$

La amplitud máxima de la flecha es *A*, y se repite cada λ unidades de longitud en la viga, es decir que está en fase con la carga, como no podía ser de otra manera por el carácter infinito de la viga.

El valor de esta amplitud *A* es función del producto $\beta\lambda$, y se observa que:

- ◊ Si $\beta\lambda$ tiende a cero la amplitud *A* tiende también a cero: la viga casi no tiene deformación lateral, y por lo tanto la presión en el terreno es muy pequeña. Esto se indica en la parte superior de la figura 11.16.
- ◊ Si $\beta\lambda$ crece, la amplitud *A* aumenta y tiende a valer q_0 / K, que es la máxima flecha que puede adquirir la viga cargada con una fuerza senoidal de amplitud q_0. Esto se indica en la parte inferior de la figura 11.16. Por ejemplo, para un valor de $\beta\lambda$=4π, el valor de la flecha es $0.984\ q_0 / K$.
- ◊ Para valores de $\beta\lambda$ intermedios entre 0 y 4π, la amplitud de la deformación lateral está comprendida entre 0 y q_0 / K.

Estos resultados indican que para una misma amplitud de la carga, la flecha de la viga es mayor a medida que aumenta la longitud de onda λ de la carga. En particular si la longitud de onda es mayor que $4\pi/\beta$ la flecha es prácticamente la máxima posible.

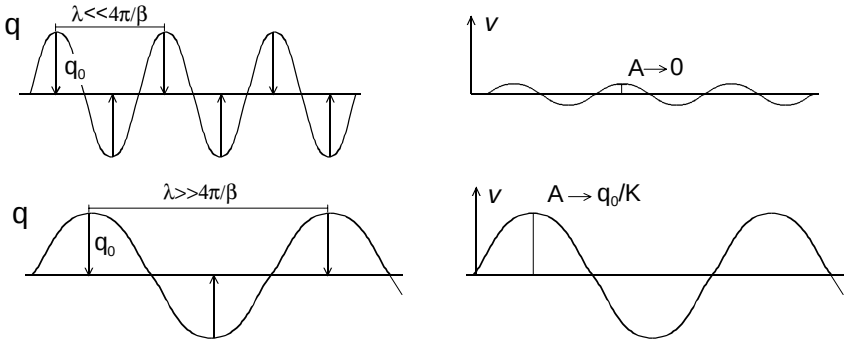


Figura 11.16

11.5.6 Carga distribuida según la ley coseno

Sea una carga que varía según la función coseno:

$$q = q_0\cos(2\pi x/\lambda) \tag{11.58}$$

La solución se obtiene de la misma forma que para la carga según la ley seno, y la deformada resulta ser:

$$v = A\cos(2\pi x / \lambda) \tag{11.59}$$

siendo A la misma constante empleada en la carga tipo seno (ecuación (11.56)).

11.5.7 Carga periódica cualquiera

Cuando sobre la viga actúa una carga periódica de forma cualquiera *p(x)*, se puede estudiar descomponiendo la carga real en serie de Fourier, como una suma de funciones seno y coseno:

$$p(x) = \sum_{n=0,\infty} a_n \sin(2\pi n x / \lambda) + \sum_{n=0,\infty} b_n \cos(2\pi n x / \lambda) \tag{11.60}$$

Cada término de la serie es una carga seno o coseno, cuya solución ya se conoce. La deformada de la viga tiene por lo tanto la expresión:

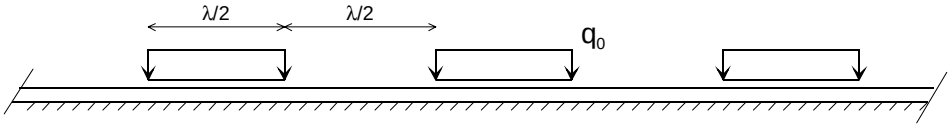
$$v(x) = \sum_{n=0,\infty} A_n \sin(2\pi n x / \lambda) + \sum_{n=0,\infty} B_n \cos(2\pi n x / \lambda) \tag{11.61}$$

siendo las amplitudes A_n y B_n:

$$A_n = -\frac{a_n}{K}\frac{1}{1+\left(n\pi\sqrt{2}/\beta\lambda\right)^4} \qquad B_n = -\frac{b_n}{K}\frac{1}{1+\left(n\pi\sqrt{2}/\beta\lambda\right)^4} \tag{11.62}$$

El sumatorio anterior se extiende con $n = 0,\infty$ por lo que las frecuencias de los distintos términos, que valen $2\pi n/\lambda$, van creciendo continuamente a medida que aumenta *n*. Del análisis de la deformada para una carga senoidal se ha deducido que si la carga tiene una frecuencia muy alta la deformada que aparece en la viga es muy pequeña. Por lo tanto los términos más altos del sumatorio, cuyas frecuencias son muy altas, tienen una colaboración muy pequeña a la flecha total. Esto indica que basta con considerar solamente los primeros términos del sumatorio, y que la convergencia de la serie está garantizada.

Ejemplo. *Sea una carga distribuida uniforme discontinua, de amplitud q_0 y longitud de onda λ.*



La descomposición en serie de Fourier de la carga sólo tiene términos en seno:

$$p(x) = \frac{q_0}{2} + \frac{2q_0}{\pi}\sum_{n=1,3,5,..}\frac{\sin(2\pi n x/\lambda)}{n}$$

La flecha máxima es la suma de las flechas debidas a los distintos términos, que son:

$$v_{max} = \frac{q_0}{2K} + \frac{2q_0}{\pi K}\sum_{n=1,3,5,..}\frac{1}{1+\left(\frac{n\pi\sqrt{2}}{\beta\lambda}\right)^4}$$

Por ejemplo para $\beta\lambda = \pi$, que es un valor intermedio, se tiene:

$$v_{\max} = \frac{q_0}{2K}\left(1+\frac{0.8}{\pi}+\frac{0.012}{\pi}+\frac{0.001}{\pi}+\ldots\right)$$

por lo que es suficiente con tomar 2 ó 3 términos del desarrollo en serie.

11.6 VIGA SEMI INFINITA

11.6.1 Carga puntual en un extremo

En este caso (figura 11.17) es también válida la solución general de la ecuación homogénea, salvo estrictamente en x=0.

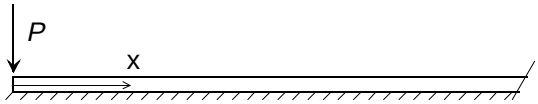


Figura 11.17

Las condiciones de contorno son:

◊ No hay flecha en el infinito $x=\infty \quad v=0$.

Se tiene que cumplir que C_1= C_2=0, para que el primer sumando sea nulo.

◊ No hay momento en el origen, luego la derivada segunda es nula en x=0.

$$\frac{d^2v}{dx^2} = \beta^2 e^{-\beta x}(-2C_4\cos\beta x + 2C_3\sin\beta x) \tag{11.63}$$

$$-\beta^2 2C_4 = 0 \qquad \rightarrow \qquad C_4 = 0 \tag{11.64}$$

◊ El esfuerzo cortante en el origen vale P, luego se debe cumplir que (considerando que C_4=0):

$$Q = -EIv^{III} = -2EI\beta^3 e^{-\beta x}(C_3\cos\beta x - C_3\sin\beta x) \tag{11.65}$$

$$Q_{x=0} = -2EI\beta^3 C_3 = P \qquad \rightarrow \qquad C_3 = \frac{-2P\beta}{K} \tag{11.66}$$

- La deformada de la viga (figura 11.18) es:

$$v = \frac{-2P\beta}{K}e^{-\beta x}\cos\beta x = \frac{-2P\beta}{K}F_4(\beta x) \tag{11.67}$$

- El giro es:

$$\frac{dv}{dx} = \frac{2P\beta^2}{K}F_1(\beta x) \tag{11.68}$$

- El momento flector es:

$$M = EIv^{II} = -\frac{P}{\beta}F_2(\beta x) \tag{11.69}$$

- El esfuerzo cortante es:

$$Q = -EIv^{III} = PF_3(\beta x) \tag{11.70}$$

El momento flector máximo se produce donde Q=0, es decir donde $F_3(\beta x) = 0$, lo cual ocurre para βx=0.7. El valor del momento máximo es $M(0.7) = -0.315P / \beta$.

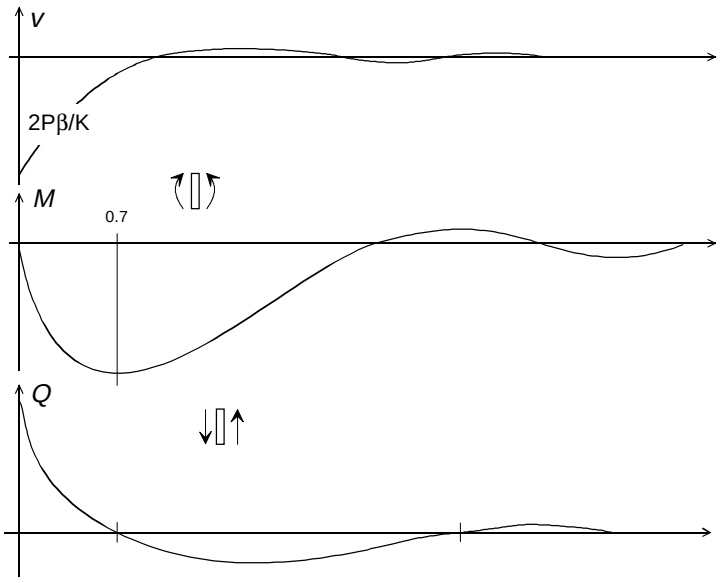


Figura 11.18

11.6.2 Momento en el extremo

Sigue siendo válida la solución de la ecuación homogénea, salvo estrictamente en x=0.

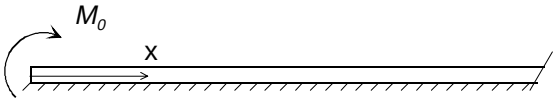


Figura 11.19

Las condiciones de contorno son ahora:

◊ La flecha en el infinito es nula: $v(x = \infty) = 0$, por lo que C_1= C_2=0, para que el primer sumando de la solución sea nulo.

◊ El momento flector en el origen vale M_0, luego la derivada segunda es:

$$M = EI\frac{d^2v}{dx^2} = EI\beta^2 e^{-\beta x}(-2C_4\cos\beta x + 2C_3\sin\beta x) \tag{11.71}$$

$$M_{x=0} = -EI\beta^2 2C_4 = M_0 \qquad \rightarrow \qquad C_4 = \frac{-M_0}{2\beta^2 EI} \tag{11.72}$$

◊ El cortante en el origen vale 0, luego se debe cumplir que:

$$Q = -EIv^{III} = -2EI\beta^3 e^{-\beta x}((C_3 + C_4)\cos\beta x + (-C_3 + C_4)\sin\beta x) \tag{11.73}$$

$$Q_{x=0} = -2EI\beta^3(C_3 + C_4) = 0 \quad \rightarrow \quad C_3 = -C_4 \tag{11.74}$$

- La deformada de la viga se muestra en la figura 11.20, y su expresión analítica es:

$$v = \frac{2M_0\beta^2}{K} F_3(\beta x) \tag{11.75}$$

- El giro es:

$$\frac{dv}{dx} = \frac{-M_0\beta^3}{K} F_4(\beta x) \tag{11.76}$$

- El momento flector es (figura 11.20):

$$M = M_0 F_1(\beta x) \tag{11.77}$$

- El esfuerzo cortante es (figura 11.20):

$$Q = 2M_0\beta\, F_2(\beta x) \tag{11.78}$$

El momento flector máximo se produce donde $Q=0$, es decir donde $F_2(\beta x) = 0$, lo cual ocurre para βx=0. El valor del momento máximo es, lógicamente, $M_{\max} = M_0$.

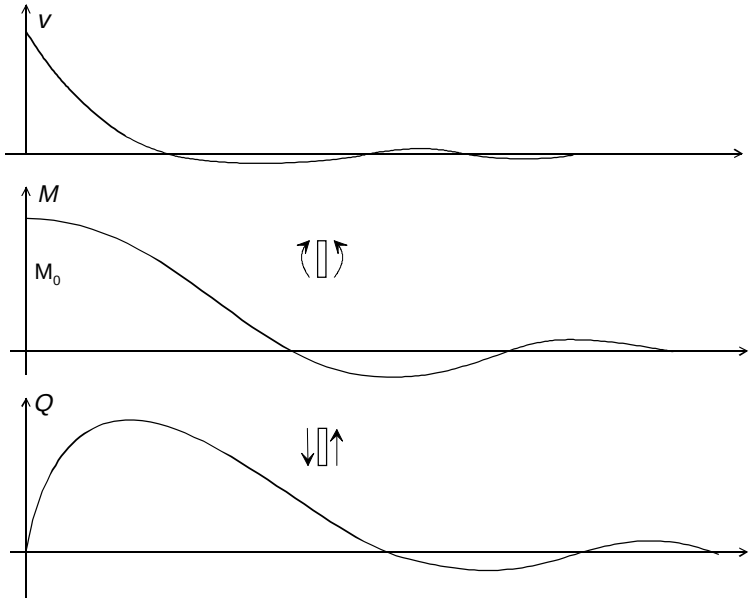


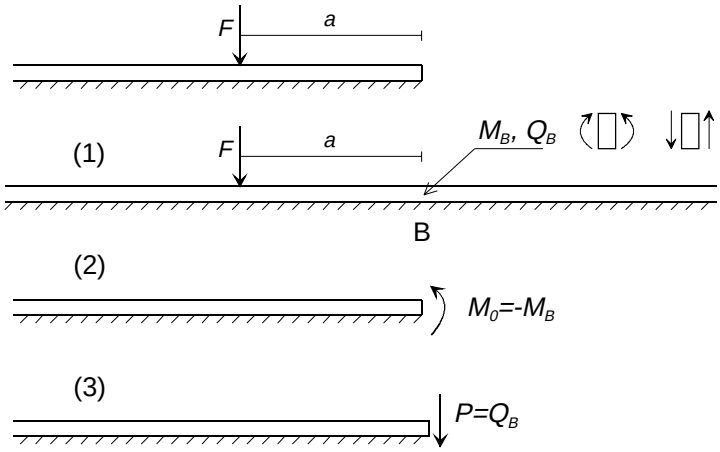
Figura 11.20

11.6.3 Otras cargas

Es posible estudiar una viga semi infinita con cargas que no están situadas en su extremo, haciendo uso del principio de superposición y descomponiendo el caso real en suma de otros casos con solución conocida, bien de vigas semi infinitas o infinitas.

Ejemplo. *La viga semi infinita de la figura está sometida a una carga puntual F situada a una distancia* a *de su extremo. Su estudio se puede descomponer en suma de tres casos.*

El caso 1 es una viga infinita, en la cual aparecen un momento flector M_B y un esfuerzo cortante Q_B en el punto B. En los casos 2 y 3 se aplican un momento y una fuerza iguales y de sentido contrario a los anteriores, a fin de garantizar que en el caso real no haya ni flector ni cortante en el punto extremo B.



Caso 1. La flecha y las solicitaciones en el punto B son:

$$v_B^1 = \frac{-F\beta}{2K} F_1(\beta a) \qquad M_B = \frac{F}{4\beta} F_3(\beta a) \qquad Q_B = \frac{F}{2} F_4(\beta a)$$

Caso 2. La flecha en B es:

$$v_B^2 = \frac{2M_0\beta^2}{K} F_3(0) = -\frac{2M_B\beta^2}{K} F_3(0) = \frac{-F\beta}{2K} F_3(\beta a) F_3(0)$$

Caso 3. La flecha en B es:

$$v_B^3 = -\frac{2P\beta}{K} F_4(0) = -\frac{2Q_B\beta}{K} F_4(0) = -\frac{F\beta}{K} F_4(\beta a) F_4(0)$$

La flecha real en el punto B es la suma de la de los tres casos anteriores

$$v_B = \frac{F\beta}{K}\left(-\frac{F_1(\beta a)}{2} - \frac{F_3(\beta a)}{2} - F_4(\beta a)\right)$$

11.7 VIGA DE LONGITUD FINITA

El cálculo de vigas en fundación elástica de longitud finita sigue el mismo camino que para las de longitud infinita, aunque el cálculo de las constantes de integración es mucho más complejo.

La deformación de un tramo de viga en el que no hay cargas aplicadas está dada por la solución general de la ecuación homogénea (11.18). Sustituyendo en ella las funciones exponenciales por trigonométricas, se puede poner en la forma:

$$v = A\cos\beta x\cosh\beta x + B\cos\beta x\sinh\beta x + C\sin\beta x\cosh\beta x + D\sin\beta x\sinh\beta x \qquad (11.79)$$

Los momentos flectores y esfuerzos cortantes en los extremos de la viga (figura 11.21) son:

$$M_I = -EI\left(\frac{d^2v}{dx^2}\right)_{x=0} = -2EI\beta^2 D \qquad (11.80)$$

$$M_J = EI\left(\frac{d^2v}{dx^2}\right)_{x=L} = -2EI\beta^2(Ass' + Bsc' - Ccs' - Dcc') \qquad (11.81)$$

$$P_{IY} = EI\left(\frac{d^3v}{dx^3}\right)_{x=0} = 2EI\beta^3(C - B) \qquad (11.82)$$

$$P_{JY} = -EI\left(\frac{d^3v}{dx^3}\right)_{x=L} = 2EI\beta^3(A(sc' + cs') + B(ss' + cc') + C(ss' - cc') + D(sc' - cs')) \qquad (11.83)$$

donde se han empleado, para mayor sencillez, las siguientes variables auxiliares:

$$s = \sin\beta L \qquad c = \cos\beta L \qquad s' = \sinh\beta L \qquad c' = \cosh\beta L \qquad (11.84)$$

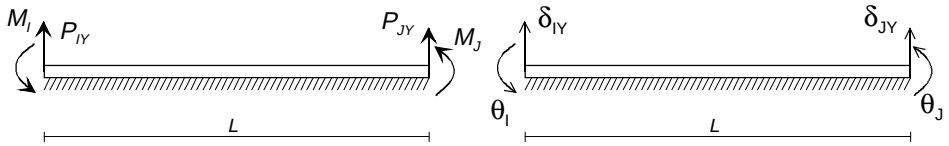


Figura 11.21

Resolviendo las cuatro ecuaciones anteriores se obtiene el valor de las cuatro constantes de integración, en función de los esfuerzos en los extremos.

$$A = \frac{1}{2EI\beta^3 H}\left(-\beta(s'^2 + s^2)M_I - 2\beta ss'\,M_J - (sc - s'c')P_{IY} - (sc' - cs')P_{JY}\right)$$

$$B = \frac{1}{2EI\beta^3 H}\left(\beta(sc + s'c')M_I + \beta(sc' + cs')M_J - s'^2\,P_{IY} + ss'\,P_{JY}\right)$$

$$C = \frac{1}{2EI\beta^3 H}\left(\beta(sc + s'c')M_I + \beta(sc' + cs')M_J - s^2 P_{IY} + ss'\,P_{JY}\right) \qquad (11.85)$$

$$D = \frac{-M_I}{2EI\beta^2}$$

siendo: $H = s'^2 - s^2$

Una vez calculadas estas constantes se conoce la curva deformada elástica de la viga (ecuación (11.79)), y como derivadas de ella, el momento flector y el esfuerzo cortante. Por lo tanto todo el problema, para caso particular, es establecer los valores de las fuerzas y/o deformaciones en los extremos y calcular las cuatro constantes.

11.8 PROPIEDADES DE RIGIDEZ DE LA VIGA EN FUNDACIÓN ELÁSTICA

La rigidez de un tramo de viga sobre una fundación elástica se evalúa estableciendo una relación entre los esfuerzos y las deformaciones en sus dos extremos, sin aplicar ninguna carga exterior en la viga.

Partiendo de la expresión general de la deformada (11.79), las deformaciones y giros en los dos extremos de la viga (figura 11.21) se pueden poner como:

$$\theta_I = \left(\frac{dv}{dx}\right)_{x=0} = \beta(B+C) \tag{11.86}$$

$$\theta_J = \left(\frac{dv}{dx}\right)_{x=L} = \beta(A(cs'-sc')+B(cc'-ss')+C(ss'+cc')+D(sc'+cs')) \tag{11.87}$$

$$\delta_{IY} = v_{x=0} = A \tag{11.88}$$

$$\delta_{JY} = v_{x=L} = Acc'+Bcs'+Csc'+Dss' \tag{11.89}$$

De estas últimas ecuaciones se despejan los valores de las cuatro constantes *A, B, C* y *D*, en función de las cuatro deformaciones en los extremos, resultando:

$$\begin{aligned}
A &= \delta_{IY} \\
B &= \frac{1}{\beta H}\left(-s^2\theta_I - ss'\,\theta_J - \beta(sc+s'c')\delta_{IY} + \beta(sc'+cs')\delta_{JY}\right) \\
C &= \frac{1}{\beta H}\left(s'^2\,\theta_I + ss'\,\theta_J + \beta(sc+s'c')\delta_{IY} - \beta(sc'+cs')\delta_{JY}\right) \\
D &= \frac{1}{\beta H}\left((sc-s'c')\theta_I + (cs'-sc')\theta_J - \beta(s'^2+s^2)\delta_{IY} + 2\beta ss'\,\delta_{JY}\right)
\end{aligned} \tag{11.90}$$

Sustituyendo los valores de estas constantes en las ecuaciones (11.80) a (11.83), se obtienen cuatro ecuaciones que proporcionan los momentos y cortantes en los extremos de la viga en función de las deformaciones en los mismos. Agrupándolas de forma matricial se obtiene:

$$\begin{Bmatrix} P_{IY} \\ M_I \\ P_{JY} \\ M_J \end{Bmatrix} = \frac{EI}{s's'-ss} \begin{bmatrix} 4(c's'+cs)\beta^3 & 2(s's'+ss)\beta^2 & -4(cs'+c's)\beta^3 & 4s'\,s\beta^2 \\ & 2(c's'-cs)\beta & -4ss'\,\beta^2 & 2(c's-cs')\beta \\ & & 4(c's'+cs)\beta^3 & -2(s's'+ss)\beta^2 \\ \textit{Simétrica} & & & 2(c's'-cs)\beta \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \delta_{IY} \\ \theta_I \\ \delta_{JY} \\ \theta_J \end{Bmatrix} \tag{11.91}$$

Se obtiene de esta manera la ecuación de equilibrio del elemento viga en fundación elástica, que define su matriz de rigidez. Esta matriz puede utilizarse en el método de rigidez para estudiar estructuras en las que algunos de sus elementos están apoyados en una fundación elástica, considerándolos como un elemento estructural más. Para ello basta con ensamblar la matriz de rigidez del elemento en fundación elástica con las de los restantes elementos estructurales, siguiendo el método explicado en el capítulo 8.

En la figura 11.22 se muestra una representación gráfica de la variación de los coeficientes más importantes de la matriz de rigidez, en función del parámetro βL. Para mayor sencillez se han utilizado los siguientes parámetros:

$$k_{11}=\frac{EI}{L^3}a_{11}\quad k_{13}=\frac{EI}{L^3}a_{13}\quad k_{14}=\frac{EI}{L^2}a_{14}\quad k_{22}=\frac{EI}{L}a_{22}\quad k_{24}=\frac{EI}{L}a_{24} \tag{11.92}$$

de tal manera que los coeficientes a_{ij} sólo dependen del producto βL.

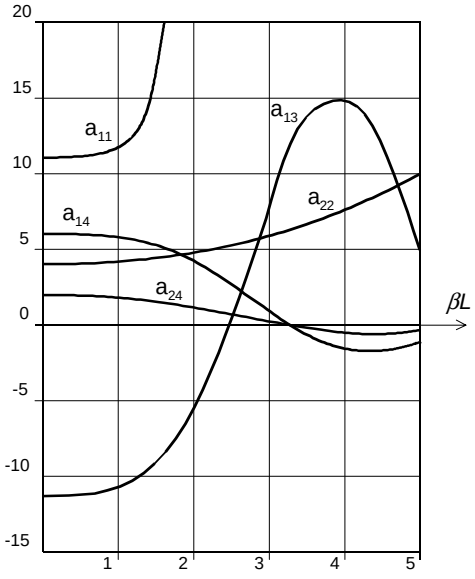


Figura 11.22

Se observa que para valores de βL inferiores a la unidad, los distintos coeficientes se mantienen casi constantes e iguales al valor que corresponde a la viga sin fundación elástica. Esto indica que el efecto de la fundación elástica es despreciable y la viga se comporta como una viga convencional. En particular, para β=0, es decir cuando desaparece la fundación elástica, los coeficientes de la matriz de rigidez anterior coinciden exactamente con los de la viga a flexión en el plano.

Para valores de βL superiores a 3, los coeficientes de rigidez cruzada entre los dos nudos extremos decrecen, y de hecho para valores de βL superiores a 5 son prácticamente nulos. Esto indica que a partir de estos valores de βL la viga se comporta como una viga infinita.

Para valores de βL intermedios entre 1 y 3, el comportamiento corresponde a una viga de longitud finita en fundación elástica.

11.9 VIGA LIBRE CON CARGA PUNTUAL EN EL CENTRO

La solución de este caso (figura 11.23) es muy sencilla empleando la ecuación de equilibrio en función de la matriz de rigidez y de las fuerzas y deformaciones en los extremos. Además, al ser el problema simétrico basta con estudiar la mitad de la viga.

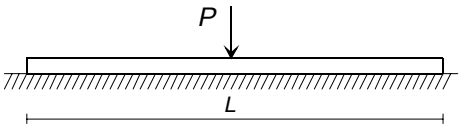


Figura 11.23

La figura 11.24 muestra la mitad izquierda de la viga, con sus grados de libertad. El giro en el punto central es nulo por simetría y la única carga exterior es la fuerza $P/2$ actuando en dicho punto central.

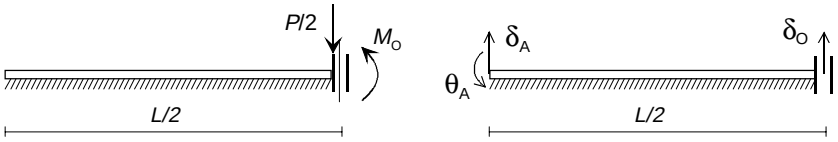


Figura 11.24

La ecuación de equilibrio de la mitad izquierda de la viga es:

$$\begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \\ -\frac{P}{2} \end{Bmatrix} = \frac{EI}{s'\,s' - ss} \begin{bmatrix} 4(c'\,s' + cs)\beta^3 & 2(s'\,s' + ss)\beta^2 & -4(cs' + c'\,s)\beta^3 \\ & 2(c'\,s' - cs)\beta & -4ss'\,\beta^2 \\ \textit{simétrica} & & 4(c'\,s' + cs)\beta^3 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \delta_A \\ \theta_A \\ \delta_O \end{Bmatrix} \qquad (11.93)$$

Donde las constantes β, s, c, s' y c' deben calcularse para una longitud $L/2$. Esta ecuación permite determinar las deformaciones de los extremos de la viga, que resultan ser:

$$\delta_0 = \frac{P\beta}{2K} \frac{\left(2 + \cos\beta L + \cosh\beta L\right)}{\left(\sin\beta L + \sinh\beta L\right)} \qquad \delta_A = \frac{2P\beta}{K} \frac{\left(\cos(\beta L/2) + \cosh(\beta L/2)\right)}{\left(\sin\beta L + \sinh\beta L\right)} \qquad (11.94)$$

Representando gráficamente la relación δ_A/δ_O en función de βL se obtiene la gráfica de la figura 11.25.

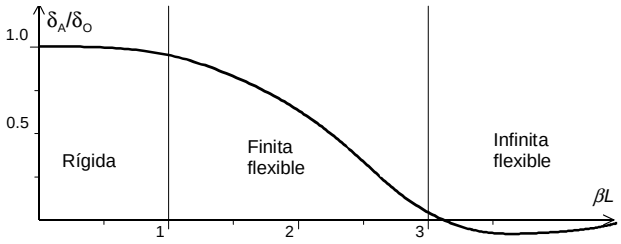


Figura 11.25

- Si $\beta L < 1$ ocurre que $\delta_A \approx \delta_O$. La viga se comporta como si fuese rígida, deformándose muy poco y con una flecha que es casi igual en toda su longitud. La presión sobre el suelo es aproximadamente igual a la fuerza P dividida por la superficie de contacto.

- Si $\beta L > 3$ ocurre que $\delta_A / \delta_O < 0$ *y* $\delta_A \to 0$. La viga se comporta como si fuese infinita: el punto central baja y los extremos no se mueven casi (incluso suben algo). Por lo tanto este caso puede tratarse como una viga infinita en fundación elástica, a efecto de cálculo de momentos, presiones en el terreno, etc.
- Si $1 < \beta L < 3$ hay que considerar la viga como de longitud finita.

11.10 VIGA EMPOTRADA CON CARGA UNIFORME

Para el análisis por el método de rigidez es necesario conocer los esfuerzos de fase 0 para cada condición de carga distinta, es decir las fuerzas y momentos de empotramiento perfecto en los extremos de la viga. Las cargas más habituales en vigas en fundación elástica son la distribuida y la puntual. Éstas últimas se pueden tratar sencillamente como cargas nodales. El tratamiento de la carga distribuida uniforme (figura 11.26) se desarrolla a continuación.

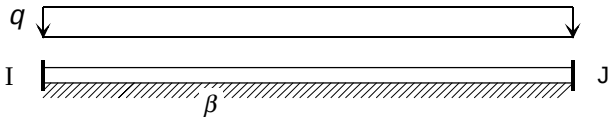


Figura 11.26

Al haber una carga distribuida *q*, la solución de la ecuación diferencial es la suma de la solución general (11.79) para la ecuación homogénea, más una solución particular de la ecuación completa. Esta solución particular es sencillamente:

$$v_p = -\frac{q}{K} \tag{11.95}$$

Por lo tanto, la expresión de la deformación de la viga es:

$$v = A\cos\beta x\cosh\beta x + B\cos\beta x\sinh\beta x + C\sin\beta x\cosh\beta x + D\sin\beta x\sinh\beta x - \frac{q}{K} \tag{11.96}$$

Las deformaciones en los extremos de la viga se pueden calcular a partir de esta expresión, pero al estar la viga empotrada en sus extremos, son todas ellas nulas:

$$\theta_I^0 = \left(\frac{dv}{dx}\right)_{x=0} = \beta(B+C) = 0 \tag{11.97}$$

$$\theta_J^0 = \left(\frac{dv}{dx}\right)_{x=L} = \beta(A(cs'-sc')+B(cc'-ss')+C(ss'+cc')+D(sc'+cs')) = 0 \tag{11.98}$$

$$\delta_{IY}^0 = v_{x=0} = A - \frac{q}{K} = 0 \tag{11.99}$$

$$\delta_{JY}^0 = v_{x=L} = Acc'+Bcs'+Csc'+Dss'-\frac{q}{K} = 0 \tag{11.100}$$

De estas cuatro ecuaciones se pueden obtener los valores de las cuatro constantes *A*, *B*, *C*, *D*, que resultan ser:

$$A=\frac{q}{K} \qquad B=\frac{c-c'}{s+s'}\frac{q}{K} \qquad C=\frac{c'-c}{s+s'}\frac{q}{K} \qquad D=\frac{s-s'}{s+s'}\frac{q}{K} \tag{11.101}$$

Sustituyendo estas constantes en las expresiones del momento flector y del esfuerzo cortante usadas para la deducción de la matriz de rigidez, (11.80) a (11.83), se obtiene:

$$M_I^0=-M_J^0=\frac{q}{2\beta^2}\frac{s'-s}{s'+s} \tag{11.102}$$

$$P_{IY}^0=P_{JY}^0=\frac{q}{\beta}\frac{c'-c}{s'+s} \tag{11.103}$$

que son las fuerzas de fase 0 buscadas (figura 11.27).

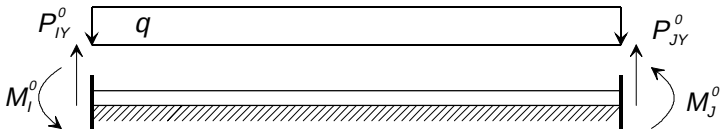


Figura 11.27

11.11 EJERCICIOS RESUELTOS

11.11.1 Una viga en fundación elástica, de longitud infinita, tiene la sección transversal indicada en la figura 11.28. El material es hormigón con *E* 200000 kg/cm^2 y el coeficiente de balasto del terreno es de 10 kg/cm^3. Está sometida a dos cargas puntuales de 25 Tn cada una, separadas 7.5 m. Determinar los momentos flectores en la viga y la tensión sobre el terreno.

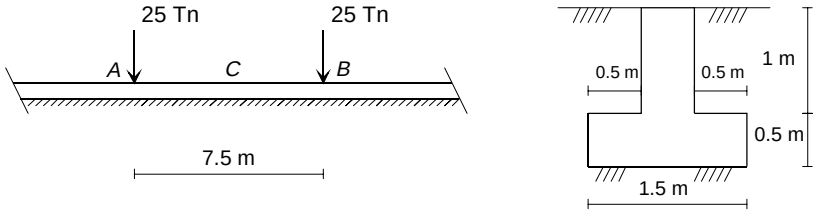


Figura 11.28

Las propiedades de la sección de la viga son:

Área: $1.5\cdot 0.5+1\cdot 0.5=1.25\ \text{m}^2$

Distancia del centro de gravedad a la base: $\bar{y}=(1.5\cdot 0.5\cdot 0.25+1\cdot 0.5\cdot 1.0)/A=0.55\ \text{m}$

Momento de inercia respecto del centro de gravedad: $I=226\cdot 10^5\ \text{cm}^4$

El coeficiente de balasto de la viga es: $K=10\cdot 150=1500\ \text{kg/cm}^2$

El coeficiente β es: $$\beta=\left(\frac{1500}{4\cdot 200000\cdot 226\cdot 10^5}\right)^{1/4}=0.003\ \text{cm}^{-1}$$

La deformación en cualquier punto es la suma de las deformaciones debidas a las dos cargas. Denominando x_I^J a la coordenada del punto I respecto del J, la deformación en el punto A es:

$$v_A = -\frac{P\beta}{2K} F_1(\beta\, x_A^A) - \frac{P\beta}{2K} F_1(\beta\, x_A^B)$$

$$v_A = -\frac{25000 \cdot 0.003}{2 \cdot 1500} F_1(0.003 \cdot 0) - \frac{25000 \cdot 0.003}{2 \cdot 1500} F_1(0.003 \cdot 750) = -0.0254 \quad \text{cm}$$

Por simetría, la deformación bajo la carga B es igual v_B = -0.0254 cm.

La deformación en el punto C, situado en la mitad entre A y B, es:

$$v_C = -\frac{P\beta}{2K} F_1(\beta\, x_C^A) - \frac{P\beta}{2K} F_1(\beta\, x_C^B)$$

$$v_C = -\frac{25000 \cdot 0.003}{2 \cdot 1500} F_1(0.003 \cdot 375) - \frac{25000 \cdot 0.003}{2 \cdot 1500} F_1(0.003 \cdot 375) = -0.0216 \quad \text{cm}$$

Las tensiones en el terreno en los puntos A, B y C son:

$$\sigma_A = \sigma_B = K v_A = 10 \cdot 0.0254 = 0.254 \ \text{kg/cm}^2$$

$$\sigma_C = K v_C = 10 \cdot 0.0216 = 0.216 \ \text{kg/cm}^2$$

El momento flector es asimismo la suma de los momentos debidos a las dos cargas. En el punto A su valor es:

$$M_A = \frac{P}{4\beta} F_3(\beta\, x_A^A) + \frac{P}{4\beta} F_3(\beta\, x_A^B)$$

$$M_A = \frac{25000}{4 \cdot 0.003} F_3(0.003 \cdot 0) + \frac{25000}{4 \cdot 0.003} F_3(0.003 \cdot 750) = 1.774 \cdot 10^6 \quad \text{cm kg}$$

El momento en B tiene este mismo valor. En el punto C el momento flector es:

$$M_C = \frac{P}{4\beta} F_3(\beta\, x_C^A) + \frac{P}{4\beta} F_3(\beta\, x_C^B)$$

$$M_C = \frac{25000}{4 \cdot 0.003} F_3(0.003 \cdot 375) + \frac{25000}{4 \cdot 0.003} F_3(0.003 \cdot 375) = -0.637 \cdot 10^6 \quad \text{cm kg}$$

El diagrama de momentos flectores tiene el aspecto indicado en la figura 11.29.

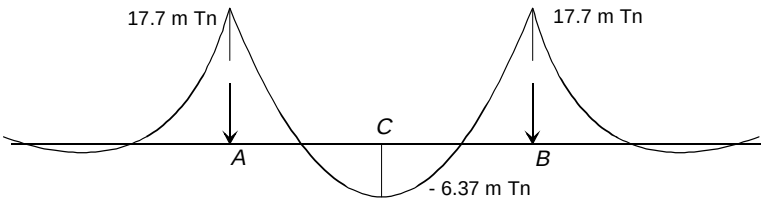


Figura 11.29

11.11.2 Una viga en fundación elástica, de 10 m de luz, tiene la sección transversal indicada en la figura 11.30. El material es hormigón con E= 200000 kg/cm^2 y el coeficiente de balasto del terreno es 10 kg/cm^3. Está sometida a las cargas indicadas en la figura. Determinar las deformaciones y los esfuerzos que se producen en los extremos y en el centro de la viga.

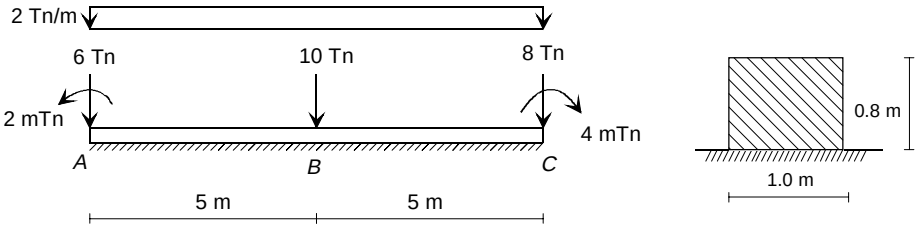


Figura 11.30

El momento de inercia de la sección es: $I = 4.267 \cdot 10^6$ cm^4

El coeficiente de balasto de la viga es: $K = 10 \cdot 100 = 1000$ kg / cm^2

El coeficiente β es:

$$\beta = \left(\frac{1000}{4 \cdot 250000 \cdot 4.26 \cdot 10^6} \right)^{1/4} = 0.0039 \text{ cm}^{-1}$$

La viga se modeliza mediante dos elementos en fundación elástica, de longitud 5 m cada uno (figura 11.31) con lo que se generan 6 grados de libertad:

$$\boldsymbol{\Delta}_I = \{\Delta_1 \quad \theta_1 \quad \Delta_2 \quad \theta_2 \quad \Delta_3 \quad \theta_3\}^T$$

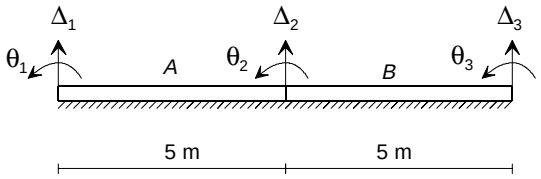


Figura 11.31

Las dos barras son iguales, y las distintas constantes que intervienen en su rigidez son:

$$\beta L = 1.95 \qquad s = 0.929 \quad c = -0.370 \quad s' = 3.443 \quad c' = 3.585$$

Nótese que el valor de βL indica que la viga se comporta claramente como una viga flexible (ver figura 11.22). Las dos barras tienen la misma matriz de rigidez, que viene dada por la expresión (11.91), y cuyo valor numérico se muestra a continuación, empleando como unidades cm y kg.

$$\mathbf{K}_A = \mathbf{K}_B = \begin{bmatrix} 0.003 & 0.377 & 0.000 & 0.188 \\ 0.377 & 96.17 & -0.188 & 34.77 \\ 0.000 & -0.188 & 0.003 & -0.377 \\ 0.188 & 34.77 & -0.377 & 96.17 \end{bmatrix} 10^8$$

La matriz de rigidez de toda la estructura se obtiene ensamblando las dos matrices anteriores según los grados de libertad de cada elemento:

$$\mathbf{K} = \begin{bmatrix} 0.003 & 0.377 & 0.000 & 0.188 & 0. & 0. \\ 0.377 & 96.17 & -0.188 & 34.77 & 0. & 0. \\ 0.000 & -0.188 & 0.006 & 0. & 0.000 & 0.188 \\ 0.188 & 34.77 & 0. & 192.34 & -0.188 & 34.77 \\ 0. & 0. & 0.000 & -0.188 & 0.003 & -0.377 \\ 0. & 0. & 0.188 & 34.77 & -0.377 & 96.17 \end{bmatrix} 10^8$$

Las fuerzas de fase 0 debidas a la carga distribuida sobre la barra A se calculan mediante las expresiones (11.102) y (11.103), para un valor de q=20 kg/cm.

$$P_1^{0A} = \frac{q}{\beta}\frac{c'-c}{s'+s} = 4640 \ \text{kg} \qquad P_2^{0A} = 4640 \ \text{kg}$$

$$M_1^{0A} = \frac{q}{2\beta^2}\frac{s'-s}{s'+s} = 377630 \ \text{cm}\cdot\text{kg} \qquad M_2^{0A} = -377630 \ \text{cm}\cdot\text{kg}$$

Las fuerzas de fase 0 debidas a la carga sobre B son iguales a las de la barra A.

Ensamblando los dos vectores de fuerzas de fase 0 - con signo cambiado - y añadiendo las cargas puntuales se obtiene el vector de fuerzas nodales equivalentes:

$$\mathbf{F} = \begin{Bmatrix} F_1 \\ M_1 \\ F_2 \\ M_2 \\ F_3 \\ M_3 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} -4640 & & -6000 \\ -377630 & & 200000 \\ -4640 & -4640 & -10000 \\ 377630 & -377630 & 0 \\ & -4640 & -8000 \\ & 377630 & -400000 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} -10640 \\ -177630 \\ -19270 \\ 0 \\ -12640 \\ -22370 \end{Bmatrix}$$

Las deformaciones que se producen en los nudos son:

$$\boldsymbol{\Delta} = \mathbf{K}\mathbf{F}^{-1} \qquad \boldsymbol{\Delta} = \begin{Bmatrix} \Delta_1 \\ \theta_1 \\ \Delta_2 \\ \theta_2 \\ \Delta_3 \\ \theta_3 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} -0.0694 \\ 0.0002 \\ -0.0315 \\ 0.0000 \\ -0.0909 \\ -0.0003 \end{Bmatrix}$$

La presión en el terreno en los 3 nudos es:

$p_1 = K_t\Delta_1 = 0.694\ \text{kg/cm}^2 \quad p_2 = K_t\Delta_2 = 0.315\ \text{kg/cm}^2 \quad p_3 = K_t\Delta_3 = 0.909\ \text{kg/cm}^2$

Los esfuerzos en los extremos de los elementos son la suma de las fases 0 y 1:

$$\mathbf{P}^A = \mathbf{P}^{0A} + \mathbf{K}^A\boldsymbol{\Delta}^A \qquad \begin{Bmatrix} P_1^A \\ M_1^A \\ P_2^A \\ M_2^A \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 4640 \\ 377630 \\ 4640 \\ -377630 \end{Bmatrix} + \mathbf{K}^A \begin{Bmatrix} -0.0694 \\ 0.0002 \\ -0.0315 \\ 0.0000 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} -6000 \\ 200000 \\ -4440 \\ 153610 \end{Bmatrix}$$

$$\mathbf{P}^B = \mathbf{P}^{0B} + \mathbf{K}^B\boldsymbol{\Delta}^B \qquad \begin{Bmatrix} P_2^B \\ M_2^B \\ P_3^B \\ M_3^B \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 4640 \\ 377630 \\ 4640 \\ -377630 \end{Bmatrix} + \mathbf{K}^B \begin{Bmatrix} -0.0315 \\ 0.0000 \\ -0.0909 \\ -0.0003 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} -5560 \\ -153610 \\ -8000 \\ -400000 \end{Bmatrix}$$

La figura 11.32 muestra los esfuerzos en los extremos de los dos elementos.

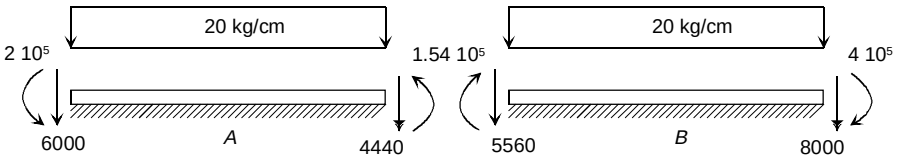


Figura 11.32

11.11.3 Determinar la deformada y el diagrama de momentos flectores de la viga de la figura 11.33.

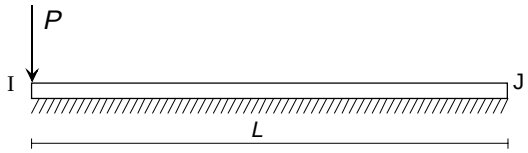


Figura 11.33

Las fuerzas en los extremos de la viga son: $P_{IY} = -P \quad P_{JY} = 0 \quad M_I = M_J = 0$

Con estos valores de los esfuerzos, las constantes de integración se pueden calcular mediante las expresiones (11.85). Se obtiene:

$$A = \frac{sc - s'\,c'}{2EI\beta^3 H}P \qquad B = \frac{s'^{\,2}}{2EI\beta^3 H}P \qquad C = \frac{s^2}{2EI\beta^3 H}P \qquad D = 0$$

y la deformada, dada por (11.79), queda:

$$v = \frac{P}{2EI\beta^3 H}\left((sc - s'\,c')\cos\beta x\cosh\beta x + s'^{\,2}\cos\beta x\sinh\beta x + s^2\sin\beta x\cosh\beta x\right)$$

El aspecto de esta deformada se representa en la figura 11.34 y varía mucho dependiendo del valor de βL. Para valores pequeños, inferiores a 1, la deformada es una línea recta, es decir que la viga se mantiene rígida sobre un apoyo elástico muy flexible. Para valores de βL superiores a 1 la viga se deforma como se indica en la figura. En ambos casos la viga se puede levantar del terreno.

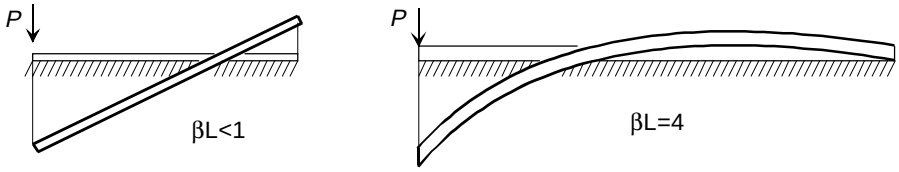


Figura 11.34

El diagrama de momentos flectores se obtiene derivando dos veces la deformada:

$$M = \frac{P}{\beta H}\left((s'\,c' - sc)\sin\beta x \sinh\beta x - s'^{\,2}\sin\beta x\cosh\beta x + s^2\cos\beta x\sinh\beta x\right)$$

La figura 11.35 muestra el aspecto de esta distribución de momentos, para un caso típico de β=0.005 cm^{-1} y L=800 cm, y con una carga P unitaria.

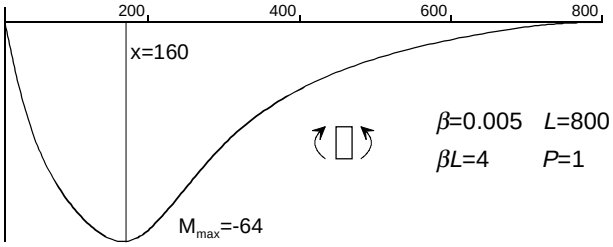


Figura 11.35

11.12 BIBLIOGRAFÍA

1. Den Hartog, J. P., *Advanced Strength of Materials*, McGraw-Hill, New York, 1952.
2. Dimitrov D., *Der Balken und die Platte als Gründungskörper*, Tesis Doctoral, Universidad de Karlsruhe, 1955.
3. Eisenberger, M., Yankelevsky, D. Z., *Exact Stiffness Matrix for Beams on Elastic Foundation*, Computers and Structures, Vol. 21, nº 6, pp. 1355-1359, 1985.
4. Hahn, J., *Vigas continuas, pórticos, placas y vigas flotantes sobre terreno elástico*, Editorial G. Gili, Barcelona, 1982.
5. Timoshenko, S. P., *Mem. Inst., Engrs. Ways of Communications*, San Petersburgo, 1915.
6. Wang, C. K., *Intermediate Structural Analysis*, McGraw-Hill, New York, 1983.
7. Winkler, E., *Vorträge über Eisenbahnbau*, 3ª ed., Praga, 1875.

11.13 PROBLEMAS

11.13.1 Determinar las fuerzas y momentos de empotramiento perfecto de una viga empotrada en ambos extremos, apoyada en una fundación elástica de coeficiente de balasto K, y sometida a una carga distribuida triangular de valor nulo en el nudo de la izquierda y valor q en el nudo de la derecha (figura P11.1).

11.13.2 Calcular las deformaciones en los extremos de una viga libre en ambos extremos, apoyada en una fundación elástica de coeficiente de balasto K, y sometida a una carga distribuida triangular de valor nulo en el extremo de la izquierda y valor q en el de la derecha (Figura P11.2). Utilizar el método de rigidez y los resultados del problema anterior.

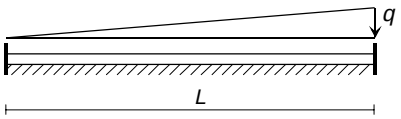


Figura P11.1

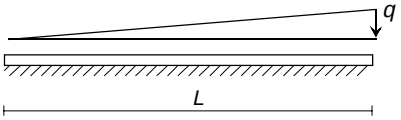


Figura P11.2

11.13.3 Utilizar el método de rigidez para calcular las deformaciones y el momento flector en la viga de la figura P11.3, que está parcialmente apoyada en una fundación elástica de coeficiente de balasto K_t = 15 kg/cm^3. La viga tiene sección rectangular con canto de 60 cm y ancho de 30 cm. El material tiene E = 250000 kg/cm^2.

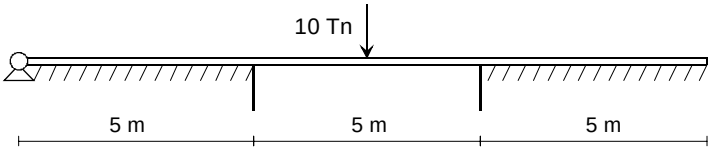


Figura P11.3

11.13.4 La figura P11.4 representa una viga semi infinita sometida a un momento exterior de valor 10 m Tn aplicado a una distancia de 3 m de su extremo. Calcular la deformación vertical y el giro en el extremo de la viga, así como el momento flector y el esfuerzo cortante en el punto de aplicación del momento. El coeficiente de balasto de la viga es 800 kg/cm^2 y el producto EI = 8 10^{11} kg cm^2.

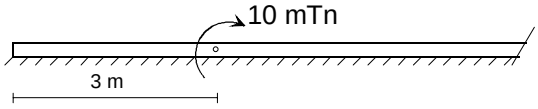


Figura P11.4

11.13.5 La figura P11.5 representa un emparrillado plano formado por una viga principal AB de 20 m de luz, que está apoyada en una familia de vigas secundarias de 5 m de luz, separadas 40 cm entre sí. Tanto la viga principal como las secundarias están simplemente apoyadas en sus extremos. La viga principal es un perfil IPE 300 y las secundarias son IPE 80. El material es acero con E = 2 10^6 kg/cm^2.

Considerar la viga principal como apoyada en una fundación elástica formada por las vigas secundarias. En este supuesto, calcular la deformación que se produce bajo la carga y el momento flector máximo que aparece tanto en la viga principal como en la viga secundaria que soporte mayor carga.

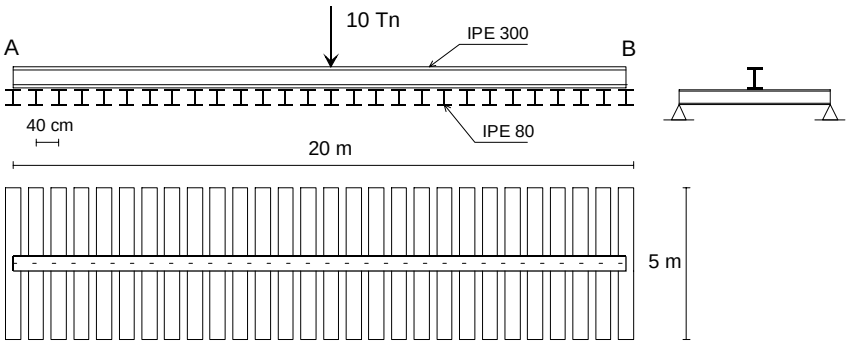


Figura P11.5

11.13.6 Un cajón hueco flexible, cerrado en sus extremos, de longitud L, se halla flotando en la superficie de un fluido de peso específico γ (figura P11.6). El cajón está construido de un material con módulo de elasticidad E, tiene sección cuadrada de lado b, y momento de inercia I y su peso es despreciable. Determinar cuánto se hunde el cajón en el fluido cuando en uno de sus extremos se aplica una fuerza vertical y hacia abajo de valor P.

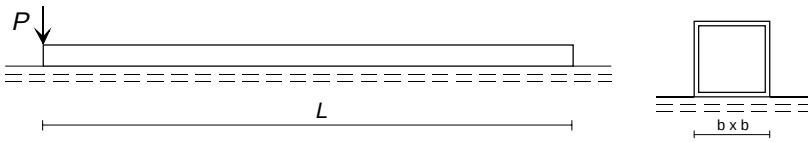


Figura P11.6

11.13.7 Resolver el problema 11.13.6 suponiendo que el cajón tiene un peso por unidad de longitud de valor q.

Capítulo 12

Condensación de ecuaciones y análisis por subestructuras

12.1 CONDENSACIÓN DE GRADOS DE LIBERTAD

La ecuación de equilibrio de una estructura analizada por el método de rigidez, una vez introducidas las condiciones de ligadura, tiene la forma:

$$\mathbf{K}_{II}\boldsymbol{\Delta}_I = \mathbf{F}_I^{ext} \tag{12.1}$$

donde $\boldsymbol{\Delta}_I$ son los grados de libertad cuyo valor se desconoce (aquellos donde no se ha aplicado ninguna condición de contorno) y el vector de fuerzas $\mathbf{F}_I^{ext}$ contiene los términos correspondientes a todas las cargas presentes: fuerzas puntuales en los nudos, fuerzas nodales equivalentes a las cargas sobre los elementos, cargas térmicas, fuerzas de pretensión, deformaciones conocidas…

En lugar de resolver el sistema de ecuaciones completo, se desea eliminar de él algunos de los grados de libertad, y dejar el sistema reducido a uno más pequeño, que contenga sólo a un subconjunto de los grados de libertad iniciales. En principio no se fija el criterio seguido para determinar qué grados de libertad se eliminan y cuales no. Esto se hará en cada aplicación particular de esta técnica.

Para ello, el conjunto inicial de grados de libertad se divide en dos grupos:

- $\boldsymbol{\Delta}_E$ grados de libertad que se desean eliminar del sistema original, y
- $\boldsymbol{\Delta}_B$ grados de libertad que se desean mantener.

De la misma forma la ecuación de equilibrio original se divide en:

$$\begin{bmatrix} \mathbf{K}_{BB} & \mathbf{K}_{BE} \\ \mathbf{K}_{EB} & \mathbf{K}_{EE} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \boldsymbol{\Delta}_B \\ \boldsymbol{\Delta}_E \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \mathbf{F}_B \\ \mathbf{F}_E \end{Bmatrix} \tag{12.2}$$

Despejando de la ecuación inferior el valor de los grados de libertad eliminados se obtiene:

$$\boldsymbol{\Delta}_E = \mathbf{K}_{EE}^{-1}\mathbf{F}_E - \mathbf{K}_{EE}^{-1}\mathbf{K}_{EB}\boldsymbol{\Delta}_B \tag{12.3}$$

Sustituyendo en la ecuación superior y reordenando se obtiene:

$$\left(\mathbf{K}_{BB} - \mathbf{K}_{BE}\mathbf{K}_{EE}^{-1}\mathbf{K}_{EB}\right)\boldsymbol{\Delta}_B = \mathbf{F}_B - \mathbf{K}_{BE}\mathbf{K}_{EE}^{-1}\mathbf{F}_E \tag{12.4}$$

Este sistema puede ponerse en la forma:

$$\mathbf{K}_{BB}^{*}\boldsymbol{\Delta}_B = \mathbf{F}_B^{*} \tag{12.5}$$

donde se han definido:

- Matriz de rigidez de la estructura condensada a los grados de libertad retenidos:

$$\mathbf{K}_{BB}^{*} = \mathbf{K}_{BB} - \mathbf{K}_{BE}\mathbf{K}_{EE}^{-1}\mathbf{K}_{EB} \tag{12.6}$$

- Vector de fuerzas de la estructura condensado a los grados de libertad retenidos:

$$\mathbf{F}_B^{*} = \mathbf{F}_B - \mathbf{K}_{BE}\mathbf{K}_{EE}^{-1}\mathbf{F}_E \tag{12.7}$$

La expresión (12.5) es la ecuación de equilibrio condensada a los grados de libertad retenidos: representa el equilibrio de toda la estructura, pero expresándolo sólo en función de unos cuantos grados de libertad retenidos $\boldsymbol{\Delta}_B$.

En su deducción no se ha efectuado ninguna aproximación, por lo que dicha ecuación representa el equilibrio con la misma fidelidad que la ecuación inicial. Por lo tanto resolviéndola se obtienen los valores de los grados de libertad conservados $\boldsymbol{\Delta}_B$, que tienen el mismo valor que si se hubiera resuelto el sistema inicial completo, sin condensación.

Una vez conocidos los $\boldsymbol{\Delta}_B$, los desplazamientos eliminados $\boldsymbol{\Delta}_E$ se obtienen por medio de la ecuación (12.3).

El tamaño de la ecuación final condensada (12.5) puede ser mucho menor que el de la ecuación inicial, por lo que su resolución es menos costosa. Aparentemente este método permite resolver el problema con un esfuerzo menor. Sin embargo, esto no es así, ya que para aplicar la ecuación condensada, hay que evaluar previamente la matriz de rigidez (12.6) y el vector de fuerzas (12.7) condensados, y ello conlleva un gran esfuerzo de cálculo si su tamaño es grande.

La tabla 12.1 muestra el orden de magnitud del número de operaciones necesario para resolver la ecuación de equilibrio original con y sin condensación. En ella n es el número de ecuaciones del sistema original, n_E es el número de grados de libertad eliminados y n_B el número de grados de libertad retenidos.

Con condensación		Sin condensación	
Hallar $\mathbf{K}^*_{BB}$ $\mathbf{F}^*_B$	$O(n_E^3)$	Resolver el sistema original:	$O(n^3)$
Resolver $\mathbf{K}^*_{BB}\boldsymbol{\Delta}_B = \mathbf{F}^*_B$	$O(n_B^3)$		
Total:	$O(n_E^3)+O(n_B^3)$	Total: $O(n^3)=O((n_E+n_B)^3)\approx O(n_E^3)+O(n_B^3)$+...	

Tabla 12.1

Se observa que ambos métodos requieren un número de operaciones aritméticas equivalentes. En realidad se puede demostrar con todo rigor que el número de operaciones necesario para resolver el sistema original es exactamente el mismo por ambos caminos. Por esta razón este método no se emplea nunca como técnica para resolver el sistema original de ecuaciones de equilibrio.

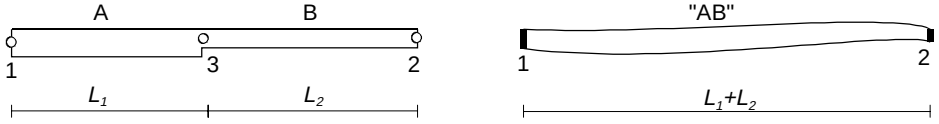
12.2 APLICACIONES DE LA CONDENSACIÓN DE GRADOS DE LIBERTAD

El método de condensación de grados de libertad expuesto tiene una aplicación de interés práctico, como es la obtención de las propiedades de rigidez de elementos estructurales no habituales.

Elementos combinados

Se trata de obtener la matriz de rigidez de un elemento obtenido por combinación de otros varios, cuyas matrices de rigidez se conocen. Esto tiene interés cuando se emplea de forma muy repetitiva un determinado tipo de elemento combinado, por lo que puede ser ventajoso calcular sus propiedades de rigidez y emplearlas directamente, en lugar de tener que recurrir siempre a los elementos básicos que lo componen.

***Ejemplo**. Obtener la matriz de rigidez de un elemento formado por dos vigas planas en serie, A y B, con rigideces I_1 e I_2 diferentes y longitudes L_1 y L_2.*



Se parte de las matrices de rigidez de los elementos A y B, que se ensamblan según los 9 grados de libertad del conjunto. El esquema de la matriz de rigidez conjunta es:

$$\mathbf{K}=\begin{bmatrix} \mathbf{K}^A_{11} & \mathbf{0} & \mathbf{K}^A_{13} \\ \mathbf{0} & \mathbf{K}^B_{22} & \mathbf{K}^B_{23} \\ \mathbf{K}^A_{31} & \mathbf{K}^B_{32} & \mathbf{K}^A_{33}+\mathbf{K}^B_{33} \end{bmatrix}\begin{matrix}1\\2\\3\end{matrix}$$

A continuación se eliminan todos los grados de libertad interiores a los elementos (nudo 3), y se retienen sólo los grados de libertad de los nudos frontera 1 y 2. Por lo tanto:

$$\boldsymbol{\Delta}_E=\{\boldsymbol{\Delta}_3\} \qquad \boldsymbol{\Delta}_B=\begin{Bmatrix}\boldsymbol{\Delta}_1\\ \boldsymbol{\Delta}_2\end{Bmatrix}$$

La matriz de rigidez condensada a los nudos 1 y 2 es la matriz de rigidez del elemento combinado AB, cuyo tamaño es 6x6. Se calcula mediante la expresión:

$$\mathbf{K}^{*}_{BB} = \begin{bmatrix} \mathbf{K}^{A}_{11} & 0 \\ 0 & \mathbf{K}^{B}_{22} \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} \mathbf{K}^{A}_{13} \\ \mathbf{K}^{B}_{23} \end{bmatrix} \left[\mathbf{K}^{A}_{33} + \mathbf{K}^{B}_{33} \right]^{-1} \begin{bmatrix} \mathbf{K}^{A}_{31} & \mathbf{K}^{B}_{32} \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{K}^{*}_{BB} = \begin{bmatrix} \mathbf{K}^{A}_{11} - \mathbf{K}^{A}_{13}\mathbf{F}_{33}\mathbf{K}^{A}_{31} & -\mathbf{K}^{A}_{13}\mathbf{F}_{33}\mathbf{K}^{B}_{32} \\ -\mathbf{K}^{B}_{23}\mathbf{F}_{33}\mathbf{K}^{A}_{31} & \mathbf{K}^{B}_{22} - \mathbf{K}^{B}_{23}\mathbf{F}_{33}\mathbf{K}^{B}_{32} \end{bmatrix}$$

siendo: $\mathbf{F}_{33} = \left[\mathbf{K}^{A}_{33} + \mathbf{K}^{B}_{33} \right]^{-1}$

A partir de este momento puede emplearse la matriz de rigidez del elemento combinado AB como si se tratase de un nuevo elemento estructural.

Elementos modificados

La técnica de condensación de grados de libertad permite desarrollar un método general para obtener la matriz de rigidez y el vector de fuerzas equivalentes, de un elemento estructural modificado. Se denomina así a un elemento obtenido por alteración de los valores de las fuerzas en los nudos extremos de otro elemento original, cuyas propiedades de rigidez se conocen. Así por ejemplo es posible obtener las propiedades de rigidez de una barra empotrada - articulada a partir de una biempotrada, alterando el valor del momento en el nudo final, o incluso otros elementos más complejos.

Se parte de la ecuación de equilibrio del elemento original en su sistema local, que incluye la suma de las fuerzas de las fases 0 (empotramiento perfecto) y 1 (deformación de los nudos), como se muestra en la figura 12.1:

$$\mathbf{P} = \mathbf{P}^{0} + \mathbf{K}_{L}\boldsymbol{\delta} \tag{12.8}$$

$\mathbf{P}$: fuerzas totales en los extremos del elemento,

$\mathbf{P}^{0}$: fuerzas de fase 0, debidas a las cargas actuantes sobre el elemento,

$\mathbf{K}_{L}$: matriz de rigidez en el sistema local,

$\boldsymbol{\delta}$: grados de libertad del elemento.

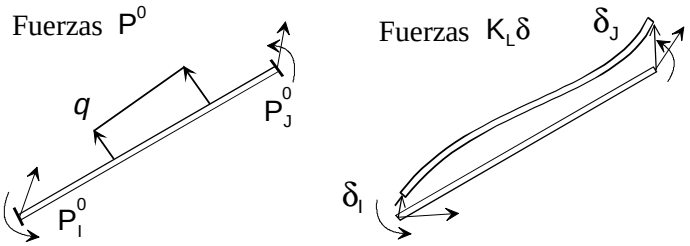


Figura 12.1

A partir de esta ecuación se desea obtener la ecuación de equilibrio de otro elemento, en el que se hayan eliminado algunos grados de libertad. Esta eliminación se efectúa a base de

imponer la condición de que las fuerzas correspondientes a los grados de libertad eliminados son nulas, por ejemplo debido a la presencia de una articulación o de una deslizadera.

Los grados de libertad del elemento original se separan en dos grupos:

- ◊ $\boldsymbol{\delta}_E$ grados de libertad que se eliminan, en los que las fuerzas son nulas. Normalmente serán unos pocos, de ordinario sólo uno.
- ◊ $\boldsymbol{\delta}_B$ grados de libertad que se mantienen.

Con ello la ecuación de equilibrio original se puede separar en:

$$\begin{Bmatrix}\mathbf{P}_B\\ \mathbf{P}_E\end{Bmatrix}=\begin{Bmatrix}\mathbf{P}_B^0\\ \mathbf{P}_E^0\end{Bmatrix}+\begin{bmatrix}\mathbf{K}_{BB} & \mathbf{K}_{BE}\\ \mathbf{K}_{EB} & \mathbf{K}_{EE}\end{bmatrix}\begin{Bmatrix}\boldsymbol{\delta}_B\\ \boldsymbol{\delta}_E\end{Bmatrix} \tag{12.9}$$

Introduciendo la condición de que $\mathbf{P}_E=0$, esta ecuación queda:

$$\begin{Bmatrix}\mathbf{P}_B\\ \mathbf{0}\end{Bmatrix}=\begin{Bmatrix}\mathbf{P}_B^0\\ \mathbf{P}_E^0\end{Bmatrix}+\begin{bmatrix}\mathbf{K}_{BB} & \mathbf{K}_{BE}\\ \mathbf{K}_{EB} & \mathbf{K}_{EE}\end{bmatrix}\begin{Bmatrix}\boldsymbol{\delta}_B\\ \boldsymbol{\delta}_E\end{Bmatrix} \tag{12.10}$$

De la parte inferior de esta ecuación se puede despejar el valor de los grados de libertad eliminados:

$$\boldsymbol{\delta}_E=-\mathbf{K}_{EE}^{-1}\mathbf{P}_E^0-\mathbf{K}_{EE}^{-1}\mathbf{K}_{EB}\boldsymbol{\delta}_B \tag{12.11}$$

Sustituyendo en la parte superior de la ecuación (12.10) se obtiene:

$$\mathbf{P}_B=\mathbf{P}_B^0-\mathbf{K}_{BE}\mathbf{K}_{EE}^{-1}\mathbf{P}_E^0+\left(\mathbf{K}_{BB}-\mathbf{K}_{BE}\mathbf{K}_{EE}^{-1}\mathbf{K}_{EB}\right)\boldsymbol{\delta}_B \tag{12.12}$$

Esta es la ecuación de equilibrio del elemento modificado, que involucra sólo a los grados de libertad y fuerzas mantenidos (*B*). De forma compacta se puede escribir:

$$\mathbf{P}_B=\mathbf{P}_B^{0*}+\mathbf{K}_{BB}^{*}\boldsymbol{\delta}_B \tag{12.13}$$

siendo:

- $\mathbf{K}_{BB}^{*}$ la matriz de rigidez del nuevo elemento modificado, referida a su sistema local, y correspondiendo sólo a los grados de libertad mantenidos:

$$\mathbf{K}_{BB}^{*}=\mathbf{K}_{BB}-\mathbf{K}_{BE}\mathbf{K}_{EE}^{-1}\mathbf{K}_{EB} \tag{12.14}$$

- $\mathbf{P}_B^{0*}$ el vector de fuerzas nodales equivalentes de fase 0 para el nuevo elemento:

$$\mathbf{P}_B^{0*}=\mathbf{P}_B^0-\mathbf{K}_{BE}\mathbf{K}_{EE}^{-1}\mathbf{P}_E^0 \tag{12.15}$$

Puede comprobarse que esta técnica es la que se empleó en el capítulo 7 para obtener las propiedades de rigidez de los elementos planos con articulaciones, pero de una forma menos general.

12.3 ANÁLISIS POR SUBESTRUCTURAS

Cuando la estructura a estudiar es muy grande puede ocurrir que se supere la capacidad del programa de ordenador empleado para su cálculo, normalmente porque se sobrepasa el número máximo de ecuaciones que pueden almacenarse y resolverse.

Cuando sucede esto, el análisis por subestructuras permite realizar el cálculo total por partes, de tal manera que cada una de ellas sea abordable con los medios disponibles.

Una característica fundamental del análisis por subestructuras es que reduce el volumen de información a manejar *simultáneamente* por el programa de cálculo. Sin embargo no se reduce el volumen *total* de información a manejar, y en realidad se aumenta muy ligeramente. En todo caso, al limitarse el volumen de información a manejar simultáneamente, se permite tratar estructuras todo lo grandes que se deseen, dentro de ciertos límites, o por lo menos mucho mayores que si no se utilizase esta técnica.

El análisis por subestructuras requiere programas de computador especiales, que hayan sido desarrollados específicamente para utilizar esta técnica. Por esta razón si un determinado programa no puede tratar una estructura dada, por su excesivo tamaño, no puede utilizarse ese mismo programa para aplicar la técnica de subestructuras, pues como se verá la secuencia de operaciones es muy diferente a la de un cálculo normal. De hecho la secuencia de operaciones en el análisis por subestructuras lleva a una gran complejidad del algoritmo de cálculo, por lo que sólo los grandes programas, destinados a estructuras muy grandes, la emplean.

Para emplear el análisis por subestructuras el paso fundamental es dividir la estructura total en una serie de partes, denominadas subestructuras, tales que:

- la unión de todas ellas sea la estructura completa,
- cada una de ellas sea de tamaño adecuado para ser tratada con el programa de ordenador disponible,
- todas ellas estén referidas al mismo sistema de ejes generales. Esto no es necesario desde el punto de vista teórico, pero se supone así para simplificar la formulación.

12.3.1 Ecuación de equilibrio de una subestructura

Sea una subestructura cualquiera de las que forman el conjunto total. En ella se distinguen dos tipos de nudos:

- nudos situados en las fronteras de unión de la subestructura con el resto de la estructura, designados con el subíndice B,
- los nudos restantes, denominados habitualmente nudos interiores y designados con el subíndice E.

Si la división en subestructuras está correctamente efectuada, el número de nudos frontera n_B debe ser muy inferior al número de nudos interiores n_E, y es en este caso cuando la técnica de las subestructuras muestra todo su potencial.

Los grados de libertad se pueden separar asimismo en dos conjuntos: grados de libertad de los nudos interiores $\boldsymbol{\Delta}_E$, y grados de libertad de los nudos frontera $\boldsymbol{\Delta}_B$. La ecuación de equilibrio de la subestructura puede separarse en la forma:

$$\begin{bmatrix} \mathbf{K}_{BB} & \mathbf{K}_{BE} \\ \mathbf{K}_{EB} & \mathbf{K}_{EE} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \boldsymbol{\Delta}_B \\ \boldsymbol{\Delta}_E \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \mathbf{F}_B \\ \mathbf{F}_E \end{Bmatrix} + \begin{Bmatrix} \mathbf{R}_B \\ \mathbf{0} \end{Bmatrix} \tag{12.16}$$

siendo:

- ◊ $\mathbf{F}_E$ fuerzas nodales, equivalentes a las acciones exteriores de todo tipo, aplicadas sobre los nudos interiores.
- ◊ $\mathbf{F}_B$ fuerzas nodales, equivalentes a las acciones exteriores de todo tipo, aplicadas sobre los nudos frontera.
- ◊ $\mathbf{R}_B$ fuerzas que se efectúan sobre esta subestructura por las restantes subestructuras a las que está unida. Son las llamadas fuerzas de conexión, y son desconocidas en principio. También puede decirse que son las reacciones de apoyo de esta subestructura en el resto de la estructura.

De la parte inferior de la ecuación anterior se puede despejar $\boldsymbol{\Delta}_E$:

$$\boldsymbol{\Delta}_E = \mathbf{K}_{EE}^{-1}\mathbf{F}_E - \mathbf{K}_{EE}^{-1}\mathbf{K}_{EB}\boldsymbol{\Delta}_B \tag{12.17}$$

Sustituyendo en la parte superior de la ecuación y reordenando se obtiene:

$$\left(\mathbf{K}_{BB} - \mathbf{K}_{BE}\mathbf{K}_{EE}^{-1}\mathbf{K}_{EB}\right)\boldsymbol{\Delta}_B = \mathbf{F}_B - \mathbf{K}_{BE}\mathbf{K}_{EE}^{-1}\mathbf{F}_E + \mathbf{R}_B \tag{12.18}$$

En esta ecuación se definen las magnitudes siguientes:

- *Matriz de rigidez de la subestructura* reducida a los grados de libertad frontera:

$$\mathbf{K}_{BB}^{*} = \mathbf{K}_{BB} - \mathbf{K}_{BE}\mathbf{K}_{EE}^{-1}\mathbf{K}_{EB} \tag{12.19}$$

- *Vector de fuerzas exteriores de la subestructura* reducido a los grados de libertad frontera:

$$\mathbf{F}_B^{*} = \mathbf{F}_B - \mathbf{K}_{BE}\mathbf{K}_{EE}^{-1}\mathbf{F}_E \tag{12.20}$$

Con estas definiciones la ecuación de equilibrio (12.18) de la subestructura, condensada a los grados de libertad de sus fronteras $\boldsymbol{\Delta}_B$, se puede poner:

$$\mathbf{K}_{BB}^{*}\boldsymbol{\Delta}_B = \mathbf{F}_B^{*} + \mathbf{R}_B \tag{12.21}$$

En su deducción no se ha efectuado ninguna simplificación, por lo que esta ecuación representa exactamente el equilibrio de la subestructura, con la misma fidelidad que la ecuación inicial, pero sólo emplea unos pocos grados de libertad del conjunto inicial.

La matriz de la subestructura $\mathbf{K}_{BB}^{*}$ es de mucho menor tamaño que la inicial, ya que éste es sólo el número de grados de libertad de las fronteras n_B, frente al número de grados de libertad total $(n_E + n_B)$. Sin embargo la matriz de la subestructura es en general llena, mientras que la matriz inicial tiene estructura de banda. Además, el esfuerzo de cálculo para

hallarla, según (12.19), puede ser considerable pues es necesario invertir una matriz de tamaño n_E.

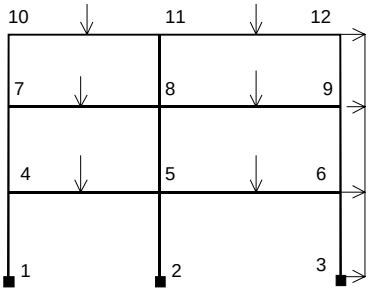
En el vector de cargas de la subestructura $\mathbf{F}_B^*$ se observa que las cargas que actúan sobre las fronteras $\mathbf{F}_B$ se suman directamente a él, mientras que las cargas actuantes sobre los nudos interiores $\mathbf{F}_E$, se suman mediante una proyección a través de la matriz $\mathbf{K}_{BE}\mathbf{K}_{EE}^{-1}$.

Análogamente, la matriz de rigidez de la subestructura está compuesta por la suma de la rigidez directa existente en las fronteras $\mathbf{K}_{BB}$, más la rigidez de los nudos interiores $\mathbf{K}_{EE}$, proyectada sobre dichas fronteras.

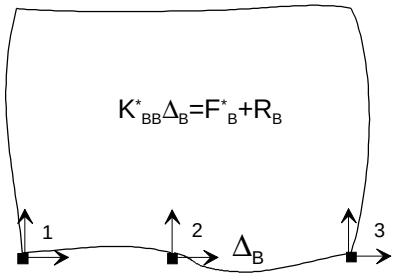
La ecuación (12.21) no puede resolverse para obtener las deformaciones, pues en ella están presentes las fuerzas de conexión $\mathbf{R}_B$, que son desconocidas y deben ser eliminadas.

Ejemplo. *En la subestructura de la figura, los nudos 1 2 y 3 definen sus fronteras, y los nudos 4 a 12 son sus nudos interiores.*

Subestructura original

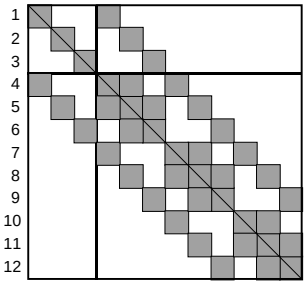


Subestructura condensada a sus fronteras

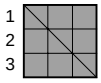


Sus matrices de rigidez tienen la siguiente distribución:

Matriz de rigidez original $\mathbf{K}$
Tamaño 36x36
Semi ancho de banda=12



Matriz de rigidez condensada $\mathbf{K}_{BB}^*$
Tamaño 9x9



12.3.2 Ecuación de equilibrio del conjunto

La ecuación de equilibrio del conjunto se obtiene aplicando el equilibrio de fuerzas en los nudos frontera en los que se unen las distintas subestructuras. A estos nudos se les suele

llamar *nudos de unión*, y se identifican con el subíndice *U*. Su número es n_U, que debe ser también un tamaño tratable con el programa disponible, y sus deformaciones forman un vector $\boldsymbol{\Delta}_U$.

Para cada una de las subestructuras en que se ha dividido la estructura total, se tiene una ecuación de equilibrio como la (12.21) deducida anteriormente:

$$\mathbf{K}^{*i}_{BB}\boldsymbol{\Delta}^i_B = \mathbf{F}^{*i}_B + \mathbf{R}^i_B \tag{12.22}$$

donde el superíndice *i* se ha añadido para representar a la subestructura *i*-sima.

Para el análisis que sigue a continuación es necesario establecer una relación entre las magnitudes definidas a nivel de cada subestructura (subíndice *B*) y las correspondientes definidas a nivel de las fronteras de unión entre todas ellas (subíndice *U*). Sea por ejemplo la subestructura *i*, cuyas deformaciones en las fronteras son $\boldsymbol{\Delta}^i_B$, y sean $\boldsymbol{\Delta}_U$ las deformaciones de todos los nudos de unión. La relación entre ambas se puede establecer mediante una ecuación del tipo:

$$\boldsymbol{\Delta}^i_B = \mathbf{B}_i\boldsymbol{\Delta}_U \tag{12.23}$$

donde $\mathbf{B}_i$ es una matriz que tiene tantas filas como grados de libertad tiene la subestructura *i*-sima (los correspondientes a los n_B nudos) y tantas columnas como grados de libertad hay en la unión entre las subestructuras (n_U). Cada fila de esta matriz define la posición de un término de $\boldsymbol{\Delta}^i_B$ en el vector total $\boldsymbol{\Delta}_U$, es decir que contiene un 1 en la posición del grado de libertad en $\boldsymbol{\Delta}_U$ y un 0 en todas las demás posiciones. Estas matrices son similares a las empleadas en el capítulo 8 para el ensamblaje de los elementos estructurales en la matriz de rigidez de la estructura.

Se puede poner una ecuación similar para la relación entre las fuerzas de conexión $\mathbf{R}^i_B$ actuantes sobre la estructura *i*-sima:

$$\mathbf{R}^i_B = \mathbf{B}_i\mathbf{R}^i_U \tag{12.24}$$

donde $\mathbf{R}^i_U$ es la contribución de la subestructura *i* a las fuerzas totales efectuadas por las subestructuras sobre los nudos de unión.

Si sobre la subestructura *i* las fuerzas de conexión son $\mathbf{R}^i_B$, sobre los nudos de conexión son $-\mathbf{R}_B$. Por lo tanto la ecuación de equilibrio de todos los nudos de unión entre todas las subestructuras es:

$$\sum_i \left(-\mathbf{R}^i_U\right) + \mathbf{F}^{ext}_U = \mathbf{0} \tag{12.25}$$

donde $\mathbf{F}^{ext}_U$ son las fuerzas exteriores que están aplicadas directamente sobre los nudos de la unión. La mayor parte de las veces estas fuerzas son nulas, pues las fuerzas se sitúan normalmente sobre los nudos de las subestructuras, pero por generalidad se mantiene este término.

Sustituyendo $\mathbf{R}^i_U$ por su valor se obtiene:

$$\sum_i \mathbf{B}^T_i\mathbf{R}^i_B = \mathbf{F}^{ext}_U \tag{12.26}$$

que es la ecuación de equilibrio de todos los nudos de unión. Sustituyendo el valor de las fuerzas de conexión dado por la ecuación (12.22), se obtiene

$$\sum_i \mathbf{B}_i^T \left(\mathbf{K}_{EE}^{*i} \boldsymbol{\Delta}_B^i - \mathbf{F}_B^{*i} \right) = \mathbf{F}_U^{ext} \tag{12.27}$$

Sustituyendo el valor de $\boldsymbol{\Delta}_B^i$ dado por (12.23) y reordenando se llega a

$$\sum_i \left(\mathbf{B}_i^T \mathbf{K}_{EE}^{*i} \mathbf{B}_i \right) \boldsymbol{\Delta}_U = \sum_i \mathbf{B}_i^T \mathbf{F}_B^{*i} + \mathbf{F}_U^{ext} \tag{12.28}$$

que puede ponerse de forma compacta como:

$$\mathbf{K}_{UU} \boldsymbol{\Delta}_U = \mathbf{F}_U \tag{12.29}$$

Esta es la ecuación de equilibrio final de todos los nudos de unión entre todas las subestructuras, es decir de todos los nudos frontera. Los distintos términos que en ella aparecen son:

◊ Matriz de rigidez del conjunto de todas las subestructuras ensambladas, expresada en los nudos de unión entre ellas:

$$\mathbf{K}_{UU} = \sum_i \left(\mathbf{B}_i^T \mathbf{K}_{EE}^{*i} \mathbf{B}_i \right) \tag{12.30}$$

Para obtener esta matriz se parte de las matrices de rigidez condensadas de todas las subestructuras, se expanden a los grados de libertad de los nudos de unión (pre y post multiplicándolas por $\mathbf{B}_i$), y a continuación se suman todas ellas. En realidad esta operación se efectúa ensamblando la matriz de cada subestructura en la matriz total $\mathbf{K}_{UU}$, término a término, en un proceso de ensamblaje similar al empleado para formar la matriz de rigidez de la subestructura a partir de las matrices de las barras que la forman. De hecho, obsérvese el paralelismo entre el desarrollo efectuado aquí y el del apartado 8.3.

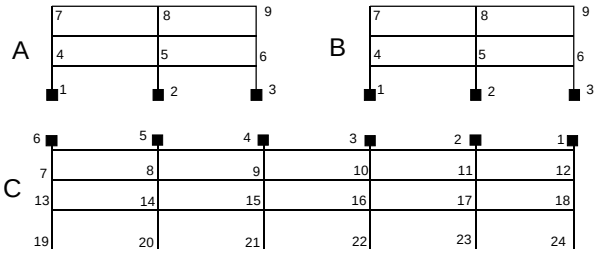
◊ Vector de fuerzas totales sobre los nudos de unión:

$$\mathbf{F}_U = \sum_i \mathbf{B}_i^T \mathbf{F}_B^{*i} + \mathbf{F}_U^{ext} \tag{12.31}$$

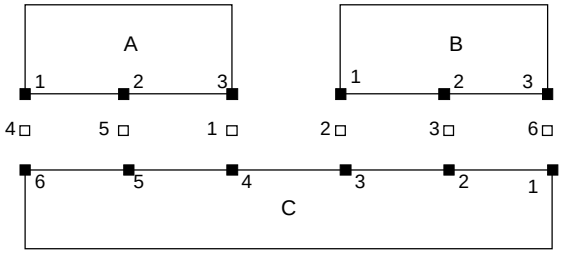
Este vector de cargas tiene dos términos. El primero representa las fuerzas actuantes sobre la subestructura *i*-sima, proyectado a sus fronteras $\mathbf{F}_B^{*i}$ y ensamblado en el vector total de fuerzas. El segundo término corresponde a las fuerzas exteriores que se aplican directamente sobre los nudos de unión, y que no hayan sido tenidas en cuenta en las subestructuras.

La resolución del sistema (12.29) permite calcular las deformaciones de los nudos de unión. Este sistema final de ecuaciones es mucho menor que el de toda la estructura en su conjunto, pues contiene como incógnitas únicamente a las deformaciones de los nudos frontera, cuyo número es pequeño si las fronteras están bien elegidas.

Ejemplo. *La figura muestra tres subestructuras A, B y C, que se conectan entre sí mediante 6 nudos de unión. Cada una de ellas tiene una numeración independiente de las demás, la cual establece el orden de los grados de libertad en su matriz de rigidez.*



Los nudos de unión se indican mediante los cuadros blancos en la figura siguiente. Nótese que se ha empleado otra numeración distinta para los nudos de unión, que es la que establece el orden de los grados de libertad en las ecuaciones del conjunto ensamblado (matriz $\mathbf{K}_{UU}$*). Por lo tanto es necesario establecer una correspondencia entre las numeraciones propias de las subestructuras y las de los nudos frontera compartidos por ellas.*



Esta correspondencia se establece mediante la matrices de ordenación $\mathbf{B}$ *de las tres subestructuras, que son:*

$$\mathbf{B}_A = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & \mathbf{I} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \mathbf{I} & 0 \\ \mathbf{I} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad \mathbf{B}_C = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \mathbf{I} \\ 0 & 0 & \mathbf{I} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \mathbf{I} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \mathbf{I} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \mathbf{I} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \mathbf{I} & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad \mathbf{B}_B = \begin{bmatrix} 0 & \mathbf{I} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \mathbf{I} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \mathbf{I} \end{bmatrix}$$

donde las $\mathbf{I}$ *indican matrices identidad de tamaño 3x3.*

Las matrices de rigidez condensadas de las subestructuras A y B a sus nudos frontera son:

$$\mathbf{K}_{BB}^{*A} = \begin{bmatrix} \mathbf{A}_{11} & \mathbf{A}_{12} & \mathbf{A}_{13} \\ \mathbf{A}_{21} & \mathbf{A}_{22} & \mathbf{A}_{23} \\ \mathbf{A}_{31} & \mathbf{A}_{32} & \mathbf{A}_{33} \end{bmatrix} \qquad \mathbf{K}_{BB}^{*B} = \begin{bmatrix} \mathbf{B}_{11} & \mathbf{B}_{12} & \mathbf{B}_{13} \\ \mathbf{B}_{21} & \mathbf{B}_{22} & \mathbf{B}_{23} \\ \mathbf{B}_{31} & \mathbf{B}_{32} & \mathbf{B}_{33} \end{bmatrix}$$

y su contribución a la matriz de rigidez de los nudos de unión es:

$$\mathbf{K}_{UU}^{(A+B)} = \mathbf{B}_A^T \mathbf{K}_{BB}^{*A} \mathbf{B}_A + \mathbf{B}_B^T \mathbf{K}_{BB}^{*B} \mathbf{B}_B = \begin{bmatrix} \mathbf{A}_{33} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{A}_{31} & \mathbf{A}_{32} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{B}_{11} & \mathbf{B}_{12} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{B}_{13} \\ \mathbf{0} & \mathbf{B}_{21} & \mathbf{B}_{22} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{B}_{23} \\ \mathbf{A}_{13} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{A}_{11} & \mathbf{A}_{12} & \mathbf{0} \\ \mathbf{A}_{23} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{A}_{21} & \mathbf{A}_{22} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{B}_{31} & \mathbf{B}_{32} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{B}_{33} \end{bmatrix}$$

Nótese que están desacopladas, pues las subestructuras A y B no tienen ningún nudo en común en el sistema ensamblado total. De forma análoga se obtiene la colaboración de la subestructura C, que es:

$$\mathbf{K}_{UU}^{(C)} = \mathbf{B}_C^T \mathbf{K}_{BB}^{*C} \mathbf{B}_C = \begin{bmatrix} \mathbf{C}_{44} & \mathbf{C}_{43} & \mathbf{C}_{42} & \mathbf{C}_{46} & \mathbf{C}_{45} & \mathbf{C}_{41} \\ \mathbf{C}_{34} & \mathbf{C}_{33} & \mathbf{C}_{32} & \mathbf{C}_{36} & \mathbf{C}_{35} & \mathbf{C}_{31} \\ \mathbf{C}_{24} & \mathbf{C}_{23} & \mathbf{C}_{22} & \mathbf{C}_{26} & \mathbf{C}_{25} & \mathbf{C}_{21} \\ \mathbf{C}_{64} & \mathbf{C}_{63} & \mathbf{C}_{62} & \mathbf{C}_{66} & \mathbf{C}_{65} & \mathbf{C}_{61} \\ \mathbf{C}_{54} & \mathbf{C}_{53} & \mathbf{C}_{52} & \mathbf{C}_{56} & \mathbf{C}_{55} & \mathbf{C}_{51} \\ \mathbf{C}_{14} & \mathbf{C}_{13} & \mathbf{C}_{12} & \mathbf{C}_{16} & \mathbf{C}_{15} & \mathbf{C}_{11} \end{bmatrix}$$

y que se suma a la rigidez debida a A y B.

12.3.3 Vuelta atrás

Una vez resueltas las ecuaciones de equilibrio del conjunto, y calculadas las deformaciones de las fronteras entre subestructuras $\boldsymbol{\Delta}_U$, interesa poder conocer los desplazamientos en el interior de una subestructura cualquiera $\boldsymbol{\Delta}_E^i$. El proceso a seguir para ello es muy simple:

- Se extraen las deformaciones de las fronteras de la subestructura *i*, del vector de deformaciones de todas las fronteras $\boldsymbol{\Delta}_U$, empleando para ello la matriz $\mathbf{B}_i$ de esa subestructura:

$$\boldsymbol{\Delta}_B^i = \mathbf{B}_i \boldsymbol{\Delta}_U \tag{12.32}$$

- Las deformaciones de los nudos interiores a la subestructura *i* se calculan mediante la ecuación (12.17), empleada anteriormente para condensar la subestructura:

$$\boldsymbol{\Delta}_E = \mathbf{K}_{EE}^{-1} \mathbf{F}_E - \mathbf{K}_{EE}^{-1} \mathbf{K}_{EB} \boldsymbol{\Delta}_B \tag{12.33}$$

- Conociendo las deformaciones en el interior de la subestructura, los esfuerzos en sus elementos se calculan siguiendo el proceso habitual.

12.4 VENTAJAS E INCONVENIENTES DEL ANÁLISIS MEDIANTE SUBESTRUCTURAS

La técnica de análisis por subestructuras no tiene ninguna ventaja desde el punto de vista del costo computacional (es decir del número de operaciones a efectuar y por lo tanto del tiempo de cálculo), respecto al análisis de la estructura completa. Aunque el sistema final de ecuaciones para el conjunto de los nudos de unión es de pequeño tamaño, pues sólo engloba a los nudos frontera, hay que tener en cuenta el esfuerzo de cálculo necesario para hallar las matrices condensadas de las subestructuras $\mathbf{K}^*_{BB}$, y en particular para hallar la matriz $\mathbf{K}^{-1}_{EE}$. Se puede demostrar que el número de operaciones necesarias para hallar las $\mathbf{K}^*_{BB}$ de todas las subestructuras, más el número de operaciones necesarias para resolver el sistema final (12.29), es igual al número de operaciones necesario para resolver la estructura completa, sin dividirla en subestructuras.

Esta técnica es por lo tanto necesaria cuando la capacidad de almacenamiento del programa de computador es limitada y no permite almacenar simultáneamente todo el volumen de información (básicamente la matriz $\mathbf{K}$) de la estructura completa. Con la gran capacidad de los ordenadores actuales, es necesario un enorme tamaño de la estructura para saturar su capacidad, y de hecho esta saturación no se produce en las estructuras habituales para edificación. Sin embargo en sistemas estructurales muy complejos, estudiados por el método de los elementos finitos, es fácil alcanzar dicho límite.

Como inconveniente principal hay que indicar que esta técnica requiere una programación más complicada para hallar las matrices y vectores de la subestructura. Por otra parte requiere almacenar en disco las matrices $\mathbf{K}^{-1}_{EE}$, $\mathbf{K}_{BE}$, etc. de las distintas subestructuras, así como las matrices $\mathbf{B}_i$, a fin de efectuar la vuelta atrás.

Una de las grandes ventajas de esta técnica se manifiesta cuando la estructura total tiene zonas iguales, que se repiten varias veces. En este caso se puede definir una subestructura que corresponde a la zona repetida, y calcular su matriz condensada $\mathbf{K}^*_{BB}$ una sola vez. A continuación esta matriz se ordena en la matriz $\mathbf{K}_{UU}$ del conjunto tantas veces como se presente la subestructura repetida, cambiando su matriz de ordenación $\mathbf{B}_i$. En este caso la ganancia en tiempo, y el ahorro en almacenamiento periférico son muy grandes, pero lógicamente dependen de la repetitividad de la subestructura.

Otra ventaja práctica radica en que muchos sistemas estructurales complejos (aviones, máquinas herramientas, buques ...) suelen ser diseñados por equipos de diseño distintos, a menudo alejados geográficamente. En este caso la técnica de subestructuras aporta una enorme flexibilidad de operación pues cada equipo considera a su parte de la estructura como una subestructura, calcula su matriz de rigidez, la condensa a sus fronteras y la envía a otro equipo encargado de la integración del conjunto. Este equipo se encarga de ensamblar todas las subestructuras y calcular las deformaciones de las fronteras de unión. El proceso de vuelta atrás se efectúa de nuevo por los equipos individuales.

Estas últimas ventajas de tipo práctico del método, relativas a la facilidad del análisis estructural, son más interesantes que sus inconvenientes en algunos casos, y ello hace que la técnica de subestructuras sea actualmente empleada para el análisis de sistemas estructurales muy complejos, aunque no para las estructuras habituales de edificación.

12.5 EJERCICIOS RESUELTOS

12.5.1 Obtener la matriz de rigidez del elemento empotrado - articulado por condensación.

Se parte del elemento biempotrado y se elimina θ_J, imponiendo la condición $M_J=0$. Para simplificar el desarrollo no se consideran los grados de libertad de deformación axial, por estar desacoplados de la flexión (figura 12.2).

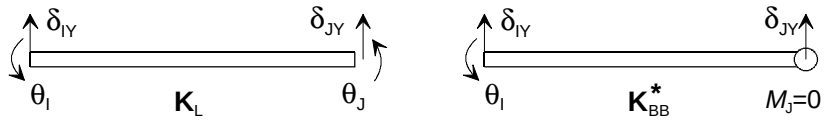


Figura 12.2

El vector de grados de libertad se divide en: $\boldsymbol{\delta} = \begin{Bmatrix} \boldsymbol{\delta}_B \\ \boldsymbol{\delta}_E \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \delta_{IY} \\ \theta_I \\ \delta_{JY} \\ \theta_J \end{Bmatrix}$

De forma análoga, la matriz de rigidez del elemento original es:

$$\mathbf{K}_L = \begin{bmatrix} \mathbf{K}_{BB} & \mathbf{K}_{BE} \\ \mathbf{K}_{EB} & \mathbf{K}_{EE} \end{bmatrix} = EI \begin{bmatrix} \frac{12}{L^3} & \frac{6}{L^2} & -\frac{12}{L^3} & \frac{6}{L^2} \\ \frac{6}{L^2} & \frac{4}{L} & -\frac{6}{L^2} & \frac{2}{L} \\ -\frac{12}{L^3} & -\frac{6}{L^2} & \frac{12}{L^3} & -\frac{6}{L^2} \\ \frac{6}{L^2} & \frac{2}{L} & -\frac{6}{L^2} & \frac{4}{L} \end{bmatrix}$$

La matriz de rigidez del nuevo elemento se obtiene aplicando la ecuación (12.14):

$$\mathbf{K}^*_{BB} = EI \begin{bmatrix} \frac{12}{L^3} & \frac{6}{L^2} & -\frac{12}{L^3} \\ \frac{6}{L^2} & \frac{4}{L} & -\frac{6}{L^2} \\ -\frac{12}{L^3} & -\frac{6}{L^2} & \frac{12}{L^3} \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} \frac{6EI}{L^2} \\ \frac{2EI}{L} \\ -\frac{6EI}{L^2} \end{bmatrix} \left[\frac{4EI}{L} \right]^{-1} \begin{bmatrix} \frac{6EI}{L^2} & \frac{2EI}{L} & -\frac{6EI}{L^2} \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{K}^*_{BB} = EI \begin{bmatrix} \frac{3}{L^3} & \frac{3}{L^2} & -\frac{3}{L^3} \\ \frac{3}{L^2} & \frac{3}{L} & -\frac{3}{L^2} \\ -\frac{3}{L^3} & -\frac{3}{L^2} & \frac{3}{L^3} \end{bmatrix} \begin{matrix} \delta_{IY} \\ \theta_I \\ \delta_{JY} \end{matrix}$$

12.5.2 Obtener una expresión general del vector de fuerzas nodales equivalentes de fase 0 para un elemento empotrado - articulado, partiendo del elemento biempotrado.

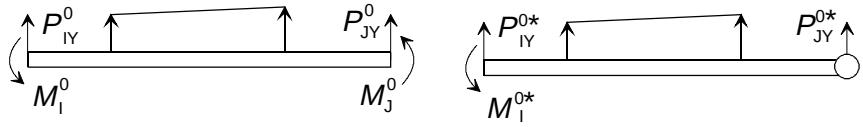


Figura 12.3

La expresión de las fuerzas buscadas viene dada por la ecuación (12.15):

$$\mathbf{P}_B^{0*} = \mathbf{P}_B^0 - \mathbf{K}_{BE}\mathbf{K}_{EE}^{-1}\mathbf{P}_E^0$$

Empleando la separación en grados de libertad del ejercicio 12.5.1, y sustituyendo los distintos valores se obtiene:

$$\mathbf{P}_B^{0*} = \begin{Bmatrix} P_{IY}^0 \\ M_I^0 \\ P_{JY}^0 \end{Bmatrix} - \begin{bmatrix} \frac{6EI}{L^2} \\ \frac{2EI}{L} \\ -\frac{6EI}{L^2} \end{bmatrix} \left[\frac{4EI}{L}\right]^{-1} \left\{M_J^0\right\}$$

$$\mathbf{P}_B^{0*} = \begin{Bmatrix} P_{IY}^{0*} \\ M_I^{0*} \\ P_{JY}^{0*} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} P_{IY}^0 - \frac{3M_J^0}{2L} \\ M_I^0 - \frac{M_J^0}{2} \\ P_{JY}^0 + \frac{3M_J^0}{2L} \end{Bmatrix}$$

donde las magnitudes con el superíndice * corresponden al elemento modificado (empotrado - articulado). La expresión anterior es general y permite calcular las fuerzas de empotramiento en un elemento empotrado - articulado, a partir de las fuerzas en uno biempotrado, para cualquier tipo de carga exterior.

Por ejemplo, para el caso de una fuerza distribuida uniforme *q* actuando según el eje Y local positivo:

$$\mathbf{P}_B^0 = \begin{Bmatrix} P_{IY}^0 \\ M_I^0 \\ P_{JY}^0 \\ M_J^0 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} -\frac{qL}{2} \\ -\frac{qL^2}{12} \\ -\frac{qL}{2} \\ \frac{qL^2}{12} \end{Bmatrix} \qquad \mathbf{P}_B^{0*} = \begin{Bmatrix} P_{IY}^{0*} \\ M_I^{0*} \\ P_{JY}^{0*} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} -\frac{5qL}{8} \\ -\frac{qL^2}{8} \\ -\frac{3qL}{8} \end{Bmatrix}$$

12.5.3 Obtener una expresión general del vector de fuerzas nodales equivalentes de fase 0 de un elemento articulado - empotrado (figura 12.4).

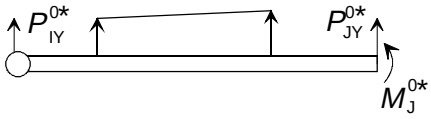


Figura 12.4

Partiendo del elemento biempotrado, la separación entre los tres grados de libertad mantenidos y el eliminado es:

$$\boldsymbol{\delta} = \begin{Bmatrix} \boldsymbol{\delta}_B \\ \boldsymbol{\delta}_E \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \delta_{IY} \\ \delta_{JY} \\ \theta_J \\ \theta_I \end{Bmatrix}$$

Con esta separación de los grados de libertad, la reordenación de la matriz de rigidez es:

$$\mathbf{K}_L = \begin{bmatrix} \mathbf{K}_{BB} & \mathbf{K}_{BE} \\ \mathbf{K}_{EB} & \mathbf{K}_{EE} \end{bmatrix} = EI \begin{bmatrix} \frac{12}{L^3} & -\frac{12}{L^3} & \frac{6}{L^2} & \frac{6}{L^2} \\ -\frac{12}{L^3} & \frac{12}{L^3} & -\frac{6}{L^2} & -\frac{6}{L^2} \\ \frac{6}{L^2} & -\frac{6}{L^2} & \frac{4}{L} & \frac{2}{L} \\ \frac{6}{L^2} & -\frac{6}{L^2} & \frac{2}{L} & \frac{4}{L} \end{bmatrix}$$

El vector de fuerzas nodales equivalentes para el elemento modificado vale:

$$\mathbf{P}_B^{0*} = \mathbf{P}_B^0 - \mathbf{K}_{BE}\mathbf{K}_{EE}^{-1}\mathbf{P}_E^0$$

Desarrollando los distintos términos se obtiene la expresión siguiente, que es general y puede particularizarse para cualquier tipo de carga:

$$\mathbf{P}_B^{0*} = \begin{Bmatrix} P_{IY}^{0*} \\ P_{JY}^{0*} \\ M_J^{0*} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} P_{IY}^{0} \\ P_{JY}^{0} \\ M_J^{0} \end{Bmatrix} - \begin{bmatrix} \frac{6EI}{L^2} \\ -\frac{6EI}{L^2} \\ \frac{2EI}{L} \end{bmatrix} \left[\frac{4EI}{L}\right]^{-1} \left\{M_I^0\right\} = \begin{Bmatrix} P_{IY}^0 - \frac{3M_I^0}{2L} \\ P_{JY}^0 + \frac{3M_I^0}{2L} \\ M_J^0 - \frac{M_I^0}{2} \end{Bmatrix}$$

12.5.4 Obtener la expresión de la matriz de rigidez a flexión de un elemento combinado, formado por dos vigas del mismo material, con longitud *L* cada una de ellas, y momentos de inercia 2*I* e *I*, como se indica en la figura 12.5.

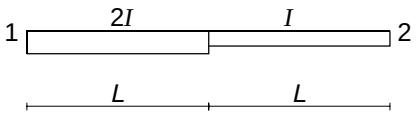


Figura 12.5

El elemento combinado se modeliza con dos elementos viga A y B, considerando sólo el efecto de flexión, por lo que cada nudo tiene dos deformaciones: la flecha vertical y el giro. La figura 12.6 muestra la numeración de nudos y grados de libertad. Existe un sólo nudo interior, cuyos grados de libertad van a ser eliminados para obtener el elemento combinado.

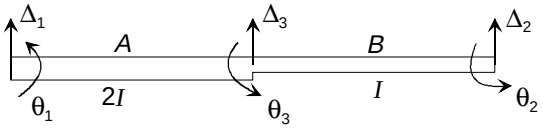


Figura 12.6

La matriz de rigidez original de los dos elementos combinados se obtiene por ensamblaje de las matrices de los elementos A y B según los diferentes grados de libertad. La matriz ensamblada que se obtiene es:

$$\mathbf{K} = \left[\begin{array}{cccc|cc} \frac{12E2I}{L^3} & \frac{6E2I}{L^2} & 0 & 0 & -\frac{12E2I}{L^3} & \frac{6E2I}{L^2} \\ \frac{6E2I}{L^2} & \frac{4E2I}{L} & 0 & 0 & -\frac{6E2I}{L^2} & \frac{2E2I}{L} \\ 0 & 0 & \frac{12EI}{L^3} & -\frac{6EI}{L^2} & -\frac{12EI}{L^3} & -\frac{6EI}{L^2} \\ 0 & 0 & -\frac{6EI}{L^2} & \frac{4EI}{L} & \frac{6EI}{L^2} & \frac{2EI}{L} \\ \hline -\frac{12E2I}{L^3} & -\frac{6E2I}{L^2} & -\frac{12EI}{L^3} & \frac{6EI}{L^2} & \frac{12E2I}{L^3}+\frac{12EI}{L^3} & -\frac{6E2I}{L^2}+\frac{6EI}{L^2} \\ \frac{6E2I}{L^2} & \frac{2E2I}{L} & -\frac{6EI}{L^2} & \frac{2EI}{L} & -\frac{6E2I}{L^2}+\frac{6EI}{L^2} & \frac{4E2I}{L}+\frac{4EI}{L} \end{array}\right] \begin{matrix} \Delta_1 \\ \theta_1 \\ \Delta_2 \\ \theta_2 \\ \hline \Delta_3 \\ \theta_3 \end{matrix}$$

En ella se identifican las distintas submatrices:

$$\mathbf{K} = \begin{bmatrix} \mathbf{K}_{BB} & \mathbf{K}_{BE} \\ \mathbf{K}_{EB} & \mathbf{K}_{EE} \end{bmatrix}$$

La matriz de rigidez del elemento combinado está dada por la expresión:

$$\mathbf{K}^{*}_{BB} = \mathbf{K}_{BB} - \mathbf{K}_{BE}\mathbf{K}^{-1}_{EE}\mathbf{K}_{EB}$$

Con lo que se obtiene la siguiente matriz, referida a los dos nudos extremos:

$$\mathbf{K}^{*}_{BB} = \frac{EI}{11}\begin{bmatrix} \frac{24}{L^3} & \frac{28}{L^2} & -\frac{24}{L^3} & \frac{20}{L^2} \\ \frac{28}{L^2} & \frac{40}{L} & -\frac{28}{L^2} & \frac{16}{L} \\ -\frac{24}{L^3} & -\frac{28}{L^2} & \frac{24}{L^3} & -\frac{20}{L^2} \\ \frac{20}{L^2} & \frac{16}{L} & -\frac{20}{L^2} & \frac{24}{L} \end{bmatrix} \begin{matrix} \Delta_1 \\ \theta_1 \\ \Delta_2 \\ \theta_2 \end{matrix}$$

12.6 BIBLIOGRAFÍA

1. Kardestuncer, H., *Introducción al Análisis Estructural con Matrices*, McGraw-Hill, Mexico, 1975.
2. Przemieniecki, J. S., *Theory of Matrix Structural Analysis*, McGraw-Hill, New York, 1968.
3. Sennett, R. E., *Matrix Analysis of Structures*, Prentice-Hall, Englewood Cliffs, 1994.

12.7 PROBLEMAS

12.7.1 Determinar la matriz de rigidez de un arco empotrado articulado de directriz parabólica, con luz L y flecha f, a partir de la matriz de rigidez del arco empotrado en ambos extremos, obtenida en el ejercicio 7.17.5. Suponer una variación del momento de inercia según la ley de la secante y despreciar la energía de esfuerzo axial.

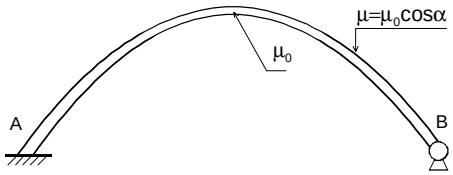


Figura P12.1

12.7.2 Obtener la matriz de rigidez de un elemento combinado formado por una viga de longitud L y rigidez EI, unida en ambos extremos a dos muelles al giro iguales, de rigidez K (figura P12.2).

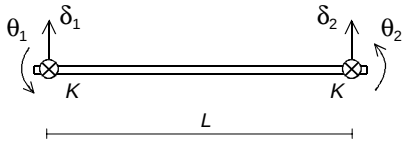


Figura P12.2

12.7.3 Determinar las fuerzas de empotramiento perfecto (fase 0) de un arco empotrado articulado de directriz parabólica, con luz L y flecha f (figura P12.1), a partir de las correspondientes al arco empotrado en ambos extremos. Suponer una variación del momento de inercia según la ley de la secante y despreciar la energía de esfuerzo axial.

12.7.4 Obtener la matriz de rigidez para el elemento compuesto mostrado en la figura P12.3, cuyos extremos están reforzados con una zona de inercia $2I$.

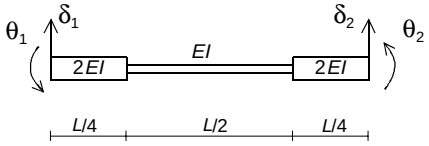


Figura P12.3

Capítulo 13

Método de distribución de momentos

13.1 INTRODUCCIÓN

El método del rigidez lleva al planteamiento de un sistema de ecuaciones de equilibrio cuya resolución proporciona los giros y desplazamientos de los nudos, y a partir de ellos se calculan los esfuerzos en las barras. La necesidad de resolver el sistema final de ecuaciones de equilibrio hizo que el método de rigidez resultara de escaso interés práctico antes de la aparición de los computadores. Para evitar la resolución del sistema de ecuaciones completo se desarrollaron varios métodos que trataban de resolverlo de forma iterativa, mediante aproximaciones sucesivas, a fin de permitir su resolución a mano. En esta línea hay que mencionar los trabajos de Mohr sobre cálculo de tensiones secundarias en celosías y de Calísev (1923) sobre estudio de pórticos hiperestáticos para edificios.

El método de la distribución de momentos para pórticos fue publicado por H. Cross en su forma final entre 1930 y 1932. Este método se presenta como un método de aproximaciones sucesivas, basado en el método de rigidez, pero que no emplea las deformaciones de los nudos como incógnitas primarias, sino que en su lugar utiliza los momentos en los extremos de las barras. De esta manera el método tiene una interpretación física muy sencilla y es fácil de aplicar a mano, por lo que tuvo una enorme difusión antes de la aparición de los computadores.

El método de Cross evita utilizar simultáneamente todas los deformaciones de los nudos como incógnitas del problema. Lo que hace es considerar los distintos giros y desplazamientos de la estructura uno por uno, e imponer la condición de equilibrio de momentos en los nudos, inmediatamente después de haber dejado moverse a un determinado giro o desplazamiento. De esta manera se genera un proceso iterativo, en el que se van dejando mover sucesivamente todos los giros o desplazamientos, a fin de

mantener siempre el equilibrio de momentos en los nudos. En una fase posterior se impone el equilibrio de fuerzas cortantes.

Así pues, el equilibrio no se aplica de forma simultánea para toda la estructura, sino por fases, primero los giros y luego los desplazamientos, y después de cada fase se restablece el equilibrio de momentos. De esta manera se van obteniendo los momentos en los nudos por aproximaciones sucesivas, sin tener que resolver un sistema de ecuaciones. Además de ser atractivo para el cálculo manual de estructuras, tiene una interpretación física muy directa, que lo hace interesante para estudiar la forma en que la estructura soporta los esfuerzos, y en consecuencia también como método para la formación de analistas de estructuras.

A fin de simplificar el análisis, el método de Cross añade una nueva hipótesis simplificativa: considera que *las barras son infinitamente rígidas a esfuerzo axial*, es decir que no acumulan energía de dicho tipo y que por lo tanto no sufren ningún acortamiento ni alargamiento longitudinal. Esta hipótesis es válida en la mayor parte de los casos prácticos, en particular en estructuras de edificación.

La consecuencia inmediata de dicha hipótesis es que el número de grados de libertad de desplazamiento de la estructura disminuye notablemente, facilitando su cálculo. De hecho los nudos ya no tienen todos dos desplazamientos en el plano, como ocurre en el método de rigidez, sino que estos desplazamientos de los nudos se sustituyen por una serie de desplazamientos globales que afectan a conjuntos de barras, y que se llaman genéricamente *traslaciones*. El número de estas traslaciones existentes en una estructura es siempre muy inferior al número de desplazamientos de los nudos, pero su identificación no es simple, y de hecho constituye uno de los aspectos más complicados del método.

13.2 Descripción general del método de Cross

La aplicación práctica del método de Cross se hace de una manera sistemática, mediante una serie de fases bien definidas. Su objetivo final es obtener los momentos que aparecen en los extremos de las barras de la estructura, de tal forma que se cumpla con el equilibrio de los nudos, y se permitan todas las deformaciones posibles de la estructura (giros y traslaciones).

Las distintas fases de análisis, que se explican en detalle en los siguientes apartados, se basan en el siguiente esquema general:

1. Suponer fijos todos los posibles desplazamientos y giros de la estructura, y calcular los momentos que se generan en los extremos de las barras en este estado, a consecuencia de las fuerzas exteriores actuantes en ellas.
2. Dejar girar todos los nudos de la estructura, manteniendo fijas todas las traslaciones, a fin de permitir el equilibrio de momentos en todos los nudos.
3. Dejar libres todas las traslaciones posibles en la estructura de forma sucesiva, y calcular los momentos debidos a ellas, que son función de los desplazamientos, los cuales son a su vez desconocidos. En esta fase se mantienen fijos los giros de todos los nudos, por lo que éstos quedan desequilibrados.

4. Dejar girar los nudos, bajo la acción de los momentos de desequilibrios obtenidos en la fase 3, a fin de alcanzar nuevamente el equilibrio de momentos en los nudos.

5. Aplicar una serie de ecuaciones de equilibrio estático en la estructura, a fin de calcular los valores de las traslaciones.

Los momentos finales en los extremos de las barras, son la suma de los obtenidos las fases 2 y 4. Como ya se ha indicado antes, y ha podido quedar patente en la descripción anterior del método de Cross, éste es sencillamente una aplicación del método de rigidez en la que no se ensambla el sistema de ecuaciones de equilibrio, sino que éstas se van resolviendo de forma iterativa una tras otra. Además, no se trabaja con las deformaciones sino con los momentos en los extremos de las barras, que son proporcionales a ellas (a través de las ecuaciones de equilibrio de las mismas), y que tienen normalmente mucho más interés para el analista. El ejercicio 13.6.5 estudia el paralelismo entre el método de rigidez y el de la distribución de momentos, empleando un ejemplo sencillo. Comparando dicho ejercicio con el 13.5.3 se pone de manifiesto al extraordinaria habilidad en el planteamiento del método de Cross. De hecho este método fue masivamente empleado hasta la generalización del uso de los computadores, y debe decirse que para el cálculo a mano de un pórtico aún hoy resulta el más ventajoso de todos los métodos disponibles.

El criterio de signos utilizado en el método de Cross es diferente del empleado en el método de rigidez. Aquí se consideran momentos positivos sobre los nudos los que actúan en sentido antihorario, y positivos sobre las barras los que actúan en sentido horario, como se indica en la figura 13.1. Con este sentido de los momentos en las barras, los giros de los nudos se consideran positivos en sentido horario.

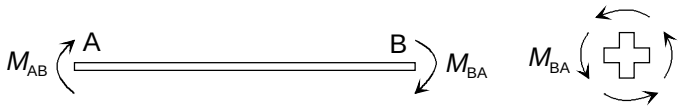


Figura 13.1

13.3 MOMENTOS DEBIDOS A LOS GIROS

Las dos primeras fases del método están destinadas a determinar los momentos que aparecen en los extremos de las barras a consecuencia exclusivamente de los giros de los nudos, bajo la acción de las fuerzas exteriores aplicadas. En estas dos fases no se consideran las posibles traslaciones de la estructura, por lo que se dice que la estructura está en un estado no traslacional. De hecho si una estructura no posee ninguna traslación, basta con aplicar para ella las dos primeras fases.

13.3.1 Fase 1

En esta primera fase se impide el giro (y también la traslación) de todos los nudos de la estructura, y en este estado se calculan los momentos que aparecen en los extremos de las barras. Al estar todos los nudos perfectamente fijos, se puede considerar que todas las barras están empotradas en ellos, y se comportan como barras biempotradas. Por lo tanto los momentos de esta fase son los momentos de empotramiento perfecto de cada una de las

barras, calculados independientemente unas de otras. Estos momentos se calculan habitualmente utilizando valores tabulados, o en su defecto mediante los métodos de Mohr, Castigliano..., y se denominan M^0.

Esta fase corresponde por lo tanto con la fase 0, o fase de empotramiento perfecto, del método de rigidez. Como consecuencia de ella los nudos no están en equilibrio, pues normalmente los momentos de empotramiento perfecto que aparecen en las barras que llegan a un nudo no lo están.

Sea un nudo al que concurren *n* barras, de longitudes L_i e inercias I_i. En él hay un momento de desequilibrio M^*, que es la suma de los momentos de empotramiento perfecto M^0, que se generan en las *n* barras.

$$M^* = \sum_i M_i^0 \tag{13.1}$$

Para que el nudo esté en equilibrio, hay que aplicar desde el exterior de la estructura un momento de valor igual al de desequilibrio cambiado de signo. Como este momento exterior no puede existir, debe ser anulado, y para ello se plantea la fase 2.

13.3.2 Fase 2

Como resultado de la fase 1, se originan unos momentos en los extremos de las barras, que hacen que, en general, los nudos no estén equilibrados. En esta fase 2 se van equilibrando sucesivamente todos los nudos, uno tras otro, a base de dejarlos girar bajo la influencia del momento de desequilibrio existente en cada nudo.

Se considera un nudo cualquiera, en el que existe un momento de desequilibrio M^*. Si se deja girar a este nudo bajo la influencia del momento M^*, manteniendo todos los demás nudos de la estructura fijos, girará un ángulo θ, cuyo valor se trata de determinar. Si el nudo gira, las barras unidas a él también lo hacen, y el momento que es necesario aplicar sobre una barra cualquiera de las que confluyen al nudo, para hacerla girar dicho ángulo θ, se obtiene de la ecuación de equilibrio de la barra, obtenida por el método de rigidez (ecuación7.58). Como todos los grados de libertad están fijos, excepto el giro θ del nudo, el único coeficiente de rigidez que aplica es el de rigidez directa para dicho giro, por lo que el momento en la barra *i* es:

$$M_{Di} = \frac{4EI_i}{L_i}\theta = K_i\theta \tag{13.2}$$

Donde se ha llamado genéricamente K_i a la rigidez al giro de la barra, que es el coeficiente de rigidez directa entre el momento en un extremo y su giro. Así pues, en el extremo de cada barra existe un momento M_{Di} dado por la expresión anterior. La ecuación de equilibrio de momentos del nudo es (figura 13.2):

$$M^* + \sum_i M_{Di} = 0 \tag{13.3}$$

o también, sustituyendo el momento en cada barra en función del giro:

$$M^* + \sum_i K_i\theta = 0 \tag{13.4}$$

de donde se obtiene el valor del giro del nudo:

$$\theta = \frac{-M^*}{\sum_i K_i} \tag{13.5}$$

Este es el valor del ángulo que debe girar el nudo en la fase 2, para equilibrar el momento de desequilibrio M^* que se originó en la fase 1, como se indica en la figura 13.2.

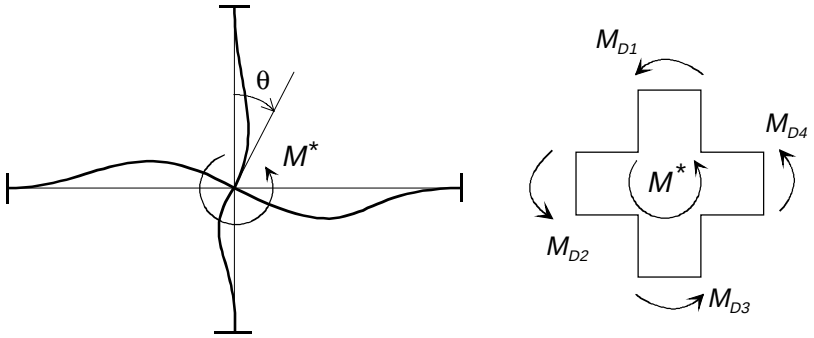


Figura 13.2

Al producirse el giro que provoca el equilibrio del nudo, sobre cada una de las barras aparece un momento que vale:

$$M_{Di} = K_i\theta = -\frac{K_i}{\sum_i K_i} M^* \tag{13.6}$$

A este momento M_{Di} se le llama *momento de distribución* en la barra *i*, y es la parte del momento de desequilibrio M^* que recibe la barra *i*, para equilibrar dicho momento de desequilibrio del nudo.

Se define el *factor de distribución* de la barra *i* en el nudo como:

$$D_i = \frac{K_i}{\sum_i K_i} \tag{13.7}$$

Este factor es una medida de la rigidez relativa de la barra *i* en este nudo. Como es evidente, la suma de todos los factores de distribución de un nudo vale 1. El momento de distribución en la barra *i* vale por lo tanto:

$$M_{Di} = -D_i M^* \tag{13.8}$$

Es decir que, en cada una de las barras que llegan al nudo, el momento de desequilibrio se distribuye proporcionalmente a la rigidez relativa de la barra en el nudo. Las barras más rígidas se llevan una mayor proporción del momento de desequilibrio.

Una vez distribuidos los momentos en el nudo, éste se halla en equilibrio, pero a continuación deben equilibrarse las barras que llegan a él. La ecuación de equilibrio de una

viga plana a flexión (ver apartado 7.6.1) indica que si un extremo gira un ángulo θ, y el extremo opuesto está fijo, en dicho extremo opuesto debe aplicarse un momento de valor:

$$M_{Ti} = \frac{2EI_i}{L_i}\theta = \frac{1}{2}K_i\theta = \frac{1}{2}M_{Di} \tag{13.9}$$

Por lo tanto para imponer el equilibrio de cada barra, tras el giro θ de un nudo, debe aplicarse en el otro extremo de la barra un momento de valor la mitad del momento de distribución que le ha correspondido a dicha barra. A este momento se le denomina *momento de transmisión* de la barra. Se dice, de manera simplista, que la barra tiene un *factor de transmisión* de valor ½, pues da la sensación de que la mitad del momento de distribución se ha transmitido al otro extremo de la barra, para mantenerla en equilibrio.

La figura 13.3 muestra el estado final en el que quedan las barras, empleando la notación habitual en la aplicación práctica del método de Cross, para un caso típico de un nudo con cuatro barras. La situación es la siguiente:

◊ En el nudo equilibrado, la barra *i* tiene un momento final de valor:

$$M_i = M_i^0 + M_{Di} = M_i^0 - D_i M^* \tag{13.10}$$

◊ En el otro extremo, la barra *i* tiene un momento de valor:

$$M_{Ti} = \frac{1}{2}M_{Di} = -\frac{1}{2}D_i M^* \tag{13.11}$$

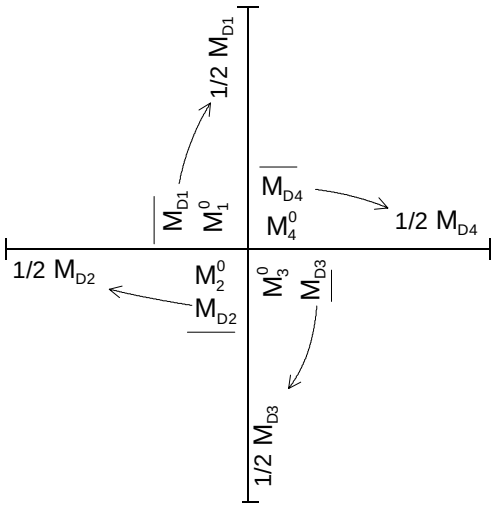


Figura 13.3

Si se suman los momentos finales en todas las barras que llegan al nudo, se obtiene que su suma total es 0, como debe ser, pues el nudo está equilibrado:

$$\sum_i M_i = \sum_i \left(M_i^0 - D_i M^*\right) = \sum_i M_i^0 - M^* \sum_i D_i = \sum_i M_i^0 - M^* = 0 \tag{13.12}$$

Este proceso se ha explicado para un sólo nudo, pero como en la estructura hay en general varios de ellos, el proceso a seguir es:

1. Seleccionar el nudo que mayor momento de desequilibrio tenga.
2. Equilibrar dicho nudo, como se ha explicado, apuntando sobre cada barra el momento de distribución que le corresponde. Para indicar que ya se ha distribuido momento a una barra, es habitual colocar un guión a continuación del momento que le ha correspondido.
3. Transmitir los momentos de transmisión a los extremos de las barras que confluyen en el nudo. Automáticamente esta transmisión desequilibra a los nudos que pudiesen estar equilibrados de operaciones anteriores.
4. Repetir los pasos 1 a 3 para todos los nudos de la estructura, uno tras otro, hasta equilibrarlos todos. Hay que hacer notar que al equilibrar un nudo se desequilibran sus vecinos por los momentos de transmisión. Esto hace que el proceso de equilibrado de todos los nudos (que se suele llamar "vuelta") deba repetirse varias veces, en un proceso iterativo, hasta lograr que todos estén equilibrados.

Teóricamente, y como en todo proceso iterativo, no se llega nunca al equilibrio perfecto, por lo que debe imponerse una tolerancia de error al proceso. Usualmente se considera que el proceso iterativo ha terminado cuando los momentos de desequilibrio son inferiores al 1% de los momentos de fase 1: $M^* \leq 0.01 \cdot M^0$.

La convergencia de este proceso iterativo de equilibrado está garantizada por el hecho de que el factor de transmisión es 1/2, por lo que los momentos que se transmiten a los nudos vecinos son cada vez menores. Para las estructuras usuales, el número de vueltas suele ser de tres o cuatro.

El giro que se produce en un nudo cada vez que se equilibra dicho nudo vale:

$$\theta = \frac{-M^*}{\sum_i K_i} \tag{13.13}$$

Por lo tanto el giro total de un nudo en esta fase 2 es:

$$\theta = \frac{-\sum_k M_k^*}{\sum_i K_i} \qquad k = 1, \text{número de vueltas} \tag{13.14}$$

donde M_k^* son los sucesivos momentos de desequilibrio que tiene el nudo, cada vez que se equilibra.

13.4 MOMENTOS DEBIDOS A LAS TRASLACIONES

Las tres últimas fases del método de Cross están destinadas a calcular los momentos que aparecen en los extremos de las barras a consecuencia de las deformaciones de traslación de la estructura. Estos momentos se sumarán a los obtenidos a consecuencia de los giros, en las fases 1 y 2, para dar los momentos finales.

13.4.1 Fase 3

Esta fase está destinada a liberar todas las traslaciones posibles de la estructura, manteniendo los nudos sin posibilidad de girar, sólo de trasladarse, y a calcular en esa situación los momentos que se generan en las barras. Por lo tanto en esta fase todas las barras de la estructura podrán tener un desplazamiento lateral relativo entre sus dos extremos, sin giro de los mismos. Se denomina Δ a dicho desplazamiento lateral, que en general será la diferencia entre el desplazamiento lateral del nudo final y el desplazamiento lateral correspondiente al nudo inicial.

La ecuación de equilibrio de una viga plana (ecuación 7.58) indica que si ésta se somete únicamente a un desplazamiento relativo entre sus dos extremos, de magnitud Δ, en dirección transversal a su eje y sin giro de los extremos, aparecen en dichos extremos unos momentos de valor:

$$M_{\Delta} = \frac{6EI_i\Delta}{L^2} \tag{13.15}$$

siendo $\Delta = \delta_{JY} - \delta_{IY}$. El sentido de estos momentos es el indicado en la figura 13.4.

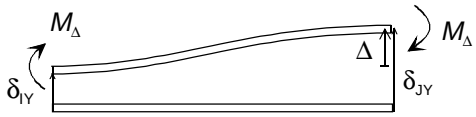


Figura 13.4

Por lo tanto, lo único que hay que determinar es el desplazamiento transversal Δ de cada barra. Para ello es necesario conocer cuántas configuraciones deformadas puede adoptar la estructura debido a las traslaciones, y cómo son.

El número de traslaciones de la estructura *t* se calcula utilizando la fórmula:

$$t = 2n - b - r \tag{13.16}$$

siendo *n* el número total de nudos, *b* el barras y *r* el número de restricciones al desplazamiento impuestas por los apoyos. Esta regla se basa en que cada nudo tiene dos posibilidades de desplazamiento en el plano, y que cada barra impone a dichos desplazamientos una restricción de distancia constante entre sus nudos extremos, a las que se suman las propias restricciones impuestas en los apoyos.

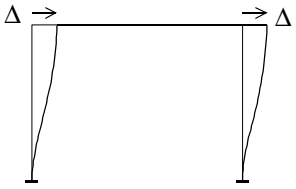
Si se cuenta bien el número de restricciones impuestas por los apoyos y las barras, esta fórmula suministra un valor correcto del número de traslaciones independientes, pero en todo caso es necesario identificarlas gráficamente, comprobando que todas ellas son realmente independientes.

Una vez calculado el número traslaciones, se debe determinar la forma de la deformada que adopta la estructura en cada una de ellas. Esto se hace eliminando una sola de las restricciones de traslación, manteniendo las demás fijas, y determinando la deformada por inspección. Se debe tener en cuenta que las barras no pueden deformarse axialmente, por lo que si se conoce la posición de un extremo, el otro estará situado sobre una línea perpendicular al eje de la barra, y a una distancia *L* del primer nudo. Realmente la determinación de la deformada de la estructura es una de las fase más críticas de este

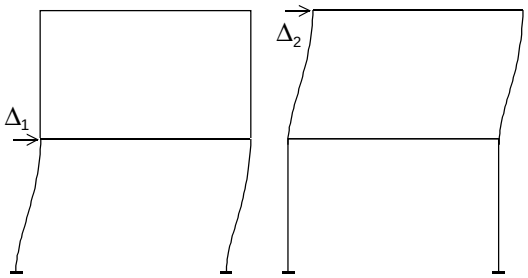
método, y requiere un buen conocimiento del funcionamiento de la estructura. Una vez dibujada la deformada, se calcula el valor de Δ para cada barra, y se determinan los momentos debidos a él empleando la ecuación (13.15), con su signo correcto.

Como el valor real de la traslación Δ no se conoce, se le asigna una variable α, β, γ, etc y todas las Δ de las barras se calculan en función de ellas, al igual que los momentos M_Δ. Es decir que todos los momentos calculados en esta fase serán proporcionales al desplazamiento real de la estructura, que es desconocido. Este proceso se repite para todas las traslaciones que tenga la estructura.

Ejemplos.



t =2 x 4 - 3 - 4 = 1



t = 2 x 6 - 6 - 4 = 2

13.4.2 Fase 4

Los momentos debidos a las traslaciones M_Δ determinados en la fase 3 no están, en general, equilibrados en los nudos. Para restituir el equilibrio, en esta fase 4 se van equilibrando sucesivamente todos los nudos, uno tras otro, a base de dejarlos girar bajo la influencia del desequilibrio de momentos existente en ese nudo. De esta forma, al final de la fase 4 se tiene a la estructura en una situación deformada por las traslaciones, y con los nudos girados la cantidad necesaria para alcanzar el equilibrio de momentos.

De la misma forma que la fase 3 se ha repetido para cada una de las traslaciones existentes en la estructura (α, β, γ, etc), la fase 4 se debe repetir también para cada una de ellas. Todo el proceso que se explica a continuación se debe por lo tanto repetir para cada una de ellas, por lo que puede hablarse de las subfases 4α, 4β, 4γ, etc.

Cualquiera de las subfases que forman la fase 4 es por lo tanto exactamente igual que la fase 2, pero utilizando como origen del desequilibrio a los momentos originados por la traslación de la estructura en la fase 3 correspondiente, en lugar de los momentos de empotramiento perfecto debidos a las cargas exteriores (fase 1).

El momento de desequilibrio que aparece en un nudo cualquiera en una de las subfases de la fase 3 es la suma de los momentos que aparecen en las distintas barras que se conectan a él, y se denomina:

$$M^{*3} = \sum_i M_{\Delta i} \qquad (13.17)$$

Con estos momentos de desequilibrio se efectúa un proceso iterativo, similar al de la fase 2, al final del cual los momentos en los nudos están equilibrados. Existen por lo tanto tantos

procesos de equilibrado como traslaciones haya en la estructura, y al final de cada uno de ellos se obtiene una distribución de momentos en las barras que está en equilibrio, pero cuyos valores son desconocidos al ser proporcionales al valor de la traslación.

13.4.3 Fase 5

Como resultado de las cuatro fases anteriores, se dispone de los momentos en los nudos, que forman un sistema en equilibrio y cuyos valores son del estilo:

$$M = M^2 + M^{4\alpha}\alpha + M^{4\beta}\beta + M^{4\gamma}\gamma + \ldots \tag{13.18}$$

Estos momentos tienen una parte de valor conocido M^2, debida a las cargas actuantes, (hallada en las fases 1 y 2), y otra parte de valor desconocido, debida a las traslaciones y que es proporcional a ellas, siendo $M^{4\alpha}, M^{4\beta}, \ldots$ los factores de proporcionalidad, hallados en la fase 4 por distribución de la fase 3.

En esta expresión no aparecen los giros como incógnitas, ya que en las fases 2 y 4 se ha permitido el giro de los nudos, al plantear el equilibrio de momentos. Sin embargo sí aparecen las traslaciones α, β, γ, ya que para éstas no se ha aplicado ninguna ecuación de equilibrio.

Esta es precisamente la misión de esta fase 5: determinar unas ecuaciones de equilibrio estático que permitan calcular el valor de las traslaciones α, β, γ, y con ellas los valores numéricos finales de los momentos en las barras. Dichas ecuaciones se obtienen en la práctica aplicando las siguientes reglas:

- ◊ Se aíslan determinadas zonas de la estructura, y se les imponen las condiciones de equilibrio estático. En estas condiciones de equilibrio estarán presentes los momentos y cortantes en los extremos de las barras.
- ◊ Los cortantes se sustituyen en función de los momentos, y para ello se aplica el equilibrio de fuerzas a cuantas barras sea necesario (no olvidando las fuerzas exteriores actuantes sobre la barra).
- ◊ Finalmente los momentos se sustituyen por su valor en función de las traslaciones α, β, γ, con lo que se obtendrán unas ecuaciones cuyas únicas incógnitas serán precisamente las α, β, γ,...

Hay que plantear tantas ecuaciones como traslaciones tenga la estructura. Resolviendo el sistema de *t* ecuaciones con *t* incógnitas se obtienen las traslaciones, lo que permite hallar el valor final de los momentos en los nudos.

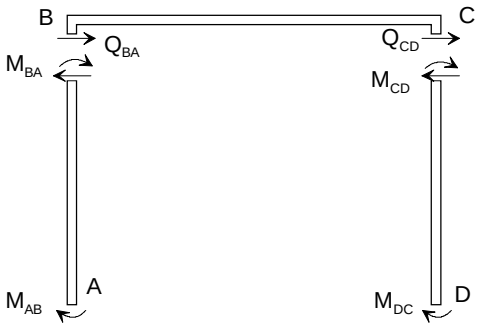
Plantear las ecuaciones de equilibrio puede ser a veces complejo y requiere cierta habilidad. Un método general para encontrar las ecuaciones de equilibrio consiste en aislar aquellas zonas de la estructura que se han desplazado en las distintas traslaciones, y aplicarles una condición de equilibrio de fuerzas en el sentido de la traslación. En ocasiones la traslación corresponde a una rotación de una parte de la estructura, por lo que la ecuación de equilibrio más inmediata es una de equilibrio de momentos respecto al punto de giro.

Ejemplo.

Un pórtico simple tiene una sola traslación horizontal del dintel. Por lo tanto la ecuación de equilibrio más inmediata es la de equilibrio horizontal del dintel:

$$\sum F_x^{BC} = 0$$

$$Q_{BA} + Q_{CD} + \sum F_{ext}^{BC} = 0$$



El valor del cortante BA se obtiene en función de los momentos considerando el equilibrio de la barra AB, y tomando momentos en ella respecto de A.

$$\sum M_A^{AB} = 0 \qquad M_{BA} + M_{AB} - Q_{BA} L_{BA} = 0$$

$$Q_{BA} = \frac{M_{BA} + M_{AB}}{L_{BA}}$$

De la misma forma el equilibrio de la barra CD permite obtener el cortante CD en función de los momentos:

$$\sum M_D^{CD} = 0 \qquad M_{CD} + M_{DC} - Q_{CD} L_{CD} = 0$$

$$Q_{CD} = \frac{M_{CD} + M_{DC}}{L_{CD}}$$

13.5 BARRAS ARTICULADAS

El tratamiento de las barras articuladas en un extremo es muy simple en el método de Cross. La única precaución a tomar es emplear los valores adecuados de sus propiedades de rigidez, que son los correspondientes a una barra empotrada - articulada (apartado 7.10).

- Rigidez al giro directa en un nudo:

$$K_i = 3EI / L \tag{13.19}$$

- Momento debido a las traslaciones laterales:

$$M_\Delta = 3EI\Delta / L^2 \tag{13.20}$$

En estas barras no se transmite por lo tanto ningún momento al extremo opuesto, ya que éste está articulado.

De la misma forma, los momentos de empotramiento perfecto de la fase 1 se deben calcular, lógicamente, para una barra empotrada articulada.

13.6 EJERCICIOS RESUELTOS

13.6.1 Calcular el diagrama de momentos flectores y el giro del apoyo B en la viga continua de la figura 13.5. Los dos vanos tienen las mismas propiedades *EI*.

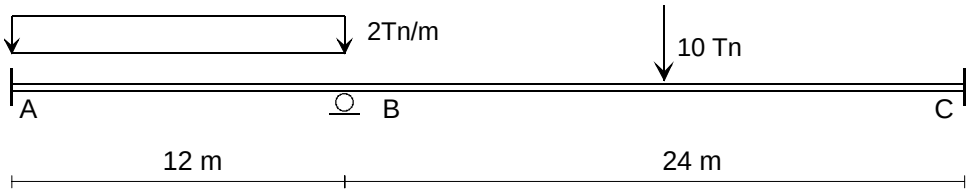


Figura 13.5

Las rigideces de las barras son:

$$K_{AB} = \frac{4EI}{12} \qquad K_{BC} = \frac{4EI}{24}$$

Los factores de distribución del nudo B son:

$$D_{BA} = \frac{K_{AB}}{K_{AB} + K_{BC}} = \frac{2}{3} \qquad D_{BC} = \frac{K_{BC}}{K_{AB} + K_{BC}} = \frac{1}{3}$$

Los momentos en la fase 1 son:

$$M^0_{AB} = -qL^2/12 = -24 \text{ mTn} \qquad M^0_{BA} = qL^2/12 = 24 \text{ mTn}$$

$$M^0_{BC} = -PL/8 = -30 \text{ mTn} \qquad M^0_{CB} = PL/8 = 30 \text{ mTn}$$

La fase 2 se muestra en la figura 13.6. El desequilibrio inicial en el nudo B es de -6 mTn. La iteración converge en una vuelta, pues sólo hay un nudo a equilibrar.

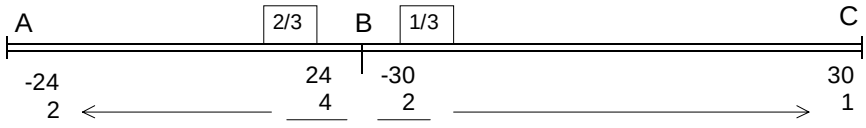


Figura 13.6

El resultado de la fase 2 se resume en la figura 13.7.

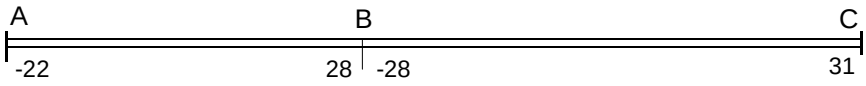


Figura 13.7

El giro del nudo B es:

$$\theta_B = \frac{-\sum_{vueltas} M^*}{\sum_{barras} K_i} = \frac{-(-6)}{4EI/12 + 4EI/24} = \frac{12}{EI} \text{ rad}$$

El diagrama de momentos flectores de la viga se muestra en la figura 13.8, utilizando el criterio de signos ingenieril.

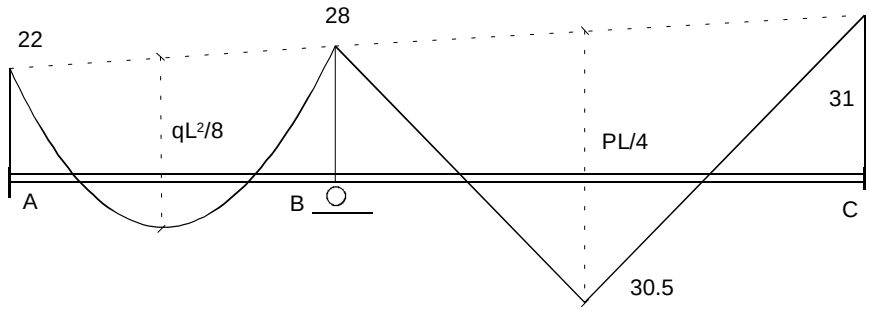


Figura 13.8

13.6.2 Calcular el diagrama de momentos flectores y el giro de los apoyos en la viga continua de 3 vanos mostrada en la figura 13.9.

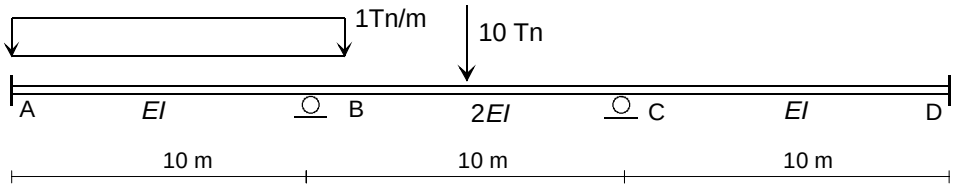


Figura 13.9

La rigidez de las distintas barras es:

$$K_{AB} = \frac{4EI}{10} \qquad K_{BC} = \frac{4E2I}{10} \qquad K_{CD} = \frac{4EI}{10}$$

Los factores de distribución en el nudo B son:

$$D_{BA} = \frac{4EI/10}{4EI/10 + 4E2I/10} = \frac{1}{3} \qquad D_{BC} = \frac{4E2I/10}{4EI/10 + 4E2I/10} = \frac{2}{3}$$

y en el nudo C:

$$D_{CB} = \frac{4E2I/10}{4EI/10 + 4E2I/10} = \frac{2}{3} \qquad D_{CD} = \frac{4EI/10}{4EI/10 + 4E2I/10} = \frac{1}{3}$$

Los momentos que se producen en la fase 1 son:

$$M^0_{AB} = -qL^2/12 = -8.33 \text{ mTn} \qquad M^0_{BA} = qL^2/12 = 8.33 \text{ mTn}$$

$$M_{BC}^{0} = -PL/8 = -12.5 \text{ mTn} \qquad M_{CB}^{0} = 12.5 \text{ mTn}$$

La fase 2 se muestra en la figura 13.10. El nudo más desequilibrado inicialmente es el C, con 12.5 mTn, y en él se comienza la iteración.

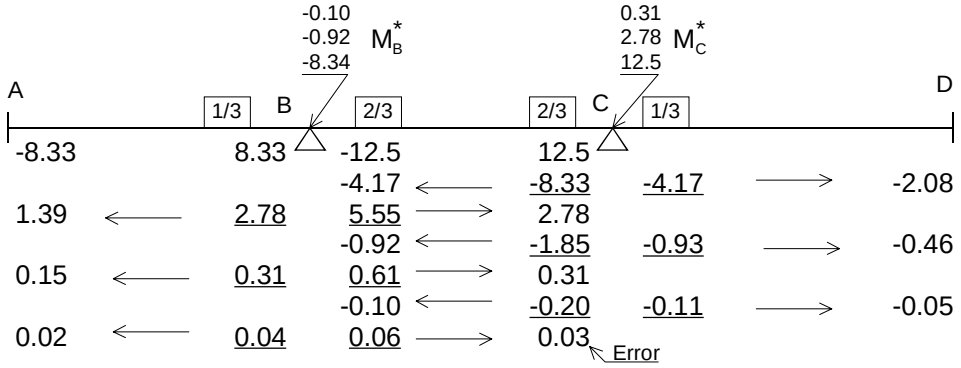


Figura 13.10

El resultado de la fase 2 se muestra en la figura 13.11.

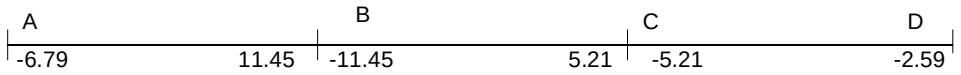


Figura 13.11

Los giros de los nudos son:

$$\theta_B = \frac{-\sum_{\text{vueltas}} M^*}{\sum_{\text{barras}} K_i} = \frac{-(-8.34-0.92-0.10)}{4EI/10 + 4E2I/10} = \frac{9.36}{1.2EI} = \frac{7.8}{EI} \text{ rad}$$

$$\theta_C = \frac{-\sum_{\text{vueltas}} M^*}{\sum_{\text{barras}} K_i} = \frac{-(12.5+2.78+0.31)}{4E2I/10 + 4EI/10} = \frac{-15.59}{1.2EI} = \frac{-12.99}{EI} \text{ rad}$$

La figura 13.12 muestra el diagrama de momentos flectores, con el criterio ingenieril.

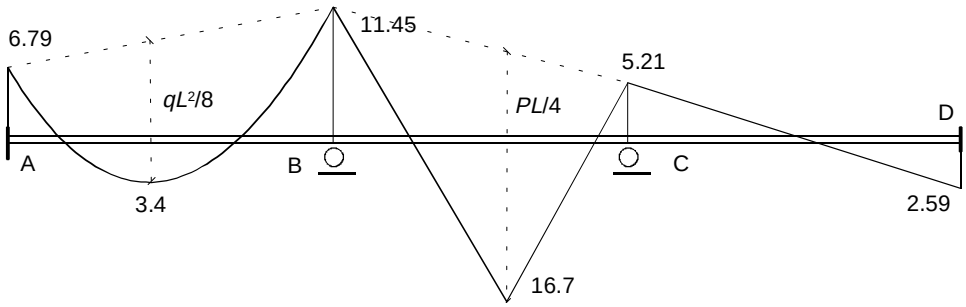


Figura 13.12

13.6.3 Calcular el diagrama de momentos flectores del pórtico simple mostrado en la figura 13.13.

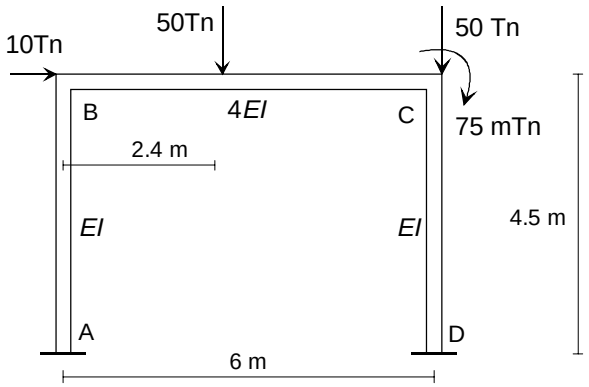


Figura 13.13

La rigidez de las distintas barras es:

$$K_{AB} = \frac{4EI}{4.5} \qquad K_{BC} = \frac{4E4I}{6} \qquad K_{CD} = \frac{4EI}{4.5}$$

Los factores de distribución en el nudo B son:

$$D_{BA} = \frac{4EI/4.5}{4EI/4.5 + 4E4I/6} = \frac{1}{4} \qquad D_{BC} = \frac{4E4I/6}{4EI/4.5 + 4E4I/6} = \frac{3}{4}$$

y en el nudo C:

$$D_{CB} = \frac{4E4I/6.5}{4EI/4.5 + 4E4I/6} = \frac{3}{4} \qquad D_{CD} = \frac{4EI/4.5}{4EI/4.5 + 4E4I/6} = \frac{1}{4}$$

En la fase 1 sólo produce momentos la fuerza de 50 Tn situada a 2.4 m de B, pues las restantes están en los nudos. Los momentos producidos por dicha fuerza son:

$$M^0_{AB} = -\frac{50 \cdot 2.4 \cdot (6-2.4)^2}{6^2} = -43.2 \text{ mTn} \qquad M^0_{BA} = \frac{50 \cdot (6-2.4) \cdot 2.4^2}{6^2} = 28.8 \text{ mTn}$$

La fase 2 se muestra en la figura 13.14. El momento puntual de 75 mTn en C se aplica en esta fase como un momento aplicado en el nudo, que proviene de la fase 1. Se comienza el equilibrado por el nudo C, cuyo desequilibrio es: -75 + 28.8 = -46.2 mTn.

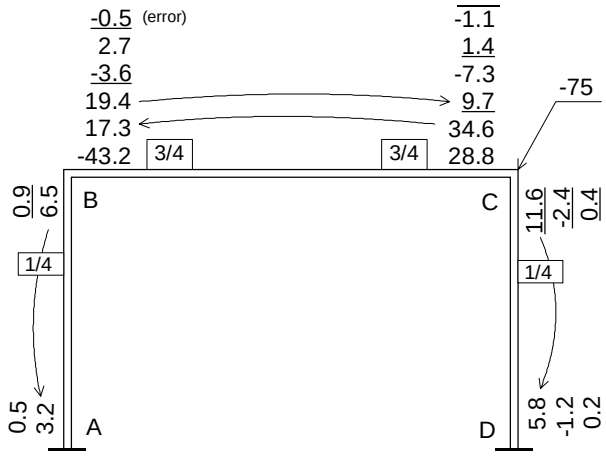


Figura 13.14

El resultado de la fase 2 se muestra en la figura 13.15.

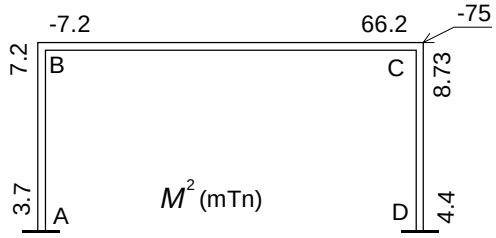


Figura 13.15

El número de traslaciones es de: t=2 x 4 - 3 - 4 = 1. La figura 13.16 muestra la traslación, que corresponde a un movimiento horizontal del dintel, de magnitud Δ.

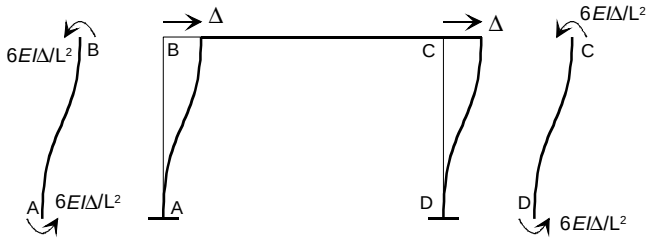


Figura 13.16

Aparecen unos momentos en los dos pilares, de valor desconocido pues son proporcionales a la traslación Δ, que se igualan de forma arbitraria a un valor 100α, para facilitar los cálculos posteriores (además de esta forma es muy sencillo detectar cuándo el momento de desequilibrio es el 1% del inicial).

$$M_{\Delta} = \frac{6EI\Delta}{4.5^2} = 100\alpha$$

La fase 4 se muestra en la figura 13.17. Se comienza con los 4 momentos de valor 100α que provienen de la fase 3. El equilibrado comienza en el nudo B.

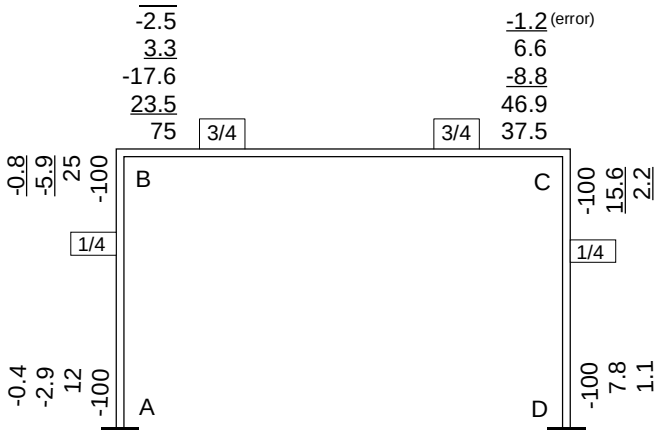


Figura 13.17

El resultado de las fases 2 y 4 se muestra en la figura 13.18.

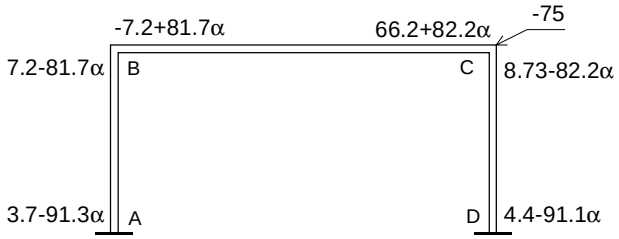


Figura 13.18

La ecuación de equilibrio de la fase 5 se obtiene aislando el dintel y aplicándole el equilibrio horizontal. La figura 13.19 muestra las fuerzas horizontales que actúan sobre él.

$$Q_{BA} + Q_{CD} = 10 \text{ Tn}$$

Los cortantes en la cabeza de los pilares se obtienen aislando éstos y tomando momentos respecto de la base de cada uno de ellos.

$$Q_{BA} = -\frac{M_{AB} + M_{BA}}{4.5} \qquad Q_{CD} = -\frac{M_{CD} + M_{DC}}{4.5}$$

Por lo tanto la ecuación de equilibrio del dintel, en función de los momentos, es:

$$-\frac{M_{AB} + M_{BA}}{4.5} - \frac{M_{CD} + M_{DC}}{4.5} = 10$$

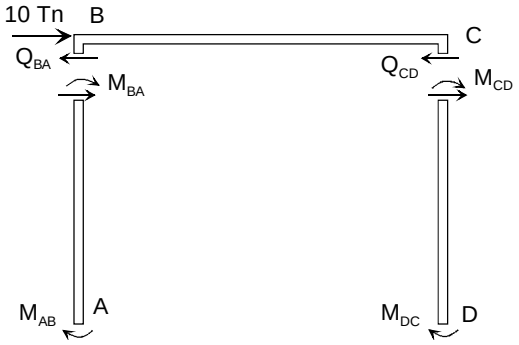


Figura 13.19

Sustituyendo los momentos por los valores calculados para ellos como suma de las fases 2 y 4 se obtiene:

$$-\frac{3.7-91.3\alpha+7.2-81.7\alpha}{4.5}-\frac{8.73-82.2\alpha+4.4-91.1\alpha}{4.5}=10$$

de donde se puede hallar $\alpha = 0.20$. Conocido α, puede calcularse el valor de la traslación real Δ:

$$M_\Delta=\frac{6EI\Delta}{L^2}=100\alpha=20 \qquad \rightarrow \qquad \Delta=\frac{67.50}{EI}$$

Conociendo α se pueden hallar los valores numéricos de los momentos en las barras. El diagrama de momentos flectores del pórtico se muestra en la figura 13.20.

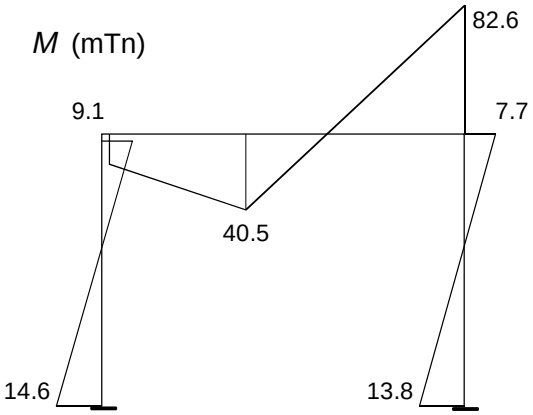


Figura 13.20

13.6.4 Calcular el diagrama de momentos flectores del pórtico a dos aguas mostrado en la figura 13.21, empleando la descomposición en casos simétrico y antimétrico. Todas las barras tienen la misma rigidez *EI*.

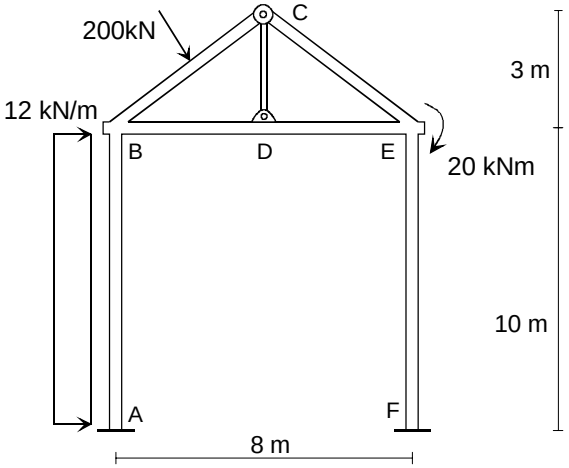


Figura 13.21

El caso simétrico se muestra en la figura 13.22.

La rigidez de las barras es:

$$K_{AB} = \frac{4EI}{10} = 0.4EI$$

$$K_{BC} = \frac{3EI}{5} = 0.6EI$$

$$K_{BD} = \frac{4EI}{4} = EI$$

Los factores de distribución en el nudo B son:

$$D_{BA} = \frac{0.4}{0.4+0.6+1} = 0.2$$

$$D_{BC} = \frac{0.6}{0.4+0.6+1} = 0.3$$

$$D_{BD} = \frac{1}{0.4+0.6+1} = 0.5$$

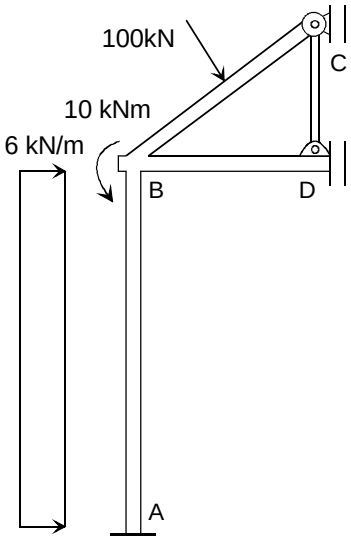


Figura 13.22

Fase 1. La fuerza puntual de 100 kN en BC produce un momento en el nudo B de valor:

$$M_{BC}^0 = -\frac{3PL}{16} = -\frac{3\cdot 100\cdot 5}{16} = -93.75 \quad \text{kN}\cdot\text{m}$$

La fuerza distribuida en AB produce momentos en los nudos A y B:

$$M_{AB}^0 = -\frac{qL^2}{12} = -\frac{6\cdot 10^2}{12} = -50 \text{ kN}\cdot\text{m} \qquad M_{BA}^0 = \frac{qL^2}{12} = \frac{6\cdot 10^2}{12} = 50 \text{ kN}\cdot\text{m}$$

La fase 2 se muestra en la figura 13.23. No es necesario iterar pues hay un sólo nudo. La figura 13.24 muestra los resultados de la fase 2.

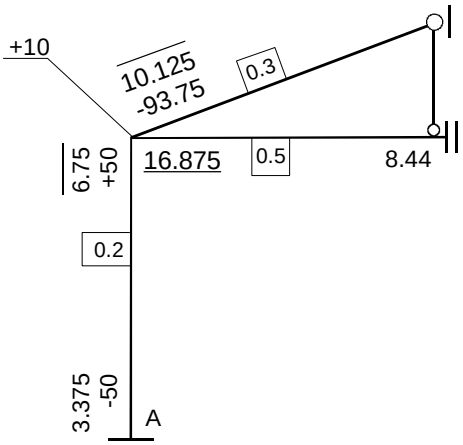


Figura 13.23

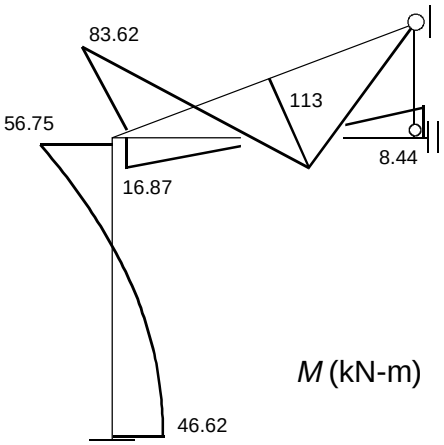


Figura 13.24

El número de traslaciones es t =2 x 4 - 4 - 4 = 0. Por lo tanto no hay fases 3, 4 ni 5, y los momentos de fase 2 son los momentos finales en las barras. Nótese que no se produce ninguna deformación vertical de los nudos C y D, debido a la hipótesis de que las barras son inextensibles.

El caso antisimétrico se muestra en la figura 13.25. Ahora la barra BD está articulada en D y la barra CD no trabaja ni a esfuerzo axial ni a flexión.

La rigidez de las barras es:

$$K_{AB} = \frac{4EI}{10} = 0.4EI$$

$$K_{BC} = \frac{3EI}{5} = 0.6EI$$

$$K_{BD} = \frac{3EI}{4} = 0.75EI$$

Los factores de distribución en el nudo B son:

$$D_{BA} = \frac{0.4}{0.4+0.6+0.75} = 0.229$$

$$D_{BC} = \frac{0.6}{0.4+0.6+0.75} = 0.343$$

$$D_{BD} = \frac{0.75}{0.4+0.6+0.75} = 0.428$$

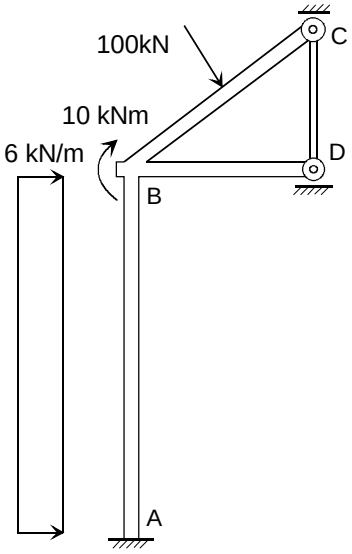


Figura 13.25

Los momentos producidos sobre las barras en la fase 1 son iguales que los del caso simétrico.

La fase 2 se muestra en la figura 13.26. El momento puntual de 10 kNm es ahora negativo. No es necesario iterar pues hay un sólo nudo.

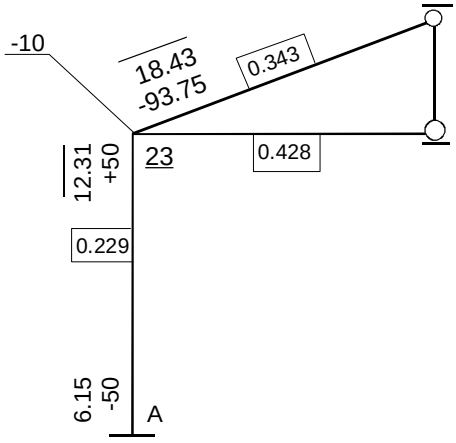


Figura 13.26

El número de traslaciones es t =2 x 4 - 4 - 4 = 0. Sin embargo, existe una posibilidad de movimiento lateral de toda la zona triangular superior, como puede verse en la figura 13.27, que no es captada por la fórmula anterior. Esto es debido a que en la fórmula se han incluido como reacciones verticales las de los nudos C y D, a la vez que la condición de inextensibilidad de la barra CD. Se trata de tres restricciones al movimiento vertical de CD, el cual en realidad queda definido con sólo dos de ellas, siendo redundante la tercera: por ejemplo es suficiente con emplear la reacción vertical en D y la condición de que DC es inextensible, y en este caso la reacción vertical en C es redundante.

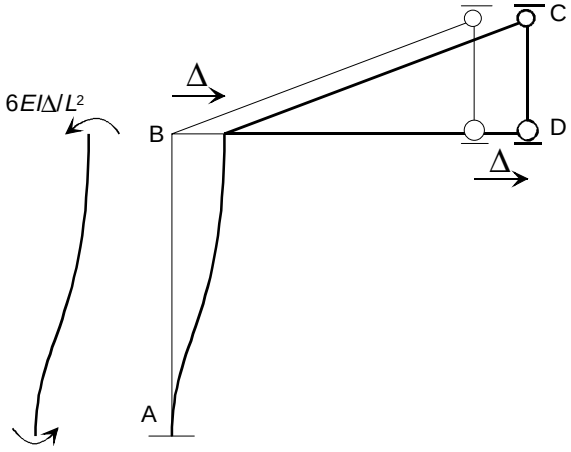


Figura 13.27

En esta traslación aparece un momento en la barra AB cuyo valor se asigna arbitrariamente a -100α. En la fase 4 se distribuye este momento (figura 13.28) siguiendo un proceso que no requiere iteración. La figura 13.29 muestra el resumen de las fases 2 y 4.

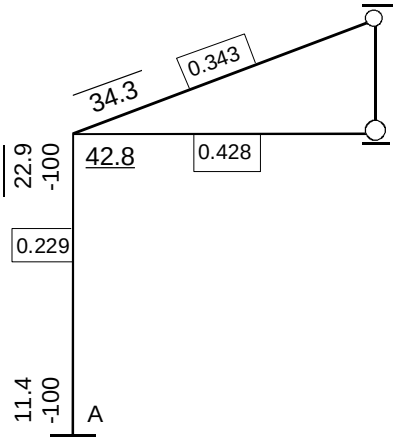


Figura 13.28

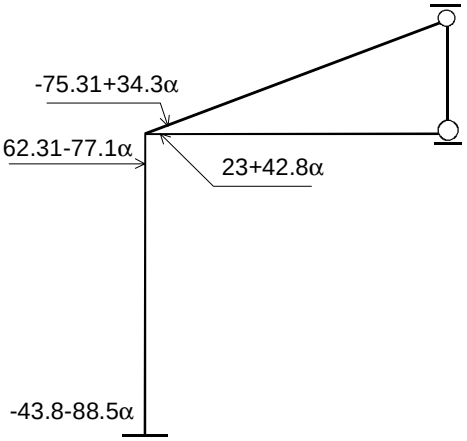


Figura 13.29

La ecuación de equilibrio necesaria para calcular α se obtiene aislando el dintel triangular y aplicándole el equilibrio horizontal, como se muestra en la figura 13.30.

$$Q_{BA} = 100 \sin \beta = 100 \cdot 0.6 = 60 \quad \text{kN}$$

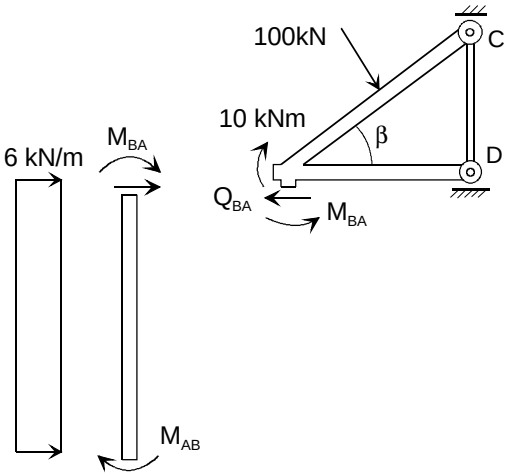


Figura 13.30

Tomando momentos respecto de A en la barra AB se obtiene el valor de Q_{BA} en función de los momentos:

$$Q_{BA}10 = -M_{BA} - M_{AB} - \frac{6 \cdot 10^2}{2}$$

$$60 \cdot 10 = -(62.31 - 77.1\alpha) - (-43.8 - 88.5\alpha) - 300$$

de donde se obtiene α=5.546, con lo que pueden calcularse los valores finales de los momentos. Éstos se muestran en la figura 13.31.

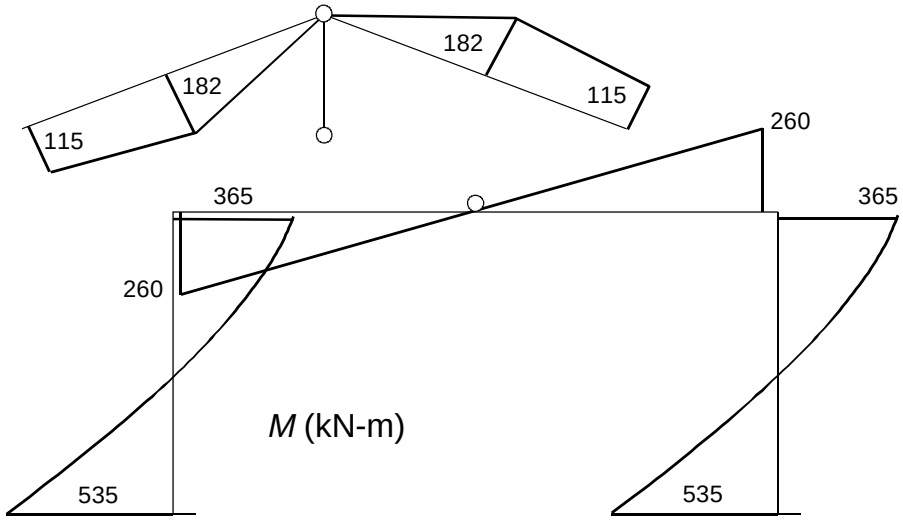


Figura 13.31

13.6.5 Resolver el pórtico del ejercicio 13.6.3 empleando el método de rigidez, pero siguiendo las fases del método de Cross, a fin de estudiar la correspondencia entre ambos métodos.

Con la suposición de barras no extensibles, el pórtico se modeliza con tres grados de libertad, como se muestra en la figura 13.32. Las fuerzas nodales equivalentes a emplear son las aplicadas en la fase 1 del método de Cross.

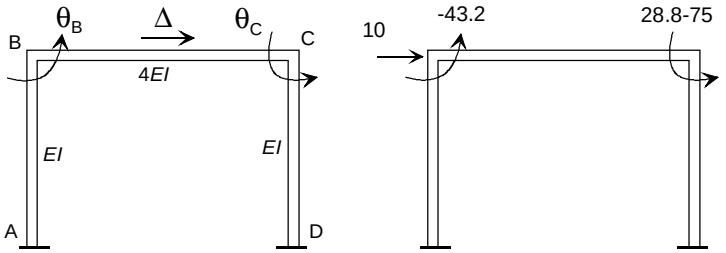


Figura 13.32

Las ecuaciones de equilibrio individuales de las barras, para los grados de libertad considerados, se indican a continuación. En la ecuación correspondiente al elemento BC se han incluido los momentos de empotramiento perfecto (fase 1 del método de Cross).

$$M_{BA} = \begin{bmatrix} \frac{4EI}{4.5} & \frac{6EI}{4.5^2} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \theta_B \\ \Delta \end{Bmatrix} = EI \begin{bmatrix} 0.888 & 0.296 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \theta_B \\ \Delta \end{Bmatrix}$$

$$\begin{Bmatrix} M_{BC} \\ M_{CB} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 43.2 \\ -28.8 \end{Bmatrix} + \begin{bmatrix} \frac{4E4I}{6} & \frac{2E4I}{6} \\ \frac{2E4I}{6} & \frac{4E4I}{6} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \theta_B \\ \theta_C \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 43.2 \\ -28.8 \end{Bmatrix} + EI \begin{bmatrix} 2.66 & 2.66 \\ 1.33 & 1.33 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \theta_B \\ \theta_C \end{Bmatrix}$$

$$M_{CD} = \begin{bmatrix} \frac{4EI}{4.5} & \frac{6EI}{4.5^2} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \theta_C \\ \Delta \end{Bmatrix} = EI \begin{bmatrix} 0.888 & 0.296 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \theta_C \\ \Delta \end{Bmatrix}$$

La ecuación de equilibrio de la estructura se obtiene ensamblando las tres ecuaciones anteriores, e incluyendo el momento puntual en el nudo C.

$$EI \begin{bmatrix} 3.55 & 1.33 & 0.296 \\ 1.33 & 3.55 & 0.296 \\ 0.296 & 0.296 & 0.263 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \theta_B \\ \theta_C \\ \Delta \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} -43.2 \\ -75 + 28.8 \\ 10 \end{Bmatrix}$$

La fase 2 del método de Cross supone que la traslación está fija y que actúan las fuerzas exteriores, por lo que la ecuación de equilibrio queda reducida a:

$$EI \begin{bmatrix} 3.55 & 1.33 \\ 1.33 & 3.55 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \theta_B^2 \\ \theta_C^2 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} -43.2 \\ -75 + 28.8 \end{Bmatrix}$$

Esta ecuación es la que se resuelve de forma iterativa en la fase 2, pero empleando los momentos en los extremos de las barras en lugar de los giros como variables primarias. Su solución es (figura 13.33):

$$\begin{Bmatrix} \theta_B^2 \\ \theta_C^2 \end{Bmatrix} = \frac{1}{EI} \begin{Bmatrix} -8.468 \\ -9.818 \end{Bmatrix}$$

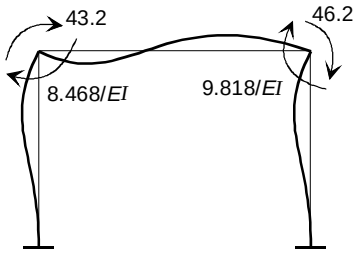


Figura 13.33

Con estos giros, los momentos en los extremos de las barras se obtienen de sus ecuaciones de equilibrio, y corresponden a los obtenidos en la fase 2 del método de Cross:

$$M_{BA}^2 = EI\ 0.888 \frac{-8.468}{EI} = -7.53$$

$$\begin{Bmatrix} M_{BC}^2 \\ M_{CB}^2 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 43.2 \\ -28.8 \end{Bmatrix} + EI \begin{bmatrix} 2.66 & 2.66 \\ 1.33 & 1.33 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \theta_B^2 \\ \theta_C^2 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 7.53 \\ -66.3 \end{Bmatrix}$$

$$M_{BA}^2 = EI\ 0.888 \frac{-9.818}{EI} = -8.73$$

En la fase 3 se supone que los giros son nulos y se permite únicamente la deformación lateral. Con estas deformaciones los momentos en los extremos de las barras son:

$$M_{BA}^3 = \frac{6EI}{4.5^2} \Delta = 0.296 EI\Delta \qquad M_{CD}^3 = \frac{6EI}{4.5^2} \Delta = 0.296 EI\Delta$$

El vector de fuerzas que es necesario aplicar en los nudos para mantener la deformación de la fase 3 es:

$$\begin{Bmatrix} M_B^3 \\ M_C^3 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 0.296EI\Delta \\ 0.296EI\Delta \end{Bmatrix}$$

La figura 13.34 muestra la deformada en la fase 3 y los momentos de desequilibrio que hay que aplicar para conseguirla.

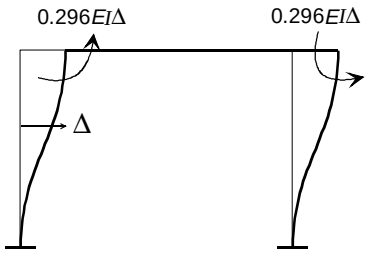


Figura 13.34

La fase 4 corresponde a un nuevo equilibrado de los nudos, a base de dejarlos girar la cantidad necesaria para eliminar los momentos de desequilibrio anteriores. Por lo tanto la ecuación de equilibrio empleada en esta fase 4 es:

$$EI\begin{bmatrix} 3.55 & 1.33 \\ 1.33 & 3.55 \end{bmatrix}\begin{Bmatrix} \theta_B^4 \\ \theta_C^4 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} -0.296EI\Delta \\ -0.296EI\Delta \end{Bmatrix}$$

Esta ecuación se obtiene a partir de la ecuación de equilibrio inicial, considerando sólo las ecuaciones correspondientes a los giros, eliminando las fuerzas exteriores (ya tratadas en la fase 2), y pasando al término independiente los términos debidos a la deformación Δ.

Resolviéndola se obtienen los giros en la fase 4 (figura 13.35):

$$\begin{Bmatrix} \theta_B^4 \\ \theta_C^4 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} -0.0605\Delta \\ -0.0605\Delta \end{Bmatrix}$$

De esta manera se ha obtenido una relación entre los giros y la traslación de la estructura, en ausencia de cargas exteriores.

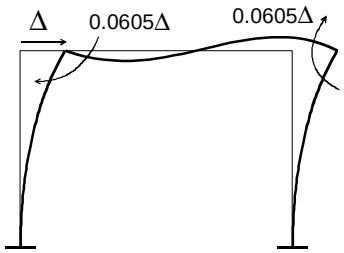


Figura 13.35

En la aplicación práctica del método de Cross, en lugar de calcular estos giros se calculan los momentos que producen en las barras, que son:

$$M_{BA}^4 = EI\begin{bmatrix} 0.888 & 0.296 \end{bmatrix}\begin{Bmatrix} \theta_B^4 \\ \Delta \end{Bmatrix} = 0.242EI\Delta$$

$$\begin{Bmatrix} M_{BC}^4 \\ M_{CB}^4 \end{Bmatrix} = EI\begin{bmatrix} 2.66 & 2.66 \\ 1.33 & 1.33 \end{bmatrix}\begin{Bmatrix} \theta_B^4 \\ \theta_C^4 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} -0.242EI\Delta \\ -0.242EI\Delta \end{Bmatrix}$$

$$M_{CD}^4 = EI\begin{bmatrix} 0.888 & 0.296 \end{bmatrix}\begin{Bmatrix} \theta_C^4 \\ \Delta \end{Bmatrix} = 0.242EI\Delta$$

La fase 5 está destinada a calcular el valor de la traslación. Para ello se emplea la última de las tres ecuaciones de equilibrio de la estructura, que corresponde al equilibrio en la dirección de la deformación Δ. Esta ecuación es:

$$10 = 0.296EI\theta_B + 0.296EI\theta_C + 0.263\Delta$$

Sustituyendo los valores de los giros, como suma de las fases 2 y 4 se obtiene:

$$10 = 0.296EI\left(\frac{-8.468}{EI} - 0.0605\Delta\right) + 0.296EI\left(\frac{-9.818}{EI} - 0.0605\Delta\right) + 0.263\Delta$$

de donde se calcula el valor de la traslación: $\Delta = 67.5 / EI$, y a partir de ella los valores finales de los momentos.

13.7 BIBLIOGRAFÍA

1. Bendixen, A., *Die Methode der Alpha-Gleichungen zur Berechnung von Rahmenkonstruktionen*, Berlín, 1914.
2. Calísev, K. A., *Techn. List*., Num. 17-21, Zagreb, 1923.
3. Cross, H., *Analysis of Continuous Frames by Distributing Fixed-End Moments*, Proceedings of the ASCE, Mayo 1930.
4. Cross, H., *Analysis of Continuous Frames by Distributing Fixed-End Moments*, Transactions of the ASCE, Vol. 96, paper 1793, 1932.
5. Cross, H., *Selected Papers*, University of Illinois Press, Urbana IL, 1963.
6. Cross, H., y Morgan, N. D., *Continuous Frames of Reinforced Concrete*, Wiley, New York, 1932.
7. Fernández Casado, C., *Cálculo de Estructuras Reticulares*, Ed. Dossat, Madrid, 1966.
8. Hibbeler, R. C., *Structural Analysis*, Prentice-Hall, New Jersey, 1996.
9. Hsieh, Y-Y., *Teoría Elemental de Estructuras*, Prentice-Hall Int., Bogotá, 1973.
10. Vázquez, M., *Resistencia de Materiales*, Ed. Noela, Madrid, 1994.
11. Wang, C. K., *Intermediate Structural Analysis*, McGraw-Hill, New York, 1983.

13.8 PROBLEMAS

13.8.1 Calcular el diagrama de momentos flectores de la estructura de la figura P13.1.

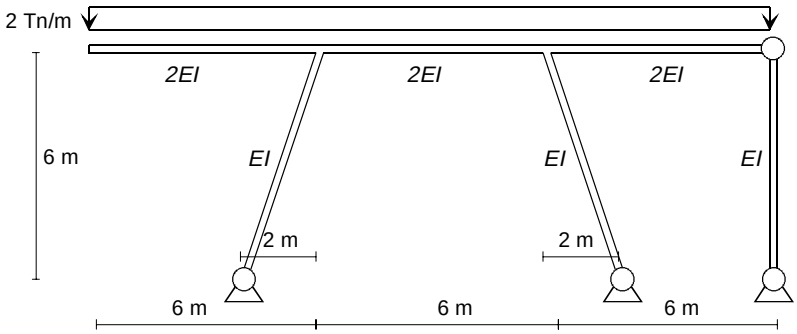


Figura P13.1

13.8.2 Calcular el diagrama de momentos flectores de la estructura de la figura P13.2.

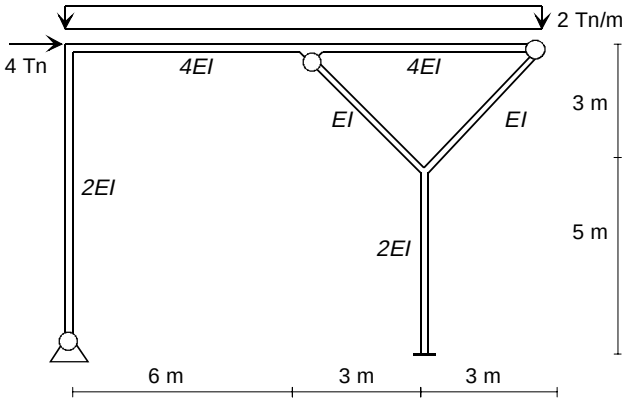


Figura P13.2

13.8.3 Resolver el ejercicio 8.21.2 empleando el método de Cross. Comparar los resultados con los obtenidos mediante el método de rigidez.

13.8.4 Extender el método de Cross para poder tratar variaciones de temperatura en las vigas, suponiendo una temperatura gradiente T_g uniforme. Resolver el ejercicio 8.21.3 empleando el desarrollo efectuado.

13.8.5 Calcular el giro del nudo 2 y el diagrama de flectores en la viga del ejercicio 8.21.4 empleando el método de Cross.

13.8.6 Calcular el diagrama de momentos flectores en la viga del ejercicio 4.12.1 empleando el método de Cross.

13.8.7 Calcular el diagrama de momentos flectores en la viga del ejercicio 4.12.7 empleando el método de Cross.

13.8.8 Resolver el ejercicio 8.21.5 empleando el método de Cross.

13.8.9 Resolver el ejercicio 8.21.6 empleando el método de Cross.

13.8.10 Resolver el ejercicio 5.13.2 empleando el método de Cross.

13.8.11 Resolver el problema 8.23.6 empleando el método de Cross.

Capítulo 14

Introducción a la estabilidad estructural

14.1 INTRODUCCIÓN

En todo lo estudiado hasta ahora se ha supuesto que la estructura se comporta de un modo lineal, es decir que a un aumento de las cargas exteriores corresponde un aumento proporcional de las deformaciones y de los esfuerzos internos. Este comportamiento se origina en dos suposiciones: que el material tiene un comportamiento lineal y que las deformaciones son pequeñas (la posición deformada coincide con la original). Mientras se cumplan estas condiciones es posible ir aumentando las cargas, y todas las soluciones obtenidas son válidas.

Sin embargo, la experiencia demuestra que existen unos valores de las cargas para los cuales la estructura se deforma de una manera excesiva, mucho mayor que lo que correspondería para dichas cargas en el rango lineal, y al producirse estas deformaciones excesivas se anula la capacidad de la estructura para soportar las fuerzas exteriores, provocando su colapso. Estos valores de las cargas que provocan el colapso de la estructura se denominan *cargas críticas* de pandeo o de colapso. Se dice también que la estructura es inestable para dicho valor de las cargas, pues experimenta un crecimiento sin límite de las deformaciones, aún sin un aumento de las cargas exteriores.

El estudio de la estabilidad estructural trata por lo tanto de determinar los valores de las cargas críticas que provocan el colapso por grandes deformaciones. Evidentemente este estudio requiere del uso de relaciones diferentes de las usadas en el caso lineal, y en este sentido se emplean las suposiciones que se indican a continuación.

- Las deformaciones no son pequeñas. Esta es la suposición fundamental para el estudio de la estabilidad, y a consecuencia de ella la posición deformada de la estructura no puede confundirse con la posición sin deformar. Por lo tanto las ecuaciones de equilibrio se deben plantear ahora en la posición deformada, y no en la inicial.

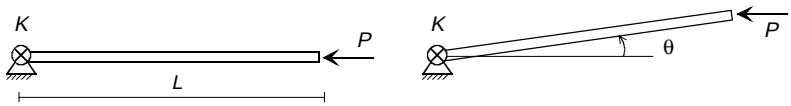
- El comportamiento de material es elástico lineal. Inicialmente se emplea esta suposición, aunque el estudio del pandeo requiere en ciertos casos la consideración del comportamiento no elástico.

El estudio de las estructuras en el supuesto de que las deformaciones no son despreciables conduce a problemas no lineales, que suelen denominarse como teoría de segundo orden, en contraposición a la teoría de primer orden estudiada en el caso lineal.

Los conceptos de carga crítica y estabilidad del equilibrio pueden ponerse de manifiesto con gran facilidad mediante ejemplos sencillos.

Ejemplo

Considérese el sistema mostrado en la figura siguiente, en el que la barra se supone infinitamente rígida, y por lo tanto sólo el muelle de torsión acumula energía. Un análisis de primer orden planteando el equilibrio en la posición indeformada indica que la barra está sometida a una compresión de valor P y que el resorte está descargado. Si se aplica el equilibrio en la posición deformada se obtiene que el resorte tiene un par de valor PLsinθ.



Es posible obtener más información sobre la estabilidad del sistema efectuando un análisis de segundo orden, considerando la expresión exacta del potencial total del sistema:

$$\Pi = \frac{1}{2}k\theta^2 - PL(1-\cos\theta)$$

Para que haya equilibrio este potencial debe ser estacionario:

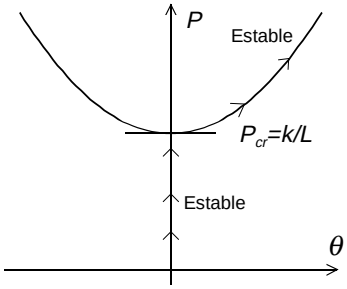
$$\frac{d\Pi}{d\theta} = k\theta - PL\sin\theta = 0$$

Esta ecuación se satisface de dos formas. Si θ=0 cualquier valor de P la satisface, lo cual corresponde con la solución del análisis de primer orden, que permite cualquier valor de P. También se cumple la ecuación de equilibrio anterior si el valor de P es:

$$P = \frac{k\theta}{L\sin\theta}$$

Esta es la relación entre la carga axial P y el giro θ en cualquier posición de equilibrio, y en ella se observa que para θ=0 la carga vale P=k/L. Esto indica que k/L es un valor crítico de la carga, que hace pasar a la barra de la situación inicial θ=0 a una situación en la que la barra comienza a girar y el muelle empieza a tener esfuerzo. Este valor de la carga se denomina punto de bifurcación del equilibrio, y en él se pasa de la solución de primer orden a la de segundo.

La figura siguiente muestra la representación gráfica del comportamiento del sistema. Para valores de la carga inferiores a k/L, el giro es nulo θ=0. Al alcanzarse dicho valor crítico k/L, se produce el colapso, y la barra comienza a girar. A partir de ese valor de la carga, el comportamiento es el indicado por el análisis de segundo orden.



Para estudiar la estabilidad del sistema se calcula la derivada segunda del potencial:

$$\frac{d^2\Pi}{d\theta^2} = k - PL\cos\theta$$

Para la solución de primer orden, con θ=0, es decir con P<k/L, su valor es:

$$\left(\frac{d^2\Pi}{d\theta^2}\right)_{\theta=0} = k - PL$$

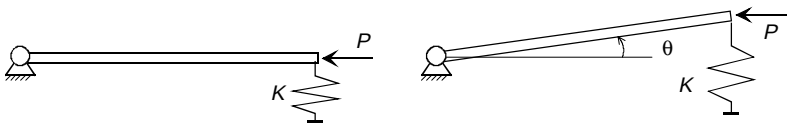
Se observa que si P<k/L la derivada segunda de Π es positiva y el equilibrio es estable. Por lo tanto en toda la solución de primer orden el sistema es estable. Para la solución post-colapso (P>k/L), se sustituye el valor de la carga crítica en la derivada del potencial:

$$\frac{d^2\Pi}{d\theta^2} = k\left(1 - \frac{\theta}{\tan\theta}\right)$$

Esta magnitud es siempre positiva, por lo que el equilibrio es también estable en el comportamiento post-colapso.

Ejemplo

Considérese ahora el sistema de la figura siguiente, en el que el resorte se mantiene siempre vertical y la barra es infinitamente rígida.



El análisis de primer orden indica que la barra está comprimida un valor P y el muelle está descargado. El potencial total del sistema en una posición deformada cualquiera es:

$$\Pi = \frac{1}{2}k(L\sin\theta)^2 - PL(1-\cos\theta)$$

Para que haya equilibrio se debe cumplir que:

$$\frac{d\Pi}{d\theta} = kL^2\sin\theta\cos\theta - PL\sin\theta = (kL\cos\theta - P)L\sin\theta = 0$$

Esta ecuación se satisface para cualquier valor de P si θ=0, lo que corresponde a la solución de primer orden. Pero también se satisface si el valor de la carga es:

$$P = kL\cos\theta$$

Para θ=0 se obtiene P=kL, que corresponde a un valor crítico de la carga, en el cual se produce una bifurcación, con el paso desde la situación inicial de giro nulo, a una situación en la que la barra gira un ángulo θ dado por la ecuación anterior.

La derivada segunda del potencial es:

$$\frac{d^2\Pi}{d\theta^2} = kL^2(\cos^2\theta - \sin^2\theta) - PL\cos\theta$$

Su valor en el caso θ=0 es

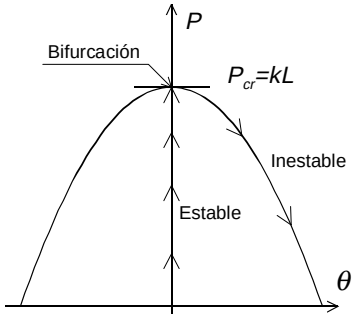
$$\left(\frac{d^2\Pi}{d\theta^2}\right)_{\theta=0} = kL^2 - PL$$

Se observa que si P<kL, este valor es positivo, lo cual indica que el equilibrio es estable, y que si P>kL, este valor es negativo, lo que corresponde a un equilibrio inestable.

Para el comportamiento posterior a la bifurcación (es decir cuando $P = kL\cos\theta$), la derivada segunda el potencial es:

$$\left(\frac{d^2\Pi}{d\theta^2}\right)_{\theta>0} = -kL^2\sin^2\theta$$

Este valor es siempre negativo, por lo que el equilibrio es siempre inestable. La figura adjunta muestra la relación P/θ completa.



Estos ejemplos sencillos han permitido introducir el concepto de carga crítica, que es aquel valor de las cargas exteriores que provoca la bifurcación del equilibrio, pasándose de una situación estable a otra, que puede ser estable o inestable, pero que en general lleva a unas deformaciones excesivas, por lo que no suele ser aceptable para la estructura. Asimismo se ha podido estudiar el comportamiento posterior al colapso, debido a la sencillez de los ejemplos. Sin embargo el estudio post colapso de forma general requiere técnicas de análisis que están fuera del contexto de esta obra, por lo que no se abordará.

14.2 ECUACIÓN DE EQUILIBRIO DE LA VIGA - COLUMNA

En el estudio de la estabilidad, se suelen denominar vigas columna a aquellos elementos estructurales cargados simultáneamente con fuerzas axiales y transversales, mientras que se reserva la denominación de columnas para los que están cargados únicamente en dirección axial. Para mayor generalidad se efectúa el estudio de la viga columna, y posteriormente se particulariza para la columna.

Se considera un elemento diferencial de la viga columna, de longitud *ds*, que en la situación deformada está girado un ángulo φ respecto de la horizontal (figura 14.1). Sobre él actúan la fuerza exterior *q(x)*, que se supone está distribuida sobre el eje horizontal, y las

fuerzas interiores: el esfuerzo axial N, el cortante Q y el momento flector M. Al considerarse el elemento en su posición deformada, las fuerzas N y Q están giradas un ángulo φ respecto a su posición original.

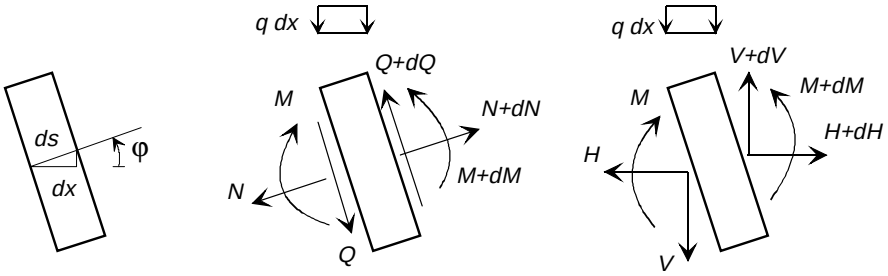


Figura 14.1

Al elemento así considerado se le aplican las tres ecuaciones de equilibrio, en su posición deformada. Para ello resulta más práctico considerar las componentes horizontal H y vertical V de las fuerzas interiores.

- Equilibrio horizontal de fuerzas en la dirección x.

$$H + dH - H = 0 \qquad \rightarrow \qquad dH = 0 \tag{14.1}$$

es decir que la componente horizontal de las fuerzas exteriores se mantiene constante.

- Equilibrio vertical de fuerzas

$$V + dV = qdx + V \tag{14.2}$$

por lo tanto:

$$\frac{dV}{dx} = q \tag{14.3}$$

- Equilibrio de momentos. Se toman momentos de todas las fuerzas respecto al extremo derecho del elemento diferencial:

$$M + dM - M + Vdx + qdx\frac{dx}{2} - H \sin\varphi \, ds = 0 \tag{14.4}$$

Sustituyendo el diferencial de longitud por su valor

$$ds = \frac{dx}{\cos\varphi} \tag{14.5}$$

y despreciando los términos cuadráticos, se obtiene:

$$dM + Vdx - H \tan\varphi \, dx = 0 \tag{14.6}$$

Sustituyendo la tangente del ángulo por la derivada de la deformada y reordenando queda:

$$V = H\frac{dv}{dx} - \frac{dM}{dx} \tag{14.7}$$

Sustituyendo este valor de la fuerza vertical V en la ecuación (14.3) se obtiene:

$$\frac{d^2M}{dx^2} - H\frac{d^2v}{dx^2} = -q \tag{14.8}$$

Al no haber fuerzas exteriores aplicadas según *x*, la componente horizontal del esfuerzo axial *H* es igual a la fuerza exterior de compresión *P*. Esta fuerza *P* se supone positiva a compresión:

$$H = -P \tag{14.9}$$

Sustituyendo las expresiones del esfuerzo *H* y del momento flector $M = E\,I\,v''$, la ecuación que se obtiene es :

$$\frac{d^2}{dx^2}\left(EI\frac{d^2v}{dx^2}\right) + P\frac{d^2v}{dx^2} = -q \tag{14.10}$$

que es la ecuación de equilibrio general de la viga - columna. Si el producto *EI* es constante, como es casi habitual, se obtiene la expresión:

$$EI\frac{d^4v}{dx^4} + P\frac{d^2v}{dx^2} = -q \tag{14.11}$$

Se define la constante *k* como:

$$k = \sqrt{\frac{P}{EI}} \tag{14.12}$$

que representa una proporción entre la carga axial aplicada y la rigidez a flexión de la viga, es decir su oposición a la flexión lateral. Con ello la ecuación diferencial de equilibrio queda en la forma:

$$\frac{d^4v}{dx^4} + k^2\frac{d^2v}{dx^2} = -\frac{q}{EI} \tag{14.13}$$

La solución general de esta ecuación diferencial es:

$$v = A\sin kx + B\cos kx + Cx + D + v_{part} \tag{14.14}$$

donde los cuatro primeros términos corresponden a la solución general de la ecuación homogénea (con *q=0*), y el último es una solución particular cualquiera de la ecuación completa, que hay que hallar en cada caso, dependiendo del tipo de carga aplicada *q*.

14.3 COLUMNA RECTA ARTICULADA EN AMBOS EXTREMOS

Se trata de estudiar la estabilidad de una columna articulada en sus dos extremos (figura 14.2), en las siguientes condiciones:

- ◊ No existe carga transversal al elemento, sólo la fuerza de compresión *P*.
- ◊ El eje de la columna es perfectamente recto.
- ◊ Uno de los extremos está articulado, y en el otro existe una articulación deslizante, con objeto de permitir la aplicación de la fuerza axial.

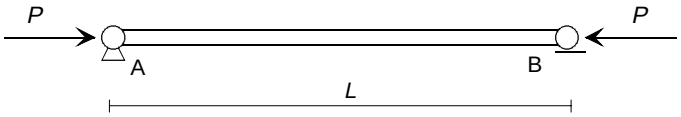


Figura 14.2

En estas condiciones la deformada de la columna viene dada por la ecuación (14.14), pero al no haber ninguna fuerza transversal, la solución particular no es necesaria y por lo tanto la deformada corresponde únicamente a la solución general de la ecuación homogénea:

$$v = A\sin kx + B\cos kx + Cx + D \tag{14.15}$$

Las constantes de integración se obtienen aplicando las cuatro condiciones de contorno de los extremos de la columna:

- Flecha nula en el apoyo A: $v(x=0)=0$ de la que se obtiene $B+D=0$
- Momento nulo en el apoyo A: $v''(x=0)=0$ de la que se obtiene $-k^2B=0$

De estas dos ecuaciones se obtienen las constantes B y D que son ambas nulas: $B=D=0$

- Flecha nula en el apoyo B: $v(x=L)=0$
- Momento nulo en el apoyo B: $v''(x=L)=0$

Estas dos últimas ecuaciones se pueden poner en forma matricial como se indica a continuación, considerando que las constantes B y D son nulas:

$$\begin{bmatrix} \sin kL & L \\ -k^2\sin kL & 0 \end{bmatrix}\begin{Bmatrix} A \\ C \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \end{Bmatrix} \tag{14.16}$$

Se trata de un sistema de dos ecuaciones homogéneo. Su solución trivial es $A=C=0$, que unida al hecho de que también B y D son nulas, implica que la deformada de la viga es toda ella nula $v=0$, por lo que esta solución no tiene interés. Para que exista una solución distinta de la trivial es necesario que el determinante de la matriz sea nulo. Este determinante vale:

$$-k^2 L\sin kL = 0 \tag{14.17}$$

Pero como siempre es $k \neq 0$, se debe cumplir que $\sin kL = 0$.

Las soluciones de esta ecuación son $k_n=n\pi/L$ con $n=1,2,3,..\infty$, que corresponden a los siguientes valores de la carga axial:

$$P_n = \frac{n^2\pi^2 EI}{L^2} \qquad n = 1,2,3,\ldots\infty \tag{14.18}$$

Para todos estos valores de P_n la constante de integración C es nula, y la A no está definida, por lo que la deformada que adopta la columna en cada uno de ellos es:

$$v_n = A_n \sin k_n x = A_n \sin\frac{n\pi x}{L} \tag{14.19}$$

donde A_n no está definida. Los valores de P_n corresponden a posiciones de la columna en las que su deformada no está determinada por las ecuaciones de equilibrio y las condiciones de contorno: se trata de posiciones de inestabilidad, en las que la deformación se produce sin incremento de la carga. La de mayor interés es la primera, que corresponde a un valor :

$$k_1 = \frac{\pi}{L} = \sqrt{\frac{P_1}{EI}} \tag{14.20}$$

14.3.1 Carga crítica de Euler

Al menor de los valores críticos de la carga axial se le denomina *carga crítica de Euler* para la columna, y se designa como:

$$P_E = \frac{\pi^2 EI}{L^2} \tag{14.21}$$

Cuando la carga axial coincide con este valor, se produce el colapso de la columna por pandeo lateral: la columna abandona su configuración recta y aparecen deformaciones laterales de flexión. La deformada que adopta la columna es:

$$v_E = A_1 \sin\frac{\pi x}{L} \tag{14.22}$$

que es denominado primer modo de pandeo de la columna. Representa la forma en la que la columna colapsa cuando la carga axial llega a su valor crítico, es decir la forma en que la columna abandona su configuración recta. Para este modo de pandeo se conoce su forma, que es senoidal con una longitud de onda igual al doble de la longitud de la viga, pero no se conoce su amplitud.

Al alcanzarse el valor de la carga crítica de Euler, se produce una bifurcación del equilibrio, que pasa de ser estable cuando $P<P_E$, a ser indiferente justo cuando $P=P_E$ (figura 14.3). Si la carga axial sigue aumentando, con valores $P_E<P<P_2$ el equilibrio es inestable, pero la columna se mantiene recta. Al alcanzarse la segunda carga crítica $P=P_2$ se produce un nuevo colapso que corresponde a una nueva bifurcación del equilibrio. La forma en que la columna abandona el equilibrio en este segundo colapso es nuevamente una ley senoidal con una longitud de onda de valor L.

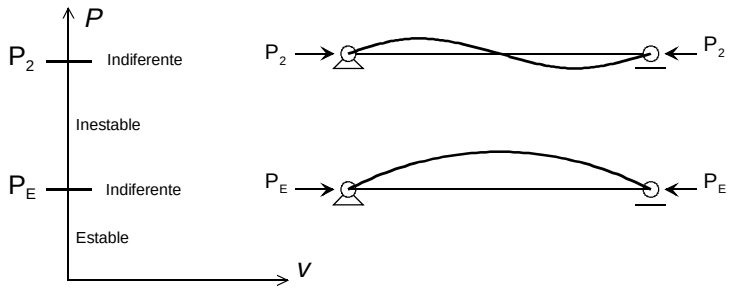


Figura 14.3

La deformada obtenida para cada carga crítica corresponde únicamente a la forma que adopta la columna al comenzar la bifurcación, es decir la forma que adopta justo en el

instante de producirse el pandeo. No corresponde a la forma en la que queda la columna deformada tras producirse el pandeo, pues para determinar ésta es necesario aplicar la teoría de grandes deformaciones, en particular debe tenerse en cuenta la expresión exacta de la curvatura, no siendo válido sustituirla por la derivada segunda de la deformación.

Como resumen del análisis de estabilidad efectuado puede decirse que:

- Para valores de la carga axial distintos de los valores críticos la columna se mantiene recta, sin deformación lateral. Si la carga es inferior al valor de la carga crítica inferior, o de Euler, el equilibrio es estable, y si la carga es superior a ella el equilibrio es inestable.
- Cuando la carga axial adopta el valor de una de las cargas críticas, se produce una brusca bifurcación del equilibrio que lleva al colapso por deformación lateral excesiva.

14.3.2 Esbeltez

Se define la *esbeltez* de la columna λ como una magnitud adimensional igual al cociente entre su longitud y el radio de giro de su sección:

$$\lambda = \frac{L}{r} \tag{14.23}$$

Siendo *r* el radio de giro de la sección recta de la columna:

$$r = \sqrt{\frac{I}{A}} \tag{14.24}$$

La carga crítica de Euler puede ponerse en función de la esbeltez como:

$$P_E = \frac{\pi^2 EI}{L^2} = \frac{\pi^2 EAr^2}{L^2} = \frac{\pi^2 EA}{\lambda^2} \tag{14.25}$$

14.3.3 Tensión crítica de Euler

Se define la tensión crítica de Euler como la tensión nominal de compresión que existe en la columna cuando se alcanza la carga crítica de Euler:

$$\sigma_E = \frac{P_E}{A} = \frac{\pi^2 E}{\lambda^2} \tag{14.26}$$

Esta expresión indica cuál es la tensión de compresión máxima que puede existir en la columna justo antes de producirse el pandeo. Se observa que depende de la inversa de la esbeltez de la pieza, pero no depende de la resistencia del material, sino únicamente de su módulo de elasticidad. Representa por lo tanto un límite superior a la tensión nominal de compresión admisible, límite que no puede aumentarse mejorando la resistencia del material.

En todo caso la tensión crítica de Euler tiene como valor límite al límite de proporcionalidad del material, es decir la tensión a partir de la cual deja de cumplirse la proporcionalidad entre tensión y deformación unitaria. Al alcanzarse este límite deja de ser válida la hipótesis de material lineal y por lo tanto todo lo deducido, siendo necesario aplicar la teoría del pandeo inelástico, que se explica más adelante.

Se define la *esbeltez límite de proporcionalidad* λ_{PR} como aquella esbeltez para la cual la tensión crítica de Euler σ_E alcanza la tensión límite de proporcionalidad del material σ_{PR}. Su valor se obtiene sustituyendo este límite de proporcionalidad del material en la fórmula de la tensión crítica de Euler:

$$\sigma_{PR} = \frac{\pi^2 E}{\lambda_{PR}^2} \qquad \rightarrow \qquad \lambda_{PR} = \sqrt{\frac{\pi^2 E}{\sigma_{PR}}} \tag{14.27}$$

La relación (14.26) entre la esbeltez y la tensión crítica de Euler se denomina habitualmente hipérbola de Euler, y se representa en la figura 14.4 para valores típicos de estructuras de acero (E=200 GPa), en el rango de esbeltez 0 a 250. En ella se ha indicado asimismo la esbeltez límite, para un límite de proporcionalidad de 250 MPa.

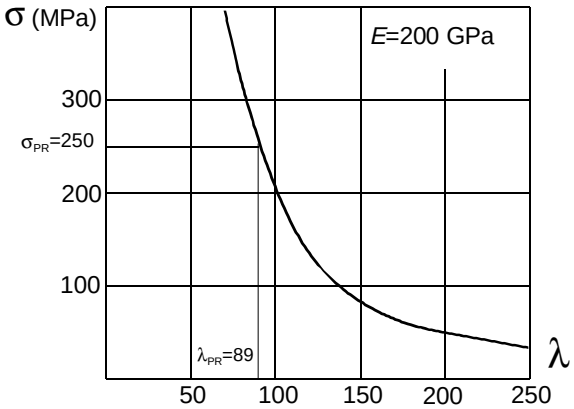


Figura 14.4

14.4 COLUMNA RECTA EMPOTRADA EN AMBOS EXTREMOS

Se trata de estudiar la estabilidad de una columna empotrada en sus dos extremos, en condiciones similares a las del caso anterior: no existe carga transversal al elemento, el eje de la columna es perfectamente recto, y la columna está sometida a una fuerza de compresión de valor P. Ambos extremos están empotrados, en el sentido que no es posible su deformación lateral ni su giro, aunque sí es posible la deformación axial relativa entre ambos, a fin de permitir la aplicación de la fuerza axial (figura 14.5).

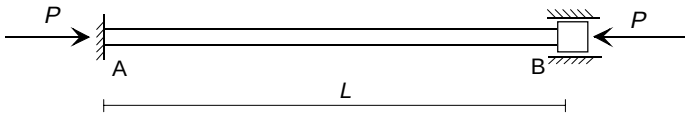


Figura 14.5

En estas condiciones la solución del problema es la ecuación (14.14). Al no haber en este caso ninguna fuerza transversal, la solución particular no es necesaria y por lo tanto la deformada de la columna viene dada únicamente por la solución general de la ecuación homogénea:

$$v = A\sin kx + B\cos kx + Cx + D \tag{14.28}$$

Las constantes de integración se obtienen aplicando las cuatro condiciones de contorno de los extremos de la columna:

- Flecha nula en el apoyo A: $v(x=0)=0 \quad B+D=0 \quad \rightarrow \quad D=-B$
- Giro nulo en el apoyo A: $v'(x=0)=0 \quad Ak+C=0 \quad \rightarrow \quad C=-Ak$
- Flecha nula en el apoyo B: $v(x=L)=0$
- Giro nulo en el apoyo B: $v'(x=L)=0$

Estas dos últimas ecuaciones de contorno se pueden poner en forma matricial como se indica a continuación, considerando los valores de D y C ya deducidos:

$$\begin{bmatrix} \sin kL - kL & \cos kL - 1 \\ k\cos kL - k & -k\sin kL \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} A \\ B \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \end{Bmatrix} \tag{14.29}$$

Se trata de un sistema de dos ecuaciones homogéneo, cuya solución trivial es A=B=0. Pero esto hace que las cuatro constantes de integración sean nulas y por lo tanto la deformada de la viga sea toda ella nula, por lo que esta solución no tiene interés. Para que exista solución distinta de la trivial es necesario que el determinante de la matriz sea nulo, es decir:

$$kL\sin kL + 2\cos kL - 2 = 0 \tag{14.30}$$

Utilizando las relaciones trigonométricas del ángulo mitad esta expresión se puede poner como:

$$\left(\frac{kL}{2}\cos\frac{kL}{2} - \sin\frac{kL}{2}\right)\left(\sin\frac{kL}{2}\right) = 0 \tag{14.31}$$

Esta ecuación puede satisfacerse de dos formas:

- Si el primer factor es nulo

$$\frac{kL}{2}\cos\frac{kL}{2} - \sin\frac{kL}{2} = 0 \tag{14.32}$$

Este factor se puede poner en la forma:

$$\tan\frac{kL}{2} = \frac{kL}{2} \tag{14.33}$$

Las soluciones de esta ecuación son $k_n L =$ 8.987 15.450 21.808 $\cdots$

Por lo que el valor de la menor carga crítica es:

$$P_{A1} = \frac{80.766EI}{L^2} \tag{14.34}$$

Estas cargas corresponden a modos de pandeo antisimétricos, por lo que se ha añadido el subíndice A para identificarlos. La figura 14.6 muestra el primero de ellos.

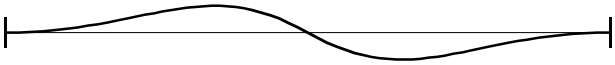


Figura 14.6

- Si el segundo factor es nulo.

$$\sin\frac{kL}{2}=0 \tag{14.35}$$

Las soluciones de esta ecuación son $\frac{k_n L}{2}=n\pi \qquad n=1,2,\ldots\infty$

a las que corresponden unas cargas críticas de valor:

$$P_{Sn}=\frac{4n^2\pi^2 EI}{L^2} \qquad n=1,2,\cdots \tag{14.36}$$

Los modos de pandeo para estas cargas son deformaciones simétricas, en la forma:

$$v_{Sn}=B_n\left(\cos\frac{2\pi nx}{L}-1\right) \tag{14.37}$$

La figura 14.7 muestra los dos primeros modos de este tipo.

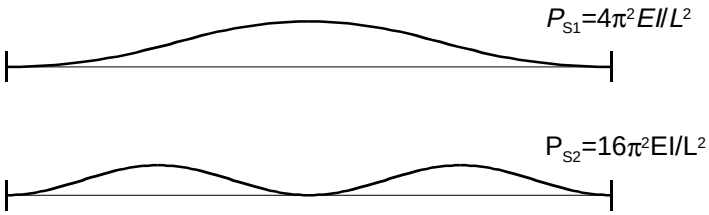


Figura 14.7

La menor de las cargas críticas para estos modos simétricos, con $n=1$, vale:

$$P_{S1}=\frac{4\pi^2 EI}{L^2}=\frac{39.478EI}{L^2} \tag{14.38}$$

Esta carga es inferior a la carga crítica correspondiente al menor modo antimétrico (ecuación (14.34)), por lo que el colapso de la columna se produce según el primer modo simétrico antes indicado, con una carga crítica dada por (14.38).

La distribución de momentos flectores asociada al primer modo de pandeo es:

$$M_{S1}=EIv''=-B_1\frac{4\pi^2 EI}{L^2}\cos\frac{2\pi x}{L} \tag{14.39}$$

Este momento flector se anula en los puntos que satisfacen la ecuación:

$$\cos\frac{2\pi x}{L}=0 \tag{14.40}$$

cuyas soluciones son $L/4$ y $3L/4$. Se observa por lo tanto que la zona central de la columna, de longitud $L/2$, se comporta como una columna biarticulada. La carga crítica de esta zona de la columna es la carga de Euler para una longitud $L/2$:

$$P_E = \frac{\pi^2 EI}{(L/2)^2} = \frac{4\pi^2 EI}{L^2} \tag{14.41}$$

que coincide con la carga crítica de la columna biempotrada. Por lo tanto el pandeo de la columna biempotrada se produce por colapso de una zona central de la misma, de longitud $L/2$, que se comporta como biarticulada (figura 14.8).

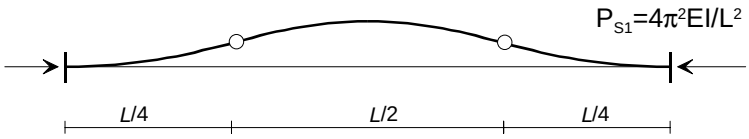


Figura 14.8

14.5 COLUMNA EMPOTRADA ARTICULADA

Se trata de estudiar la estabilidad de una columna empotrada en un extremo y articulada en el otro, en condiciones similares a las de los casos anteriores: no existe carga transversal al elemento, el eje de la columna es perfectamente recto, y la columna está sometida a una fuerza de compresión de valor P. Un extremo está empotrado y el otro tiene una articulación deslizante, a fin de permitir la aplicación de la fuerza axial (figura 14.9)

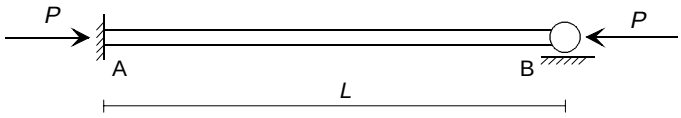


Figura 14.9

Al igual que en los casos anteriores, la ecuación diferencial que controla el problema es homogénea, por lo que no se necesita la solución particular. Para resolver el problema basta con determinar las cuatro constantes de integración, aplicando para ello las cuatro condiciones de contorno de los extremos de la columna:

- Flecha nula en el apoyo A: $v(x=0)=0 \quad \rightarrow \quad B+D=0 \quad \rightarrow \quad D=-B$
- Giro nulo en el apoyo A: $v'(x=0)=0 \quad \rightarrow \quad Ak+C=0 \quad \rightarrow \quad C=-Ak$
- Flecha nula en el apoyo B: $v(x=L)=0$
- Momento nulo en B: $v''(x=L)=0$

Estas dos últimas ecuaciones de contorno se pueden poner en forma matricial como se indica a continuación, considerando los valores de D y C deducidos antes:

$$\begin{bmatrix} \sin kL - kL & \cos kL - 1 \\ -k^2 \sin kL & -k^2 \cos kL \end{bmatrix} \begin{bmatrix} A \\ B \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix} \tag{14.42}$$

Al igual que en los casos anteriores, la condición de existencia de solución distinta de la trivial implica que el determinante de la matriz del sistema sea nulo. Desarrollándolo se obtiene:

$$\tan kL = kL \tag{14.43}$$

Las soluciones de esta ecuación son: $k_nL = 4.4934 \quad 7.7252 \quad 10.9041 \ldots$

Los modos de pandeo asociados a estas cargas críticas se obtienen calculando el valor de tres de las constantes de integración (*B*, *C* y *D*) en función de la cuarta constante (*A*):

$$B = -A\tan kL = -AkL \qquad C = -Ak \qquad D = AkL \tag{14.44}$$

con lo que se obtiene el modo de pandeo siguiente:

$$v_n = A_n(\sin k_n x - k_n L\cos k_n x - k_n x + k_n L) \tag{14.45}$$

Para n=1, la carga crítica es:

$$P_1 = \frac{4.493^2\,EI}{L^2} = \frac{\pi^2 EI}{0.7^2\,L^2} \tag{14.46}$$

que corresponde a la carga de pandeo de la columna.

La distribución de momentos flectores asociada al primer modo de pandeo es:

$$M_1 = EIv'' = A_1 EIk_1^2(-\sin k_1 x + k_1 L\cos k_1 x) \tag{14.47}$$

El momento flector se anula en los puntos que satisfacen la ecuación:

$$-\sin k_1 x + k_1 L\cos k_1 x = 0 \tag{14.48}$$

Sustituyendo el valor de $k_1 = 4.4934 / L$ se obtiene una única solución en el rango $0<x<L$, cuyo valor es x=0.3L. Por lo tanto la columna tiene una zona biarticulada, situada entre el punto de inflexión x=0.3L y el extremo derecho B, cuya longitud es 0.7L, (figura 14.10) y cuya carga crítica de Euler viene dada por:

$$P_1 = \frac{\pi^2 EI}{(0.7L)^2} \tag{14.49}$$

que coincide con la carga crítica obtenida para la columna empotrada - articulada. Por lo tanto el pandeo de esta columna se produce por colapso de una zona de la misma (de longitud 0.7L) que se comporta como biarticulada.

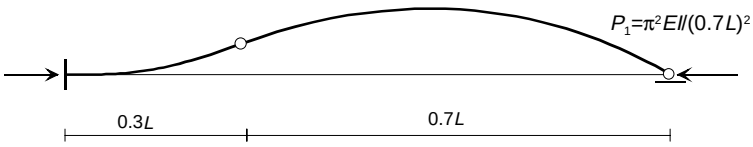


Figura 14.10

14.6 COLUMNA CON CARGA AXIAL EXCÉNTRICA

Se supone una columna recta, articulada en ambos extremos y sometida únicamente a la acción de dos cargas iguales de compresión de valor *P*, que actúan de forma excéntrica respecto al eje de la columna, con excentricidad *e* igual en ambos extremos (figura 14.11).

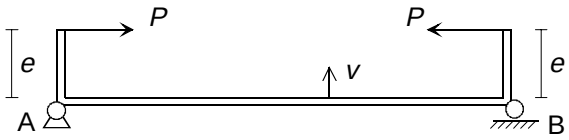


Figura 14.11

En este caso no se utiliza la solución de la ecuación diferencial de equilibrio, sino que se emplea directamente la relación entre el momento flector y la curvatura.

Considerando un punto cualquiera de la columna, situado a una distancia *x* del extremo A, el momento flector en él vale (figura 14.12):

$$M = P(e - v) \qquad (14.50)$$

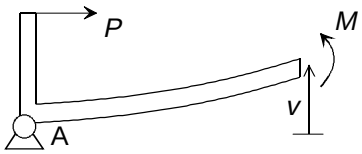


Figura 14.12

Sustituyendo $M=E\ I\ v''$ y dividiendo por *EI*, se obtiene la ecuación diferencial de la deformada:

$$v'' + k^2 v = k^2 e \qquad (14.51)$$

Esta ecuación es una integral segunda de la ecuación diferencial general de equilibrio de las vigas columna (14.13). Su solución es:

$$v = A\sin kx + B\cos kx + v_{part} \qquad (14.52)$$

La solución particular en este caso es sencillamente $v_{part} = e$, con lo que:

$$v = A\sin kx + B\cos kx + e \qquad (14.53)$$

Las constantes de integración se obtienen imponiendo las condiciones de flecha nula en ambos extremos:

$$v(x = 0) = 0 \qquad v(x = L) = 0 \qquad (14.54)$$

De donde se obtienen:

$$A = -e\tan\frac{kL}{2} \qquad B = -e \qquad (14.55)$$

La deformada de la columna es por lo tanto:

$$v = -e\tan\frac{kL}{2}\sin kx + e(1 - \cos kx) \qquad (14.56)$$

Se observa que en este caso existe una deformada única, no nula, de la columna, para cada carga *P*. En esto el comportamiento es diferente a la columna con carga centrada, la cual se mantiene recta, sin deformación lateral alguna, salvo para las cargas críticas en las que se llega al colapso de forma súbita. La deformada hallada tiene forma de trigonométrica, y está limitada en todo caso a pequeñas deformaciones, dado que se ha empleado la derivada segunda de la flecha para representar la curvatura.

La expresión del momento flector es:

$$M = EIv'' = EIek^2 \tan\frac{kL}{2}\sin kx + EIek^2 \cos kx \tag{14.57}$$

Sustituyendo el valor de *k* se obtiene:

$$M = Pe\left(\tan\frac{kL}{2}\sin kx + \cos kx\right) \tag{14.58}$$

Con objeto de simplificar las expresiones posteriores, se define una variable auxiliar $u = \frac{kL}{2}$, que puede ponerse en función de la carga crítica de Euler P_E:

$$u = \frac{kL}{2} = \frac{1}{2}\sqrt{\frac{PL^2}{EI}} = \frac{\pi}{2}\sqrt{\frac{P}{P_E}} \tag{14.59}$$

A fin de caracterizar con sencillez el comportamiento de la columna se estudia su respuesta en el punto medio: en este punto se presentan la máxima deformación y el máximo momento flector, como puede comprobarse fácilmente por derivación en las expresiones correspondientes. La deformada en dicho punto medio viene dada por la ecuación (14.56), particularizada en $x=L/2$:

$$v_{L/2} = -e\tan u\sin u + e(1-\cos u) \tag{14.60}$$

que se puede poner de forma compacta como:

$$v_{L/2} = e(1-\sec u) \tag{14.61}$$

Normalizándola respecto de *L* y poniendo de manifiesto la fuerza axial *P* se obtiene:

$$\frac{v_{L/2}}{L} = \frac{e}{L}\left[1-\sec\left(\frac{\pi}{2}\sqrt{\frac{P}{P_E}}\right)\right] \tag{14.62}$$

Esta expresión representa la relación entre la fuerza axial *P* y la deformación que aparece en el centro de la columna, para cada valor de la excentricidad *e/L*. La figura 14.13 muestra una representación gráfica de dicha relación fuerza - deformación.

Se observa que cuando $P=P_E$, el valor de la deformación en el centro $v_{L/2}$ tiende a infinito, para cualquier valor de la excentricidad. Esto demuestra que existe un valor crítico de la carga axial, que coincide con el valor de la carga crítica de Euler, y para el cual la deformación de la columna se hace infinita, es decir que se produce el colapso por deformación lateral excesiva.

Se observa asimismo que cuando la excentricidad de la carga es nula el valor de la flecha $v_{L/2}$ es también nulo, para cualquier valor de $P \neq P_E$. Si $P=P_E$ se produce el pandeo de forma súbita por bifurcación.

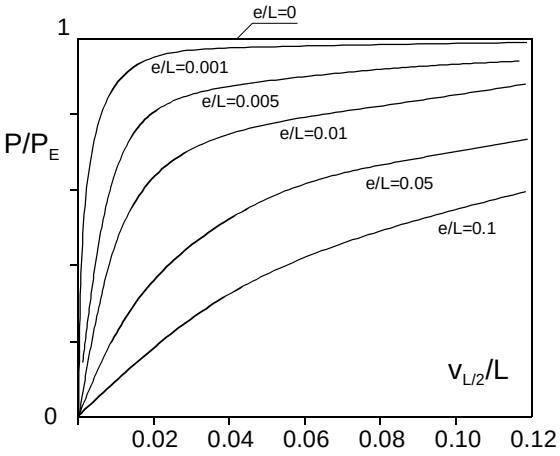


Figura 14.13

Se puede concluir por lo tanto que en esta columna existe asimismo una carga crítica de pandeo, de valor igual a la de Euler. Pero este pandeo no se produce por bifurcación brusca, sino que, para excentricidades no nulas, se manifiesta en un incremento progresivo de la deformación lateral, cuya magnitud crece con la excentricidad. Para una excentricidad nula de la carga el comportamiento es igual al de la columna biarticulada, con una bifurcación brusca del equilibrio al alcanzarse la carga crítica.

El momento flector en el punto medio de la columna, normalizado respecto al momento (Pe) aplicado en el extremo, se puede poner:

$$\frac{M_{L/2}}{Pe} = \sec\left(\frac{\pi}{2}\sqrt{\frac{P}{P_E}}\right) \tag{14.63}$$

El término de la derecha representa el factor por el que se amplifica el momento (Pe) aplicado en el extremo, debido a la presencia de la carga axial P. Se denomina factor de amplificación del momento flector A_M y no depende de la excentricidad. La figura 14.14 muestra una representación de dicho factor.

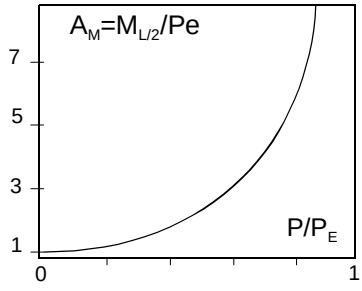


Figura 14.14

Se observa que en ausencia de carga axial el momento en el centro es igual a Pe, y que a

medida que la carga axial se aproxima a la crítica, el momento aumenta considerablemente, hasta hacerse infinito al producirse el pandeo.

Cuando la carga axial es muy baja ($u \to 0$) se puede sustituir la expresión de la secante por su desarrollo en serie:

$$\sec(u) \approx 1 + \frac{u^2}{2} + O(u^4) = 1 + \frac{k^2 L^2}{8} + \ldots = 1 + \frac{PL^2}{8EI} + \ldots \tag{14.64}$$

El momento en el centro de la columna, tomando sólo el primer término del desarrollo en serie, es:

$$M_{L/2} = Pe \sec u \approx Pe(1 + \ldots) = Pe \tag{14.65}$$

que es el momento flector constante que aparece en una viga cargada con dos momentos iguales, de valor *Pe*, en ambos extremos. La deformación en el centro, tomado dos términos del desarrollo en serie, viene dada por la ecuación (14.61):

$$v_{L/2} = e\left(1 - 1 - \frac{PL^2}{8EI}\right) = -\frac{PeL^2}{8EI} \tag{14.66}$$

que coincide con la flecha en el centro de una viga cargada con dos momentos iguales en ambos extremos, en la teoría de primer orden.

14.7 FÓRMULA DE LA SECANTE

Se trata de determinar la máxima tensión que se presenta en una columna recta, cargada con una fuerza axial excéntrica, como se ha estudiado en el apartado anterior. El máximo momento flector se presenta en el centro de la columna, y en dicha sección la máxima tensión se produce a su vez en el punto donde se suman la tensión de compresión debida al esfuerzo axial y la tensión de compresión debida a la flexión. Esto ocurre en el punto que está más alejado del centro de gravedad, en la zona de compresiones debidas a la flexión, y la tensión en él vale:

$$\sigma_{\max} = \frac{P}{A} + \frac{M_{L/2} c}{I} \tag{14.67}$$

siendo *c* la distancia desde el centro de gravedad de la sección al punto más alejado que haya en ella, en la zona de compresiones debidas a la flexión.

Sustituyendo la expresión (14.63) del momento se obtiene:

$$\sigma_{\max} = \frac{P}{A} + \frac{Pec}{I} \sec\left(\frac{\pi}{2}\sqrt{\frac{P}{P_E}}\right) \tag{14.68}$$

Sustituyendo ahora el valor de la carga crítica de Euler en función de la esbeltez (ecuación (14.25)), la expresión anterior queda:

$$\sigma_{\max} = \frac{P}{A}\left[1 + \frac{ec}{r^2} \sec\left(\frac{\lambda}{2}\sqrt{\frac{P}{EA}}\right)\right] \tag{14.69}$$

Esta relación se conoce como *fórmula de la secante*, y establece una relación muy interesante entre las siguientes magnitudes:

- La tensión máxima σ_{max} que aparece en la columna para una situación dada. Normalmente el valor máximo admisible de esta tensión máxima depende del material empleado y puede considerarse un parámetro de diseño. Típicamente su valor es el límite elástico del material σ_y, afectado de un eventual coeficiente de seguridad.
- El módulo de elasticidad *E* del material.
- La esbeltez de la columna λ.
- La excentricidad relativa de la carga, caracterizada por el factor $\frac{ec}{r^2}$
- La tensión nominal de compresión en la columna *P/A*. Este cociente puede entenderse como la tensión axial nominal que puede soportar una columna, en unas determinadas condiciones de esbeltez, excentricidad de la carga, tensión máxima admisible, etc.

La figura 14.15 muestra una representación gráfica de la fórmula de la secante para los valores típicos del acero empleado en construcción metálica. Se emplean como parámetros de la gráfica el módulo de elasticidad y la tensión máxima admisible en el material, y se representan en abscisas la esbeltez λ y en ordenadas la tensión nominal *P/A*. Se obtiene así una familia de curvas, para los distintos valores del parámetro de excentricidad, en las que todos los puntos de una misma curva corresponden a la misma tensión máxima. En la misma figura se han representado la curva correspondiente a la hipérbola de Euler y el valor de la tensión máxima admisible en el material, que actúa como límite a la curva de Euler.

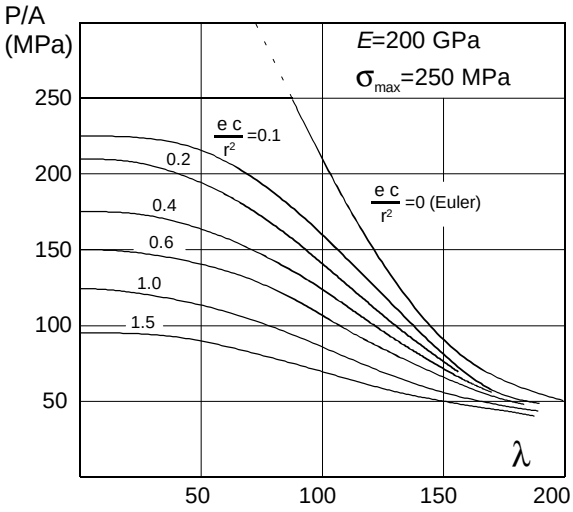


Figura 14.15

Se observa que a medida que el parámetro de excentricidad tiende a cero, las curvas de la fórmula de la secante tienden a la curva de Euler. Cuando tanto la esbeltez como la

excentricidad tienden a cero, la curva correspondiente de la fórmula de la secante tiene como asíntota el valor de la tensión máxima.

14.8 COLUMNAS CON CURVATURA INICIAL

Se trata en este caso de estudiar una columna que no es recta, sino que en su estado inicial descargado su directriz está curvada con una deformación inicial conocida. El interés de este estudio resulta evidente, dado que en la realidad las piezas están normalmente deformadas debido a los procesos de fabricación, y la directriz recta, como se ha supuesto en los casos anteriores, es imposible de obtener. Sin embargo la deformación inicial real resulta difícil de cuantificar en la práctica, por lo que para un primer estudio teórico es necesario crear algún modelo que sea abordable analíticamente y que tenga sentido físico.

14.8.1 Columna con curvatura inicial senoidal

En una primera aproximación al problema se supone que la deformación inicial v_0 varía según una ley seno, con semi longitud de onda igual a la longitud de la viga y amplitud a:

$$v_0 = a \sin \frac{\pi x}{L} \tag{14.70}$$

Se supone que la columna está articulada en ambos extremos y sometida únicamente a la acción de dos cargas iguales de compresión de valor P, que actúan en la dirección de la recta de unión de las dos articulaciones. En las columnas reales puede existir además cierta excentricidad en las cargas, pero ésta no se tiene en cuenta aquí. La figura 14.16 muestra la disposición de la columna.

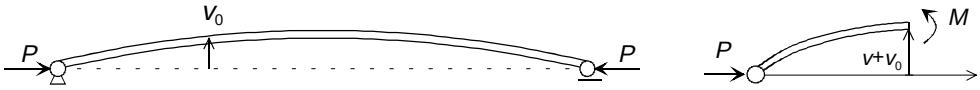


Figura 14.16

El momento flector en un punto cualquiera de la columna, situado a una distancia x del extremo A, en la situación deformada de la columna, es:

$$M = -P(v + v_0) \tag{14.71}$$

Sustituyendo M por su valor en función de la derivada segunda se obtiene la ecuación diferencial de la deformada elástica v:

$$EIv'' + Pv = -Pv_0 \tag{14.72}$$

Introduciendo la constante k y la expresión de la deformación inicial se obtiene:

$$v'' + k^2 v = -k^2 a \sin \frac{\pi x}{L} \tag{14.73}$$

La solución de esta ecuación es:

$$v = A \sin kx + B \cos kx + v_{part} \tag{14.74}$$

La solución particular en este caso es:

$$v_{part} = C \sin \frac{\pi x}{L} \tag{14.75}$$

Para calcular el valor de la constante C se sustituye la solución particular en la ecuación diferencial:

$$-C \frac{\pi^2}{L^2} \sin \frac{\pi x}{L} + k^2 C \sin \frac{\pi x}{L} = -k^2 a \sin \frac{\pi x}{L} \tag{14.76}$$

de donde se obtiene el valor de C:

$$C = \frac{a k^2 L^2 / \pi^2}{1 - k^2 L^2 / \pi^2} = \frac{a P/P_E}{1 - P/P_E} \tag{14.77}$$

Por lo tanto la solución de la ecuación diferencial es :

$$v = A \sin kx + B \cos kx + \frac{a P/P_E}{1 - P/P_E} \sin \frac{\pi x}{L} \tag{14.78}$$

Las condición de flecha nula en el extremo A permite hallar una constante de integración:

$$v(x = 0) = 0 \qquad \rightarrow \qquad B = 0 \tag{14.79}$$

La condición de flecha nula en el extremo B es:

$$v(x = L) = 0 \qquad \rightarrow \qquad A \sin kL = 0 \tag{14.80}$$

Esta ecuación se satisface de dos formas:

Si $\sin kL = 0$. Esto implica que $kL = n\pi \quad n = 1,2,\ldots$ lo que corresponde a las cargas críticas de la columna biarticulada recta. Sin embargo esta solución no interesa en este caso, pues la deformada de la columna puede determinarse mediante otras condiciones, como se ve a continuación

Si *A=0*. Este es el valor que interesa de la constante de integración, para poder determinar la deformada de la columna.

La deformación elástica producida por la carga P es por lo tanto:

$$v = \frac{P/P_E}{1 - P/P_E} a \sin \frac{\pi x}{L} \tag{14.81}$$

La deformación total de la columna es la suma de la inicial más la deformación elástica:

$$v_T = v_0 + v = \frac{1}{1 - P/P_E} a \sin \frac{\pi x}{L} = A_v a \sin \frac{\pi x}{L} = A_v v_0 \tag{14.82}$$

La figura 14.17 muestra la deformada de la columna: se observa que tiene la misma forma de ley seno que la deformación inicial, pero variando su amplitud, que se ve modificada por el denominado factor de amplificación de deformaciones:

$$A_v = \frac{1}{1 - P/P_E} \tag{14.83}$$

Para valores pequeños de P este factor tiende a la unidad, con lo que no se produce amplificación (figura 14.18). Cuando P se aproxima a la carga de Euler P_E, el factor de amplificación tiende a infinito, con lo que se produce el colapso de la columna por deformación lateral excesiva. Por lo tanto esta columna tiene una carga crítica de pandeo de valor igual a la de Euler, pero la deformación lateral producida por este pandeo no se produce de forma súbita, por bifurcación, sino gradualmente al incrementarse P.

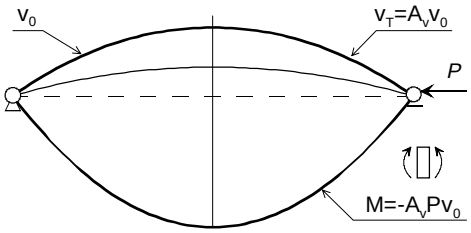


Figura 14.17

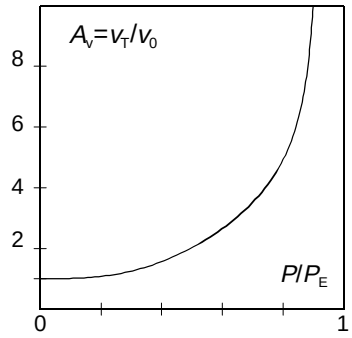


Figura 14.18

La distribución de momentos flectores en la columna viene dada por:

$$M = -P(v + v_0) = -Pv_T = -A_v P v_0 \tag{14.84}$$

Se observa que el diagrama de flectores de la columna tiene la misma forma que la deformación inicial, pero amplificada por el factor A_vP (figura 14.17). El factor $-Pv_0$ en la expresión del momento flector es el momento que existiría en la viga en la hipótesis de pequeñas deformaciones: al considerarse el equilibrio en la posición deformada, este momento se ve amplificado por el mismo factor de amplificación que las deformaciones.

14.8.2 Columnas con curvatura inicial cualquiera

Se trata de realizar el mismo análisis de estabilidad anterior, para el caso de que la deformación inicial de la columna tenga una forma cualquiera. En este caso se procede a desarrollar la deformación inicial en serie de funciones seno:

$$v_0(x) = \sum_{n=1}^{\infty} v_{0n} = \sum_{n=1}^{\infty} a_n \sin\frac{n\pi x}{L} \tag{14.85}$$

Donde v_{0n} son los distintos armónicos y a_n son las amplitudes correspondientes. Este desarrollo en serie de senos satisface la condición de que su valor es nulo en los dos apoyos extremos de la columna, pues las funciones seno empleadas tienen una longitud de onda de valor $2L/n$, con lo cual el valor de cada armónico siempre es cero en los dos extremos. El número de términos a emplear en el desarrollo en serie es el necesario para representar adecuadamente la forma de la deformación inicial.

Al ser la ecuación diferencial que controla el problema del tipo lineal, basta con resolverla para cada uno de los términos del desarrollo en serie y a continuación sumar todos los resultados. Las distintas ecuaciones son similares a la obtenida para la deformación en forma de ley seno (ecuación (14.73)), pero sustituyendo el término

independiente por el sumando correspondiente del desarrollo, es decir:

$$v'' + k^2 v = -k^2 a_n \sin\frac{n\pi x}{L} \qquad n = 1 \cdots \infty \tag{14.86}$$

Empleando el mismo proceso que en el apartado anterior se calcula la solución de esta ecuación en función de *n*, con lo cual se obtiene la deformación para el sumando *n* de la serie. La deformación total que se produce para el sumando *n*, incluyendo la deformación inicial y la deformación elástica, es:

$$v_{Tn} = \frac{n^2}{n^2 - P/P_E} a_n \sin\frac{n\pi x}{L} = A_{vn} v_{0n} \tag{14.87}$$

donde se identifica el factor de amplificación de la deformación para cada término:

$$A_{vn} = \frac{n^2}{n^2 - P/P_E} \tag{14.88}$$

La deformación total de la columna es por lo tanto:

$$v_T = \sum_{n=1}^{\infty} v_{Tn} = \sum_{n=1}^{\infty} A_{vn} v_{0n} \tag{14.89}$$

La deformación de la columna es una suma de términos en seno, de las mismas longitudes de onda que los armónicos de la deformación inicial, pero afectado cada uno de ellos por un factor de amplificación diferente A_{vn}, que es función de *n*.

Se observa que a medida que *n* aumenta, el valor de los factores de amplificación A_{vn} tiende a la unidad, para valores de P/P_E inferiores a uno: esto quiere decir que los armónicos altos no se ven amplificados. Esta característica evita tener que emplear un número elevado de armónicos para la representación de la deformación inicial, pues los armónicos inferiores son los dominantes y de esta manera se garantiza la convergencia de la solución.

La columna muestra una serie de cargas críticas, que se manifiestan cuando alguno de los factores de amplificación se hace infinito. Esto ocurre cuando se anula su denominador, es decir:

$$n^2 = P/P_E \tag{14.90}$$

La menor de estas cargas críticas corresponde a *n=1*, es decir cuando la carga axial coincide con la carga de Euler: en este instante se produce el pandeo pues el primer armónico del desarrollo en serie de la respuesta se hace infinito.

Por un proceso análogo puede demostrarse que el valor del momento flector en la columna es :

$$M = -\sum_{n=1}^{\infty} A_{vn} P v_{0n} \tag{14.91}$$

El diagrama de flectores es suma de los distintos armónicos presentes en la deformación inicial v_{0n}, pero amplificados por el factor A_{vn} *P*.

14.9 LONGITUD DE PANDEO

En los apartados anteriores se han determinado las cargas de pandeo de columnas con diferentes condiciones en los extremos. En todos los casos se ha obtenido que la columna tiene una carga crítica que produce su colapso por pandeo, cuya magnitud viene determinada por la expresión general:

$$P_{CR} = \frac{\pi^2 EI}{(\beta L)^2} \tag{14.92}$$

donde β es un coeficiente que depende de la condición en los extremos de la columna.

Se define la *longitud de pandeo* de la columna L_P como:

$$L_P = \beta L \tag{14.93}$$

con lo cual la carga crítica de cualquier columna se puede poner en la forma:

$$P_{CR} = \frac{\pi^2 EI}{L_P^2} \tag{14.94}$$

que es la expresión de la carga crítica de una columna biarticulada de longitud L_P . Por lo tanto se puede decir que la longitud de pandeo de una columna es la longitud que tendía una columna biarticulada cuya carga crítica de Euler sea igual a la carga de pandeo real de la columna.

La tabla 14.1 muestra las longitudes de pandeo para los casos más habituales.

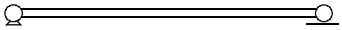
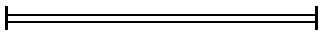
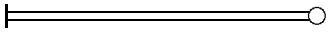
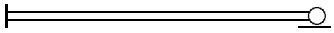
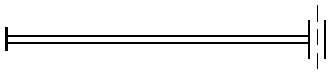
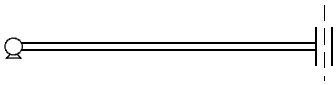
Condición de apoyo	L_P
	L
	$L/2$
	$2\,L$
	$0.7\,L$
	L
	$2\,L$

Tabla 14.1

14.10 VIGAS COLUMNA

14.10.1 Viga columna biarticulada con carga uniforme

En este caso el elemento estructural es recto y está sometido a la acción de una carga distribuida uniforme de magnitud *q*, y a una fuerza axial de compresión *P*. Ambos extremos se suponen articulados (figura 14.19).

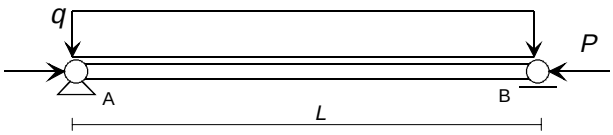


Figura 14.19

En estas condiciones la ecuación diferencial de equilibrio es la ecuación general de la viga columna (14.13). La solución particular para este caso de carga es:

$$v_{part} = -\frac{q}{2EIk^2}x^2 \tag{14.95}$$

con lo que la expresión de la deformada es:

$$v = A\sin kx + B\cos kx + Cx + D - \frac{q}{2EIk^2}x^2 \tag{14.96}$$

Las condiciones de contorno a aplicar a esta solución son:

- Flecha nula en el apoyo A: $v(x=0)=0$
- Momento nulo en el apoyo A: $v''(x=0)=0$
- Flecha nula en el apoyo B: $v(x=L)=0$
- Momento nulo en el apoyo B: $v''(x=L)=0$

De estas cuatro ecuaciones se obtienen las cuatro constantes de integración *A, B, C* y *D*, que sustituidas en la solución de la ecuación diferencial permiten escribir la expresión de la deformada de la viga:

$$v = -\frac{q}{EIk^4}\tan\frac{kL}{2}\sin kx + \frac{q}{EIk^4}(1-\cos kx) + \frac{q}{2EIk^2}(Lx - x^2) \tag{14.97}$$

La expresión del momento flector se obtiene derivando dos veces la deformada:

$$M = \frac{q}{k^2}\tan\frac{kL}{2}\sin kx + \frac{q}{k^2}\cos kx - \frac{q}{k^2} \tag{14.98}$$

Con objeto de caracterizar el comportamiento de la viga de forma sencilla se estudia la deformación en su punto medio, que se obtiene sustituyendo $x=L/2$ en (14.97) y operando. Empleando la variable auxiliar *u*, definida en (14.59), esta deformación vale:

$$v_{L/2} = v(x=\frac{L}{2}) = \frac{q}{EIk^4}(1-\sec u) + \frac{qL^2}{8EIk^2} \tag{14.99}$$

Sustituyendo k en función de u y operando, se obtiene la expresión final de la deformación en el centro de la viga:

$$v_{L/2} = \frac{5}{384}\frac{qL^4}{EI}\left(\frac{-24+24\sec u-12u^2}{5u^4}\right) = \frac{5}{384}\frac{qL^4}{EI}A_v \qquad (14.100)$$

donde la expresión entre paréntesis define el factor de amplificación de deformaciones A_v, que depende de la carga axial. El factor :

$$v_q = \frac{5}{384}\frac{qL^4}{EI} \qquad (14.101)$$

es la deformación en el centro de la viga debida sólo a la acción de la carga distribuida q, en la teoría de primer orden. Por lo tanto la flecha en el centro es igual a la flecha de primer orden v_q, amplificada por el factor de amplificación. La figura 14.20 representa la variación del factor de amplificación A_v con la carga axial.

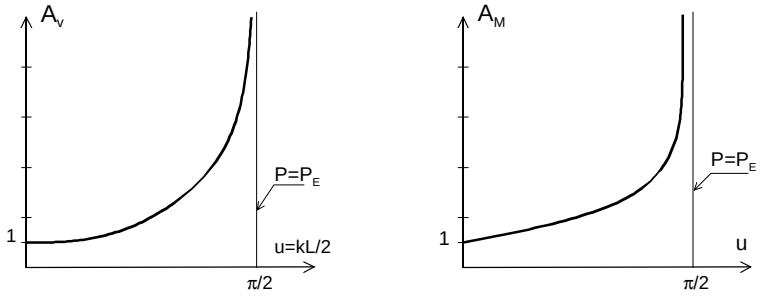


Figura 14.20

Para cargas axiales bajas el valor de A_v tiende a la unidad, con lo que no hay amplificación. Cuando la variable u tiende a π/2, el factor de amplificación tiende a infinito, indicando que se produce el pandeo de la viga por deformación lateral excesiva. La carga que corresponde a este valor de u es:

$$u = \frac{kL}{2} = \frac{\pi}{2}\sqrt{\frac{P}{P_E}} = \frac{\pi}{2} \qquad \rightarrow \qquad P = P_E \qquad (14.102)$$

La carga crítica de esta viga es igual a la carga crítica de Euler, que corresponde a una columna biarticulada. Por lo tanto la presencia de la carga distribuida no afecta al valor de la carga crítica de pandeo. Este hecho, que aquí se ha obtenido para un caso de carga particular, es general para cualquier tipo de carga transversal.

El momento máximo en la viga se produce en su punto medio, y se obtiene sustituyendo x=L/2 en (14.98):

$$M_{L/2} = \frac{q}{k^2}(\tan u \sin u + \cos u - 1) = \frac{qL^2}{4u^2}(\sec u - 1) \qquad (14.103)$$

Sustituyendo u en función de k se obtiene la expresión final del momento:

$$M_{L/2} = \frac{qL^2}{8}\left(\frac{2\sec u - 2}{u^2}\right) = \frac{qL^2}{8} A_M \qquad (14.104)$$

Se observa que el momento en el centro de la viga es igual al momento de primer orden ($qL^2/8$), multiplicado por un factor de amplificación A_M, que es función de la carga axial P. Este factor de amplificación (figura 14.20) vale la unidad cuando P es nulo, con lo que se obtiene al solución de primer orden. El factor de amplificación tiende a infinito para $u=\pi/2$, es decir si la fuerza axial es igual a la carga de Euler, que es cuando se produce el colapso de la viga.

Es importante hacer notar que la respuesta de la viga es lineal en la carga transversal q, y no lineal en la carga axial P, como puede comprobarse en las expresiones de la deformación (14.97) y del momento flector (14.98). Esta propiedad resulta del máximo interés para resolver casos en los que se aplican varias cargas transversales distribuidas y la misma carga axial, pues es posible sumar el efecto de las distintas cargas.

- La expresión del factor de amplificación de deformaciones A_v se puede aproximar mediante un desarrollo en serie de la función secante, obteniéndose:

$$A_v = \frac{1}{5u^4}\left[24 + 12u^2 + 5u^4 + \frac{61}{30}u^6 + \cdots - 24 - 12u^2\right]$$

$$A_v = 1 + 0.4067u^2 + .01649u^4 + \ldots \qquad (14.105)$$

Sustituyendo el valor de u en función de P, y despreciando los términos próximos a la unidad, se llega a:

$$A_v = 1 + 1.003\left(\frac{P}{P_E}\right) + 1.004\left(\frac{P}{P_E}\right)^2 + \cdots \approx 1 + \left(\frac{P}{P_E}\right) + \left(\frac{P}{P_E}\right)^2 + \cdots = \frac{1}{1 - P/P_E} \qquad (14.106)$$

Esta expresión simplificada coincide con el factor de amplificación de deformaciones para una columna con deformación de curvatura inicial (ecuación (14.83)), y es muy utilizada en la práctica.

- La expresión del factor de amplificación del momento flector A_M se puede aproximar asimismo mediante un desarrollo en serie de la función secante, en la forma:

$$A_M = \frac{2\sec u - 2}{u^2} = \frac{1}{u^2}\left[2 + u^2 + \frac{10}{24}u^4 + \frac{122}{720}u^6 + \cdots - 2\right]$$

$$A_M = 1 + 0.4167u^2 + 0.169u^4 + \ldots \qquad (14.107)$$

Sustituyendo el valor de u en función de P, y aproximando los términos próximos a la unidad se obtiene:

$$A_M = 1 + 1.028\left(\frac{P}{P_E}\right) + 1.031\left(\frac{P}{P_E}\right)^2 + \cdots \approx 1 + \left(\frac{P}{P_E}\right) + \left(\frac{P}{P_E}\right)^2 + \cdots = \frac{1}{1 - P/P_E} = A_v \qquad (14.108)$$

que es el mismo valor aproximado hallado para el factor de amplificación de deformaciones. La simplicidad de esta expresión y su coincidencia para deformaciones y momentos explica el interés de su utilización práctica.

14.10.2 Viga columna biarticulada con carga puntual en el centro

En este caso se trata de un elemento estructural recto, articulado en ambos extremos y sometido a la acción de una fuerza puntual Q en el punto medio de su luz, y a una fuerza axial de compresión P (figura 14.21).

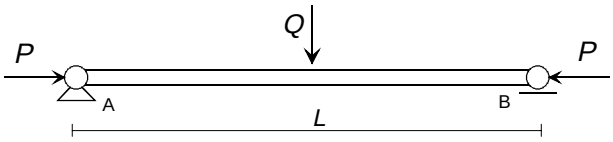


Figura 14.21

La resolución de este caso es más sencilla empleando la relación momento flector - derivada segunda de la flecha. Dado que la viga es simétrica, se estudia sólo la mitad izquierda y se imponen condiciones de simetría en su punto medio.

El momento flector en un punto cualquiera de la parte izquierda de la viga es (figura 14.22):

$$M = -Pv + Qx/2 \tag{14.109}$$

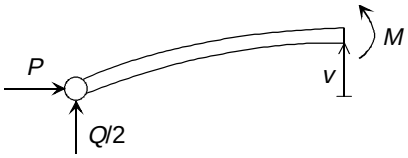


Figura 14.22

La ecuación diferencial de equilibrio es por lo tanto:

$$EIv'' + Pv = Qx/2 \tag{14.110}$$

La solución de esta ecuación es:

$$v = A\sin kx + B\cos kx + \frac{Q}{2P}x \qquad 0 < x < L/2 \tag{14.111}$$

donde los dos primero términos corresponden a la solución general y el último a la solución particular. Las condiciones de contorno a aplicar a esta solución son:

- Flecha nula en el apoyo A: $v(x=0) = 0$
- Giro nulo en el punto central, por simetría: $v'(x = L/2) = 0$

De estas dos ecuaciones se obtienen las constantes de integración:

$$A = \frac{-Q}{2Pk\cos u} \qquad B = 0 \tag{14.112}$$

que sustituidas en la solución de la ecuación diferencial permiten escribir la expresión de la deformada de la viga:

$$v = \frac{-Q}{2Pk}\left(\frac{\sin kx}{\cos u} - kx\right) \qquad 0 < x < L/2 \tag{14.113}$$

La flecha máxima de la viga se produce en el punto central de la misma:

$$v_{L/2} = v(x = L/2) = \frac{-QL^3}{48EI}\left(\frac{3\tan u - 3u}{u^3}\right) = \frac{-QL^3}{48EI} A_v \qquad (14.114)$$

El primer factor en esta expresión es la deformación en la teoría de primer orden, y se observa que la deformación total en el centro de la viga es igual a dicha deformación de primer orden, multiplicada por un factor de amplificación de la deformación:

$$A_v = \frac{3\tan u - 3u}{u^3} \qquad (14.115)$$

Este factor tiende a la unidad para valores de u próximos a cero, es decir para la viga sin carga axial, y tiende a infinito cuando $u=\pi/2$ (figura 14.23). A este valor le corresponde una carga axial de valor $P=P_E$. Por lo tanto la carga crítica de la viga columna en este caso vuelve a ser la carga de Euler, por lo que la presencia de la carga puntual no afecta a la carga crítica.

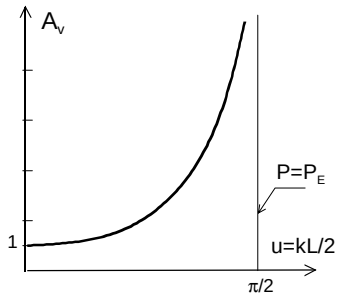


Figura 14.23

La distribución de momentos flectores en la viga es:

$$M = EIv'' = \frac{QkEI}{2P}\frac{\sin kx}{\cos u} \qquad (14.116)$$

que tiene una distribución senoidal, a diferencia de la distribución de primer orden que es lineal. El momento flector máximo se produce en el centro de la viga y vale:

$$M_{L/2} = \frac{QkEI}{2P}\tan u = \frac{QL}{4}\frac{\tan u}{u} = \frac{QL}{4} A_M \qquad (14.117)$$

Nuevamente ocurre que el momento máximo en la viga es igual al momento de primer orden ($QL/4$) multiplicado por un factor de amplificación A_M que depende de la carga axial P. Al igual que para las deformaciones, el factor de amplificación de momentos vale 1 cuando la carga axial es nula, y tiende a infinito cuando $u=\pi/2$, es decir cuando la carga axial se acerca al valor crítico de Euler.

Por lo tanto la presencia de la carga axial hace transformarse la ley triangular de momentos (con valor de pico igual a $QL/4$) en una ley senoidal, de amplitud creciente a medida que aumenta P, como se muestra en la figura 14.24, hasta llegar a una amplitud infinita cuando P coincide con el valor de la carga de Euler, momento en que se produce el colapso.

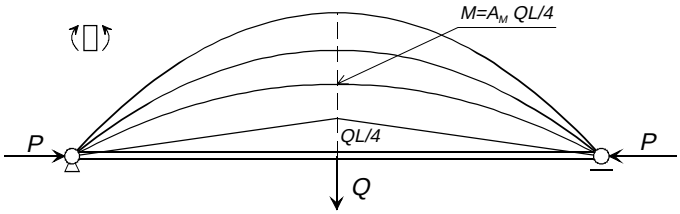


Figura 14.24

14.10.3 Columna con momentos en ambos extremos

Se plantea el estudio de un elemento estructural recto, sometido a una carga de compresión P y a dos momentos aplicados en ambos extremos A y B. Se supone que los dos extremos pueden girar bajo la acción de los momentos, así como desplazarse lateralmente uno respecto a otro. La figura 14.25 muestra la disposición. Sean M_A y M_B los momentos aplicados en ambos extremos, θ_A y θ_B los giros de ambos extremos, y Δ el desplazamiento lateral relativo entre ambos extremos.

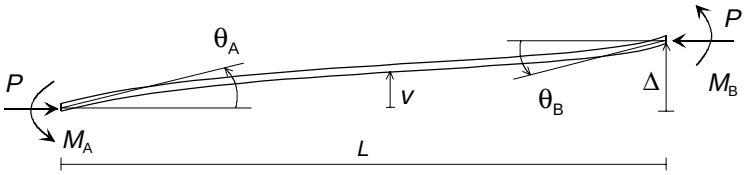


Figura 14.25

Por equilibrio, en ambos extremos existen dos fuerzas de reacción verticales, de valor:

$$Q = \frac{M_A + M_B + P\Delta}{L} \tag{14.118}$$

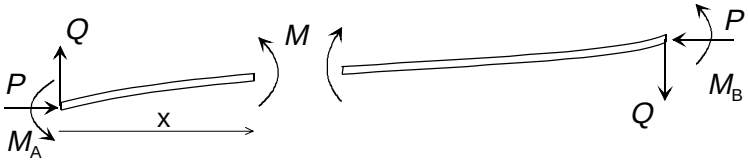


Figura 14.26

El momento flector en un punto cualquiera de la viga es (figura 14.26):

$$M = -M_A + Qx - Pv \tag{14.119}$$

con lo que la ecuación de equilibrio es:

$$EIv'' = -M_A + \frac{M_A + M_B + P\Delta}{L}x - Pv$$

$$v'' + k^2 v = \frac{M_A + M_B + P\Delta}{EIL}x - \frac{M_A}{EI} \tag{14.120}$$

La solución de esta ecuación es:

$$v = A\sin kx + B\cos kx + \frac{M_A + M_B + P\Delta}{k^2 EIL}x - \frac{M_A}{k^2 EI} \tag{14.121}$$

Las condiciones de contorno son:

La flecha es nula en el apoyo A: $v(x=0)=0$

La flecha en el apoyo B es igual a Δ: $v(x=L)=\Delta$

Los valores de las constantes de integración resultan:

$$B = \frac{M_A}{k^2 EI} \qquad A = -\frac{M_A\cos kL + M_B}{k^2 EI\sin kL} \tag{14.122}$$

La deformada de la viga es:

$$v = -\frac{M_A\cos kL + M_B}{k^2 EI\sin kL}\sin kx + \frac{M_A}{k^2 EI}\cos kx + \frac{M_A + M_B + P\Delta}{k^2 EIL}x - \frac{M_A}{k^2 EI} \tag{14.123}$$

Nótese que en esta expresión, la deformación lateral Δ debe ser considerada un dato, y su presencia genera un término de deformación lineal, de valor proporcional a $x\Delta/L$, que corresponde a un movimiento de sólido rígido.

La deformación lateral v se hace infinita cuando el denominador de alguno de sus sumandos se anula, lo cual puede ocurrir cuando k=0, que es la solución sin interés, o cuando $\sin(kL)$=0. Esto último corresponde a un valor crítico de la carga axial de valor $kL=\pi$, que coincide con la carga crítica de Euler.

El giro de la viga es:

$$v' = -\frac{M_A\cos kL + M_B}{kEI\sin kL}\cos kx - \frac{M_A}{kEI}\sin kx + \frac{M_A + M_B + P\Delta}{k^2 EIL} \tag{14.124}$$

En este caso la deformación lateral Δ añade un término constante, de valor proporcional a Δ/L, que es el valor del giro de sólido rígido generado por Δ.

La distribución de momentos flectores en la viga es:

$$M = EIv'' = \frac{M_A\cos kL + M_B}{\sin kL}\sin kx - M_A\cos kx \tag{14.125}$$

Este diagrama tiene una distribución trigonométrica entre los dos valores de los momentos en los extremos M_A y M_B, a diferencia de la teoría de primer orden en la que la ley de momentos flectores es lineal entre los dos valores extremos (figura 14.27). Además, la ley trigonométrica no tiene sus valores máximos en los extremos, como ocurre en la teoría de primer orden, sino en un punto intermedio, cuya posición x_{max} viene dada por:

$$\tan(kx_{\max}) = \frac{-M_B - M_A\cos kL}{M_A\sin kL} \tag{14.126}$$

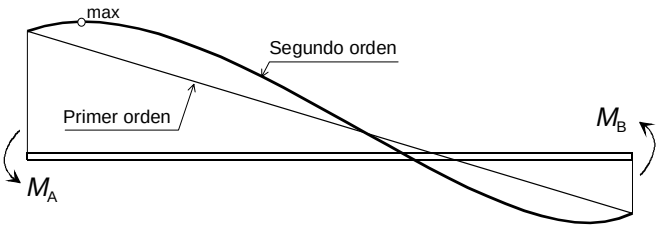


Figura 14.27

El valor del momento máximo es:

$$M_{\max} = \frac{\left(M_A^2 + M_B^2 + 2M_A M_B \cos kL\right)^{1/2}}{\sin kL} \tag{14.127}$$

Los giros en los extremos de la viga son:

$$\theta_A = v'(x=0) = -\frac{M_A \cos kL + M_B}{kEI \sin kL} + \frac{M_A + M_B + P\Delta}{k^2 EIL}$$

$$\theta_B = v'(x=L) = -\frac{M_A \cos kL + M_B}{kEI \sin kL}\cos kL - \frac{M_A}{kEI}\sin kL + \frac{M_A + M_B + P\Delta}{k^2 EIL} \tag{14.128}$$

Reagrupando los distintos términos, esta expresión se puede poner en forma matricial como:

$$\begin{bmatrix} \theta_A - \dfrac{\Delta}{L} \\ \theta_B - \dfrac{\Delta}{L} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \dfrac{L(\sin kL - kL\cos kL)}{(k^2L^2 \sin kL)EI} & \dfrac{L(\sin kL - kL)}{(k^2L^2 \sin kL)EI} \\ \dfrac{L(\sin kL - kL)}{(k^2L^2 \sin kL)EI} & \dfrac{L(\sin kL - kL\cos kL)}{(k^2L^2 \sin kL)EI} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} M_A \\ M_B \end{bmatrix} \tag{14.129}$$

Estas son las dos ecuaciones de equilibrio de la viga correspondientes al fenómeno de flexión, expresadas en términos de flexibilidad.

14.11 PROPIEDADES DE RIGIDEZ DE LA VIGA COLUMNA

Se desea obtener las propiedades de rigidez de la viga columna, es decir de un elemento estructural sometido a una carga axial conocida *P*, y a unos momentos en ambos extremos. Estas propiedades interesa obtenerlas de una forma homogénea con las de los restantes elementos estructurales, a fin de poderlas emplear conjuntamente en el análisis de una estructura por el método de rigidez.

Rigidez en el sistema local

Se define un sistema de ejes local, orientado desde el nudo inicial I al nudo final J (figura 14.28). Los grados de libertad y las fuerzas en los extremos de la viga son los habituales en un elemento plano:

$$\boldsymbol{\delta} = \begin{Bmatrix} \boldsymbol{\delta}_I \\ \boldsymbol{\delta}_J \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \delta_{IX} \\ \delta_{IY} \\ \theta_I \\ \delta_{JX} \\ \delta_{JY} \\ \theta_J \end{Bmatrix} \qquad \mathbf{P} = \begin{Bmatrix} \mathbf{P}_I \\ \mathbf{P}_J \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} P_{IX} \\ P_{IY} \\ M_I \\ P_{JX} \\ P_{JY} \\ M_J \end{Bmatrix} \tag{14.130}$$

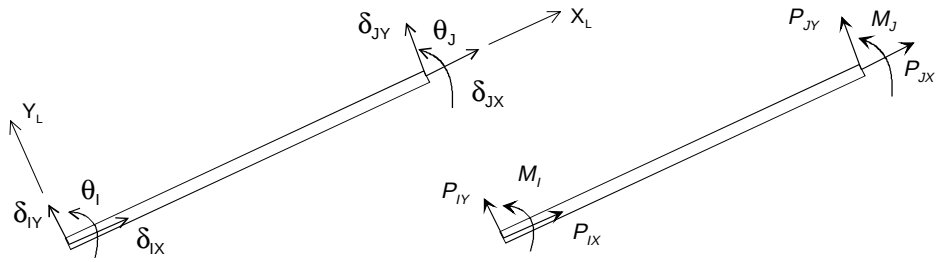


Figura 14.28

Para obtener las propiedades de rigidez del elemento se emplean las relaciones (14.129) entre los momentos en los extremos y las deformaciones. De ellas se pueden despejar los momentos en función de las deformaciones, obteniéndose la siguiente expresión:

$$\begin{bmatrix} M_A \\ M_B \end{bmatrix} = \frac{EI}{L} \begin{bmatrix} r_{11} & r_{12} & -\dfrac{r_{11}+r_{12}}{L} \\ r_{21} & r_{22} & -\dfrac{r_{21}+r_{22}}{L} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \theta_A \\ \theta_B \\ \Delta \end{bmatrix} \tag{14.131}$$

Los coeficientes:

$$r_{11} = r_{22} = \frac{kl\sin kL - k^2L^2\cos kL}{2 - 2\cos kL - kL\sin kL} \qquad r_{12} = r_{21} = \frac{k^2L^2 - kl\sin kL}{2 - 2\cos kL - kL\sin kL} \tag{14.132}$$

son las denominadas *funciones de estabilidad*, introducidas por James en 1935 para el método de la distribución de momentos, y posteriormente por Livesley (1956) para el método matricial de rigidez. La figura 14.29 muestra una representación gráfica de dichas funciones de estabilidad, en función del parámetro *kL*, en la que se observa su fuerte no linealidad.

Cuando *kL* tiende a cero (viga sin carga axial) los coeficientes tienden a valer r_{11}=4 y r_{12}=2, que son los valores de los coeficientes de rigidez al giro de la viga en el análisis de primer orden. En este caso la ecuación (14.131) coincide con la parte correspondiente de la ecuación de equilibrio de la viga en el análisis de primer orden (ecuación 7.58). Hay que notar también que para *kL*=4.5, el coeficiente de rigidez directa r_{11} se anula, y a partir de ese valor es negativo, lo cual corresponde a una inversión del momento que hay que aplicar en un nudo para girarlo en un determinado sentido.

Se observa la presencia de un valor crítico $kL=2\pi$ para el cual los coeficientes de rigidez se hacen infinitos. Este valor en realidad no corresponde a la menor carga crítica de

la viga, sino que hay otros valores, que pueden ser inferiores, y que dependen de las condiciones de apoyo en los extremos (ver ejercicios 14.19.1 a 14.19.7).

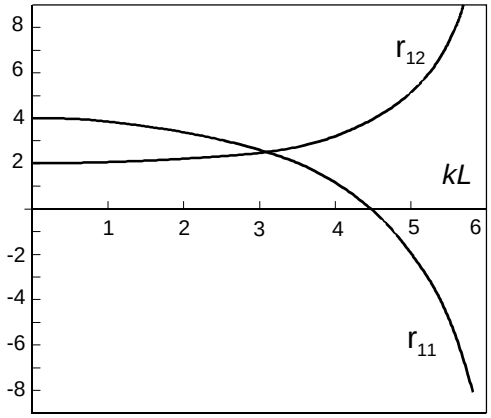


Figura 14.29

La ecuación (14.131) contiene las dos ecuaciones de equilibrio a flexión de la viga columna, puestas en función de los desplazamientos de los nudos. A partir de ellas puede obtenerse la expresión completa de la matriz de rigidez de la viga columna, como se indica a continuación.

La relación entre los grados de libertad de la viga y las deformaciones empleadas en el apartado 14.10.3 es:

$$\theta_A = \theta_I \qquad \theta_B = \theta_J \qquad \Delta = \delta_{JY} - \delta_{IY} \tag{14.133}$$

Los valores de los momentos en los extremos se obtienen sencillamente de la expresión (14.131), sustituyendo en ella las distintas deformaciones, en función de los grados de libertad.

$$M_I \equiv M_A = \frac{EI}{L}\left(r_{11}\theta_A + r_{12}\theta_B - (r_{11}+r_{12})\frac{\Delta}{L}\right)$$

$$M_I = \frac{EI}{L}r_{11}\theta_I + \frac{EI}{L}r_{12}\theta_J + \frac{EI}{L^2}(r_{11}+r_{12})\delta_{IY} - \frac{EI}{L^2}(r_{11}+r_{12})\delta_{JY}$$

$$M_J \equiv M_B = \frac{EI}{L}\left(r_{21}\theta_A + r_{22}\theta_B - (r_{21}+r_{22})\frac{\Delta}{L}\right) \tag{14.134}$$

$$M_J = \frac{EI}{L}r_{21}\theta_I + \frac{EI}{L}r_{22}\theta_J + \frac{EI}{L^2}(r_{21}+r_{22})\delta_{IY} - \frac{EI}{L^2}(r_{21}+r_{22})\delta_{JY}$$

Las fuerzas verticales en los nudos son iguales al esfuerzo cortante Q existente en el extremo de la viga columna. La fuerza en el nudo I es:

$$P_{IY} \equiv Q = \frac{M_A + M_B + P\Delta}{L} = \frac{M_I}{L} + \frac{M_J}{L} + \frac{EIk^2}{L}(\delta_{JY} - \delta_{IY}) \tag{14.135}$$

Sustituyendo los valores de los momentos en función de las deformaciones dados por (14.134) se obtiene:

$$P_{IY} = \frac{EI}{L^2}(r_{11}+r_{21})\theta_I + \frac{EI}{L^2}(r_{12}+r_{22})\theta_J + \frac{EI}{L^3}\left(2r_{11}+2r_{12}-k^2L^2\right)\delta_{IY} - \frac{EI}{L^3}\left(2r_{11}+2r_{12}-k^2L^2\right)\delta_{JY} \qquad (14.136)$$

La fuerza vertical en el nudo J es igual y de signo contrario a la del nudo I: $P_{JY} = -P_{IY}$

Agrupando las cuatro expresiones anteriores se puede plantear la ecuación de equilibrio de rigidez de la viga columna:

$$\begin{Bmatrix} P_{IX} \\ P_{IY} \\ M_I \\ P_{JX} \\ P_{JY} \\ M_J \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{EA}{L} & 0 & 0 & -\frac{EA}{L} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{EI}{L^3}\alpha_1 & \frac{EI}{L^2}\alpha_2 & 0 & -\frac{EI}{L^3}\alpha_1 & \frac{EI}{L^2}\alpha_2 \\ 0 & \frac{EI}{L^2}\alpha_2 & \frac{EI}{L}r_{11} & 0 & -\frac{EI}{L^2}\alpha_2 & \frac{EI}{L}r_{12} \\ -\frac{EA}{L} & 0 & 0 & \frac{EA}{L} & 0 & 0 \\ 0 & -\frac{EI}{L^3}\alpha_1 & -\frac{EI}{L^2}\alpha_2 & 0 & \frac{EI}{L^3}\alpha_1 & -\frac{EI}{L^2}\alpha_2 \\ 0 & \frac{EI}{L^2}\alpha_2 & \frac{EI}{L}r_{21} & 0 & -\frac{EI}{L^2}\alpha_2 & \frac{EI}{L}r_{22} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \delta_{IX} \\ \delta_{IY} \\ \theta_I \\ \delta_{JX} \\ \delta_{JY} \\ \theta_J \end{Bmatrix} \qquad (14.137)$$

siendo: $\alpha_1 = 2r_{11} + 2r_{12} - k^2L^2$ $\qquad$ $\alpha_2 = r_{11} + r_{21} = r_{12} + r_{22} = r_{11} + r_{12}$

En ella se han añadido las dos ecuaciones correspondientes a los grados de libertad de deformación axial δ_{IX}, δ_{JX}, que son las mismas utilizadas en el análisis de primer orden, ya que están desacopladas de la flexión. En forma compacta la ecuación anterior es:

$$\mathbf{P} = \mathbf{K}_{2L}\boldsymbol{\delta} \qquad (14.138)$$

La matriz de rigidez de segundo orden $\mathbf{K}_{2L}$ así obtenida tiene propiedades similares a la de primer orden, pero ahora los términos correspondientes a la flexión involucran a las funciones de estabilidad y son altamente no lineales, dependiendo del esfuerzo axial *P*.

Expresión aproximada de la matriz de rigidez de segundo orden

Las funciones de estabilidad pueden desarrollarse en serie, resultando:

$$r_{11} = r_{22} = 4 - \frac{2}{15}k^2L^2 - \frac{11}{6300}k^4L^4 - \frac{1}{27000}k^6L^6 + \cdots$$

$$r_{12} = r_{21} = 2 + \frac{1}{30}k^2L^2 + \frac{13}{12600}k^4L^4 + \frac{11}{378000}k^6L^6 + \cdots \qquad (14.139)$$

Sustituyendo estos desarrollos en la expresión (14.137) de la matriz de rigidez de segundo orden, y reagrupando los distintos términos se obtiene:

$$\mathbf{K}_{2L} = \mathbf{K}_L + \mathbf{K}_{L\sigma} + \cdots \tag{14.140}$$

donde $\mathbf{K}_L$ es la matriz de rigidez de la barra en la teoría de primer orden (ecuación 7.58) y $\mathbf{K}_{L\sigma}$ es la matriz de rigidez geométrica, que se introduce en el apartado 14.16. La expresión anterior es de gran interés, pues muestra que la matriz de rigidez de segundo orden puede aproximarse mediante la suma de la matriz de rigidez de primer orden más una nueva matriz, que resulta ser proporcional al esfuerzo de compresión en el elemento.

14.12 PANDEO INELÁSTICO. TEORÍA DEL MÓDULO TANGENTE

Todo el estudio de estabilidad anterior se ha efectuado suponiendo que el material es elástico lineal, y que durante el pandeo nunca se alcanza el límite elástico, ni siquiera el límite de proporcionalidad entre tensiones y deformaciones unitarias. Sin embargo, los estudios experimentales muestran que en columnas cortas la tensión de compresión nominal *P/A* alcanza el límite elástico del material antes de producirse el pandeo. De hecho ya se ha mencionado que la fórmula de Euler sólo es válida para una esbeltez superior a un valor crítico, λ_{PR}, para el cual se alcanza el límite de proporcionalidad entre la tensión y la deformación, y por lo tanto no es aplicable para columnas cortas. Se hace por lo tanto necesario disponer de una teoría que tenga en cuenta el comportamiento de la columna en la zona no elástica del material. Los primeros estudios sobre pandeo no elástico son debidos Engesser en 1889, quien introdujo la teoría del módulo tangente, que se desarrolla a continuación.

Se considera una columna recta, articulada en ambos extremos y sometida a una fuerza de compresión centrada *P*, y se supone que el material es elástico lineal hasta un determinado valor límite (límite de elasticidad) y a partir de él muestra un comportamiento plástico, con una relación no lineal entre la tensión y la deformación unitaria.

Bajo la acción de la carga *P* se produce en la columna una tensión $\sigma = P/A$, que se supone ha sobrepasado el límite de elasticidad, aunque todavía no se ha producido el pandeo. Al seguir aumentando la carga axial se llega a un valor de la misma, denominado P_t para el cual se produce la inestabilidad: aparece una deformación lateral *v*, y un momento flector en la columna de valor $P_t\, v$. La tensión en la columna inmediatamente antes de producirse el pandeo tiene una distribución uniforme y se denomina $\sigma_t = P_t / A$.

Al producirse la flexión originada por el colapso la distribución de tensiones varía, dejando de ser uniforme y pasando a tener una distribución lineal. La teoría del módulo tangente supone que al producirse la flexión *no se produce descarga en la tensión de ninguna fibra* de la sección: una fibra extrema de la sección mantiene su misma tensión y la fibra opuesta incrementa su tensión en un valor $\Delta\sigma$. La nueva distribución de tensiones varía linealmente entre un valor mínimo σ_t y un valor máximo $\sigma_t + \Delta\sigma$, como se indica en la figura 14.30.

El campo de desplazamientos en la sección es inicialmente uniforme, con valor u_t. Al producirse la flexión la sección gira un ángulo de valor $\theta = dv/dx$, con lo cual a la deformación inicial uniforme se le suma una nueva deformación lineal denominada u_f, cuyo valor es:

$$u_f = -\theta\left(\frac{h}{2}+y\right) = -\frac{dv}{dx}\left(\frac{h}{2}+y\right) \tag{14.141}$$

siendo *y* una coordenada medida con respecto al centro de gravedad de la sección, y *h* el canto de la misma. La posición deformada de la sección queda como se indica en la figura 14.30.

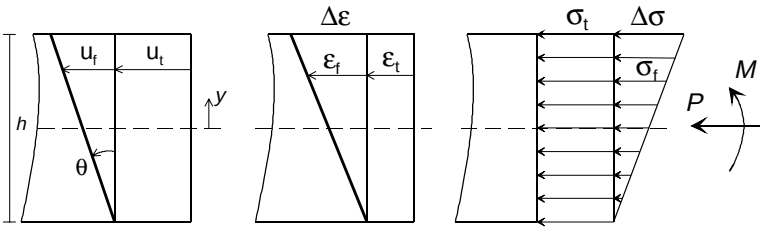


Figura 14.30

De la misma manera, las deformaciones unitarias pasan de tener una distribución inicial uniforme de valor ε_t a tener una distribución lineal, variable entre ε_t en un extremo de la sección y $\varepsilon_t+\Delta\varepsilon$ en el otro extremo. La deformación unitaria debida al giro de la sección es:

$$\varepsilon_f = \frac{du_f}{dx} = -\frac{d^2v}{dx^2}\left(\frac{h}{2}+y\right) \tag{14.142}$$

El incremento de deformación unitaria que se produce en la fibra extrema es:

$$\Delta\varepsilon = \varepsilon_f\left(y=\frac{h}{2}\right) = -\frac{d^2v}{dx^2}h \tag{14.143}$$

A este incremento de deformación unitaria le corresponde un incremento de tensión dado por:

$$\Delta\sigma = E_t\Delta\varepsilon \tag{14.144}$$

donde E_t es el módulo de elasticidad tangente, es decir la tangente trigonométrica de la recta tangente a la curva σ/ε del material, como se indica en la figura 14.31. La relación anterior es válida únicamente si los incrementos de tensión y deformación unitaria que se producen son pequeños.

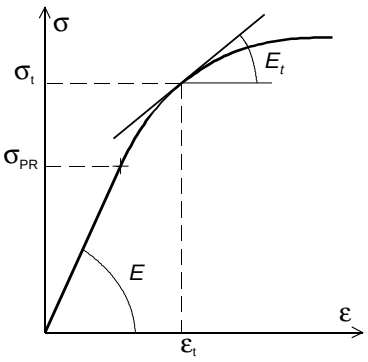


Figura 14.31

Sustituyendo el valor del incremento de deformación unitaria Δε se obtiene:

$$\Delta\sigma = -E_t h\frac{d^2v}{dx^2} \tag{14.145}$$

La distribución de tensiones en la sección es por lo tanto:

$$\sigma = \sigma_t + \sigma_f = \sigma_t + \frac{\Delta\sigma}{h}\left(\frac{h}{2} + y\right) \tag{14.146}$$

El momento flector resultante de estas tensiones es:

$$M = -\int \sigma y dA = -\int \sigma_t y dA - \int \frac{\Delta\sigma}{2} y dA - \int \frac{\Delta\sigma}{h} y^2 dA \tag{14.147}$$

En las dos primeras integrales se identifica el momento estático de la sección respecto al centro de gravedad, que es nulo, y en la tercera se identifica el momento de inercia de la sección, con lo que se obtiene:

$$M = -\frac{\Delta\sigma}{h} I \tag{14.148}$$

Sustituyendo el valor del incremento de tensión dado por (14.145), se llega a la expresión final siguiente:

$$M = E_t I \frac{d^2 v}{dx^2} \tag{14.149}$$

Esta es la ecuación de la elástica para la flexión producida por el pandeo, siguiendo la teoría del módulo tangente. Nótese que es la misma ecuación que controla la flexión de vigas en la teoría de primer orden, pero sustituyendo el módulo de elasticidad lineal E por el módulo tangente E_t. Este resultado es muy importante, pues implica que todo lo desarrollado para el pandeo elástico, y todas las soluciones obtenidas para él, pueden aplicarse para el pandeo inelástico, sin más que sustituir el módulo de elasticidad E por el módulo tangente E_t.

Con esta consideración, la expresión de la carga crítica de una columna empleando la teoría del módulo tangente es:

$$P_t = \frac{\pi^2 E_t I}{L_p^2} \tag{14.150}$$

donde L_p es la longitud de pandeo de la columna. La tensión crítica σ_t correspondiente a esta carga crítica es:

$$\sigma_t = \frac{\pi^2 E_t}{\lambda^2} \qquad \lambda < \lambda_{PR} \tag{14.151}$$

donde

$\lambda = L_p / r$ es la esbeltez de la columna,

r el radio de giro de la sección, y

λ_{PR} es la esbeltez límite de proporcionalidad (ver apartado 14.3.3).

La expresión (14.151) es válida únicamente en el rango inelástico, es decir cuando la tensión crítica es superior al límite de proporcionalidad o lo que es lo mismo, cuando la esbeltez es inferior a la de proporcionalidad.

En los materiales habituales el módulo tangente es inferior al módulo de elasticidad, por lo que la tensión crítica proporcionada por esta teoría es inferior a la de Euler $\sigma_t < \sigma_E$. En todo caso la forma de la curva σ_t / λ depende de la forma de la curva σ/ε del material, que normalmente se obtiene por vía experimental. La figura 14.32 representa el aspecto de una curva típica.

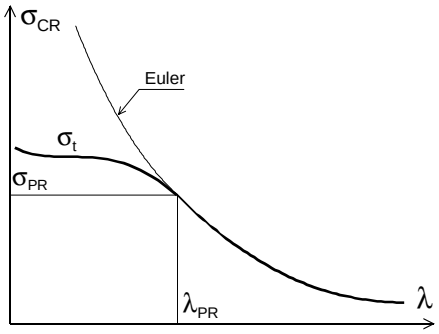


Figura 14.32

Nótese que según la teoría del módulo tangente, la carga axial al producirse el pandeo no se mantiene constante, sino que se produce un incremento en ella ΔP, que no es nulo debido a la hipótesis de que ninguna fibra se descarga, y cuyo valor es igual a la resultante de las tensiones producidas por la flexión:

$$\Delta P = \int \sigma_f \, dA = \int \frac{\Delta\sigma}{h}\left(\frac{h}{2} + y\right) dA = \frac{\Delta\sigma}{h}\frac{h}{2}\int dA + \frac{\Delta\sigma}{h}\int y dA = \frac{\Delta\sigma \, A}{2} \qquad (14.152)$$

La única dificultad para el uso de esta teoría reside en el hecho de que el módulo tangente depende de la tensión, por lo que todas las expresiones se vuelven no lineales, y su resolución implica el conocimiento de la curva σ/ε del material.

14.13 TEORÍA DEL MÓDULO REDUCIDO

La suposición empleada por la teoría del módulo tangente de que no se produce descarga de tensiones en el momento del pandeo no se corresponde muy bien con la interpretación física del fenómeno: en efecto, al producirse el pandeo aparece un momento flector y parece lógico que en ese instante las fibras que están en la parte cóncava vean aumentar su tensión, mientras que las que están en la parte convexa la vean disminuir. Teniendo en cuenta estas ideas y basándose en unos estudios previos de Considere (1885), Engesser presentó en 1895 la denominada teoría del módulo reducido, que se explica a continuación.

Se parte de la misma situación anterior: una columna recta sometida a una fuerza axial P que produce en ella una tensión $\sigma = P/A$, la cual sobrepasa el límite de elasticidad, aunque todavía no se ha producido el pandeo. Al seguir aumentando la fuerza axial se llega a un valor P_t de la misma para el cual se produce la inestabilidad, apareciendo una deformación lateral y un momento flector. La tensión en la columna, en ese instante inmediatamente anterior a producirse el pandeo, tiene una distribución uniforme y se denomina $\sigma_t = P_t / A$.

Al aparecer la flexión asociada al colapso la distribución de tensiones varía, dejando de ser uniforme y pasando a tener una distribución lineal. La teoría del módulo doble efectúa las siguientes suposiciones:

- Al producirse la flexión ésta origina una disminución de la tensión en las fibras situadas en la parte convexa, y un aumento de la tensión en las fibras de la parte cóncava.
- La disminución de la tensión se hace a través del módulo de elasticidad E, y el aumento a través del módulo de elasticidad tangente E_t. Esta suposición es acorde con la teoría de la plasticidad (figura 14.33).
- La fuerza axial total actuante sobre la columna permanece constante durante el colapso.

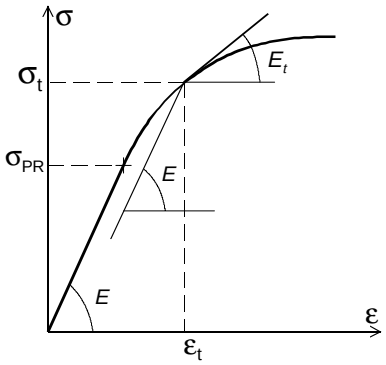


Figura 14.33

El campo de desplazamientos en la sección es inicialmente uniforme, con valor u_t. Al producirse la flexión se origina una traslación de toda la sección, de valor u_G y un giro de la misma, de valor θ (figura 14.34). Existe un punto tal que esta combinación de traslación y giro no produce una nueva deformación en él, sino que el punto se queda en la misma posición deformada que tenía antes de producirse el pandeo.

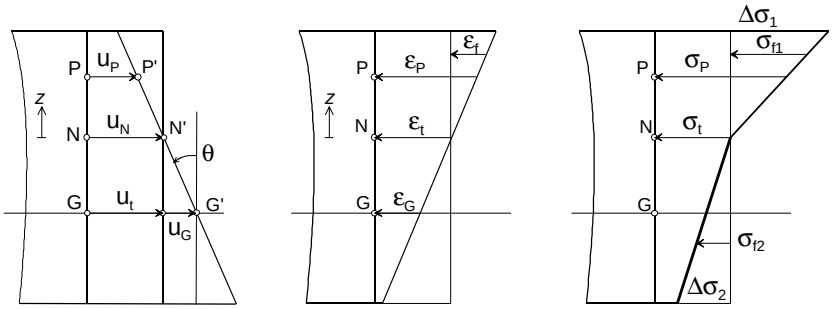


Figura 14.34

Sea N este punto que no sufre nueva deformación y z una coordenada medida desde él. Se cumple que $u_N=u_t$ y la deformación total de un punto cualquiera de la sección es:

$$u = u_t + u_G - (e+z)\theta \tag{14.153}$$

siendo e la distancia desde el punto N al centro de gravedad de la sección G, cuyo valor es $e = u_G / \theta$. La posición de este punto no queda determinada aún, pues ni u_G ni θ son conocidos, y se determina más adelante. La deformación de un punto cualquiera se puede poner asimismo como:

$$u = u_N - z\theta = u_t - z\theta \tag{14.154}$$

La deformación unitaria total en dicho punto es:

$$\varepsilon = \frac{du_t}{dx} - z\frac{d\theta}{dx} = \varepsilon_t - zv'' \tag{14.155}$$

y la parte debida a la flexión es:

$$\varepsilon_f = \varepsilon - \varepsilon_t = -zv'' \tag{14.156}$$

A esta deformación unitaria debida a la flexión le corresponden las tensiones siguientes:

En la zona donde las tensiones aumentan: $\sigma_{f1} = E_t\varepsilon_f$

En la zona donde las tensiones disminuyen: $\sigma_{f2} = E\varepsilon_f$

Como se ha supuesto que la fuerza axial sobre la columna se mantiene constante e igual al valor que tenía antes de producirse el pandeo, se debe cumplir que la resultante de la tensiones de tracción debidas a la flexión debe ser igual a la resultante de las tensiones de compresión debidas a la flexión:

$$\int_{A_1} \sigma_{f1} dA_1 + \int_{A_2} \sigma_{f2} dA_2 = 0 \tag{14.157}$$

donde A_1 y A_2 son las áreas de la sección en las que las tensiones son de tracción y compresión respectivamente. Sustituyendo los valores de las tensiones se obtiene:

$$\int_{A_1} E_t\varepsilon_f dA_1 + \int_{A_2} E\varepsilon_f dA_2 = 0 \tag{14.158}$$

$$-v''\left(E_t\int_{A_1} z dA_1 + E\int_{A_2} z dA_2\right) = 0 \tag{14.159}$$

La expresión entre corchetes, que debe ser nula, se puede poner como:

$$E_t S_1 + E S_2 = 0 \tag{14.160}$$

donde S_1 y S_2 son los momentos estáticos de las áreas de la sección en las que las tensiones aumentan y disminuyen respectivamente, respecto del punto. La ecuación anterior permite situar el punto N, que como puede verse divide a la sección de la columna en dos partes, tales que sus momentos estáticos son inversamente proporcionales a la relación entre los módulos tangente y de elasticidad E_t / E.

El momento flector en la sección es igual al momento estático de las tensiones:

$$M = -\int_{A_1} \sigma_{f1} z dA_1 - \int_{A_2} \sigma_{f2} z dA_2 = E_t v''\int_{A_1} z^2 dA_1 + Ev''\int_{A_2} z^2 dA_2 \tag{14.161}$$

Las integrales definen los momentos de inercia de las zonas donde las tensiones aumentan I_1 y disminuyen I_2, es decir de las dos zonas creadas por el punto N, respecto al propio punto N:

$$M = (E_t I_1 + E I_2) v'' \tag{14.162}$$

Se define el *módulo reducido* de la sección como:

$$E_r = \frac{E_t I_1 + E I_2}{I} \tag{14.163}$$

Con lo que la ecuación (14.162) queda:

$$M = E_r I v'' \tag{14.164}$$

que es la ecuación de la elástica para la flexión producida por el pandeo, siguiendo la teoría del módulo doble: es la misma ecuación que controla la flexión de vigas en la teoría de primer orden, pero sustituyendo el módulo de elasticidad lineal E por el módulo reducido E_r. Esto implica que todas las soluciones desarrolladas para el pandeo elástico pueden aplicarse para el pandeo inelástico sin más que sustituir el módulo de elasticidad E por el módulo reducido E_r (figura 14.35).

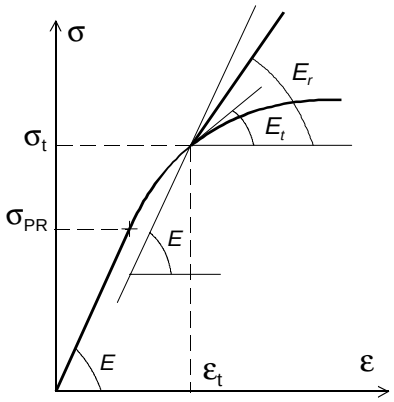


Figura 14.35

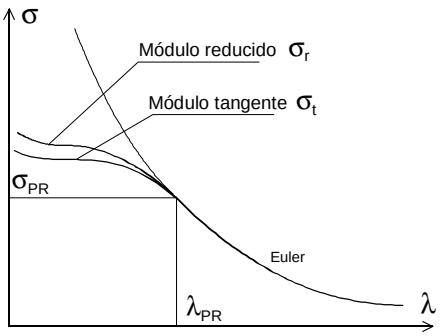


Figura 14.36

La expresión de la carga crítica de una columna empleando la teoría del módulo reducido es por lo tanto:

$$P_r = \frac{\pi^2 E_r I}{L_p^2} \tag{14.165}$$

donde L_p es la longitud de pandeo de la columna. La tensión crítica σ_r correspondiente a esta carga crítica es:

$$\sigma_r = \frac{\pi^2 E_r}{\lambda^2} \qquad \lambda < \lambda_{PR} \tag{14.166}$$

La principal dificultad para el empleo de esta teoría reside en el hecho de que el módulo reducido depende por una parte del material a través del módulo tangente y por otra parte de la forma de la sección de la columna. En todo caso, para las secciones habituales se cumple que $E_t < E_r < E$, y por lo tanto ocurre que $\sigma_t < \sigma_r < \sigma_E$ (figura 14.36).

14.14 TEORÍA DE SHANLEY

La teoría del módulo reducido es en principio más precisa que la del módulo tangente. Sin embargo, pruebas experimentales muy precisas muestran que la carga real de pandeo de columnas con esbeltez inferior al valor límite de proporcionalidad es inferior a la tensión de pandeo dada por la teoría del módulo reducido σ_r, y se ajusta más a la predicha por la teoría del módulo tangente σ_t, aún siendo esta en principio menos exacta.

En realidad ambas teorías son imperfectas. En la teoría del módulo tangente se permite que haya un incremento de la fuerza axial en el momento del pandeo, con tal de que no se produzca la descarga de ninguna fibra. En la teoría del módulo reducido se supone que en la cara convexa del perfil se produce toda la descarga de las fibras que sea necesaria, con tal de mantener la fuerza axial constante durante el pandeo. Esta última suposición lleva a una contradicción: para que se produzca el pandeo con la carga P_r el material en el lado convexo se debe descargar, lo cual sólo puede ocurrir cuando se ha producido la flexión por pandeo. Por lo tanto el valor de la carga crítica P_r es imposible de alcanzar, pues para que se alcance se ha tenido que producir la flexión, la cual sólo se produce cuando se alcanza la carga P_r. El valor de la carga crítica predicho por la teoría del módulo reducido no es por lo tanto nada más que un límite superior de la carga de pandeo, la cual está en general situada entre ambos valores P_r y P_t.

F. R. Shanley estudió todos estos aspectos y presentó en 1947 una teoría que resuelve las distintas contradicciones. Según la teoría de Shanley no es posible que se produzca la inestabilidad por bifurcación al estilo del pandeo de Euler si el material es inelástico. En efecto, al producirse el pandeo se llega a una situación de equilibrio neutro, en la que la carga axial es constante para cualquier valor de la deformación lateral. Ni la teoría del módulo tangente ni la del módulo reducido pueden representar este equilibrio neutro sin incurrir en contradicciones.

Shanley plantea la carga crítica como el menor valor de la fuerza axial que produce la pérdida de equilibrio, con independencia de si el paso a la situación de colapso se efectúa o no con un aumento de la fuerza axial.

Como consecuencia de este planteamiento, Shanley demuestra que la primera bifurcación se produce al alcanzarse precisamente la carga P_t, momento en el cual se produce la deformación lateral y comienza la flexión. A partir de ese instante la flexión lateral ocurre simultáneamente con un aumento de la carga axial, produciéndose cierta descarga de la fibras situadas en la zona convexa. Esta descarga resulta ser de una magnitud inferior a la supuesta por la teoría del módulo reducido, y el aumento de fuerza axial también resulta inferior al obtenido en la teoría del módulo tangente. La columna se comporta por lo tanto con un módulo E efectivo que es intermedio entre el E_t (con el cual no se produce ninguna descarga de tensión y la P aumenta) y el E_r (con el cual la descarga es máxima y la P es constante).

A medida que aumenta la deformación lateral de la columna, la carga axial sigue aumentando también y en el límite, cuando la deformación lateral se hace muy grande, la fuerza axial calculada por la teoría de Shanley se acerca a la carga de la teoría del módulo reducido P_r.

Los valores de P_r y P_t son por lo tanto dos límites, superior e inferior, de la carga de pandeo calculada según la teoría de Shanley. Esta teoría permite obtener toda la curva fuerza axial - deformación lateral de la columna, que representa todas las posiciones de equilibrio estable que puede adoptar las columna deformada, para valores de P comprendidos entre P_r y P_t. En las teorías anteriores se obtenía sólo un valor de la carga crítica de bifurcación, P_r o P_t, para la cual la deformación no está definida, pero no se obtenía la curva de situaciones de equilibrio.

La figura 14.37 muestra la relación entre las distintas cargas críticas.

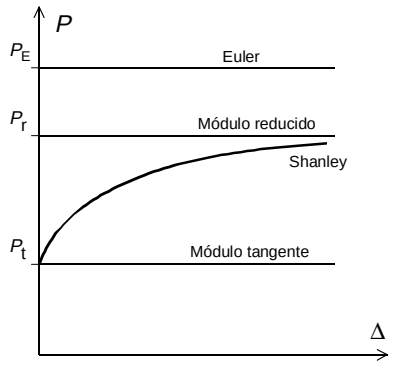


Figura 14.37

Shanley presenta su teoría empleando un modelo muy simple de una columna biarticulada. Consta de dos barras iguales supuestas infinitamente rígidas, unidas entre si por medio de una rótula plástica, situada en el centro de la columna (figura 14.38). A su vez, esta rótula está representada por dos elementos de pequeña longitud, separados entre si una distancia igual al canto h de la viga, y que se comportan de forma elasto - plástica.

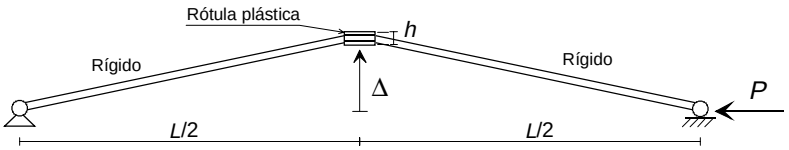


Figura 14.38

Con este modelo, Shanley demuestra que el valor de la relación entre la carga axial P y la deformación lateral Δ es:

$$P = P_t \left(1 + \frac{1}{\frac{h}{2\Delta} + \frac{1+\tau}{1-\tau}} \right) \tag{14.167}$$

siendo P_t el valor de la carga de pandeo según la teoría del módulo tangente y τ la relación entre los módulos de elasticidad tangente y elástico $\tau = E_t / E$. Esta relación τ se supone que se mantiene constante durante el pandeo.

De acuerdo con este resultado, el pandeo se produce cuando la carga P alcanza el valor P_t y a medida que P aumenta, también lo hace la deformación Δ. Para cada valor de P

se obtiene una situación de equilibrio, y cuando Δ se hace muy grande la carga P tiende al valor P_r predicho por la teoría del módulo reducido.

El estudio anterior se ha efectuado para un modelo muy simplificado, por lo que los resultados son sólo una aproximación del comportamiento real, válidos a efectos cualitativos. En columnas reales existen muchos otros fenómenos no considerados, como imperfecciones en la forma, excentricidad en la carga, incertidumbres en las propiedades del material, etc. que tienden a disminuir la carga máxima real admisible para una deformación lateral dada. De hecho, los ensayos muestran que la carga real de pandeo en régimen inelástico está muy poco por encima del valor de la carga P_t (figura 14.39).

Este hecho, unido a la mayor facilidad de determinación del valor P_t que del valor P_r hace que la carga que se utilice habitualmente para el diseño práctico de columnas sea la indicada por la teoría del módulo tangente P_t, a pesar de que dicha teoría sea en principio menos exacta.

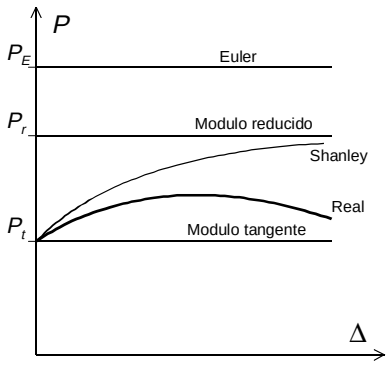


Figura 14.39

14.15 FÓRMULAS DE DISEÑO DE COLUMNAS

Todo lo estudiado hasta aquí se basa en consideraciones teóricas y su empleo en la práctica resultaría muy laborioso y lento. Por esta razón, y para facilitar el diseño práctico de las piezas sometidas a compresión se emplean las llamadas curvas o fórmulas de diseño de columnas.

Se define una fórmula de diseño de columnas como una relación entre la tensión nominal que produce el fallo por pandeo, denominada tensión crítica σ_{CR} , y la esbeltez de la columna λ, para un material y unas condiciones determinadas.

$$\sigma_{CR} = f(\lambda, material) \tag{14.168}$$

siendo la tensión crítica de pandeo: $\sigma_{CR} = \dfrac{P_{CR}}{A}$

Estas relaciones se expresan habitualmente mediante curvas, tablas o relaciones analíticas, y se basan en resultados experimentales, ajustados adecuadamente para obtener expresiones sencillas de manejar. Algunas fórmulas de diseño llevan incluso incorporado un coeficiente de seguridad, a fin de facilitar su empleo.

En el estudio teórico se ha demostrado que las distintas formas de apoyo de los extremos de la columna influyen en su carga crítica, a base de modificar su longitud de pandeo, que determina su esbeltez. Por lo tanto las fórmulas de diseño pueden emplearse con cualquier tipo de condición de apoyo, con tal de emplear la longitud de pandeo L_P correspondiente.

A continuación se presentan algunas de las fórmulas más habituales.

Fórmula teórica de Euler

La fórmula de diseño más básica es la que proporciona la tensión crítica de Euler:

$$\sigma_{CR} = \frac{\pi^2 E}{\lambda^2} \tag{14.169}$$

que evidentemente sólo es válida para régimen elástico lineal, es decir cuando σ_{CR} es inferior al límite de proporcionalidad σ_{PR} en la curva σ/ε del material.

En realidad la frontera entre el pandeo elástico e inelástico está en un valor muy inferior al límite de proporcionalidad del material. Ello es debido a que en la práctica existen tensiones residuales importantes en el material, que pueden llegar hasta el 30% del límite elástico. Por motivos de seguridad se limita el campo de aplicación de esta fórmula a una tensión de sólo el 50% del límite elástico σ_y, a la cual corresponde una esbeltez límite λ_C cuyo valor es:

$$0.5\sigma_y = \frac{\pi^2 E}{\lambda_C^2} \qquad \lambda_C = \sqrt{\frac{2\pi^2 E}{\sigma_y}} \tag{14.170}$$

Por ejemplo, para un acero de construcción típico, con límite elástico σ_y=260 MPa, la esbeltez límite es λ_C=125. Para valores inferiores a éste deben emplearse las fórmulas del pandeo inelástico.

La fórmula de Euler (14.169) se puede dividir por σ_y, para ponerla en la forma normalizada en la que se emplean las fórmulas de diseño de columnas:

$$\frac{\sigma_{CR}}{\sigma_y} = \frac{\lambda_C^2}{2\lambda^2} \qquad \lambda > \lambda_C \tag{14.171}$$

Fórmula parabólica del CRC

El Column Research Council (CRC) recomienda la siguiente fórmula, para columnas de acero:

$$\frac{\sigma_{CR}}{\sigma_y} = \begin{cases} 1 - \dfrac{\lambda^2}{2\lambda_C^2} & \lambda < \lambda_C \\ \dfrac{\lambda_C^2}{2\lambda^2} & \lambda > \lambda_C \end{cases} \tag{14.172}$$

con $\lambda_C = \sqrt{\dfrac{2\pi^2 E}{\sigma_y}}$.

La esbeltez λ_C define el límite entre el pandeo elástico e inelástico, y corresponde a una tensión crítica igual a la mitad del límite elástico. La expresión para $\lambda > \lambda_C$ corresponde al pandeo elástico y es directamente la fórmula de Euler.

Para esbelteces pequeñas, es decir pandeo inelástico, esta fórmula adopta una variación parabólica de la tensión crítica. Esta parábola tiene tangente horizontal para $\lambda=0$ y coincide en valor y en su tangente con la otra expresión para $\lambda=\lambda_C$. Cuando la esbeltez es nula, la tensión crítica es el límite elástico $\sigma_{CR}=\sigma_y$.

Fórmula del SSRC

El Structural Stability Research Council, en su edición de 1976, propone el empleo de distintas expresiones analíticas de la tensión crítica en función de la esbeltez, fruto de la experimentación. Existen hasta tres curvas distintas, según el material, el tipo de perfil y el proceso de fabricación. Una de las más habituales, para acero, es la curva número 2:

$$\frac{\sigma_{CR}}{\sigma_y}=\begin{cases}1 & 0<\mu<0.15\\ 1.035-0.202\mu-0.222\mu^2 & 0.15<\mu<1.0\\ -0.111+0.636\mu^{-1}+0.087\mu^{-2} & 1.0<\mu<2.0\\ 0.009+0.877\mu^{-2} & 2.0<\mu<3.6\\ \mu^{-2} & \mu>3.6\end{cases} \tag{14.173}$$

siendo μ el parámetro de esbeltez corregido para considerar las características del material:

$$\mu=\lambda\sqrt{\frac{\sigma_y}{\pi^2 E}} \tag{14.174}$$

Con este parámetro, el límite de la zona de pandeo elástico a inelástico correspondiente a una tensión de $0.5\sigma_y$ está situado en $\mu=\sqrt{2}$. Nótese que la fórmula utiliza una expresión parabólica para una esbeltez μ menor que 1, y a partir de este valor añade términos en forma de hipérbola de orden 1 y 2, como los incluidos en la fórmula de Euler.

Fórmula del AISC

La fórmula 2 del SSRC resulta en algunas ocasiones algo conservadora para columnas de edificios, por lo que el American Institute of Steel Construction (AISC) propuso en 1986 la siguiente expresión de la tensión crítica:

$$\frac{\sigma_{CR}}{\sigma_y}=\begin{cases}e^{-0.419\mu^2} & \mu\le 1.5\\ 0.877\mu^{-2} & \mu>1.5\end{cases} \tag{14.175}$$

Método del coeficiente ω

Este método es de aplicación muy sencilla, y ha sido adoptado por varias normas, entre ellas la MV103. Consiste sencillamente en multiplicar la tensión nominal de trabajo de la columna por un coeficiente denominado *coeficiente de pandeo* ω, superior a la unidad, de tal forma que el producto resultante sea inferior al límite elástico, o la tensión de diseño del material en su caso. Por lo tanto, en el límite antes de producirse el pandeo se debe cumplir:

$$\omega \sigma_{CR} \le \sigma_y \tag{14.176}$$

En consecuencia la fórmula de diseño en este método se puede poner:

$$\frac{\sigma_{CR}}{\sigma_y} = \frac{1}{\omega} \qquad 20 \le \lambda \le 250 \tag{14.177}$$

El valor del coeficiente ω está tabulado en función de la esbeltez λ, para cada material.

La figura 14.40 representa de forma gráfica las distintas fórmulas de diseño presentadas: en ordenadas se representa el cociente entre la tensión crítica y el límite elástico y en abscisas la esbeltez, para un acero típico de construcción, con límite elástico de 260 MPa.

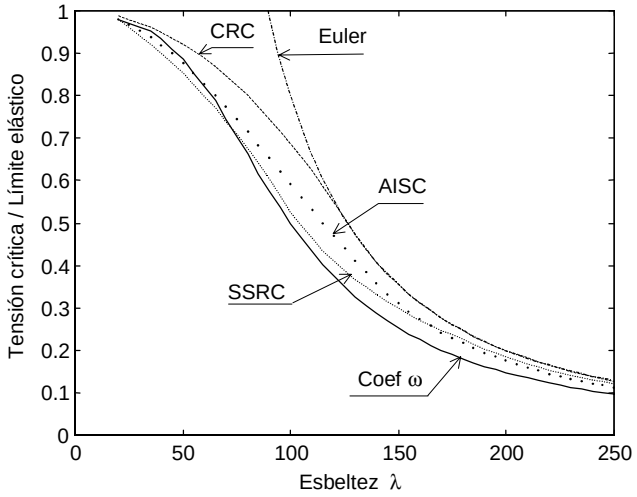


Figura 14.40

14.16 RIGIDEZ GEOMÉTRICA

14.16.1 Elemento biarticulado

Sea un elemento biarticulado, referido a su sistema de ejes local. Al deformarse, el elemento pasa de su posición inicial IJ a la nueva posición I'J' (figura 14.41) siendo las deformaciones de los nudos extremos:

$$\boldsymbol{\delta} = \{\delta_{IX} \quad \delta_{IY} \quad \delta_{JX} \quad \delta_{JY}\}^T \tag{14.178}$$

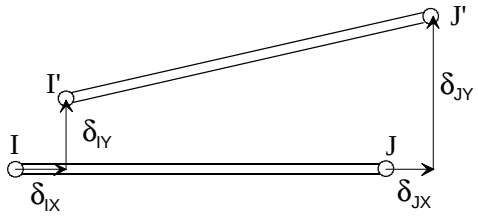


Figura 14.41

El campo de deformaciones en el interior del elemento es lineal, estando definido por:

$$u = \delta_{IX} + (\delta_{JX} - \delta_{IX})\xi \qquad v = \delta_{IY} + (\delta_{JY} - \delta_{IY})\xi \tag{14.179}$$

siendo $\xi = x / L$ una coordenada adimensional que varía entre 0 y 1.

La deformación unitaria en la posición deformada se determina empleando la relación exacta, no lineal, entre el desplazamiento y la deformación unitaria:

$$\varepsilon = \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{1}{2}\left(\frac{\partial v}{\partial x}\right)^2 \tag{14.180}$$

Suponiendo un comportamiento lineal $\sigma = E\varepsilon$, la energía acumulada en la barra es:

$$U = \int \frac{1}{2}\sigma\varepsilon dv = \frac{1}{2}\int E\varepsilon^2 A dx = \frac{EA}{2}\int \varepsilon^2 dx \tag{14.181}$$

$$U = \frac{EA}{2}\int\left(\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)^2 + \frac{\partial u}{\partial x}\left(\frac{\partial v}{\partial x}\right)^2 + \frac{1}{4}\left(\frac{\partial v}{\partial x}\right)^4\right)dx \tag{14.182}$$

Despreciando el término de grado 4, y sustituyendo las otras dos derivadas en base a sus expresiones analíticas (14.179) se obtiene:

$$U = \frac{EA}{2L^2}\int\left(\delta_{IX}^2 - 2\delta_{IX}\delta_{JX} + \delta_{JX}^2\right)dx + \frac{EA}{2L^3}\int(\delta_{JX} - \delta_{IX})\left(\delta_{IY}^2 - 2\delta_{IY}\delta_{JY} + \delta_{JY}^2\right)dx \tag{14.183}$$

Integrando en la coordenada *x*:

$$U = \frac{EA}{2L}\left(\delta_{IX}\delta_{IX} - 2\delta_{IX}\delta_{JX} + \delta_{JX}\delta_{JX}\right) + \frac{EA}{2L^2}(\delta_{JX} - \delta_{IX})(\delta_{IY}\delta_{IY} - 2\delta_{IY}\delta_{JY} + \delta_{JY}\delta_{JY}) \tag{14.184}$$

Se admite que la magnitud que aparece en el segundo sumando

$$\frac{EA}{L}(\delta_{JX} - \delta_{IX}) = N \tag{14.185}$$

define el esfuerzo axial *N* en el elemento (positivo a tracción). Esto no es cierto en la posición deformada pero sí lo es en la posición inicial. En todo caso esta es la suposición habitual, que es válida si ambas posiciones no están excesivamente alejadas. Sustituyendo el valor de *N* en el segundo término de (14.184), la expresión de la energía se puede poner en forma matricial en la forma:

$$U = \frac{1}{2}\left\{\delta_{IX} \quad \delta_{IY} \quad \delta_{JX} \quad \delta_{JY}\right\}\left(\frac{EA}{L}\begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} + \frac{N}{L}\begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 1 \end{bmatrix}\right)\begin{Bmatrix} \delta_{IX} \\ \delta_{IY} \\ \delta_{JX} \\ \delta_{JY} \end{Bmatrix} \tag{14.186}$$

$$U = \frac{1}{2}\boldsymbol{\delta}^T(\mathbf{K}_L + \mathbf{K}_{L\sigma})\boldsymbol{\delta} \tag{14.187}$$

donde se identifica a la matriz de rigidez del elemento $\mathbf{K}_L$, y a una nueva matriz $\mathbf{K}_{L\sigma}$, denominada de *rigidez geométrica*, que es proporcional al esfuerzo axial *N* en la barra. Esta

nueva matriz aumenta la rigidez en los grados de libertad de deformación lateral cuando la barra está a tracción, y la disminuye cuando está comprimida.

La ecuación de equilibrio del elemento, en coordenadas locales es:

$$\mathbf{P} = (\mathbf{K}_L + \mathbf{K}_{L\sigma})\boldsymbol{\delta} \tag{14.188}$$

14.16.2 Viga a flexión en el plano

Este elemento posee seis grados de libertad,

$$\boldsymbol{\delta} = \{\delta_{IX} \quad \delta_{IY} \quad \theta_I \quad \delta_{JX} \quad \delta_{JY} \quad \theta_J\}^T \tag{14.189}$$

de los cuales, dos de ellos (δ_{IX}, δ_{JX}) definen la deformación axial del eje de la viga y los otros cuatro ($\delta_{IY}, \theta_I, \delta_{JY}, \theta_J$) definen la deformación lateral y el giro.

- La deformación axial varía linealmente entre los dos valores en los nudos, igual que en el elemento biarticulado:

$$u = \delta_{IX} + (\delta_{JX} - \delta_{IX})\xi \tag{14.190}$$

- La deformación lateral se define con cuatro grados de libertad (figura 14.42), y por lo tanto se puede suponer una ley cúbica para su variación:

$$v = a_0 + a_1\xi + a_2\xi^2 + a_3\xi^3 \tag{14.191}$$

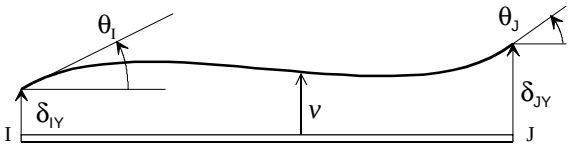


Figura 14.42

Particularizando esta ley a los valores de los cuatro grados de libertad, y agrupando las cuatro ecuaciones obtenidas en forma matricial se obtiene:

$$\begin{Bmatrix} \delta_{IY} \\ \theta_I \\ \delta_{JY} \\ \theta_J \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1/L & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1/L & 2/L & 3/L \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} a_0 \\ a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{Bmatrix} \tag{14.192}$$

De esta ecuación se pueden obtener los cuatro coeficientes a_i en función de los cuatro grados de libertad. Sustituyéndolos en la ecuación (14.191) y reagrupando los términos de los diferentes grados de libertad, se obtiene la expresión de la deformación lateral del eje de la viga:

$$v = (1 - 3\xi^2 + 2\xi^3)\delta_{IY} + (\xi - 2\xi^2 + \xi^3)L\theta_I + (3\xi^2 - 2\xi^3)\delta_{JY} + (\xi^3 - \xi^2)L\theta_J \tag{14.193}$$

- La deformación en un punto cualquiera de la viga, situado a una distancia *y* de la fibra neutra, utilizando la teoría clásica de flexión de vigas, es (ver apartado 5.3):

$$u_P = u - \frac{dv}{dx} y \qquad v_P = v \tag{14.194}$$

Sustituyendo los valores de *u* y *v* dados por (14.190) y (14.193) se obtiene:

$$u_P = (1-\xi)\delta_{IX} + 6(\xi-\xi^2)\eta\delta_{IY} + (4\xi - 1 - 3\xi^2)L\eta\theta_I + \xi\delta_{JX} + 6(\xi^2-\xi)\eta\delta_{JY} + (2\xi - 3\xi^2)L\eta\theta_J \tag{14.195}$$

$$v_P = (1-3\xi^2+2\xi^3)\delta_{IY} + (\xi - 2\xi^2 + \xi^3)L\theta_I + (3\xi^2 - 2\xi^3)\delta_{JY} + (\xi^3 - \xi^2)L\theta_J \tag{14.196}$$

donde se ha empleado la coordenada $\eta = y / L$ para definir la posición del punto P respecto de la fibra neutra.

- La deformación unitaria en el punto P, empleando la relación no lineal (14.180) es:

$$\varepsilon_P = \frac{du_P}{dx} + \frac{1}{2}\left(\frac{dv_P}{dx}\right)^2 = \frac{du}{dx} - \frac{d^2v}{dx^2} y + \frac{1}{2}\left(\frac{dv}{dx}\right)^2 \tag{14.197}$$

- Suponiendo comportamiento lineal del material, la energía de deformación es:

$$U = \int \frac{1}{2}\sigma\varepsilon_P dv = \frac{E}{2}\int \varepsilon_P^2 dv \tag{14.198}$$

$$U = \frac{E}{2}\int\left(\left(\frac{du}{dx}\right)^2 + \left(\frac{d^2v}{dx^2}\right)^2 y^2 + \frac{1}{4}\left(\frac{dv}{dx}\right)^4 - 2\frac{du}{dx}\frac{d^2v}{dx^2}y - \frac{d^2v}{dx^2}\left(\frac{dv}{dx}\right)^2 y + \frac{du}{dx}\left(\frac{dv}{dx}\right)^2\right)dv \tag{14.199}$$

El término de orden 4 se desprecia y los restantes se integran al área de la sección: todas las integrales del tipo $\int ydA$ son nulas, pues definen el momento estático de la sección respecto de su centro de gravedad. Finalmente se obtiene:

$$U = \frac{EA}{2}\int\left(\frac{du}{dx}\right)^2 dx + \frac{EI}{2}\int\left(\frac{d^2v}{dx^2}\right)^2 dx + \frac{EA}{2}\int\frac{du}{dx}\left(\frac{dv}{dx}\right)^2 dx \tag{14.200}$$

El primer sumando define la energía de esfuerzo axial, el segundo la de flexión y el tercero es un término no lineal debido a las grandes deformaciones. Las distintas derivadas se pueden expresar en función de las deformaciones nodales, empleando las ecuaciones (14.190) y (14.193):

$$\frac{du}{dx} = \frac{1}{L}(\delta_{JX} - \delta_{IX}) \tag{14.201}$$

$$\frac{dv}{dx} = \frac{1}{L}(6(\xi^2-\xi)\delta_{IY} + (3\xi^2 + 1 - 4\xi)L\theta_I + 6(\xi-\xi^2)\delta_{JY} + (3\xi^2 - 2\xi)L\theta_J) \tag{14.202}$$

$$\frac{d^2v}{dx^2} = \frac{1}{L^2}(6(2\xi-1)\delta_{IY} + (6\xi-4)L\theta_I + 6(1-2\xi)\delta_{JY} + (6\xi-2)L\theta_J) \tag{14.203}$$

Al igual que para el elemento biarticulado, se admite que la expresión:

$$\delta_{JX} - \delta_{IX} = \frac{NL}{EA} \tag{14.204}$$

define el esfuerzo axial de la viga. Esta sustitución se efectúa únicamente en el término no

lineal de la energía, pero no en el del esfuerzo axial.

Sustituyendo todas las derivadas anteriores en la expresión (14.200), se obtiene el valor de la energía en función de las deformaciones de los nudos y del esfuerzo axial. Agrupándola en forma matricial se puede poner en la forma:

$$U = \frac{1}{2}\boldsymbol{\delta}^T(\mathbf{K}_L + \mathbf{K}_{L\sigma})\boldsymbol{\delta} \tag{14.205}$$

donde:

- ◊ $\mathbf{K}_L$ es la matriz de rigidez convencional del elemento viga plana (ecuación 7.58)
- ◊ $\mathbf{K}_{L\sigma}$ es la matriz de rigidez geométrica, que depende del esfuerzo axial N que actúa sobre la viga, y cuya expresión es:

$$\mathbf{K}_{L\sigma} = \frac{N}{L}\begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{6}{5} & \frac{L}{10} & 0 & -\frac{6}{5} & \frac{L}{10} \\ 0 & \frac{L}{10} & \frac{2L^2}{15} & 0 & -\frac{L}{10} & -\frac{L^2}{30} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -\frac{6}{5} & -\frac{L}{10} & 0 & \frac{6}{5} & -\frac{L}{10} \\ 0 & \frac{L}{10} & -\frac{L^2}{30} & 0 & -\frac{L}{10} & \frac{2L^2}{15} \end{bmatrix} \tag{14.206}$$

La ecuación de equilibrio del elemento es, por lo tanto:

$$\mathbf{P} = (\mathbf{K}_L + \mathbf{K}_{L\sigma})\boldsymbol{\delta} \tag{14.207}$$

14.17 CARGA CRÍTICA DE ESTABILIDAD GLOBAL DE UNA ESTRUCTURA

La ecuación de equilibrio de un elemento cualquiera, empleando su rigidez geométrica, viene dada por la ecuación (14.207). Proyectando esta ecuación sobre los ejes generales, y ensamblando las ecuaciones de todos los elementos (siguiendo el proceso descrito en el capítulo 8), se obtiene la ecuación de equilibrio de toda la estructura:

$$\mathbf{F} = (\mathbf{K} + \mathbf{K}_\sigma)\boldsymbol{\Delta} \tag{14.208}$$

donde

- **K** es la matriz de rigidez convencional en la teoría de primer orden.
- $\mathbf{K}_\sigma$ es la matriz de rigidez geométrica de toda la estructura, obtenida por ensamblaje de las correspondientes a todos los elementos, y que depende de los esfuerzos axiales en todos ellos.

- El vector de fuerzas **F** puede contener términos de todos los tipos ya conocidos: fuerzas sobre los nudos, sobre los elementos, térmicas, etc.

El análisis de la estabilidad global de una estructura trata de hallar los valores de las cargas críticas que hacen que una estructura se vuelva inestable y llegue al colapso por deformación excesiva. Se considera una estructura sometida a un sistema de cargas exteriores tal que su vector de fuerzas nodales equivalentes es **F**. Estas fuerzas producen unas deformaciones nodales cuyo valor, en el análisis de primer orden es:

$$\boldsymbol{\Delta}_1 = \mathbf{K}^{-1}\mathbf{F} \tag{14.209}$$

A su vez, estas deformaciones producen unos esfuerzos axiales N_i en los elementos, que se traducen en una matriz de rigidez geométrica de la estructura $\mathbf{K}_\sigma$.

Se supone que el sistema de cargas exteriores se aumenta de forma proporcional, es decir que se mantienen las proporciones relativas entre las distintas cargas y se multiplican todas ellas por un mismo factor α, con lo que el nuevo vector de fuerzas nodales equivalentes es $\alpha\mathbf{F}$. A este nuevo vector de fuerzas le corresponden unos nuevos esfuerzos axiales en las barras que son αN, y éstos generan una nueva matriz de rigidez geométrica de la estructura, que es sencillamente $\alpha\mathbf{K}_\sigma$.

El objetivo es determinar para qué valor o valores de α la estructura es inestable. Cuando esto ocurre la estructura es capaz de deformarse sin ninguna fuerza exterior, es decir que en dicho estado su ecuación de equilibrio es:

$$\left(\mathbf{K} + \alpha\mathbf{K}_\sigma\right)\boldsymbol{\Delta} = \mathbf{0} \tag{14.210}$$

Esta ecuación representa un problema de autovalores, cuya solución son n valores propios α_i y los correspondientes vectores propios $\boldsymbol{\Phi}_i$, siendo n el número de grados de libertad de la estructura.

- Los valores propios α_i representan los factores por los que se debe multiplicar el estado inicial de cargas **F** para obtener una carga crítica que hace inestable la estructura. Se calculan como las raíces del polinomio característico:

$$Det\left(\mathbf{K} + \alpha\mathbf{K}_\sigma\right) = \mathbf{0} \tag{14.211}$$

- El vector propio $\boldsymbol{\Phi}_i$ correspondiente a cada valor propio α_i representa la forma en la que se deforma la estructura cuando se colapsa al alcanzar una carga crítica; por esta razón se llama habitualmente a estos vectores propios, modos de colapso o modos de pandeo. Se calculan resolviendo el sistema de ecuaciones homogéneo:

$$\left(\mathbf{K} + \alpha_i\mathbf{K}_\sigma\right)\boldsymbol{\Phi}_i = \mathbf{0} \tag{14.212}$$

Normalmente sólo interesa obtener el modo de colapso más bajo $\boldsymbol{\Phi}_1$ y su carga crítica asociada α_1, por lo que pueden emplearse técnicas numéricas específicas que permiten calcular directamente el primer autovalor y autovector de un sistema, sin necesidad de hallar los demás.

Hay que hacer notar que este método de obtención de las cargas críticas de colapso no es exacto, pues en la deducción de las matrices de rigidez geométrica se han introducido simplificaciones. En todo caso su aplicación práctica demuestra que los resultados son

aceptables, y por otra parte presenta la ventaja de permitir estudiar estructuras de gran complejidad, con la sola condición de evaluar su matriz de rigidez geométrica.

14.18 ANÁLISIS NO LINEAL

La ecuación de equilibrio de un elemento cualquiera, empleando la teoría de segundo orden viene dada por la expresión (14.138). Proyectando dicha ecuación sobre los ejes generales, y ensamblando las ecuaciones de todos los elementos (siguiendo el proceso descrito en el capítulo 8), se obtiene la ecuación de equilibrio de toda la estructura:

$$\mathbf{F} = \mathbf{K}_2 \boldsymbol{\Delta} \tag{14.213}$$

donde $\mathbf{K}_2$ es la matriz de rigidez de segundo orden de toda la estructura. Esta ecuación de equilibrio permite estudiar el comportamiento de segundo orden de la estructura, pero su resolución requiere técnicas especiales para sistemas no lineales, al depender la matriz de rigidez $\mathbf{K}_2$ de las deformaciones, a través de las fuerzas axiales en los elementos, presentes en el factor *k*.

La ecuación anterior se puede poner como:

$$\boldsymbol{\Psi}(\boldsymbol{\Delta}) \equiv \mathbf{K}_2 \boldsymbol{\Delta} - \mathbf{F} = 0 \tag{14.214}$$

Donde el vector $\boldsymbol{\Psi}$ es el residuo de la ecuación de equilibrio, que es nulo en la posición de equilibrio. Para resolver la ecuación anterior es necesario emplear un método iterativo específico de sistemas no lineales. El más habitual de ellos es el de Newton-Raphson, que se basa en aproximar la solución de la ecuación de equilibrio mediante un desarrollo en serie de la expresión del residuo, alrededor de una posición de equilibrio previa:

$$\boldsymbol{\Psi}(\boldsymbol{\Delta}^{i+1}) \approx \boldsymbol{\Psi}(\boldsymbol{\Delta}^{i}) + \left(\frac{\partial \boldsymbol{\Psi}}{\partial \boldsymbol{\Delta}} \right)_{\boldsymbol{\Delta}=\boldsymbol{\Delta}^i} \delta \boldsymbol{\Delta}^{i} = 0 \tag{14.215}$$

es decir:

$$\boldsymbol{\Psi}(\boldsymbol{\Delta}^{i}) + \mathbf{J}^{i} \, \delta \boldsymbol{\Delta}^{i} = 0 \tag{14.216}$$

siendo

- $\boldsymbol{\Delta}^{i}$ es el vector de deformaciones nodales en la posición de equilibrio anterior,
- $\delta \boldsymbol{\Delta}^{i}$ es el incremento a aplicar a las deformaciones,

$$\boldsymbol{\Delta}^{i+1} = \boldsymbol{\Delta}^{i} + \delta \boldsymbol{\Delta}^{i} \tag{14.217}$$

- la matriz

$$\left(\frac{\partial \boldsymbol{\Psi}}{\partial \boldsymbol{\Delta}} \right)_{\boldsymbol{\Delta}=\boldsymbol{\Delta}^i} = \mathbf{J}^{i} \tag{14.218}$$

es la matriz jacobiana del residuo con respecto a las deformaciones nodales, evaluada en la posición de equilibrio anterior (figura 14.43).

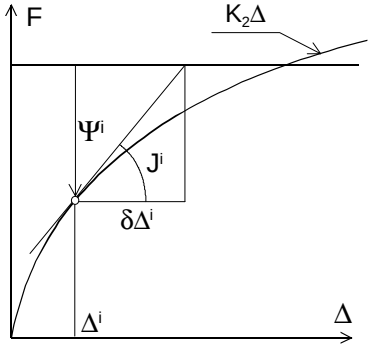


Figura 14.43

La expresión de esta matriz jacobiana es:

$$\mathbf{J} = \mathbf{K}_2 + \frac{\partial \mathbf{K}_2}{\partial \boldsymbol{\Delta}} \boldsymbol{\Delta} \tag{14.219}$$

donde se ha supuesto que las fuerzas exteriores **F** no dependen de las deformaciones.

La ecuación (14.216) permite calcular el incremento a aplicar a las deformaciones para acercarse a la solución a la ecuación inicial:

$$\delta \boldsymbol{\Delta}^i = -(\mathbf{J}^i)^{-1} \boldsymbol{\Psi}(\boldsymbol{\Delta}^i) \tag{14.220}$$

Esta ecuación puede usarse con gran sencillez para establecer un proceso iterativo, cuya convergencia se produce cuando el vector de incremento de deformaciones $\delta \boldsymbol{\Delta}^i$ alcanza un valor suficientemente pequeño.

El algoritmo siguiente muestra el proceso iterativo típico para hallar las deformaciones, y su representación gráfica se indica en la figura 14.44.

1. Establecer las deformaciones iniciales mediante un análisis lineal de primer orden

$$\boldsymbol{\Delta}^1 = \mathbf{K}^{-1}\mathbf{F} \qquad i = 1 \tag{14.221}$$

2. Comienzo de un paso de la iteración

3. Cálculo de la matriz jacobiana

$$\mathbf{J}^i = \left(\frac{\partial \boldsymbol{\Psi}}{\partial \boldsymbol{\Delta}} \right)_{\boldsymbol{\Delta} = \boldsymbol{\Delta}^i} \tag{14.222}$$

4. Cálculo del residuo

$$\boldsymbol{\Psi}(\boldsymbol{\Delta}^i) = \mathbf{K}_2 \boldsymbol{\Delta}^i - \mathbf{F} \tag{14.223}$$

5. Cálculo de la corrección de los desplazamientos

$$\delta \boldsymbol{\Delta}^i = -(\mathbf{J}^i)^{-1} \boldsymbol{\Psi}(\boldsymbol{\Delta}^i) \tag{14.224}$$

6. Puesta al día de los desplazamientos

$$\boldsymbol{\Delta}^{i+1} = \boldsymbol{\Delta}^i + \delta \boldsymbol{\Delta}^i \tag{14.225}$$

7. Estimación del error de convergencia

$$Error = Norma(\delta\boldsymbol{\Delta}^i) \tag{14.226}$$

8. Si $Error > Tolerancia$

8.1 Incrementar contador $i = i + 1$

8.2 Ir a 2.

9. Fin

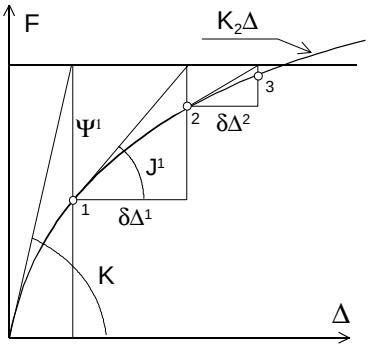


Figura 14.44

La principal ventaja de este método de Newton-Raphson es su buena característica de convergencia, que es cuadrática. El principal inconveniente está en la necesidad de evaluar la matriz jacobiana en cada paso de la iteración. Esto puede ser costoso en términos de costo computacional, por lo que existen variantes del método que evitan la evaluación de dicha matriz jacobiana.

Método de Newton-Raphson modificado

En este método no se calcula la matriz jacobiana en cada paso de la iteración, sino que se emplea en todos ellos la misma matriz (figura 14.45), que normalmente es la que corresponde a la iteración inicial, y que no es otra que la matriz de rigidez convencional:

$$\mathbf{J}^i \equiv \mathbf{J}^0 = \left(\frac{\partial \boldsymbol{\Psi}}{\partial \boldsymbol{\Delta}} \right)_{\boldsymbol{\Delta}=0} = \mathbf{K} \tag{14.227}$$

Esto facilita mucho la iteración, pues en cada paso no es necesario evaluar e invertir la matriz jacobiana, sino que en todos ellos se emplea la misma, por lo que se invierte sólo una vez, en la primera iteración. Evidentemente la convergencia es mucho más lenta y el número de iteraciones es mayor, pero como cada una de ellas es más rápida de efectuar, este método modificado es en muchas ocasiones más rápido que el método original.

Iteración directa

La expresión de la matriz jacobiana viene dada por la ecuación (14.219) y en ella el segundo término es el más costoso de evaluar. Para evitar su cálculo se suele efectuar una simplificación, que consiste en evaluar **J** sencillamente como:

(14.228)

El incremento de deformación en cada iteración se calcula como:

$$\delta\boldsymbol{\Delta}^i = -(\mathbf{K}_2)^{-1}_{\boldsymbol{\Delta}=\boldsymbol{\Delta}^i}\boldsymbol{\Psi}(\boldsymbol{\Delta}^i) \tag{14.229}$$

De esta manera la convergencia es también más lenta, pero cada iteración es más rápida de efectuar. En términos geométricos esta aproximación corresponde a emplear la secante entre el origen y la última solución hallada, como aproximación de la tangente a la curva de respuesta de la estructura, tal y como se muestra en la figura 14.46.

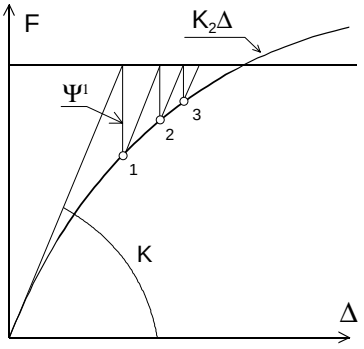


Figura 14.45

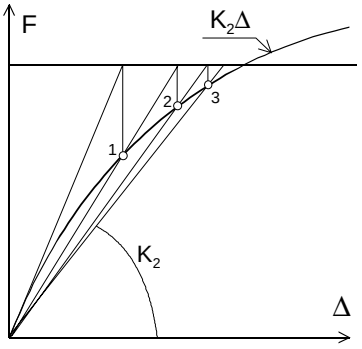


Figura 14.46

14.19 EJERCICIOS RESUELTOS

14.19.1 Calcular la carga crítica exacta de una viga biempotrada, de longitud 2*L* empleando el método de rigidez.

La viga se modeliza con dos elementos, de longitud *L* cada uno, con lo que se obtienen dos grados de libertad en el punto central, como se indica en la figura 14.47.

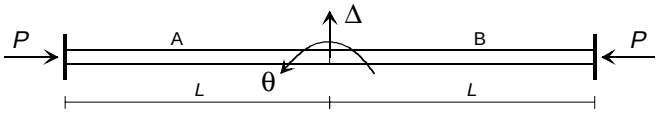


Figura 14.47

Empleando la matriz de rigidez de segundo orden exacta, la rigidez aportada por el elemento A a los dos grados de libertad {Δ, θ} de la estructura, es:

$$\mathbf{K}^A_{2L} = \begin{bmatrix} \dfrac{EI}{L^3}(2r_{11}+2r_{12}-k^2L^2) & -\dfrac{EI}{L^2}(r_{12}+r_{22}) \\ -\dfrac{EI}{L^2}(r_{21}+r_{22}) & \dfrac{EI}{L}r_{22} \end{bmatrix}$$

y la rigidez aportada por el elemento B es:

$$\mathbf{K}^B_{2L} = \begin{bmatrix} \dfrac{EI}{L^3}(2r_{11}+2r_{12}-k^2L^2) & \dfrac{EI}{L^2}(r_{11}+r_{21}) \\ \dfrac{EI}{L^2}(r_{11}+r_{12}) & \dfrac{EI}{L}r_{11} \end{bmatrix}$$

La ecuación de equilibrio de toda la estructura se obtiene ensamblando ambas matrices:

$$\begin{bmatrix} \frac{EI}{L^3}(4r_{11}+4r_{12}-2k^2L^2) & 0 \\ 0 & \frac{EI}{L}(r_{11}+r_{22}) \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \Delta \\ \theta \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} F_Y = 0 \\ M = 0 \end{Bmatrix}$$

Al ser el vector de cargas nulo, el sistema es homogéneo. Para que tenga solución distinta de la trivial su determinante debe ser nulo:

$$\frac{EI}{L}(r_{11}+r_{22})\frac{EI}{L^3}(4r_{11}+4r_{12}-k^2L^2)=0$$

Esto puede cumplirse de dos maneras distintas:

- Si el primer factor es nulo: $r_{11}+r_{22}=0$

Sustituyendo las expresiones de las funciones de estabilidad y desarrollando se obtiene:

$$kL(\sin kL - kL\cos kL)=0$$

que a su vez puede ser nula de dos formas: si *k=0*, que es la solución trivial sin carga axial, o si

$$\tan kL = kL$$

cuya primera solución es *kL=4.4934*, lo cual da lugar a una carga crítica P_1=20.19 EI/L^2.

- Si el segundo factor es nulo: $4r_{11}+4r_{12}-k^2L^2=0$

Sustituyendo las expresiones de las funciones de estabilidad y desarrollando se obtiene:

$$k^3L^3\sin kL=0$$

que a su vez puede ser nula de dos formas: si *k=0*, que es la solución trivial sin carga axial, o si

$$\sin kL=0 \quad \rightarrow \quad kL=n\pi \quad n=0,1,2,\ldots$$

La primera carga crítica corresponde a la solución *n=1*, y es:

$$k_1L=\pi \quad \rightarrow \quad P_1=\frac{\pi^2 EI}{L^2}$$

que es inferior a la hallada antes y corresponde de hecho a la carga crítica de una columna biempotrada de longitud *2L*. El vector propio correspondiente, que define el modo de pandeo, es:

$$\boldsymbol{\Phi}^1=\begin{Bmatrix}1\\0\end{Bmatrix}$$

que indica que el punto central de la columna se mueve lateralmente, sin girar.

14.19.2 Calcular la carga crítica de una viga biempotrada, de longitud $2L$ empleando el método de rigidez y la expresión aproximada de la matriz de rigidez.

Se emplea la misma modelización del ejercicio anterior (figura 14.47), pero se utiliza la expresión aproximada de la rigidez de segundo orden, incluyendo los dos primeros términos del desarrollo en serie (ecuación (14.140)).

La rigidez aportada por los elementos A y B es:

$$\mathbf{K}_{2L}^{A} \approx \begin{bmatrix} \frac{12EI}{L^3} & \frac{-6EI}{L^2} \\ \frac{-6EI}{L^2} & \frac{4EI}{L} \end{bmatrix} - \frac{P}{L}\begin{bmatrix} \frac{6}{5} & -\frac{L}{10} \\ -\frac{L}{10} & \frac{2L^2}{15} \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{K}_{2L}^{B} \approx \begin{bmatrix} \frac{12EI}{L^3} & \frac{6EI}{L^2} \\ \frac{6EI}{L^2} & \frac{4EI}{L} \end{bmatrix} - \frac{P}{L}\begin{bmatrix} \frac{6}{5} & \frac{L}{10} \\ \frac{L}{10} & \frac{2L^2}{15} \end{bmatrix}$$

La ecuación de equilibrio del conjunto es:

$$\left(\begin{bmatrix} \frac{24EI}{L^3} & 0 \\ 0 & \frac{8EI}{L} \end{bmatrix} - \frac{P}{L}\begin{bmatrix} \frac{12}{5} & 0 \\ 0 & \frac{4L^2}{15} \end{bmatrix} \right) \begin{Bmatrix} \Delta \\ \theta \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \end{Bmatrix}$$

La condición de determinante nulo implica que:

$$\left(\frac{24EI}{L^3} - \frac{12P}{5L} \right) \left(\frac{8EI}{L} - \frac{4PL}{15} \right) = 0$$

Si el primer factor es nulo, se obtiene una solución para P de valor:

$$P_1 = 10EI / L^2$$

mientras que si el segundo factor es nulo se obtiene:

$$P_1 = 30EI / L^2$$

Por lo tanto la carga crítica es la primera de ellas. El valor exacto obtenido en el ejercicio anterior es

$$P_{ex} = 9.869EI / L^2$$

por lo que la aproximación puede considerarse muy buena, en particular si se tiene en cuenta la gran diferencia en la complejidad de los cálculos.

14.19.3 Calcular la carga crítica exacta de una viga columna que está empotrada en sus dos extremos, pero en uno de ellos tiene una deslizadera situada transversalmente a ella. Emplear el método de rigidez.

La columna está empotrada en sus dos extremos, pero tiene posibilidad de movimiento lateral en uno de ellos. Se modeliza con un sólo elemento viga de longitud *L*, con lo que la estructura tiene un sólo grado de libertad Δ, que corresponde al movimiento lateral de la deslizadera (figura 14.48).

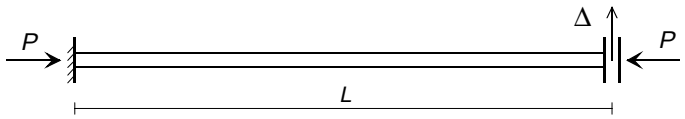


Figura 14.48

Se emplea la matriz de rigidez exacta de la viga columna, dada por (14.137), con lo que la ecuación de equilibrio correspondiente al único grado de libertad es:

$$\left[\frac{EI}{L^3}\left(2r_{11}+2r_{12}-k^2L^2\right)\right]\{\Delta\}=\{0\}$$

Por lo tanto, para que exista solución se tiene que cumplir que:

$$2r_{11}+2r_{12}-k^2L^2=0 \qquad \rightarrow \qquad k^3L^3\sin kL=0$$

cuya solución distinta de la trivial es $kL=n\pi \quad n=0,1,2,\ldots$ La primera solución, con *n=1* es:

$$k_1L=\pi \qquad \rightarrow \qquad P_1=\frac{\pi^2EI}{L^2}$$

que define la carga crítica exacta de esta columna. Por lo tanto su longitud de pandeo es *L*.

14.19.4 Calcular la carga crítica de la viga columna del ejercicio 14.19.3, pero empleando la expresión aproximada de la matriz de rigidez.

Empleando la matriz de rigidez aproximada, dada por (14.207), la ecuación de equilibrio del único grado de libertad Δ es:

$$\left(\left[\frac{12EI}{L^3}\right]-\frac{P}{L}\left[\frac{6}{5}\right]\right)\{\Delta\}=\{0\}$$

Igualando a cero el determinante de la matriz del sistema, se obtiene el valor de la carga crítica, que resulta ser:

$$P_{cr}=\frac{10EI}{L^2}$$

que es muy próximo al valor exacto hallado en el ejercicio anterior (1.3% de error).

14.19.5 Calcular la carga crítica de una viga columna empotrada en ambos extremos, y sometida a una carga distribuida uniforme *q* (figura 14.49).

Este problema se resuelve con sencillez aplicando el principio de superposición, basándose en que, como se ha visto con anterioridad, la respuesta de la viga es lineal para cargas transversales y no lineal en la carga axial. Por simetría los momentos en los extremos son iguales y de signo contrario M_B=-M_A.

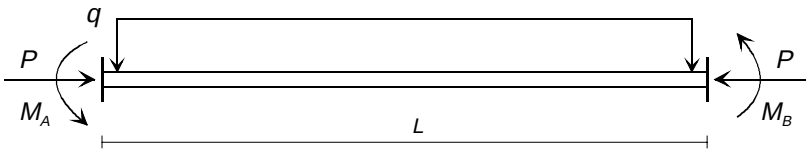


Figura 14.49

La estructura real se descompone en suma de dos casos denominados 1 y 2, cuya solución ya se conoce, como sigue:

Caso 1: se eliminan los momentos en los dos empotramientos, con lo que se obtiene una viga biarticulada sometida a una carga distribuida (figura 14.50), cuya solución se halló en el apartado 14.10.1.

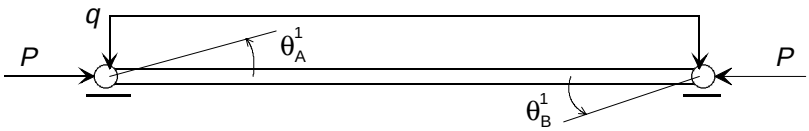


Figura 14.50

El giro en el apoyo A se obtiene derivando en la expresión (14.97)

$$\theta_A^1 = v'(x=0) = \frac{qL^3}{8EI}\left(\frac{u-\tan u}{u^3}\right)$$

Caso 2: se aplican dos momentos iguales y de signo contrario en ambos extremos de la viga (figura 14.51).

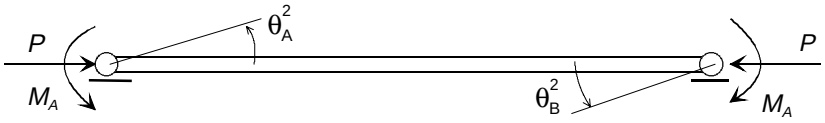


Figura 14.51

El giro de A se obtiene a partir de la expresión (14.128), haciendo Δ=0 y M_B=-M_A:

$$\theta_A^2 = \frac{M_A L}{EI}\frac{(1-\cos kL)}{kL\sin kL} = \frac{M_A L}{2EI}\frac{\tan u}{u}$$

siendo u=kL/2. La condición de compatibilidad necesaria para restituir el caso real es que el giro total en A es nulo:

$$\theta_A^1 + \theta_A^2 = 0$$

$$\frac{qL^3}{8EI}\left(\frac{u-\tan u}{u^3}\right)+\frac{M_A L}{2EI}\frac{\tan u}{u}=0$$

de la que puede obtenerse el valor del momento M_A:

$$M_A = \frac{qL^2}{12}\left(\frac{3\tan u - 3u}{u^2 \tan u}\right)$$

El primer factor de esta expresión es el momento de empotramiento en la teoría de primer orden, mientras que el término entre corchetes es el factor de amplificación de momentos, que depende de la carga axial a través de u. Cuando la carga axial tiende a cero, este factor tiende a la unidad, y se obtiene la respuesta de primer orden. Cuando u tiende a π el factor de amplificación tiende a infinito, indicando que existe una valor crítico de la carga axial, cuyo valor es:

$$u_{cr} = \frac{k_{cr} L}{2} = \pi \qquad \rightarrow \qquad P_{cr} = \frac{4\pi^2 EI}{L^2}$$

Esta es la misma carga crítica obtenida para viga biempotrada sin carga transversal en el apartado 14.4. Por lo tanto la presencia de la carga transversal no afecta a dicho valor crítico.

La deformada de la viga se obtiene sumando las deformaciones de los casos 1 y 2 (ecuaciones (14.97) y (14.123)):

$$v = \frac{q}{EIk^4}(1-\tan u \sin kx - \cos kx)+\frac{q}{2EIk^2}(Lx-x^2)$$
$$-\frac{M_A(\cos kL-1)}{k^2 EI \sin kL}\sin kx+\frac{M_A \cos kx}{k^2 EI}-\frac{M_A}{k^2 EI}$$

Sustituyendo el valor hallado para M_A y tras laboriosas operaciones, la deformada v se puede poner en la forma:

$$v = \frac{-q}{2EIk^3}\left(\sin kx + \frac{\cos kx}{\tan u} - kx + \frac{kx^2}{2} - \frac{1}{\tan u}\right)$$

La flecha en el centro de la viga es:

$$v_{L/2} = \frac{-qL^4}{384EI}\left(\frac{24-24\cos u - 12u\sin u}{u^3 \sin u}\right)$$

donde nuevamente se identifica la flecha de primer orden multiplicada por un factor de amplificación de la deformación. Este factor tiene propiedades similares a las del factor de amplificación de momentos descrito antes: vale 1 cuando u=0, y tiende a infinito cuando u=π.

14.19.6 Calcular la carga crítica de una viga columna empotrada en ambos extremos, y sometida a una carga puntual *Q* en su punto central (figura 14.52).

Nuevamente el problema se resuelve aplicando el principio de superposición, descomponiéndola en dos casos básicos de solución conocida.

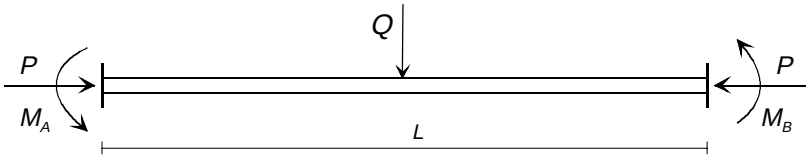


Figura 14.52

Caso 1: se eliminan los momentos en los dos empotramientos, con lo que se obtiene una viga biarticulada sometida a una carga puntual (figura 14.53), cuya solución se halló en el apartado 14.10.2.

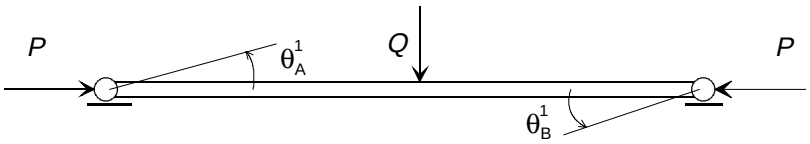


Figura 14.53

El giro en A se obtiene derivando en la expresión (14.113) y particularizando para *x=0*.

$$\theta_A^1 = v'(x=0) = \frac{QL^2}{8EI}\left(\frac{1-\sec u}{u^2}\right)$$

Caso 2: se aplican dos momentos iguales y de signo contrario en ambos extremos de la viga. Este caso ya se ha resuelto en el ejemplo anterior (figura 14.51).

El giro en el apoyo A viene dado por:

$$\theta_A^2 = \frac{M_A L}{2EI}\frac{\tan u}{u}$$

La condición de giro total nulo en A permite obtener la expresión el valor del momento M_A:

$$M_A = \frac{QL}{8}\left(\frac{2\sec u - 2}{u\tan u}\right)$$

en la que se identifica el momento en la teoría de primer orden ($QL/8$), afectado por un factor de amplificación de momentos, que es la expresión entre paréntesis. Este factor tiende a infinito cuando u tiende a π, indicando que el valor crítico de la carga axial es $4\pi^2 EI/L^2$, como corresponde a una viga biempotrada.

La obtención de la deformada de la viga se deja como ejercicio.

14.19.7 Calcular un valor aproximado de la carga crítica de pandeo de una viga empotrada articulada, sometida a una compresión *P*, empleando el método de rigidez.

Se considera la viga como una estructura, formada por dos barras de longitud L cada una, unidas en un nudo central. La estructura tiene cinco grados de libertad, como se indica en la figura 14.54.

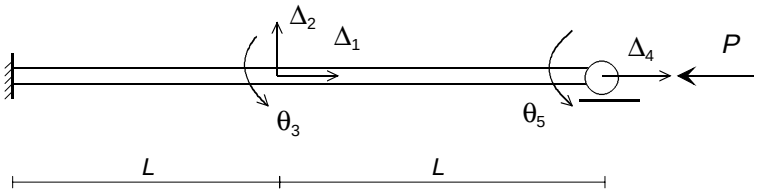


Figura 14.54

La matriz de rigidez de la estructura se obtiene ensamblando las matrices correspondientes a las dos barras:

$$\mathbf{K}=\begin{bmatrix} 2EA/L & 0 & 0 & -EA/L & 0 \\ 0 & 24EI/L^3 & 0 & 0 & 6EI/L^2 \\ 0 & 0 & 8EI/L & 0 & 2EI/L \\ -EA/L & 0 & 0 & EA/L & 0 \\ 0 & 6EI/L & 2EI/L & 0 & 4EI/L \end{bmatrix} \begin{matrix} \Delta_1 \\ \Delta_2 \\ \theta_3 \\ \Delta_4 \\ \theta_5 \end{matrix}$$

La matriz de rigidez geométrica de la estructura es:

$$\mathbf{K}_\sigma=-\frac{P}{L}\begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 12/5 & 0 & 0 & L/10 \\ 0 & 0 & 4L^2/15 & 0 & -L^2/30 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & L/10 & -L^2/30 & 0 & 2L^2/15 \end{bmatrix} \begin{matrix} \Delta_1 \\ \Delta_2 \\ \theta_3 \\ \Delta_4 \\ \theta_5 \end{matrix}$$

Nótese que en ambas matrices las deformaciones axiales Δ_1 y Δ_4 están desacopladas del resto, por lo que el problema de valores y vectores propios puede separarse en dos. El que interesa para determinar las cargas críticas es el correspondiente al movimiento lateral y a los giros:

$$\left(\begin{bmatrix} 24EI/L^3 & 0 & 6EI/L^2 \\ 0 & 8EI/L & 2EI/L \\ 6EI/L^2 & 2EI/L & 4EI/L \end{bmatrix} - \alpha \frac{P}{L} \begin{bmatrix} \frac{12}{5} & 0 & \frac{L}{10} \\ 0 & \frac{4L^2}{15} & -\frac{L^2}{30} \\ \frac{L}{10} & -\frac{L^2}{30} & \frac{2L^2}{15} \end{bmatrix} \right) \begin{Bmatrix} \Delta_2 \\ \theta_3 \\ \theta_5 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{Bmatrix}$$

Multiplicando el sistema de ecuaciones por el factor L^3 / EI se identifica el parámetro β que vale: $\beta = \alpha PL^2 / EI$. Dividiendo las filas y columnas de θ_3 y θ_5 por L, el determinante se puede poner:

$$Det\begin{bmatrix} 24-\frac{12\beta}{5} & 0 & 6-\frac{\beta}{10} \\ 0 & 8-\frac{4\beta}{15} & 2+\frac{\beta}{30} \\ 6-\frac{\beta}{10} & 2+\frac{\beta}{30} & 4-\frac{2\beta}{15} \end{bmatrix} = 0$$

Las soluciones del polinomio característico del determinante son:

$$\beta_1 = 5.177 \qquad \beta_2 = 18.775 \qquad \beta_3 = 49.380$$

y por lo tanto la carga crítica de la viga es:

$$\alpha_1 P = 5.177\frac{EI}{L^2}$$

que es muy próximo al valor analítico exacto $\alpha_{1ex} P = 5.047 EI / L^2$

El primer modo de pandeo es el primer autovector (figura 14.55):

$$\Phi_1 = \begin{Bmatrix} \Delta_2 \\ \theta_3 \\ \theta_5 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 0.4104 \\ 0.2844 / L \\ -0.8664 / L \end{Bmatrix}$$

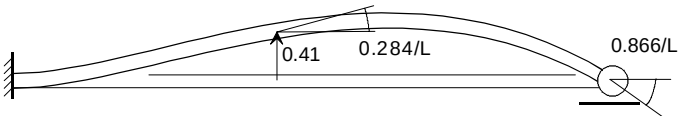


Figura 14.55

14.19.8 Determinar el modulo reducido de una sección rectangular de ancho *b* y canto *h*.

La posición del punto N (figura 14.56) viene determinada por la ecuación (14.160):

$$E_t b\frac{h_1^2}{2} - Eb\frac{h_2^2}{2} = 0 \qquad h_1 + h_2 = h$$

de donde se obtiene:

$$h_1 = \frac{\sqrt{E}h}{\sqrt{E}+\sqrt{E_t}} \qquad h_2 = \frac{\sqrt{E_t}h}{\sqrt{E}+\sqrt{E_t}}$$

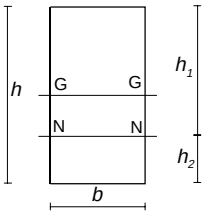


Figura 14.56

El módulo reducido se obtiene de la ecuación (14.163):

$$E_r = \frac{E_t b h_1^3 / 3 + E b h_2^3 / 3}{b h^3 / 12}$$

sustituyendo los valores de h_1 y h_2 se obtiene:

$$E_r = \frac{4 E_t E}{\left(\sqrt{E} + \sqrt{E_t}\right)^2}$$

14.19.9 Efectuar un análisis cualitativo de las cargas de pandeo del pórtico mostrado en la figura 14.57. Suponer que todas las barras son infinitamente rígidas a esfuerzo axial.

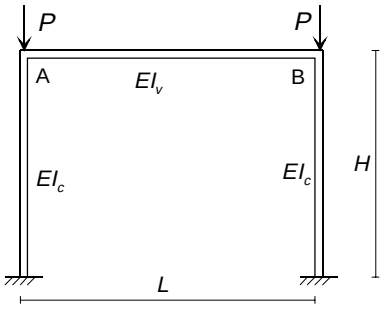


Figura 14.57

Las dos columnas están sometidas a un esfuerzo de compresión de valor *P*, y el dintel no tiene esfuerzo axial. El estudio se efectúa considerando que la rigidez del dintel adopta los valores extremos cero e infinito.

Modos simétricos.

Si la rigidez del dintel es infinita, las columnas pueden considerarse perfectamente empotradas en sus dos extremos, pues los dos nudos A y B no pueden girar por simetría. Por lo tanto las columnas pandean como se indica en la figura 14.58.a. El valor de la carga de pandeo es:

$$P^S_{\max} = \frac{4\pi^2 EI_c}{H^2} = \frac{39.48 EI_c}{H^2}$$

Si la rigidez del dintel es nula, no aporta ninguna rigidez a los nudos A y B, y las columnas pueden considerarse articuladas en él, por lo que se comportan como columnas empotradas en la base y articuladas en la parte superior. Por lo tanto las columnas pandean como se indica en la figura 14.58.b. El valor de la carga de pandeo es:

$$P^S_{\min} = \frac{\pi^2 EI_c}{0.7^2 H^2} = \frac{20.14 EI_c}{H^2}$$

Para cualquier otra situación, la carga crítica del primer modo simétrico estará comprendida entre estos dos valores extremos.

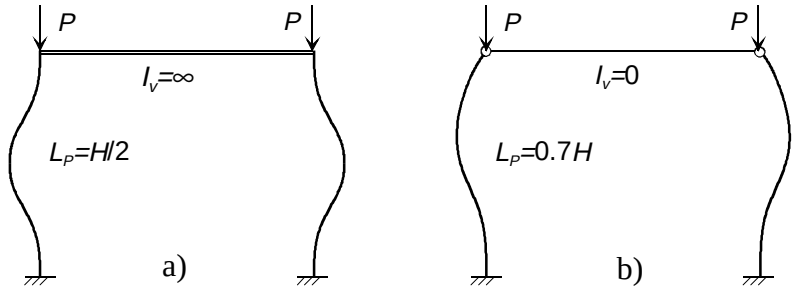


Figura 14.58

Modos antisimétricos.

Si la rigidez del dintel es infinita los dos nudos A y B no pueden girar, pero el dintel puede trasladarse lateralmente, por lo que las columnas pandean como se indica en la figura 14.59.a. El valor de la carga de pandeo es:

$$P_{\max}^{A} = \frac{\pi^2 EI_c}{H^2} = \frac{9.87 EI_c}{H^2}$$

Si la rigidez del dintel es nula, las columnas se comportan como empotradas en la base y libres en la parte superior, por lo que pandean como se indica en la figura 14.59.b. El valor de la carga de pandeo es:

$$P_{\min}^{A} = \frac{\pi^2 EI_c}{(2H)^2} = \frac{2.476 EI_c}{H^2}$$

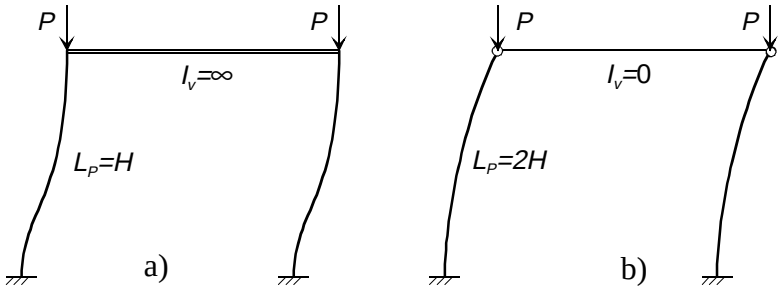


Figura 14.59

Para cualquier otra situación, la carga crítica del primer modo simétrico estará comprendida entre estos dos valores extremos. Se observa que estos valores son siempre menores que cualquiera de los valores de los modos simétricos; por lo tanto el pórtico siempre pandeará con un modo antisimétrico.

14.19.10 Determinar el primer modo de pandeo simétrico del pórtico del ejercicio 14.19.9. Particularizar la solución para los valores $L=H$, $I_v=2I_c$.

Al buscarse un modo simétrico, los únicos grados de libertad del sistema son los dos giros en los nudos, que son iguales y de sentido contrario (figura 14.60). El dintel no tiene ninguna traslación lateral. Los dos pilares están sometidos a una fuerza de compresión P, y el dintel no tiene esfuerzo axial.

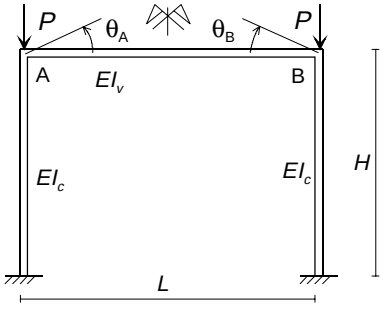


Figura 14.60

Las ecuaciones de equilibrio de las columnas, incluyendo los efectos de segundo orden, son:

$$\left[\frac{EI_c}{H}r_{11}\right]\{\theta_A\}=\{M_A^c\} \qquad \left[\frac{EI_c}{H}r_{11}\right]\{\theta_B\}=\{M_B^c\}$$

donde r_{11} está calculado para la columna, es decir que su valor es:

$$r_{11}=\frac{k_cH\sin k_cH-k_c^2H^2\cos k_cH}{2-2\cos k_cH-k_cH\sin k_cH} \qquad k_c^2=\frac{P}{EI_c}$$

La viga dintel horizontal no tiene esfuerzo axial, por lo que su ecuación de equilibrio es la convencional de una viga horizontal (apartado 7.6):

$$\begin{bmatrix}\frac{4EI_v}{L} & \frac{2EI_v}{L}\\ \frac{2EI_v}{L} & \frac{4EI_v}{L}\end{bmatrix}\begin{Bmatrix}\theta_A\\ \theta_B\end{Bmatrix}=\begin{Bmatrix}M_A^v\\ M_B^v\end{Bmatrix}$$

La ecuación de equilibrio de la estructura se obtiene ensamblando las ecuaciones anteriores:

$$\begin{bmatrix}\frac{4EI_v}{L}+\frac{EI_c}{H}r_{11} & \frac{2EI_v}{L}\\ \frac{2EI_v}{L} & \frac{4EI_v}{L}+\frac{EI_c}{H}r_{11}\end{bmatrix}\begin{Bmatrix}\theta_A\\ \theta_B\end{Bmatrix}=\begin{Bmatrix}0\\ 0\end{Bmatrix}$$

Sustituyendo la relación de simetría entre los giros θ_B=-θ_A se obtiene la ecuación:

$$\left(\frac{4EI_v}{L}+\frac{EI_c}{H}r_{11}-\frac{2EI_v}{L}\right)\theta_A=0$$

Para que este sistema tenga solución, su determinante debe ser nulo, por lo que:

$$\frac{2EI_v}{L}+\frac{EI_c}{H}r_{11}=0$$

De esta ecuación se puede obtener el valor de k_c, que corresponde a la primera carga crítica. Sustituyendo los valores $L=H$, $I_v=2I_c$, la ecuación anterior queda

$$2+\frac{k_cH\sin k_cH-k_c^2H^2\cos k_cH}{2-2\cos k_cH-k_cH\sin k_cH}=0$$

cuya solución es $k_cH=5.0182$, por lo que la carga crítica resulta ser:

$$P_{cr}=\frac{5.0182^2\,EI_c}{H^2}=\frac{25.18\,EI_c}{H^2}$$

que, como era de esperar, está situada entre los valores extremos obtenidos en el ejercicio 14.19.9.

14.19.11 Determinar el primer modo de pandeo antisimétrico del pórtico del ejercicio 14.19.9. Particularizar la solución para los valores $L=H$, $I_v=2I_c$.

En un modo de pandeo antisimétrico, los únicos grados de libertad del sistema son el giro del nudo A y la traslación lateral Δ del dintel (figura 14.61). El pilar está sometido a una fuerza de compresión P, y el dintel no tiene esfuerzo axial.

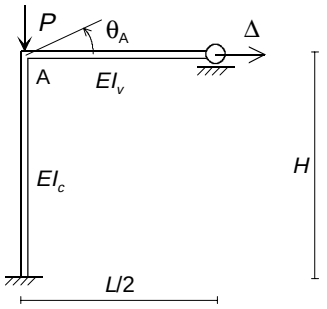


Figura 14.61

La ecuación de equilibrio de la columna, incluyendo los efectos de segundo orden, es:

$$\begin{bmatrix}\frac{EI_c}{H^3}\alpha_1 & \frac{EI_c}{H^2}\alpha_2\\ \frac{EI_c}{H^2}\alpha_2 & \frac{EI_c}{H}r_{11}\end{bmatrix}\begin{Bmatrix}\Delta\\ \theta_A\end{Bmatrix}=\begin{Bmatrix}F_A^c\\ M_A^c\end{Bmatrix}$$

donde las distintas constantes están calculadas para una longitud H, una rigidez EI_c, y un esfuerzo axial P, es decir para $k_c^2=P/EI_c$.

La ecuación de equilibrio del dintel horizontal es la convencional de una viga horizontal empotrada en A y articulada en C, con longitud $L/2$ (ver apartado 7.10). La relación entre el momento en su extremo y el giro es:

$$\left[\frac{3EI_v}{(L/2)}\right]\{\theta_A\}=\{M_A^v\}$$

La ecuación de equilibrio de la estructura se obtiene ensamblando las ecuaciones anteriores:

$$\begin{bmatrix}\frac{EI_c}{H^3}\alpha_1 & \frac{EI_c}{H^2}\alpha_2\\ \frac{EI_c}{H^2}\alpha_2 & \frac{EI_c}{H}r_{11}+\frac{3EI_v}{(L/2)}\end{bmatrix}\begin{Bmatrix}\Delta\\ \theta_A\end{Bmatrix}=\begin{Bmatrix}0\\ 0\end{Bmatrix}$$

Para que este sistema tenga solución, su determinante debe ser nulo. Su valor es:

$$\frac{EI_c}{H^3}\alpha_1\left(\frac{EI_c}{H}r_{11}+\frac{6EI_v}{L}\right)-\left(\frac{EI_c}{H^2}\alpha_2\right)^2=0$$

$$\alpha_1 r_{11}+6\alpha_1\frac{H}{L}\frac{I_v}{I_c}-\alpha_2^2=0$$

De esta ecuación se puede obtener el valor de k_c, que corresponde a la primera carga crítica. Sustituyendo los valores $L=H$, $I_v=2I_c$, la ecuación anterior queda

$$\alpha_1 r_{11}+6\alpha_1-\alpha_2^2=0$$

cuya solución es $k_cH=2.7165$, por lo que la carga crítica es:

$$P_{cr}=\frac{2.7165^2\,EI_c}{H^2}=\frac{7.379\,EI_c}{H^2}$$

que está situada entre los valores extremos obtenidos en el ejercicio 14.19.9.

14.20 BIBLIOGRAFÍA

1. Argüelles Alvarez, R., y Argüelles Bustillo, R., *Análisis de Estructuras: Teoría, Problemas y Programas*, Escuela Técnica Superior de Ingenieros de Montes, Madrid, 1996.
2. Bleich, F., *Buckling Strength of Metal Structures*, McGraw-Hill, New York, 1952.
3. Chajes, A., *Principles of Structural Stability Theory*, Prentice-Hall, Englewood Cliffs, N. J., 1974.
4. Chen, W. F., Lui, E. M., *Structural Stability - Theory and Implementation*, Elsevier, New York, 1987.
5. Como, M., Grimaldi, A., *Theory of Stability of Continuous Elastic Structures*, CRC Press, New York, 1995.
6. Considère, A., *Résistance des pièces comprimées*, Congrès International des Procédés de Construction, Paris, Septiembre 1889.
7. Engesser, F., *Ueber Knickfragen*, Schweizerische Bauzeitung, Vol. 26, Nº 4, pp. 24-26, Julio 1895.

8. Gere, J. M., y Timoshenko, S. P., *Mechanics of Materials*, 3ª edición, Chapman & Hall, London, 1991.

9. Ortiz Berrocal, L., *Resistencia de Materiales*, McGraw-Hill Interamericana, Madrid, 1991.

10. Shanley, F. R., *Inelastic Column Theory*, Journal of Aeronautical Sciences, Vol. 14, Nº 5, pp. 261-267, Mayo 1947.

11. Timoshenko, S. P., *Teoría de la Estabilidad Elástica*, Ed. Ediar, Buenos Aires, 1961.

12. Timoshenko, S. P., Gere, J. M., *Theory of Elastic Stability*, 2ª edición, McGraw-Hill, New York, 1964.

13. Vázquez, M., *Resistencia de Materiales*, Ed. Noela, Madrid, 1994.

14.21 PROBLEMAS

14.21.1 Determinar la carga crítica de los sistemas mostrados en la figura P14.1, suponiendo que todas las barras son infinitamente rígidas al esfuerzo axial y a la flexión.

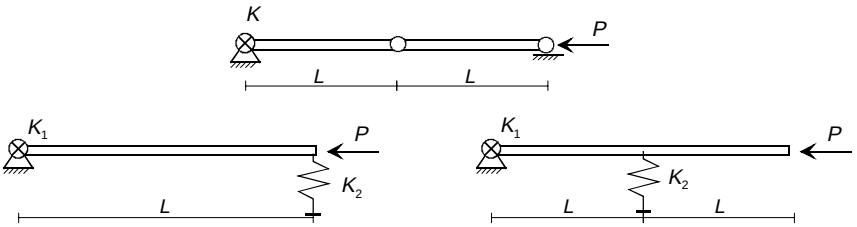


Figura P14.1

14.21.2 Repetir el problema anterior suponiendo que las barras tienen una rigidez a la flexión finita, de valor *EI*.

14.21.3 Calcular la carga crítica de las columnas de propiedades uniformes *EI*, mostradas en la figura P14.2.

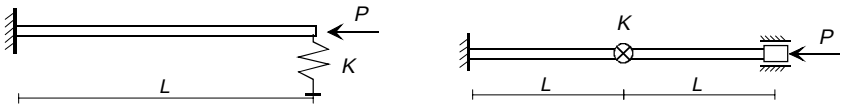


Figura P14.2

14.21.4 Calcular la carga crítica de pandeo de la columna de la figura P14.3.

14.21.5 Calcular la carga crítica de pandeo de la columna de la figura P14.4.

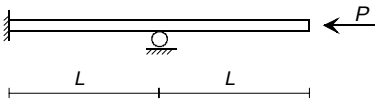


Figura P14.3

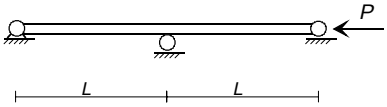


Figura P14.4

14.21.6 Calcular el momento en el empotramiento en la viga columna de la figura P14.5, sometida a una carga distribuida uniforme q.

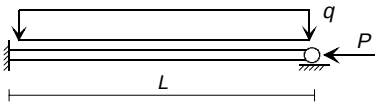


Figura P14.5

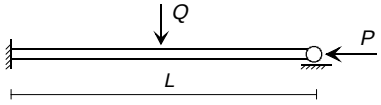


Figura P14.6

14.21.7 Calcular el momento en el empotramiento en la viga columna de la figura P14.6, que está sometida a una carga puntual Q situada en la mitad de su luz.

14.21.8 Calcular la carga crítica de pandeo de la columna de la figura P14.7.

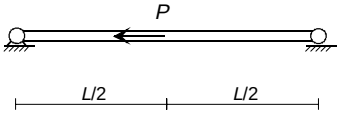


Figura P14.7

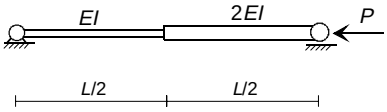


Figura P14.8

14.21.9 Calcular la carga crítica de pandeo de la columna de inercia variable representada en la figura P14.8.

14.21.10 Calcular la carga de pandeo de la columna articulada mostrada en la figura P14.9, que está sometida a un calentamiento uniforme de valor T.

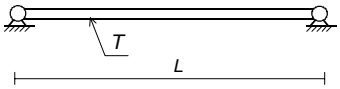


Figura P14.9

14.21.11 Calcular el valor de la temperatura T que hace pandear a la columna de la figura P14.10.

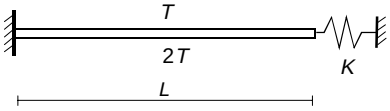


Figura P14.10

14.21.12 Calcular la carga crítica de pandeo global para la estructura de celosía mostrada en la figura P14.11, utilizando el método de rigidez y la expresión aproximada de la matriz de rigidez. Todas las barras tienen en mismo producto EA=2 10^8 N.

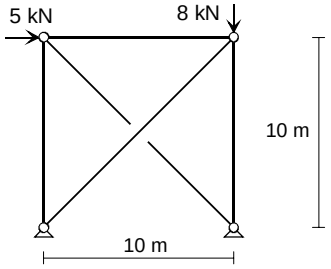


Figura P14.11

14.21.13 Determinar el módulo reducido de una sección en **I**, de canto h y anchura b. Despreciar el área del alma y suponer que en cada ala se concentra la mitad del área total del perfil.

Solución: $$E_r = \frac{2EE_t}{E + E_t}$$

14.21.14 Calcular la carga crítica de pandeo global del pórtico a dos aguas mostrado en la figura P14.12, utilizando el método de rigidez y la expresión aproximada de la matriz de rigidez. El valor del producto EI es 10^6 N m^2.

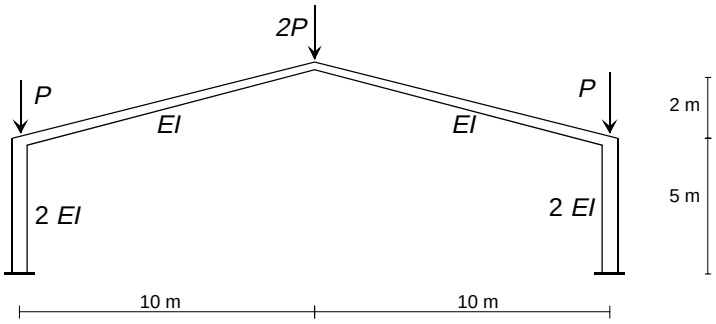


Figura P14.12

Índice de materias

A

Analogía de la columna, 222
Antimétria:
  condiciones de ligadura antimétricas, 399
  de fuerzas y deformaciones, 396
  espacial, 405
Apoyo:
  articulado, 9
  deslizante, 9
  elástico, 10, 340
  empotrado, 9
  esférico, 10
  inclinado, 342
Arco:
  atirantado, 215
  biarticulado, 212
  biempotrado, 217
  definición, 205
  propiedades de rigidez, 288
  rígido axialmente, 214, 217, 219
  sin momento flector, 210
  triarticulado, 208
Área equivalente a cortadura, 127
Articulación, 13

B

Barra:
  biarticulada espacial, 252
  biarticulada plana, 69, 247
  plana con una articulación, 273, 277
  prismática a flexión en el espacio, 169, 264
  prismática a flexión en el plano, 154, 255, 293
Betti, teorema de reciprocidad, 39

C

Carga conjugada, 120
Carga crítica de Euler, 553
Carga crítica de pandeo, 546, 553, 557, 559, 561, 567, 571, 574
Cargas simétricas y antisimétricas, 396
Cargas térmicas, 320
Cargas, tipos de, 17
Castigliano, teoremas de, 37, 38
Caso:
  B en líneas de influencia, 424
  caso 0: *Ver* Caso isostático
  hiperestático, 74, 117, 165, 213, 216, 218
  isostático, 73, 117, 164, 212, 215, 217
  isostático virtual, 77, 124, 168
  virtual unitario, 76, 122, 167
Cauchy, fórmula de, 23
Celosía:
  compleja, 55, 57
  compuesta, 54, 56
  espacial, 52
  hiperestática, 51, 57
  isostática, 51, 52
  plana, 53, 50
  simple, 53, 55
Centro elástico, 219
Clapeyron, fórmula de, 29
Coeficiente:
  de balasto del terreno, 468
  de balasto de la viga, 470
  de flexibilidad, 75, 118, 132, 166, 177
  de pandeo ω, 592
  de rigidez, 243
Colapso: *Ver* Pandeo
Columna:
  biarticulada, 551
  biempotrada, 555
  curva, 565
  empotrada - articulada, 558
  excéntrica, 560
Compatibilidad de deformaciones, 73, 118, 163, 308
Condensación de grados de libertad, 499
Condiciones:
  de compatibilidad geométrica, 72, 117, 163, 308
  de construcción, 12
  de ligadura: *Ver* Ligaduras
Conjugada:
  viga, 119
  carga, 120

Criterio de signos:
en el método de Cross, 520
en pórticos, 154, 169
en vigas a flexión, 102
en vigas en fundación elástica, 469
ingenieril para momentos, 108
Cross, método de, 518
Crotti - Engesser, teorema de, 42
Curvas de diseño de columnas, 590

D

Deformación unitaria:
definición, 24
de esfuerzo axial, 69, 156, 157, 170
de flexión, 103, 155, 170
de cortadura, 127, 155, 170
de origen térmico, 44, 104, 156
Deformaciones:
cálculo en celosías, 76
cálculo en pórticos, 166, 177
cálculo en vigas, 122
campo de deformaciones, 18
de los nudos de una estructura, 310
de origen término, 322, 326, 329
Densidad de energía, *Ver* Energía
Densidad de energía complementaria, *Ver* Energía
Descentramiento de los elementos, 284
Descomposición en simetría y antimetría:
en el plano, 396
en el espacio, 402
Deslizadera, 13
Diagramas de esfuerzos internos, 108

E

Ecuación constitutiva del material, 25
Ecuación de compatibilidad de deformaciones, 72, 117, 163
Ecuación de equilibrio:
de la estructura, 243, 309
de un arco, 207
de un elemento estructural, 309
de un sólido continuo, 24
de una subestructura, 504
en la teoría de Timoshenko, 130
Ecuación de los tres momentos, 114
Ecuación diferencial:
de equilibrio axial, 159, 174
de la flexión, 106, 159, 173
de la viga en fundación elástica, 470
de la viga - columna, 549
Elementos:
combinados, 501
descentrados, 284
estructurales: *Ver* Barra
modificados, 502
planos curvos, 288
Eliminación de grados de libertad: *Ver* Condensación de grados de libertad
Emparrillado plano, 5, 260, 297
Empotramiento, 9
Energía:
elástica, 29, 244
elástica complementaria, 31
de esfuerzo axial, 70, 174
de esfuerzo cortante, 128, 175, 293
de flexión, 106, 160, 174
de torsión, 176
densidad de energía, 26, 45, 70
densidad de energía complementaria, 29, 46, 106, 128, 159, 174, 180, 206
Engesser, teorema de, 43
Ensamblaje de la matriz de rigidez, 312
Equilibrado de nudos en el método de Cross, 521
Equilibrio de los nudos, 310
Equilibrio de un elemento estructural, 309
Error de longitud en una barra, 78
Error en la forma de un elemento:
en el método de flexibilidad, 78, 161, 175
en el método de rigidez, 330
Esbeltez:
crítica, 591
de una columna, 554
límite de proporcionalidad, 555
Esfuerzo:
axial, 70, 156, 171
cortante, 105, 126, 127, 158, 172
de montaje, 333
de pretensión inicial, 180, 333
Esfuerzos conjugados, 120
Esfuerzos en los elementos, 319
Esfuerzos redundantes: *Ver* Incógnita hiperestática
Estabilidad:
de celosías, 51
de pórticos, 152
de vigas, 100
elástica, 546
externa de una estructura, 14
Estado de libre dilatación, 320
Estructura:
continua, 6
hiperestática, 14
inestable, 14
isostática, 14
reticular, 5
simétrica, 395

tipos de estructuras, 4
Euler, fórmula de, 553

F

Factor:
de amplificación:
de deformaciones, 566, 571, 574
de momentos, 562, 572, 574
de corrección de la energía a cortante, 126, 176
de rigidez a cortante, 296
de distribución de momentos, 522
de transmisión de momentos, 523
Fase 0 del método de rigidez, 317
Fase de empotramiento perfecto:
método de Cross, 520
método de rigidez, 317
Fases del método de Cross, 519
Flexibilidad:
de una barra articulada, 71
a esfuerzo axial, 165
a flexión, 108, 118, 165
a esfuerzo cortante, 132, 175
coeficientes de: *Ver* Coeficiente de flexibilidad
de un arco, 218, 290
de un resorte, 180
método de, 71, 116, 132, 162, 176, 289
Flexión:
de piezas rectas en el espacio, 169
teoría de Timoshenko con energía de cortante, 125
teoría general de la flexión plana, 102
Fórmula:
de Cauchy, 23
de Clapeyron, 29
de Euler, 553
de diseño de columnas, 590
de la secante, 563
de los tres momentos, 114
Fuerza:
unitaria móvil, 416
virtual unitaria, 76, 123, 167, 177, 181, 209
Fuerzas:
aplicadas en los nudos, 316
de empotramiento perfecto:
método de Cross, 520
método de rigidez, 317
de fase 0 del método de rigidez, 317
de pretensión inicial: *Ver* Esfuerzos de pretensión inicial
debidas a errores de forma, 332
debidas a las temperaturas:
sobre barra articulada, 324, 328
sobre emparrillado, 330
sobre viga espacial, 328
sobre viga plana, 325
nodales equivalentes, 317
nodales equivalentes a las deformaciones impuestas, 339
tipos de fuerzas exteriores, 17
Funciones de estabilidad, 578
Fundación elástica, 468

G

Grado de hiperestaticidad:
en celosías, 51, 71
en vigas, 100
en pórticos, 153
en arcos, 212, 215, 217
Grados de libertad:
de una estructura, 242, 308
de un elemento estructural:
biarticulado espacial, 252
biarticulado plano, 247
biempotrado espacial, 264
biempotrado plano, 255
emparrillado, 260

H

Hipérbola de Euler, 555
Hiperestática, estructura, 14, 51, 71, 100, 153, 212, 215, 217

I

Incógnita hiperestática:
en celosías, 71
en vigas, 113
en pórticos, 117, 162
en arcos, 212,
Inestable, estructura: *Ver* Estabilidad
Influencia, línea de: *Ver* Línea de influencia
Isostática:
estructura, 14
celosía, 51
viga, 100
Isostático:
arco, 208
caso: *Ver* Caso isostático
pórtico, 153

L

Ligaduras:
apoyos elásticos, 10
de desplazamiento conocido, 338
de desplazamiento nulo, 337
no en los ejes generales, 342

Límite de proporcionalidad, 555, 584, 591
Línea de influencia:
concepto y definición, 415
de deformaciones, 431
de esfuerzos internos, 426
de reacciones, 425
en celosías isostáticas, 418
en vigas isostáticas, 416
Longitud:
de montaje de un resorte, 180, 333
de pandeo, 569
natural de un resorte, 180, 333

M

Malla:
semioctaédrica, 57
tetraédrica, 57
Material:
elástico, 25
lineal, 26
Matriz:
boolena de ordenación, 310
de flexibilidad, 75, 118, 166, 177
de rigidez condensada, 500
de rigidez de la estructura, 243, 313
de rigidez de segundo orden, 580
de rigidez de un elemento, 247
de rigidez de una subestructura, 505
de rigidez geométrica, 593
de rotación de deformaciones, 250, 253, 257, 262, 267
elástica, 26
Maxwell, teorema de, 40, 41
Ménabréa, teorema de, 44
Método:
de Cross, 518
de distribución de momentos, 518
de flexibilidad
comparación con el de rigidez, 315
en arcos, 212, 215, 217
en celosías, 71
en pórticos, 162, 176
en vigas, 116, 132
interpretación física, 80, 182
de Henneberg: *Ver* Método de la barra sustituida
de la barra sustituida, 68
de la fuerza virtual unitaria, 76, 122, 167, 177, 181, 209
de la viga conjugada, 119
de las deformaciones: *Ver* Método de rigidez
de las fuerzas: *Ver* Método de flexibilidad
de las secciones para celosías, 64
de las tres rotaciones para definir sistemas de ejes locales, 268
de los nudos para celosías, 59
de Müller-Breslau, 424
de rigidez, 242, 308
de Ritter: *Ver* Método de las secciones
del coeficiente ω para pandeo, 592
del punto auxiliar para sistemas de ejes locales, 270
gráfico de Cremona, 62
tipos de métodos de análisis, 7
Modos de pandeo, 598
Módulo:
de elasticidad, 25, 70, 103
de Poisson, 25
Módulo reducido, teoría de, 584
Módulo tangente, teoría de, 581
Mohr, teoremas de, 111
Mohr, teoremas con energía de cortante, 131
Momento de desequilibrio, 521
Momento de transmisión, 523
Momento flector, 104, 157, 171
Momento torsor, 172
Muelles: *Ver* Resortes
Müller-Breslau, teorema de, 424

N

Navier, hipótesis de, 102, 154, 169
Newton-Raphson, método de, 599
No lineal, análisis, 599

P

Pandeo:
elástico de barras rectas: *Ver* Columna
global de estructuras completas, 597
inelástico, 581, 584
Pórtico:
criterios de estabilidad, 152
plano, 151
espacial, 153
Potencial de las fuerzas exteriores, 33
Potencial complementario de las fuerzas, 36
Pretensión inicial: *Ver* Esfuerzo de pretensión
Principio:
de la mínima energía potencial, 33
de la mínima energía potencial complementaria, 36
del Trabajo Virtual, 31
del Trabajo Virtual Complementario, 34
del Trabajo Virtual para líneas de influencia, 420

R

Reacciones:
cálculo en el método de rigidez, 337, 338
definición, 8
de un arco, 208, 212, 218
líneas de influencia, 416, 425
Redundantes, esfuerzos: *Ver* Incógnita hiperestática
Resortes:
de esfuerzo axial, 178, 281
de torsión, 178, 283
esfuerzo de pretensión inicial, 180, 333
propiedades de flexibilidad, 180
propiedades de rigidez, 281, 283
Rigidez:
a esfuerzo axial, 248
a esfuerzo cortante, 293
a flexión, 255
a torsión, 261
concepto de, 242
de la viga columna, 577
de la viga en fundación elástica, 487
de segundo orden, 580
de un elemento estructural, 247
de una estructura, 242
de una pieza curva, 288
de una subestructura, 505
geométrica de los elementos, 593
método de, 242, 308
Rigidez ficticia para condiciones de ligadura, 339
Rótula, 13

S

Secante, ley de variación de la inercia, 214
Secante, fórmula de, 563
Shanley, teoría de, 588
Significado físico
de la matriz de rigidez, 244
de las ecuaciones de compatibilidad, 82, 119, 182
de los coeficientes de flexibilidad, 80, 119, 183
Simetría:
condiciones de ligadura simétricas, 397
de fuerzas y deformaciones, 396
de la matriz de rigidez, 243
del tensor de tensiones, 25
espacial, 403
Sistema de ejes local:
de un apoyo, 342
de un elemento, 247, 252, 255, 260, 264
Subestructura:
descomposición en subestructuras, 504
ecuación de equilibrio, 505
rigidez de una subestructura, 505
ventajas de su empleo, 511

T

Temperatura:
media, 156, 171, 322, 326
gradiente, 104, 156, 171, 322, 326, 329
Tensión:
concepto de tensión, 21
cortante en vigas a flexión, 104, 105, 127
crítica de pandeo, 554
vector tensión, 22
Tensor:
de deformaciones unitarias, 24
de tensiones, 23
Teorema:
de Betti-Rayleigh del trabajo recíproco, 39
de Castigliano, 37, 38
de Crotti - Engesser, 42
de Engesser, 43
de Maxwell de la deformación recíproca, 40
de Maxwell generalizado, 41
de Ménabréa, 44
de Mohr, 111, 131
de Müller-Breslau, 424
Timoshenko, teoría de flexión de vigas, 125
Torsión, 176
Trabajo:
complementario de las fuerzas, 19
de las fuerzas exteriores, 18
unitario, 19
virtual, 20
virtual complementario, 21
Traslación de fuerzas y deformaciones, 285
Traslaciones de una estructura, 519, 525
Trenes de cargas, 422

V

Variación virtual:
de la energía elástica, 28, 29
de las deformaciones, 20, 28
de las tensiones, 31
Vector de deformaciones de origen térmico, 322, 326, 329
Vector de errores de forma de un elemento, 331
Vector de fuerzas:
condensado, 500
de origen térmico, 321
de una subestructura, 505
nodales equivalentes, 318, 321, 332
Vector de grados de libertad:
de la estructura, 310

de un elemento: *Ver* Grados de libertad de un elemento estructural
Vector de incógnitas hiperestáticas, 75, 118, 166, 177
Vector tensión, 22
Viga:
columna, 549, 570
conjugada, 119
continua, 114
criterios de estabilidad, 100
definición, 99
en fundación elástica, 467
hiperestática, 100
infinita en fundación elástica, 472
isostática, 100
semi-infinita en fundación elástica, 482
Vuelta atrás en el análisis por subestructuras, 510

Problemas

A continuación se incluyen los enunciados de todos los problemas propuestos en el texto.

3. CELOSÍAS

3.13.1 En la estructura de la figura P3.1 se desean calcular los esfuerzos en todas las barras y la deformación horizontal del apoyo B. Todas las barras son del mismo material, con módulo de elasticidad 200 GPa. Las barras del cordón inferior tienen A=8 cm^2, las del cordón superior A=10 cm^2, las diagonales A=10 cm^2, y los montantes A=8 cm^2.

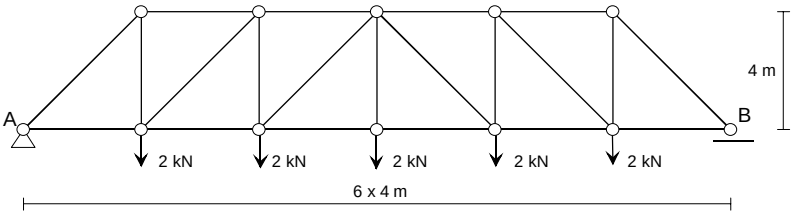


Figura P3.1

3.13.2 Calcular todos los esfuerzos internos en las barras de la estructura mostrada en la figura P3.2.

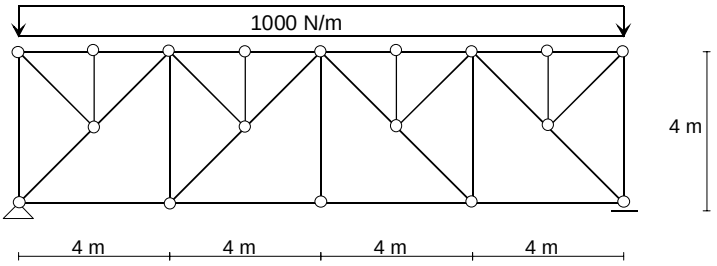


Figura P3.2

3.13.3 En la estructura de la figura P3.3 se desea calcular la deformación horizontal del apoyo B cuando todo el cordón inferior sufre un calentamiento de 20 ºC. Todas las barras son del mismo material, con E=200 GPa y $\alpha=10^{-5}$ ºC^{-1}. Las barras del cordón inferior tienen un área de 8 cm^2, las del cordón superior de 10 cm^2, las diagonales de 10 cm^2, y los montantes de 8 cm^2.

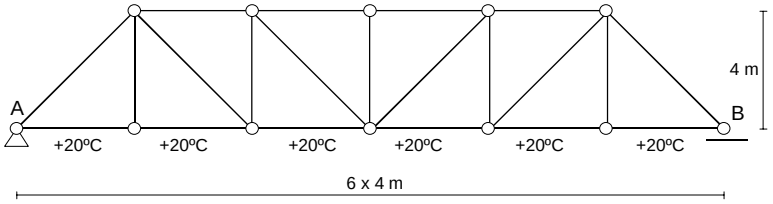


Figura P3.3

3.13.4 Calcular los esfuerzos en las barras de la celosía de la figura P3.4, para los valores del ángulo α=15º y α=30º.

Solución: Para α=15º, N_{FC} = 18.9 Tn, N_{AB} = -26.1 Tn, N_{AD} = 23.4 Tn N_{AF} = -17.2 Tn, N_{BC} = -19.1 Tn

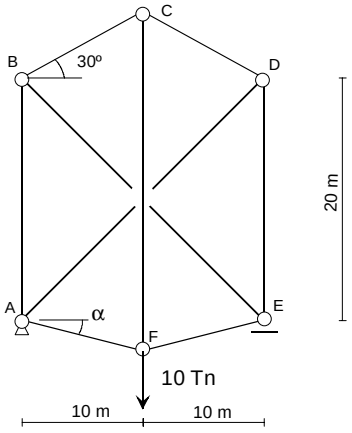


Figura P3.4

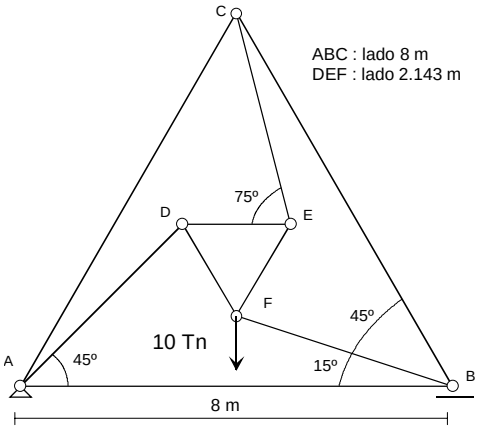


Figura P3.5

3.13.5 Calcular los esfuerzos en las barras de la estructura de la figura P3.5, así como el descenso del punto F. Todas las barras tienen el mismo valor del producto $EA = 4\ 10^6$ kg.

Solución: N_{AD} = -4.715 Tn, N_{EC} = 6.44 Tn, N_{FB} = -1.724 Tn, $\Delta_{FY} = 2.192\ 10^{-2}$ m.

3.13.6 En la estructura de la figura P3.6 se desean calcular las deformaciones del punto medio entre los nudos D y E. Todas las barras tienen las mismas propiedades:
$E = 2\ 10^6$ kg/cm^2 Área = 10 cm^2 Inercia = 1000 cm^4.

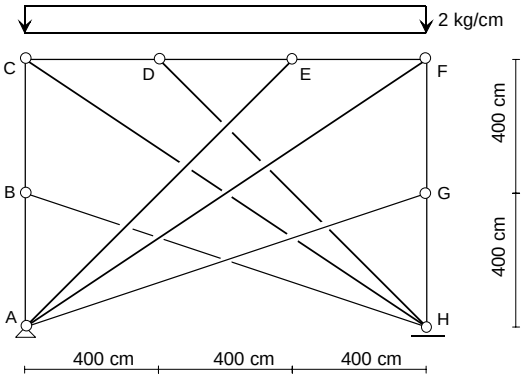


Figura P3.6

3.13.7 Calcular los esfuerzos en las barras de la celosía mostrada en la figura P3.7, así como las deformaciones del punto A. Todas las barras tienen el mismo valor del producto $E\,A$ = 21000 Tn.

Solución: N_1= 7.33 Tn N_2 = 4.94 Tn N_3 = -1. Δ_{AX} = 9.4 10^{-4} m Δ_{AY} = -1.65 10^{-3} m.

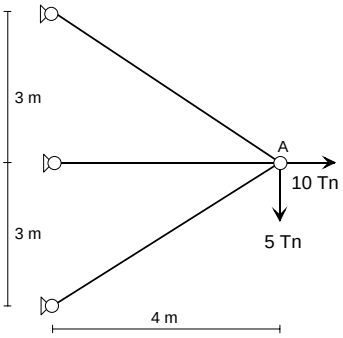


Figura P3.7

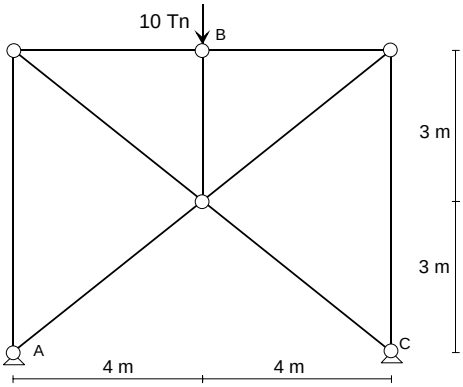


Figura P3.8

3.13.8 Calcular la deformación vertical del punto B en la estructura de la figura P3.8. Todas las barras tienen el mismo factor $E\,A$ = 21000 Tn.

Solución: Δ_{BY} = 0.0036 m (hacia abajo).

3.13.9 La celosía de la figura P3.9 se halla cargada por la fuerza de 1000 kg en el nudo B. Además la barra EC sufre un incremento de temperatura de valor +20ºC. Todas las barras son iguales, con un valor de EA=2 10^8 kg y de α=10^{-5} ºC^{-1}. Calcular los esfuerzos en todas las barras y el desplazamiento horizontal del nudo C.

Solución: N_{AB}= 8284 kg N_{AE} = -11716 kg N_{BE} = -1000 kg Δ_{CX} = 0.0966 cm.

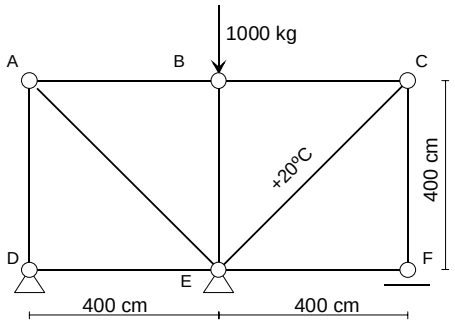


Figura P3.9

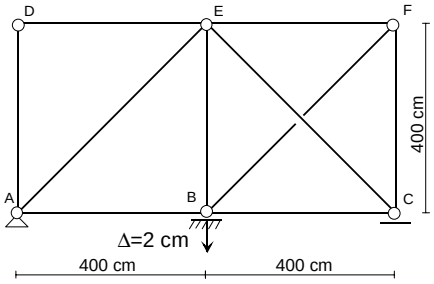


Figura P3.10

3.13.10 Calcular los esfuerzos que se producen en las barras de la estructura de la figura P3.10, cuando el nudo B sufre un descenso conocido de valor Δ=2 cm. Todas las barras tienen el mismo valor del producto EA=2 10^8 kg.

3.13.11 Calcular la deformación vertical del nudo C en la estructura de la figura P3.11, cuando sobre ella actúa la fuerza P=2000 kg y además las barras AE y FD sufren un incremento de temperatura T=20ºC. Todas las barras tienen el mismo valor de EA = 2 10^8 kg y de α=10^{-5} ºC^{-1}. Discutir la influencia de la fuerza P y del incremento de temperatura T en los distintos resultados.

Solución: N_{AB}= 0.4714 P (kg) N_{BC} =0.3964 P (kg) N_{CF} = -0.0631 P (kg) Δ_{CY} = -0.04 cm

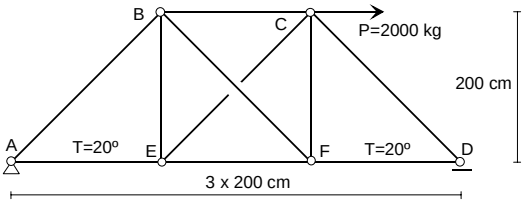


Figura P3.11

3.13.12 En la estructura de la figura P3.12 todas las barras son del mismo material, y tienen un área tal que se cumple que A/L=0.05 cm. Calcular los esfuerzos que se originan en las barras cuando el cordón superior FGH sufre un calentamiento de 20 ºC.
Datos del material: E=2 10^6 kg/cm^2 α=10^{-5} ºC^{-1}

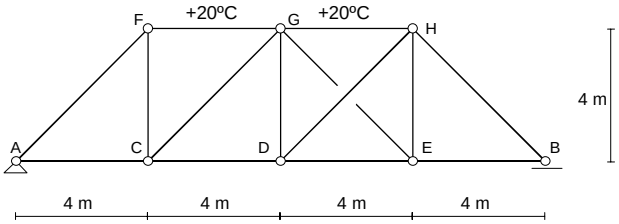


Figura P3.12

3.13.13 Calcular los esfuerzos que se originan en la estructura del problema 3.13.12, cuando en lugar del incremento de temperatura se aplica una carga vertical y hacia abajo de 8 Tn en el nudo C.

4. VIGAS

4.14.1 Calcular la deformada de una viga empotrada en un extremo y apoyada en el otro, sometida a una distribución de temperaturas uniforme en toda su longitud, con temperatura gradiente T_g (figura P4.1).

Solución: $M_A = 3EI\alpha T_g / 2$, $v = \alpha T_g x^2/4 - \alpha T_g x^3/(4L)$, $\theta_B = -\alpha L T_g/4$.

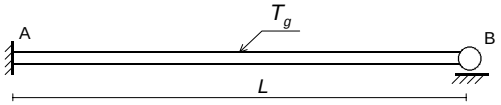


Figura P4.1

4.14.2 Empleando el método de la viga conjugada, calcular los momentos en los empotramientos de una viga empotrada en sus dos extremos, sometida a una carga uniforme (figura P4.2).

4.14.3 Calcular las deformaciones en el extremo libre de una viga en voladizo, sometida a una carga uniforme sobre una distancia a, empleando el método de la viga conjugada (figura P4.3).

Solución: $\Delta_B = -\dfrac{qa^3(4L-a)}{24EI}$, $\theta_B = -\dfrac{qa^3}{6EI}$

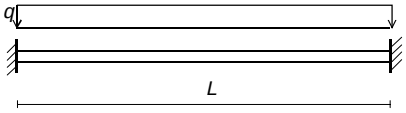


Figura P4.2

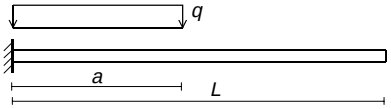


Figura P4.3

4.14.4 Empleando el método de la viga conjugada, calcular la deformación vertical en el extremo libre de una viga en voladizo de longitud L, apoyada sobre un muelle de constante K en dicho extremo libre, y sometida a una carga uniforme q (figura P4.4).

Solución: $\Delta_B = -\dfrac{qL/8}{K/3 + EI/L^3}$

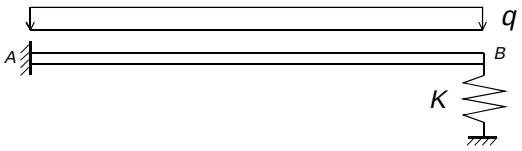


Figura P4.4

4.14.5 Calcular la distribución de momentos flectores en la viga de la figura P4.5, empleando la fórmula de los tres momentos. Datos: $E = 2\ 10^5$ MPa, $I_1 = 8000$ cm^4, $I_2 = 5000$ cm^4.

Solución: $M_A = -2.0$ kN m , $M_B = -2.82$ kN m, $M_C = -2.59$ kN m.

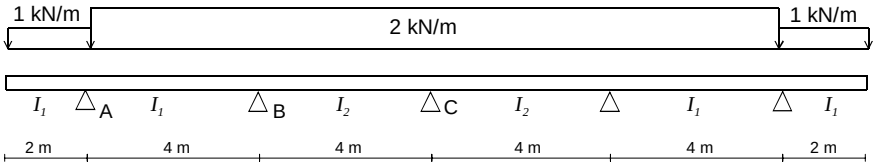


Figura P4.5

4.14.6 Calcular el diagrama de momentos flectores en la viga del ejercicio 4.12.7, empleando el método general de flexibilidad, y eligiendo como incógnitas redundantes los momentos en los apoyos B y C. Demostrar que las ecuaciones obtenidas coinciden con las que resultan de aplicar la fórmula de los tres momentos (véase el ejercicio 4.12.8).

5. PÓRTICOS

5.15.1 La estructura de la figura P5.1 está sometida a la fuerza horizontal de 5000 kg. Todas las barras tienen las mismas propiedades: $E = 2\ 10^6$ kg/cm^2, $A = 200$ cm^2, $I = 50000$ cm^4. Se desea calcular el momento flector en A y la deformación horizontal de D.

Solución: $M_A =$ 14315 cm kg, $\Delta_{DX} =$ 0.0602 cm

5.15.2 Calcular los esfuerzos en todas las barras de la estructura de la figura P5.2, bajo la acción de la carga de 1 Tn. Datos para todas las barras: E=2 10^6 kg/cm^2 A=10 cm^2 I=2000 cm^4

Solución: $N_{BF} = 2468$ kg, $N_{AD}=N_{DC} = -1745$ kg, $M_E = 1872$ m kg

5.15.3 Calcular la deformación vertical del punto G en la estructura del problema 5.15.2.

Solución: $\Delta_{GY} = 9.76$ cm.

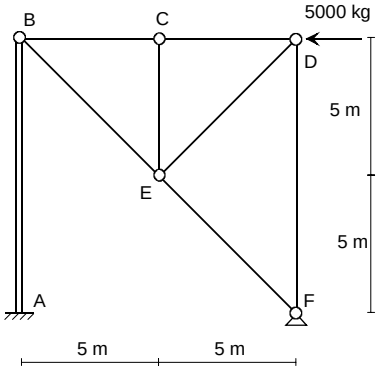


Figura P5.1

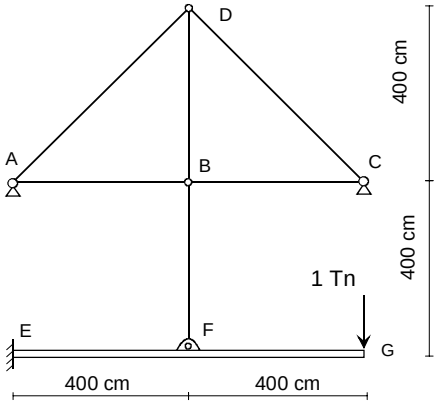


Figura P5.2

5.15.4 En la estructura de la figura P5.3 la barra DB tiene área 10 cm^2. La barra ABC tiene área infinita comparada con la anterior y momento de inercia 2000 cm^4. Calcular los esfuerzos en la estructura, bajo la acción de la carga de 1 Tn situada en el extremo del voladizo, así como la flecha vertical en el punto de aplicación de dicha carga. El material tiene un módulo de elasticidad E=2 10^6 kg/cm^2.

Solución: $N_{DB} =$ 3498.4 kg, $N_{AB} =$ -2473.8 kg, $M_A =$ 189505 cm kg,
$M_B =$ -400000 cm kg, $\Delta_{CY} = 9.683$ cm

5.15.5 Repetir el problema 5.15.4 suponiendo que la barra ABC tiene un área de 40 cm^2.

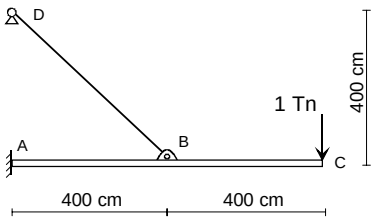


Figura P5.3

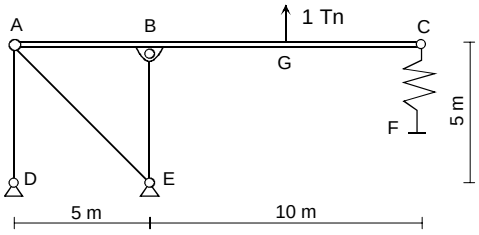


Figura P5.4

5.15.6 En la estructura de la figura P5.4 se desea hallar el esfuerzo en el muelle CF y el máximo momento flector en la barra ABC. Las propiedades de las barras son: E=2.1 10^6 kg/cm^2 A=10 cm^2 I=2140 cm^4. La rigidez del muelle es K=100 Tn/cm.

Solución: S_{CF} = +375 kg. Momento máximo = 1878.3 m kg en G

5.15.7 Calcular el diagrama de momentos flectores en la estructura de la figura P5.5. Los dos muelles tiene la misma rigidez al giro: 1000 mTn/rad. Además el muelle situado en C tiene un esfuerzo de pretensión inicial de valor 10 m Tn, como se indica en la figura. Todas las barras tienen las mismas propiedades: E=2 10^6 kg/cm^2 A=100 cm^2 I=10^4 cm^4

Solución: M_{AB} = 1.85 M_{BA} = 1.682 M_{BC} = -2.266 M_C = -3.138 M_D = -4.01 mTn

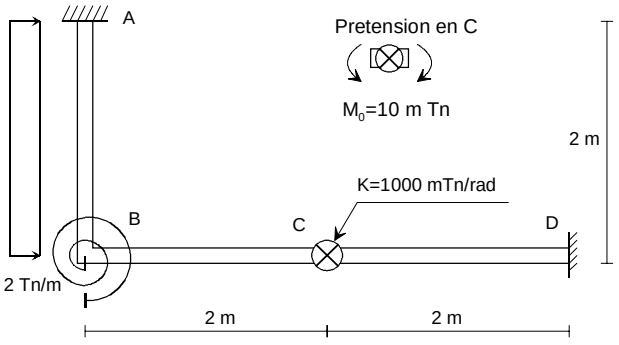


Figura P5.5

5.15.8 Calcular los esfuerzos en los elementos de la estructura de la figura P5.6, así como la deformación vertical en E y el giro del nudo B. Todas las barras tienen las mismas propiedades: E=2 10^6 kg/cm^2 A=100 cm^2 I=10000 cm^4.

Solución: N_{AB} = -95 kg, N_{BD} = 469 kg, N_{BC} = -327 kg, N_{CE} = 545 kg, N_{DE} = -436 kg.
M_{BD} = 0.11863 mTn, M_D = -0.3458 mTn, M_{BC} = -0.1084 mTn

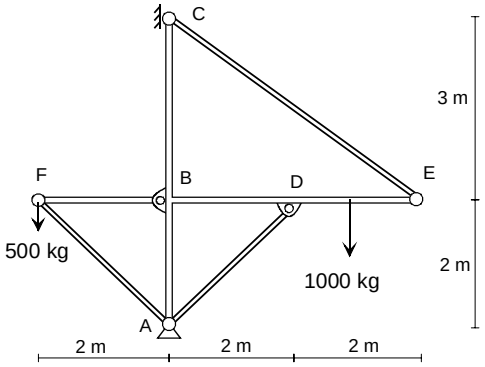


Figura P5.6

5.15.9 Calcular los diagramas de momentos flectores, esfuerzos cortantes y esfuerzos axiales para la estructura de la figura P5.7. Además de las fuerzas indicadas en la figura, la barra DE sufre un calentamiento uniforme de +50 ºC. Todas las barras son de sección rectangular, con canto 20 cm. y ancho 10 cm.
El material tiene $E = 2.1\ 10^6$ kg/cm^2, $\alpha = 6\ \ 10^{-6}$ ºC^{-1}

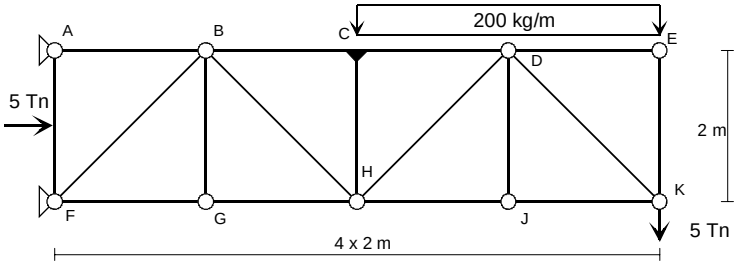
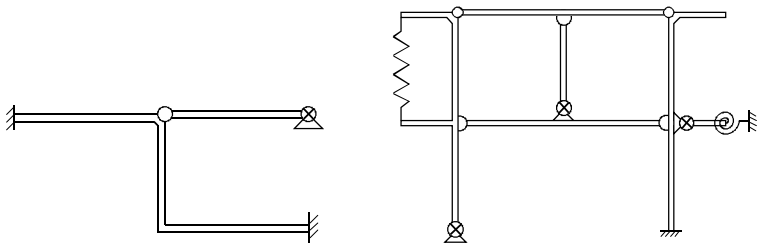


Figura P5.7

5.15.10 Determinar el grado de hiperestaticidad *h*, y seleccionar un conjunto de incógnitas hiperestáticas para los pórticos mostrados en la figura P5.8. Dibujar la estructura isostática que se obtiene al eliminarlas.



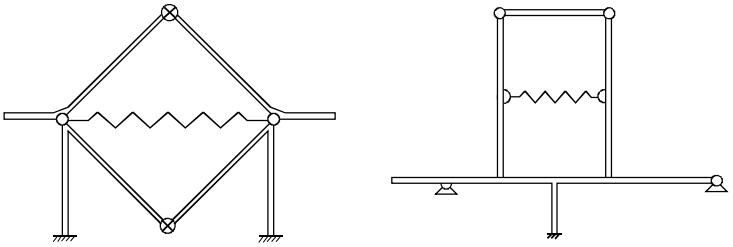


Figura P5.8

5.15.11 En la estructura de la figura P5.9 se desea calcular el diagrama de momentos de la barra AC. La estructura está sometida a las cargas representadas en la figura y al descenso de 1 cm del apoyo B. Además la barra CD tiene una longitud natural de 302 cm.
Datos para todas las barras: A= 10 cm^2 I= 2000 cm^4 E= 2 10^6 kg/cm^2

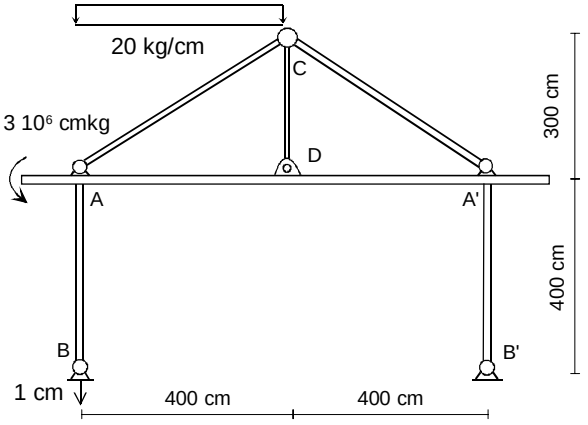


Figura P5.9

5.15.12 Determinar los esfuerzos en la estructura de la figura P5.10. Todas las barras son del mismo material, con E=2 10^6 kg/cm^2, y tienen el mismo momento de inercia I=10000 cm^4. El área de todas ellas es infinita, salvo la barra CE, que tiene A=10 cm^2.
El muelle BE tiene una rigidez de 100 Tn/cm, y además su longitud natural es 4 cm más larga que su longitud teórica de montaje. La unión entre las barras en el nudo C es flexible, y tiene una rigidez al giro de valor 1000 mTn/rad.

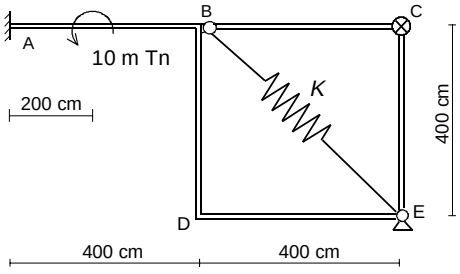


Figura P5.10

5.15.13 Calcular el diagrama de momentos flectores de la estructura de la figura P5.11, empleando una descomposición en casos simétrico y antisimétrico (ver capítulo 9). Todas las barras tienen: E=2 10^6 kg/cm^2 α=10^{-6} $^oC^{-1}$ I=10000 cm^4 A=10 cm^2 Canto=20 cm.

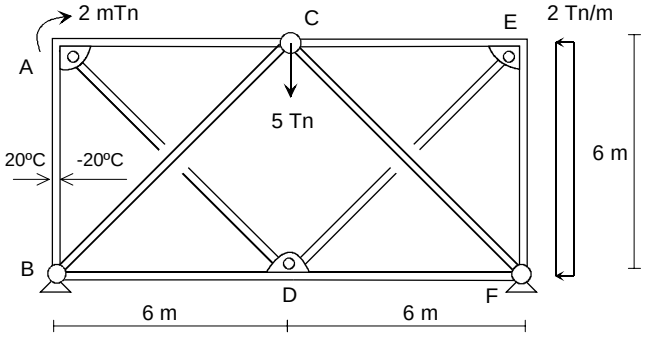


Figura P5.11

5.15.14 Calcular el diagrama de momentos flectores de la estructura de la figura P5.12. Por un error de fabricación, la barra AB mide 402 cm, y asimismo la barra DF es 1 cm más corta que su longitud de montaje. El muelle situado en C tiene una rigidez de 100 mTn/rad, y una pretensión inicial de 5 mTn, como se indica en la figura.
Las propiedades de todas las barras son: A= 50 cm^2 I= 10^4 cm^4 E=2 10^6 kg/cm^2

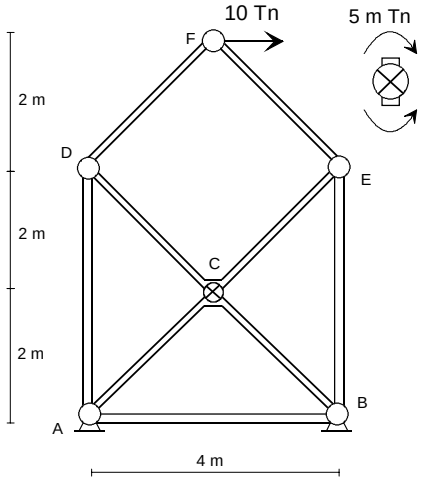


Figura P5.12

5.15.15 En la estructura de la figura P5.13 el peso de 10 Tn, cuelga de un cable inextensible que pasa por las poleas situadas en J y E, para engancharse en el extremo del voladizo de BG. Las poleas no tienen rozamiento y su radio es de 1 m. La barra ABCD está sometida a un calentamiento de +100 ºC en su cara derecha y de +20ºC en su cara izquierda. Calcular los esfuerzos en las barras y el descenso del punto J. Todas las barras tienen las mismas propiedades: A=100 cm^2 I=10000 cm^4 Canto=20 cm E= 2 10^6 kg/cm^2 α= 10^{-6} ºC^{-1}

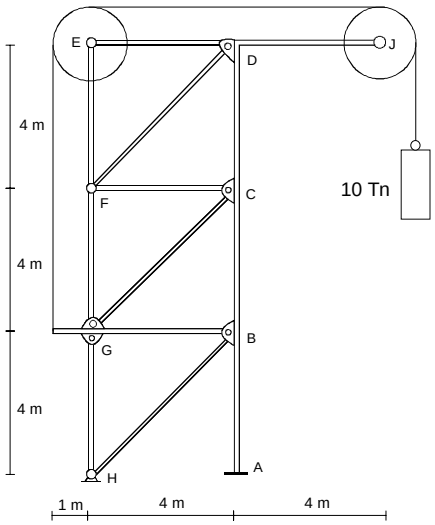


Figura P5.13

6. ARCOS

6.11.1 Calcular los esfuerzos internos en un arco biarticulado de directriz semicircular, cargado con una carga distribuida uniforme de valor q (figura P6.1). Suponer una flexibilidad a flexión μ variable según la ley del coseno $\mu=\mu_0 \cos\alpha$, siendo μ_0 la flexibilidad en la clave y α el ángulo de inclinación de la tangente a la curva directriz del arco. Despreciar la energía de esfuerzo axial.

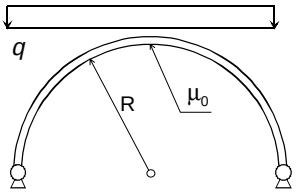


Figura P6.1

6.11.2 Calcular los esfuerzos que aparecen en el arco del ejercicio 6.9.4 bajo la acción de una carga distribuida uniforme horizontal de valor 50 kN/m actuando sobre su lado izquierdo, como se indica en la figura P6.2.

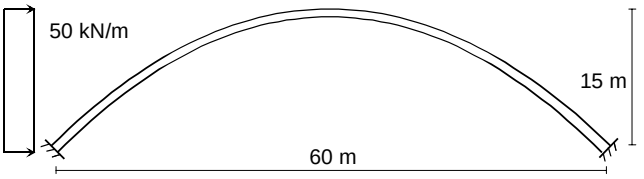


Figura P6.2

6.11.3 Determinar la posición del centro elástico y la orientación de los ejes principales ξ,η para el arco asimétrico de la figura P6.3. Considerar una sección uniforme, con rigidez a flexión EI=1.5 10^{10} N m^2. Efectuar los cálculos necesarios de forma numérica, dividiendo el arco en segmentos iguales.

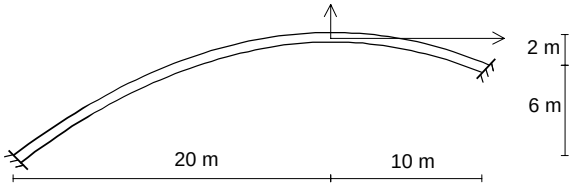


Figura P6.3

6.11.4 Determinar los momentos flectores que se producen en el arco del problema 6.11.3 cuando se aplica una carga distribuida vertical uniforme de valor q=200 kN/m. Efectuar los cálculos de forma numérica.

6.11.5 Calcular los esfuerzos que aparecen en el arco de la figura P6.4, cuya directriz es una parábola simétrica, cuando se aplica una carga uniforme q=1 Tn/m en la zona articulada central. Suponer que la rigidez a flexión varía según la ley de la secante $EI = (EI)_0 \sec(\alpha)$, siendo α la pendiente de la directriz del arco y $(EI)_0$ la rigidez a flexión en la clave.

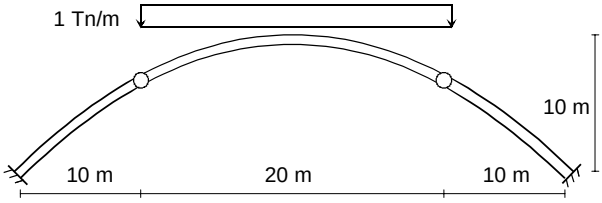


Figura P6.4

6.11.6 Calcular los esfuerzos que aparecen en el arco del ejercicio 6.9.4 bajo la acción de una distribución de temperatura tal que toda su cara superior se calienta 20ºC y toda la cara inferior se enfría 20ºC respecto de la temperatura ambiente. El coeficiente de dilatación lineal del material es $\alpha=10^{-5}\ ºC^{-1}$.

6.11.7 Sea un arco biarticulado simétrico (figura P6.5), con directriz parabólica definida por su base *L* y su flecha *f*. Se supone que el arco es rígido axialmente ($\gamma=0$) y con sección variable, de tal forma que su flexibilidad a flexión varía según la ley $\mu=\mu_0 \cos\alpha$, siendo μ_0 la flexibilidad en la clave. El tirante tiene flexibilidad ρ. Calcular el esfuerzo en el tirante, el diagrama de flectores y la deformación del apoyo A, cuando el arco se somete a una variación de temperatura uniforme *T* en todo él. El coeficiente de dilatación lineal del material es α.

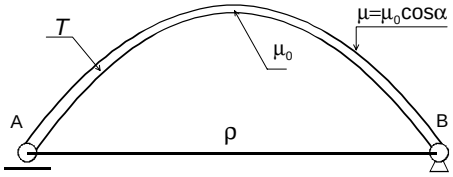


Figura P6.5

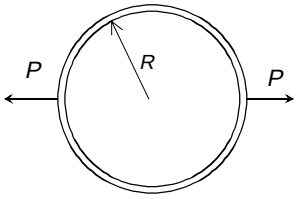


Figura P6.6

6.11.8 Calcular el diagrama de momentos flectores en el anillo de la figura P6.6, sometido a dos fuerzas opuestas iguales. El anillo es de propiedades uniformes *EI* y radio *R*. Despreciar la energía de esfuerzo axial.

6.11.9 Sea un arco biempotrado simétrico (figura P6.7), con directriz parabólica de 20 m de luz y 10 m de flecha. Se supone que el arco es rígido axialmente ($\gamma=0$) y con sección variable, de tal forma que su flexibilidad a flexión varía según la ley $\mu=\mu_0 \cos\alpha$, siendo $\mu_0 = 10^{-8}$ $1/(kg\ m^2)$ la flexibilidad en la clave. Calcular los esfuerzos que se producen en el arco a consecuencia de un descenso de 1 cm en uno de sus apoyos.

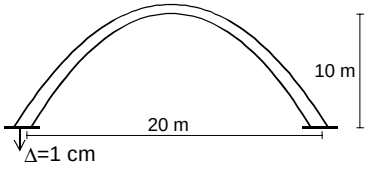


Figura P6.7

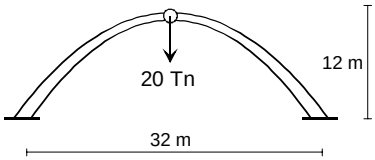


Figura P6.8

6.11.10 Sea un arco simétrico, empotrado en sus apoyos y articulado en su clave (figura P6.8), con directriz parabólica de 32 m de luz y 12 m de flecha. Se supone que el arco es rígido axialmente (γ=0) y con una sección variable, tal que su flexibilidad a flexión varía según la ley $\mu=10^{-8}\cos\alpha$ (1/kg-m^2), siendo α la pendiente de la directriz curva. Calcular los esfuerzos que se producen en él bajo la acción de una carga puntual de 20 Tn en la clave.

6.11.11 El arco de la figura P6.9 tiene directriz parabólica de luz *L* y flecha *f*. Se supone que el arco es rígido axialmente (γ=0) y su sección es tal que su flexibilidad a flexión varía según la ley $\mu=\mu_0\cos\alpha$, siendo μ_0 la flexibilidad en la clave. Calcular la deformación vertical en la dirección de la carga aplicada, la deformación horizontal del apoyo B y el giro en dicho apoyo.

6.11.12 Calcular la distribución de momentos flectores en la estructura de la figura P6.10. La zona curva tiene forma parabólica y su sección es tal que su momento de inercia varía según la ley $I=10^7\sec\alpha$, siendo α la pendiente de la curva directriz. Despreciar la energía del esfuerzo axial en la zona curva. Los pilares tienen momento de inercia 2 10^7 cm^4 y área 10^4 cm^2. El módulo de elasticidad del material es 4 10^5 kg/cm^2.

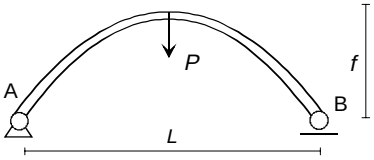


Figura P6.9

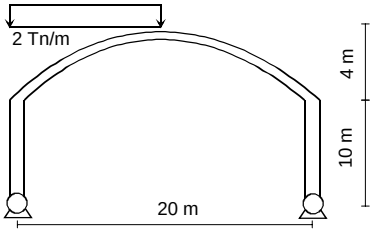


Figura P6.10

7. RIGIDEZ DE ELEMENTOS ESTRUCTURALES

7.19.1 Determinar la matriz de rigidez de un elemento estructural curvo en forma de cuarto de círculo, de radio R y sección transversal uniforme (figura P7.1). Despreciar la energía debida al esfuerzo axial.

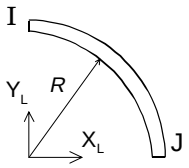


Figura P7.1

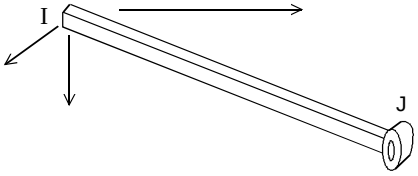


Figura P7.2

7.19.2 Determinar la matriz de rigidez de un elemento de emparrillado plano articulado en uno de sus nudos (figura P7.2).

7.19.3 Obtener la expresión de la matriz de rigidez de un elemento viga plana cuyos dos extremos están descentrados una magnitud *e* en la dirección Y_L respecto de los nudos (A y B) de la estructura (figura P7.3).

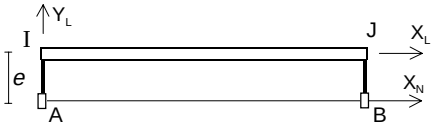


Figura P7.3

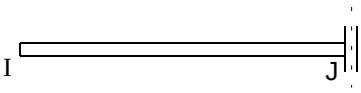


Figura P7.4

7.19.4 Obtener la matriz de rigidez de un elemento viga plana, en uno de cuyos extremos hay una deslizadera en la dirección Y_L, de tal manera que el esfuerzo cortante es nulo en esa dirección (figura P7.4).

7.19.5 Obtener la expresión de la matriz de rigidez de los elementos espaciales modificados indicados en el apartado 7.11.

7.19.6 Obtener la matriz de rigidez de un elemento viga plana a flexión, con sección rectangular de ancho constante *b* y canto variable de forma lineal entre dos valores extremos h_1 y h_2 en sus dos nudos (figura P7.5).

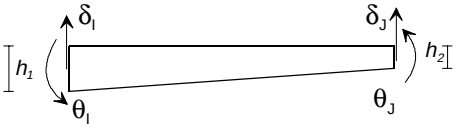


Figura P7.5

8. MÉTODO DE RIGIDEZ

8.23.1 Calcular el descenso del punto A en la estructura de la figura P8.1, bajo la acción de la carga de 10 Tn, teniendo en cuenta además que el elemento AD sufre un incremento de temperatura uniforme de 50 ºC.
Datos para todas las barras: $E = 2\ 10^6$ kg/cm^2 $A = 100$ cm^2 $I = 10000$ cm^4 $\alpha = 10^{-5}$ ºC^{-1}

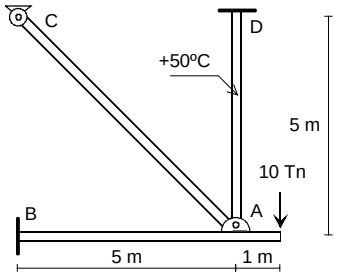


Figura P8.1

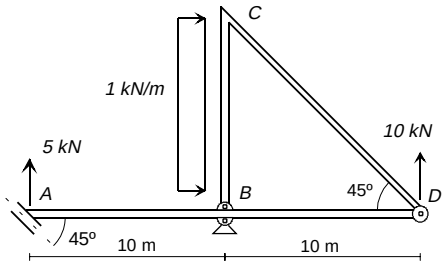


Figura P8.2

8.23.2 Resolver el problema 3.13.10 empleando el método de rigidez.

8.23.3 Calcular las deformaciones de los nudos C y D, así como las reacciones en A en la estructura de la figura P8.2. Además de las cargas indicadas, la barra AB sufre un calentamiento uniforme de 100 ºC.
Datos para todas las barras: $E = 2.1\ 10^6$ kg/cm^2 $\alpha = 10^{-6}$ ºC^{-1} $A = 200$ cm^2 $I = 4000$ cm^4

8.23.4 Resolver el ejercicio 5.13.2 empleando el método de rigidez.

8.23.5 Resolver el ejercicio 5.13.5 empleando el método de rigidez.

8.23.6 Resolver el problema 5.15.1 empleando el método de rigidez.

8.23.7 Resolver el problema 5.15.2 empleando el método de rigidez.

8.23.8 Plantear el sistema de ecuaciones de equilibrio de la estructura de la figura P8.3. Suponiendo conocidos los desplazamientos de los nudos, calcular las reacciones en el apoyo B. Datos para todas las barras: $E = 2\ 10^6$ kg /cm^2 $A = 100$ cm^2 $I = 10000$ cm^4

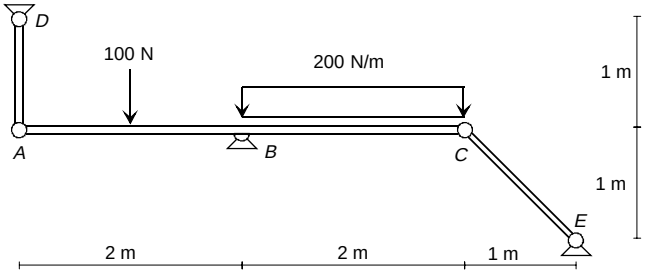


Figura P8.3

8.23.9 Determinar las deformaciones de los nudos de la estructura de la figura P8.4. La barra AC es 5 mm más corta que su longitud teórica, y la BC tiene la variación de temperatura indicada. Datos: E=2 10^6 kg/cm^2 A=100 cm^2 I=10^4 cm^4 K=1 Tn/cm α=10^{-6} C^{-1}

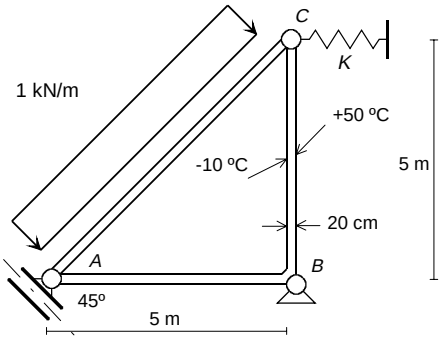


Figura P8.4

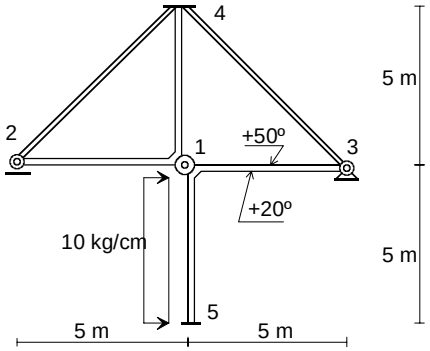


Figura P8.5

8.23.10 Calcular las deformaciones de los nudos en la estructura de la figura P8.5, sometida a las acciones representadas. Todas las barras tienen las mismas propiedades: área: 100 cm^2, momento de inercia: 4000 cm^4, módulo de elasticidad: 2 10^6 kg/cm^2, coeficiente de dilatación lineal: 10^{-6} ºC^{-1}.
Solución: $\Delta_{1x} = -97 \cdot 10^{-4}$, $\Delta_{1y} = -2 \cdot 10^{-4}$, $\theta_{1i} = -0.17 \cdot 10^{-4}$, $\theta_{1d} = 22 \cdot 10^{-4}$

8.23.11 Resolver el problema 5.15.7 empleando el método de rigidez.

8.23.12 Resolver el problema 5.15.8 empleando el método de rigidez.

8.23.13 Resolver el problema 5.15.11 empleando el método de rigidez.

8.23.14 En la estructura de la figura P8.6, determinar el valor de la pretensión de montaje que debe aplicarse al tensor BD para que el momento en el punto C disminuya un 10% con respecto a la situación sin pretensión en el tensor. La rigidez del tensor es 100 kN/cm. Todos los perfiles de la estructura tienen A=100 cm^2, I=20000 cm^4. El material es acero con E = 200 GPa. Hacer uso de la simetría del problema.

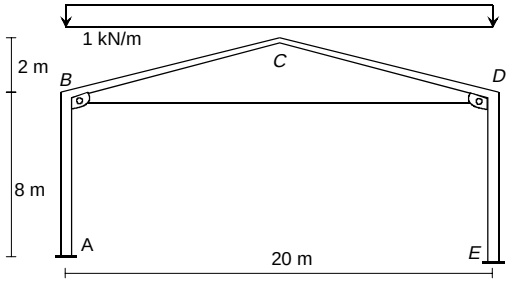


Figura P8.6

8.23.15 Calcular los esfuerzos internos en las barras de la estructura de la figura P8.7. Las barras AB y BC son de sección cuadrada hueca con lado 160 mm y espesor 8 mm Las barras CD y CE son de sección circular hueca con diámetro exterior 125 mm y espesor 6 mm. La cara delantera de la barra BC sufre un calentamiento de 20 ºC. El material es acero, con E= 200 GPa, G = 80 GPa y coeficiente de dilatación 10^{-6} ºC^{-1}.

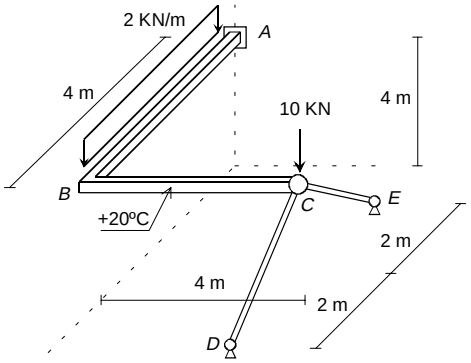


Figura P8.7

8.23.16 Calcular las deformaciones de los nudos de la estructura de la figura P8.8. Todas las barras son de sección cuadrada hueca con lado 200 mm y espesor 8 mm. El material es acero con E = 200 GPa y G = 80 GPa.

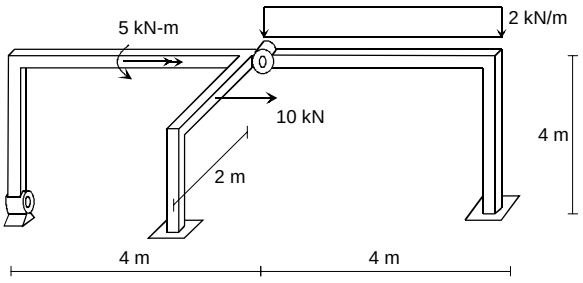


Figura P8.8

8.23.17 Resolver el problema 5.15.12 empleando el método de rigidez.

8.23.18 Resolver el problema 5.15.13 empleando el método de rigidez.

8.23.19 Resolver el problema 5.15.14 empleando el método de rigidez.

9. SIMETRÍA Y ANTIMETRÍA

9.11.1 En la estructura de la figura P9.1 se desea calcular las deformaciones de los nudos y el esfuerzo final en el muelle situado en A, empleando las simplificaciones de simetría y antimetría. Todas las barras tienen las mismas características. El muelle de A tiene una pretensión inicial de 100 m Tn, que actúa en sentido antihorario sobre la barra. Los restantes muelles están descargados en el estado inicial.

Datos: $E = 2\ 10^6$ kg/cm^2 $I = 5000$ cm^4 $A = 30$ cm^2 $\alpha = 10^{-6}$ ºC^{-1} Canto = 10 cm.

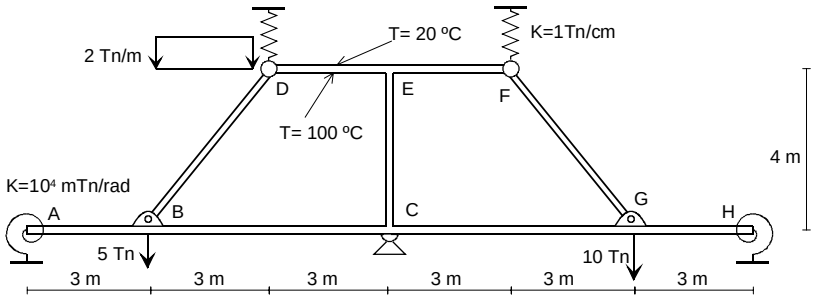


Figura P9.1

9.11.2 En la estructura de la figura P9.2, calcular la flecha en el extremo del voladizo de la derecha y la fuerza a efectuar en el punto 2 para moverlo 1 cm a 45º, como se indica.
Las uniones en los puntos 1, 3 y 1' son flexibles, y tienen una rigidez al giro relativo de valor de 10^4 mTn/rad. La articulación 3 tiene un defecto de fabricación, por lo que ha sido necesario girar sus extremos 5 mrad para montarla. El muelle 3-4 tiene una longitud natural de 3.98 m y su rigidez es de $K = 10^3$ Tn/m. La cara superior de la barra 2-4 sufre un calentamiento de +100ºC.
Datos para todas las barras: A=100 cm^2, I=10000 cm^4, $E = 2\ 10^6$ kg/cm^2, canto = 20 cm, $\alpha = 10^{-6}$ ºC^{-1}.

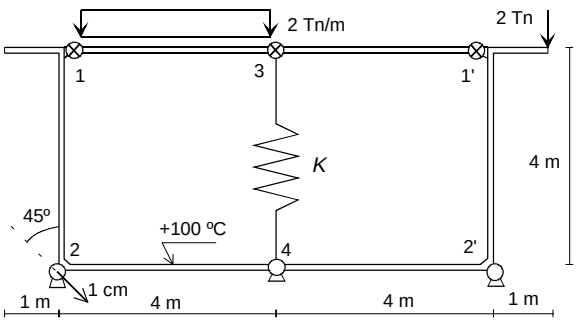


Figura P9.2

9.11.3 Calcular el diagrama de momentos flectores y el esfuerzo axial en el tensor BC de la estructura de la figura P9.3. Las propiedades de las barras AB y CD son: $EA = 2\ 10^8$ kg, $EI = 2\ 10^{10}$ kg cm^2. La barra curva se considera infinitamente rígida a esfuerzo axial y tiene $EI = 4\ 10^{10}$ kg cm^2. El tirante BC tiene una rigidez de 10^3 kg/cm.

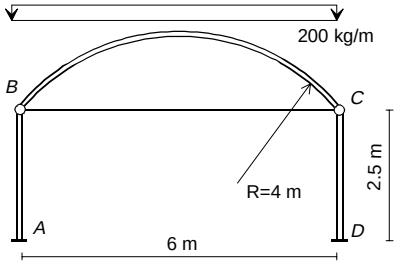


Figura P9.3

9.11.4 Calcular los esfuerzos internos en la estructura de la figura P9.4. Todas las barras tienen las siguientes propiedades: E=2 10^6 kg/cm^2, A=10 cm^2, I=10^4 cm^4. La rigidez del resorte GF es de 1000 Tn/m. Las poleas en E y J son de radio nulo, sin rozamiento y los hilos son inextensibles.

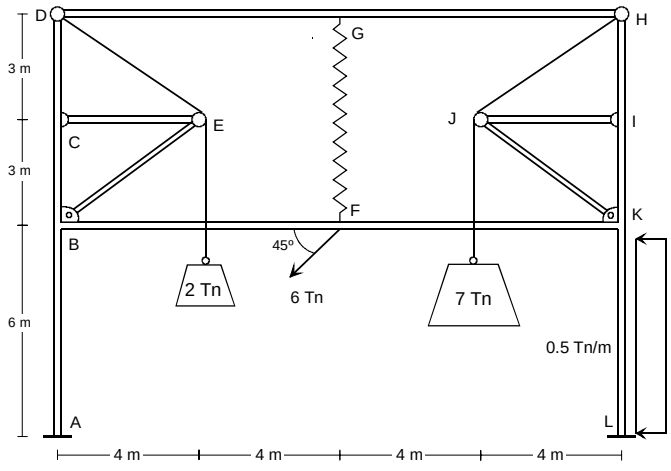


Figura P9.4

9.11.5 Descomponer en simétrico y antimétrico los pórticos espaciales mostrados en los ejemplos del apartado 5.2, cuando sea posible.

9.11.6 Resolver el problema 5.15.11 empleando la descomposición en casos simétrico y antisimétrico.

9.11.7 Resolver el problema 5.15.14 empleando la descomposición en casos simétrico y antisimétrico.

9.11.8 Resolver el problema 6.10.9 empleando la descomposición en casos simétrico y antisimétrico.

10. LÍNEAS DE INFLUENCIA

10.11.1 En la estructura de la figura P10.1, se desea calcular la línea de influencia del momento flector en el apoyo B, cuando una carga unitaria vertical y hacia abajo recorre toda la viga AD. La viga es de características uniformes *E*,*I*. Emplear el teorema de Müller-Breslau y el método de la viga conjugada.

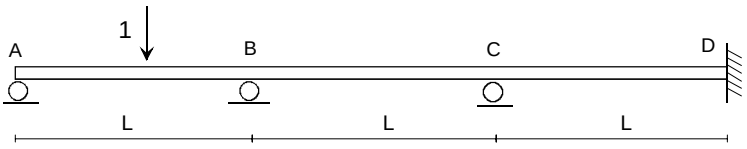


Figura P10.1

10.11.2 La viga de la figura P10.2 es de propiedades uniformes y sobre ella se mueve una carga unitaria vertical y hacia abajo. Calcular las líneas de influencia del momento flector en el apoyo B, y en el punto medio de BC. Emplear el teorema de Müller-Breslau, y el método de la viga conjugada.

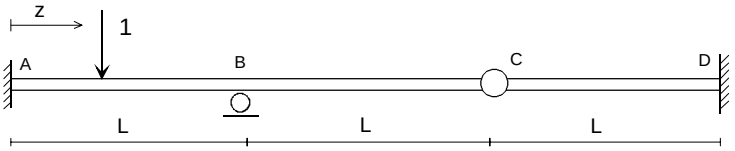


Figura P10.2

10.11.3 Hallar la línea de influencia del momento flector en el apoyo A, cuando una carga unitaria móvil recorre el tramo BC en la estructura de la figura P10.3
Propiedades de todas las barras: E=2.1 10^6 kg/cm^2, I=10^4 cm^4, A=20 cm^2.

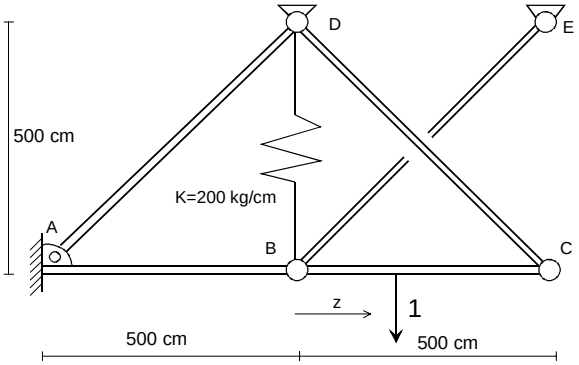


Figura P10.3

10.11.4 En la estructura de la figura P10.4 se desea calcular la línea de influencia del momento en el muelle B, cuando la fuerza de 2 Tn recorre la trayectoria BC. La deslizadera I encaja perfectamente en la viga, sin ninguna holgura ni rozamiento.
Datos: I = 2000 cm^4, K = 10000 m kg/rad, E = 2.1 10^6 kg/cm^2.

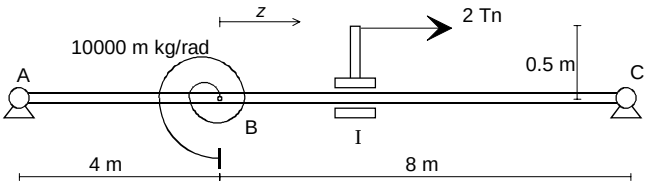


Figura P10.4

10.11.5 Sobre la estructura de la figura P10.5 se mueve una carga de 50 Tn. Se desea calcular el valor máximo del esfuerzo axial soportado por el elemento BE, y cuál es el punto en el que se halla la carga móvil cuando se produce dicho esfuerzo máximo. Además, se considera que la barra ABCD tiene un peso propio de 200 kg/m.
Datos para todas las barras: E=2 10^6 kg/cm^2, I=10^4 cm^4, A=10 cm^2.

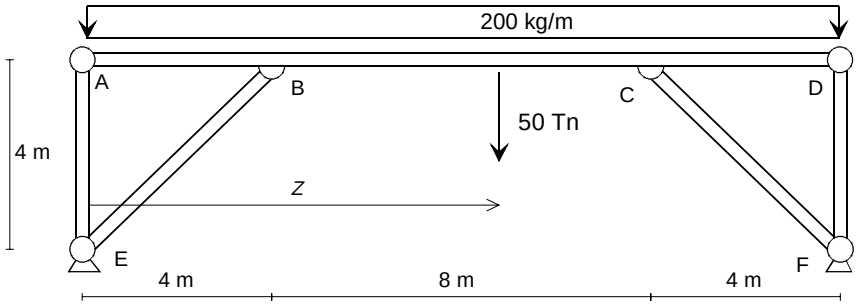


Figura P10.5

10.11.6 Sobre la estructura de la figura P10.6 se mueven dos ruedas separadas 1 m, que transmiten conjuntamente una fuerza unitaria. Calcular la línea de influencia del esfuerzo axial de la barra BD cuando la carga móvil recorre la trayectoria AC. Dividir el problema por simetría y antimetría y calcular las deformaciones necesarias empleando el método de rigidez. Características de las barras: E=2.1 10^6 kg/cm^2, I=10000 cm^4, A=10 cm^2.

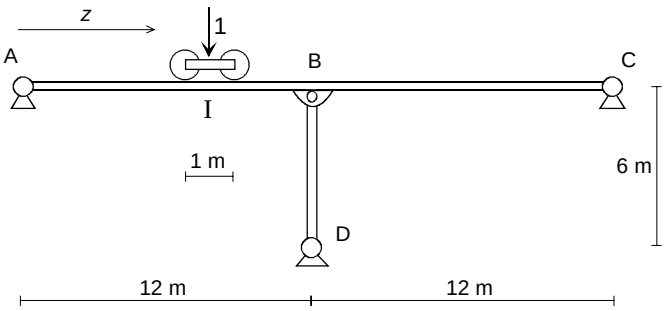


Figura P10.6

10.11.7 Calcular la línea de influencia del momento en el muelle C en la estructura de la figura P10.7, cuando dos fuerzas unitarias simétricas recorren los vanos AB y ED. El muelle C tiene un esfuerzo de pretensión de 10 m Tn como se indica en la figura y su rigidez es de 10^8 cm kg/rad.

Todas las barras tienen flexibilidad axial nula. La zona curva tiene forma parabólica y su rigidez a flexión viene dada por la ecuación $EI = 2\ 10^{10}\ \sec(\alpha)$ (kg cm^2), siendo α el ángulo que forma la recta tangente a la curva con la horizontal. Las barras AB y DE tienen $E\,I = 4\ 10^{10}$ kg cm^2.

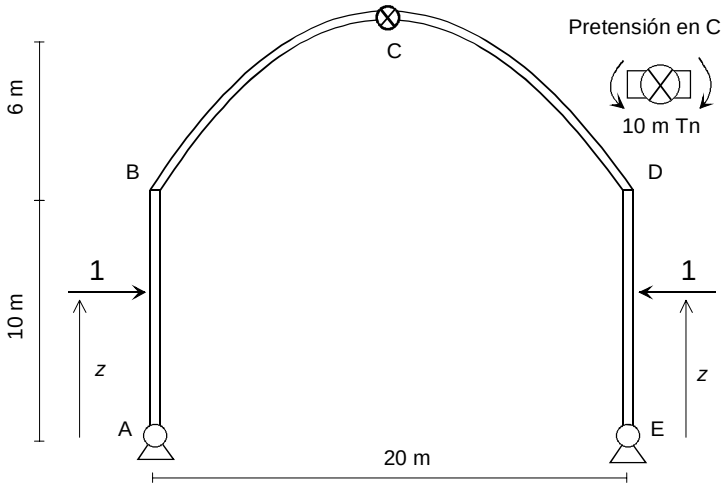


Figura P10.7

10.11.8 En la estructura de la figura P10.8 actúa una carga móvil de 1 Tn, que recorre las vigas ABCD, manteniéndose siempre vertical y hacia arriba. Además actúa la carga distribuida de 2 Tn/m sobre AE. Calcular las líneas de influencia del momento flector M_E en el apoyo E y del momento flector M_{BA}, en el extremo B de la barra AB, empleando el método de Müller-Breslau.

Todas las barras tienen: E=2 10^6 kg/cm^2, I=10000 cm^4. Su área es infinita, salvo la BC que tiene 10 cm^2. El muelle situado en el nudo C tiene una rigidez de 500 mTn/rad.

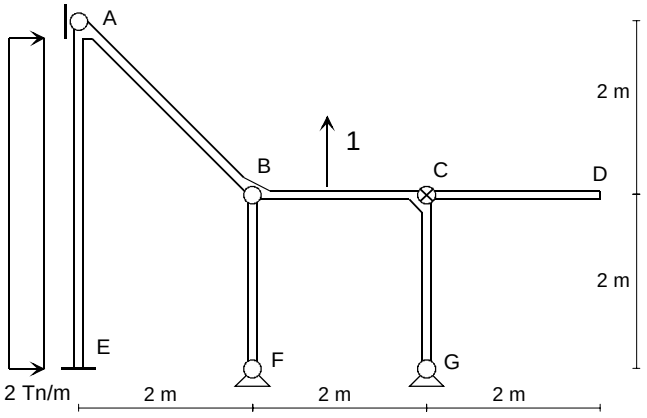


Figura P10.8

10.11.9 Calcular las líneas de influencia de los esfuerzos en las barras FG y GH en la celosía de la figura P10.9, cuando una carga unidad recorre el cordón superior AE. Todas las barras tienen E= 2 10^6 kg/cm^2, A=20 cm^2.

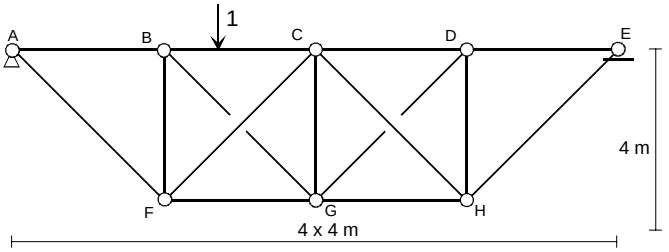


Figura P10.9

10.11.10 La estructura de la figura P10.10 representa un elemento ABC usado como guía en un sistema de transporte, que se modeliza mediante una viga continua de 2 vanos, empotrada en A y C. Simultáneamente hay dos piezas sobre la guía, una de ida, de 2 Tn, y otra de vuelta, de 1 Tn, cuyo movimiento sobre la guía se consigue mediante un sistema de poleas, y está sincronizado, quedando definido por un sólo parámetro z. El apoyo B se encuentra 2 cm por debajo de su posición correcta, debido a un error de fabricación. Calcular el valor máximo del momento flector en el punto B.
Datos: I= 2000 cm^4, A= 10 cm^2, E= 2 10^6 kg/cm^2.

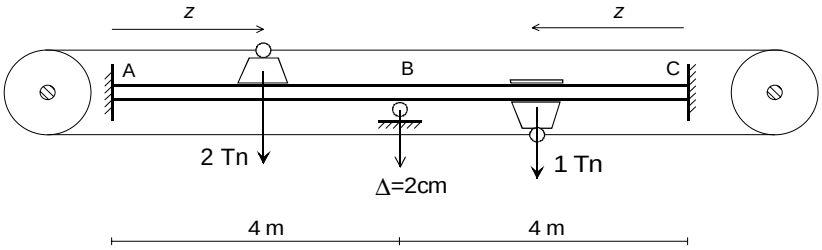


Figura P10.10

11. VIGAS EN FUNDACIÓN ELÁSTICA

11.13.1 Determinar las fuerzas y momentos de empotramiento perfecto de una viga empotrada en ambos extremos, apoyada en una fundación elástica de coeficiente de balasto *K*, y sometida a una carga distribuida triangular de valor nulo en el nudo de la izquierda y valor *q* en el nudo de la derecha (figura P11.1).

11.13.2 Calcular las deformaciones en los extremos de una viga libre en ambos extremos, apoyada en una fundación elástica de coeficiente de balasto *K*, y sometida a una carga distribuida triangular de valor nulo en el extremo de la izquierda y valor *q* en el de la derecha (Figura P11.2). Utilizar el método de rigidez y los resultados del problema anterior.

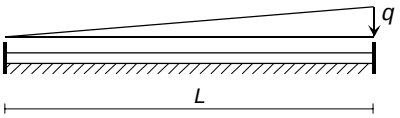


Figura P11.1

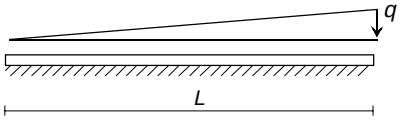


Figura P11.2

11.13.3 Utilizar el método de rigidez para calcular las deformaciones y el momento flector en la viga de la figura P11.3, que está parcialmente apoyada en una fundación elástica de coeficiente de balasto K_t = 15 kg/cm^3. La viga tiene sección rectangular con canto de 60 cm y ancho de 30 cm. El material tiene E = 250000 kg/cm^2.

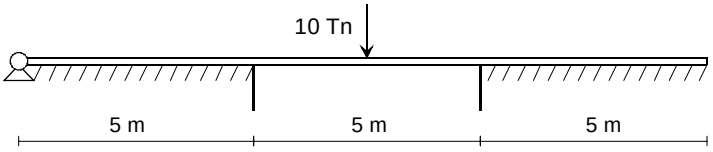


Figura P11.3

11.13.4 La figura P11.4 representa una viga semi infinita sometida a un momento exterior de valor 10 m Tn aplicado a una distancia de 3 m de su extremo. Calcular la deformación vertical y el giro en el extremo de la viga, así como el momento flector y el esfuerzo cortante en el punto de aplicación del momento. El coeficiente de balasto de la viga es 800 kg/cm^2 y el producto EI = 8 10^{11} kg cm^2.

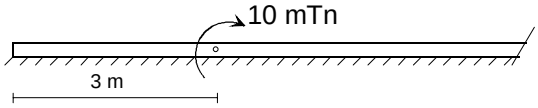


Figura P11.4

11.13.5 La figura P11.5 representa un emparrillado plano formado por una viga principal AB de 20 m de luz, que está apoyada en una familia de vigas secundarias de 5 m de luz, separadas 40 cm entre sí. Tanto la viga principal como las secundarias están simplemente apoyadas en sus extremos. La viga principal es un perfil IPE 300 y las secundarias son IPE 80. El material es acero con E = 2 10^6 kg/cm^2.

Considerar la viga principal como apoyada en una fundación elástica formada por las vigas secundarias. En este supuesto, calcular la deformación que se produce bajo la carga y el momento flector máximo que aparece tanto en la viga principal como en la viga secundaria que soporte mayor carga.

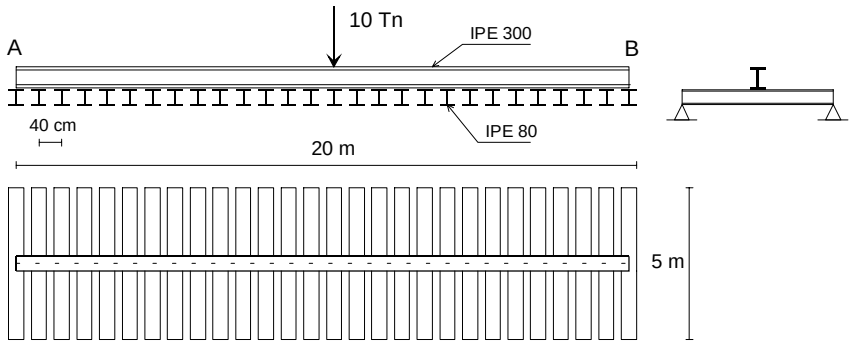


Figura P11.5

11.13.6 Un cajón hueco flexible, cerrado en sus extremos, de longitud L, se halla flotando en la superficie de un fluido de peso específico γ (figura P11.6). El cajón está construido de un material con módulo de elasticidad E, tiene sección cuadrada de lado b, y momento de inercia I y su peso es despreciable. Determinar cuánto se hunde el cajón en el fluido cuando en uno de sus extremos se aplica una fuerza vertical y hacia abajo de valor P.

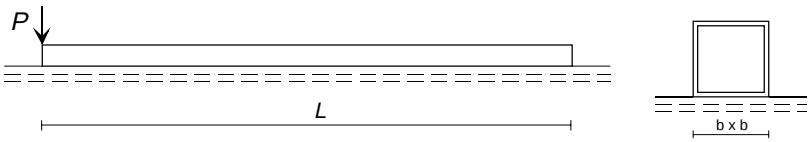


Figura P11.6

11.13.7 Resolver el problema 11.13.6 suponiendo que el cajón tiene un peso por unidad de longitud de valor q.

12. CONDENSACIÓN DE ECUACIONES Y SUBESTRUCTURAS

12.7.1 Determinar la matriz de rigidez de un arco empotrado articulado de directriz parabólica, con luz L y flecha f, a partir de la matriz de rigidez del arco empotrado en ambos extremos, obtenida en el ejercicio 7.17.5. Suponer una variación del momento de inercia según la ley de la secante y despreciar la energía de esfuerzo axial.

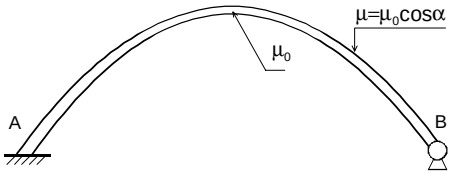


Figura P12.1

12.7.2 Obtener la matriz de rigidez de un elemento combinado formado por una viga de longitud L y rigidez EI, unida en ambos extremos a dos muelles al giro iguales, de rigidez K (figura P12.2).

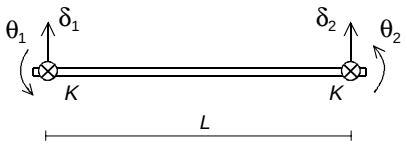


Figura P12.2

12.7.3 Determinar las fuerzas de empotramiento perfecto (fase 0) de un arco empotrado articulado de directriz parabólica, con luz L y flecha f (figura P12.1), a partir de las correspondientes al arco empotrado en ambos extremos. Suponer una variación del momento de inercia según la ley de la secante y despreciar la energía de esfuerzo axial.

12.7.4 Obtener la matriz de rigidez para el elemento compuesto mostrado en la figura P12.3, cuyos extremos están reforzados con una zona de inercia $2I$.

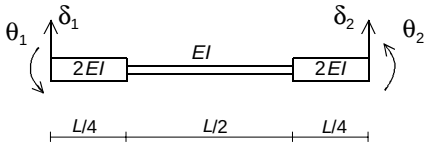


Figura P12.3

13. MÉTODO DE DISTRIBUCIÓN DE MOMENTOS

13.8.1 Calcular el diagrama de momentos flectores de la estructura de la figura P13.1.

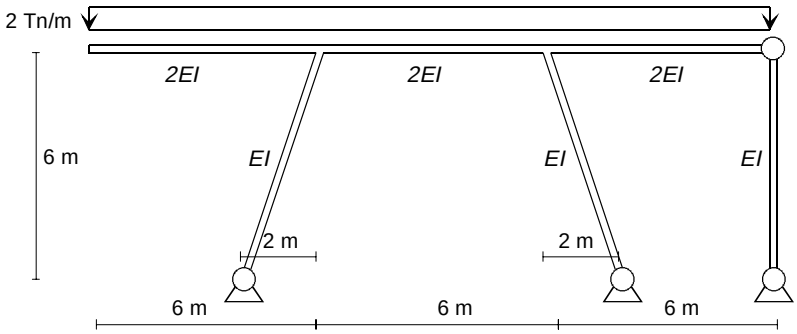


Figura P13.1

13.8.2 Calcular el diagrama de momentos flectores de la estructura de la figura P13.2.

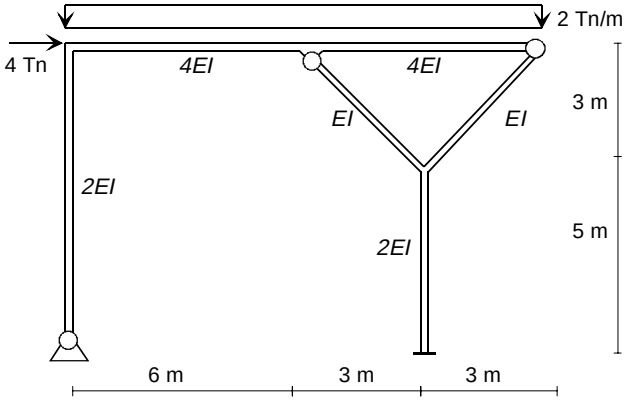


Figura P13.2

13.8.3 Resolver el ejercicio 8.21.2 empleando el método de Cross. Comparar los resultados con los obtenidos mediante el método de rigidez.

13.8.4 Extender el método de Cross para poder tratar variaciones de temperatura en las vigas, suponiendo una temperatura gradiente T_g uniforme. Resolver el ejercicio 8.21.3 empleando el desarrollo efectuado.

13.8.5 Calcular el giro del nudo 2 y el diagrama de flectores en la viga del ejercicio 8.21.4 empleando el método de Cross.

Problemas

13.8.6 Calcular el diagrama de momentos flectores en la viga del ejercicio 4.12.1 empleando el método de Cross.

13.8.7 Calcular el diagrama de momentos flectores en la viga del ejercicio 4.12.7 empleando el método de Cross.

13.8.8 Resolver el ejercicio 8.21.5 empleando el método de Cross.

13.8.9 Resolver el ejercicio 8.21.6 empleando el método de Cross.

13.8.10 Resolver el ejercicio 5.13.2 empleando el método de Cross.

13.8.11 Resolver el problema 8.23.6 empleando el método de Cross.

14. PANDEO Y ESTABILIDAD

14.21.1 Determinar la carga crítica de los sistemas mostrados en la figura P14.1, suponiendo que todas las barras son infinitamente rígidas al esfuerzo axial y a la flexión.

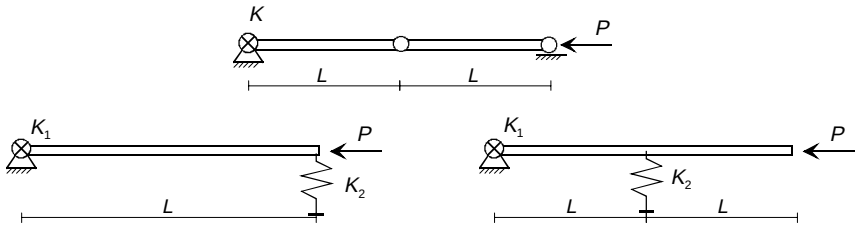


Figura P14.1

14.21.2 Repetir el problema anterior suponiendo que las barras tienen una rigidez a la flexión finita, de valor *EI*.

14.21.3 Calcular la carga crítica de las columnas de propiedades uniformes *EI*, mostradas en la figura P14.2.



Figura P14.2

14.21.4 Calcular la carga crítica de pandeo de la columna de la figura P14.3.

14.21.5 Calcular la carga crítica de pandeo de la columna de la figura P14.4.

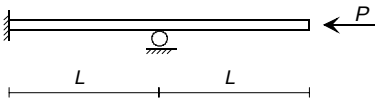


Figura P14.3

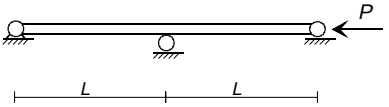


Figura P14.4

14.21.6 Calcular el momento en el empotramiento en la viga columna de la figura P14.5, sometida a una carga distribuida uniforme *q*.

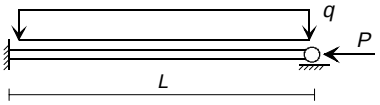


Figura P14.5

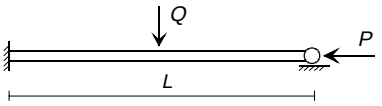


Figura P14.6

14.21.7 Calcular el momento en el empotramiento en la viga columna de la figura P14.6, que está sometida a una carga puntual *Q* situada en la mitad de su luz.

14.21.8 Calcular la carga crítica de pandeo de la columna de la figura P14.7.

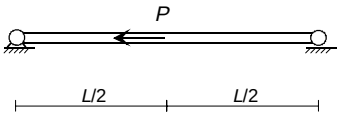


Figura P14.7

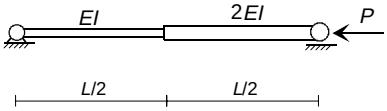


Figura P14.8

14.21.9 Calcular la carga crítica de pandeo de la columna de inercia variable representada en la figura P14.8.

14.21.10 Calcular la carga de pandeo de la columna articulada mostrada en la figura P14.9, que está sometida a un calentamiento uniforme de valor *T*.

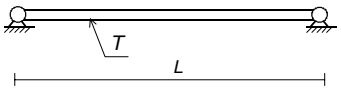


Figura P14.9

14.21.11 Calcular el valor de la temperatura *T* que hace pandear a la columna de la figura P14.10.

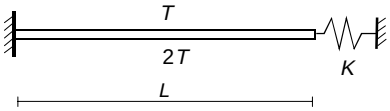


Figura P14.10

14.21.12 Calcular la carga crítica de pandeo global para la estructura de celosía mostrada en la figura P14.11, utilizando el método de rigidez y la expresión aproximada de la matriz de rigidez. Todas las barras tienen en mismo producto EA=2 10^8 N.

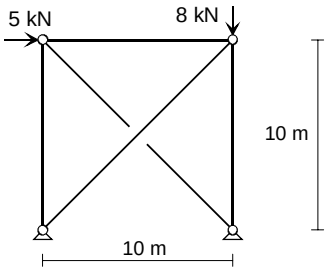


Figura P14.11

14.21.13 Determinar el módulo reducido de una sección en **I**, de canto *h* y anchura *b*. Despreciar el área del alma y suponer que en cada ala se concentra la mitad del área total del perfil.

Solución: $E_r = \dfrac{2EE_t}{E + E_t}$

14.21.14 Calcular la carga crítica de pandeo global del pórtico a dos aguas mostrado en la figura P14.12, utilizando el método de rigidez y la expresión aproximada de la matriz de rigidez. El valor del producto *EI* es 10^6 N m^2.

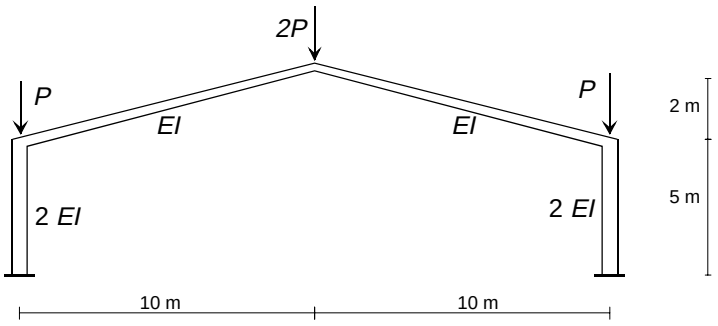


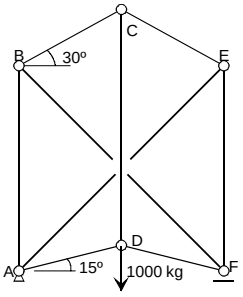
Figura P14.12

Enunciados de los ejercicios resueltos

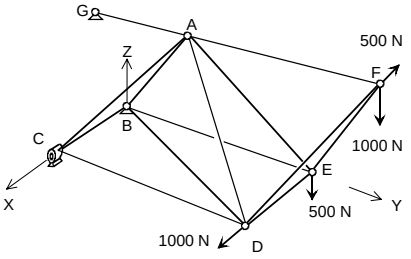
A continuación figuran los enunciados resumidos de los ejercicios resueltos. Seleccione con el ratón el ejercicio deseado para acceder a su resolución.

3. CELOSÍAS

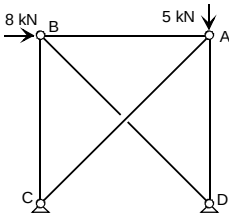
3.11.1 Calcular los esfuerzos en la celosía de la figura.



3.11.2 Calcular los esfuerzos en las barras y las reacciones en los apoyos de la celosía espacial mostrada en la figura.

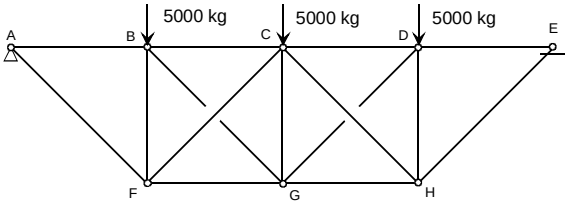


3.11.3 Calcular los esfuerzos en la estructura de la figura.



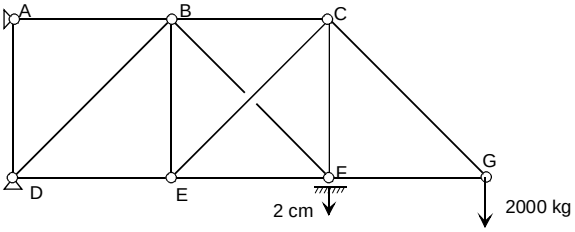
3.11.4 **Calcular la deformación horizontal del punto B en la estructura del ejercicio 3.11.3.**

3.11.5 **Calcular los esfuerzos en las barras de la celosía de la figura.**



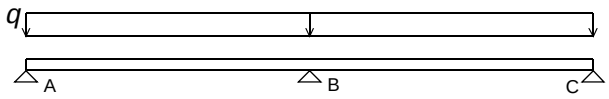
3.11.6 **Calcular los esfuerzos en las barras y la deformación vertical del nudo G en la celosía del ejercicio 3.11.5, cuando se produce un calentamiento de 40ºC en todo el cordón superior ABCDE, y no actúan las fuerzas exteriores.**

3.11.7 **Calcular la deformación vertical del nudo G en la estructura de la figura.**



4. VIGAS

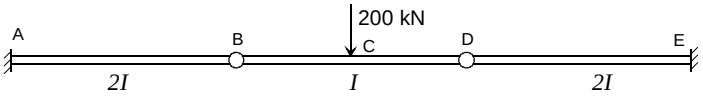
4.12.1 **Calcular el diagrama de momentos flectores en la viga de dos vanos de la figura, sometida a una carga uniforme *q*.**



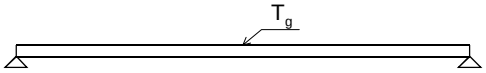
4.12.2 **Calcular el giro en el apoyo A en la viga del ejercicio 4.12.1.**

4.12.3 **Calcular el momento en el empotramiento y el giro en el apoyo de una viga empotrada - apoyada, sometida a una carga uniforme *q*. Emplear el método de la viga conjugada.**

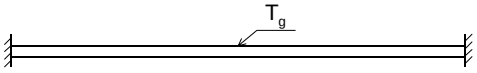
4.12.4 **Calcular las deformaciones en los puntos B y C de la viga de la figura, empleando el método de la viga conjugada.**



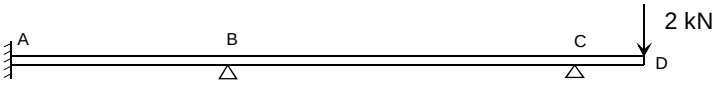
4.12.5 **Calcular la deformada de una viga simplemente apoyada, sometida a una distribución de temperaturas uniforme en toda su longitud, con temperatura gradiente T_g.**



4.12.6 **Calcular la deformada de una viga empotrada en sus dos extremos, sometida a una distribución de temperaturas uniforme en toda su longitud, con temperatura gradiente T_g.**



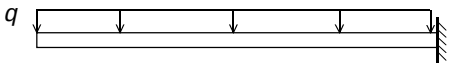
4.12.7 **Calcular el diagrama de momentos flectores de la viga de la figura, sometida a una carga puntual de 2 kN en el extremo del voladizo.**



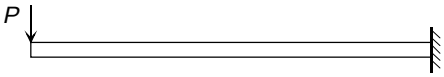
4.12.8 **Calcular la viga del ejercicio 4.12.7 empleando la fórmula de los 3 momentos.**

4.12.9 **Calcular la deformación vertical en el extremo D de la viga del ejemplo 4.12.7, empleando el método general de flexibilidad.**

4.12.10 **Calcular las deformaciones en el extremo de una viga en voladizo sometida a una carga distribuida, considerando la energía debida al esfuerzo cortante.**

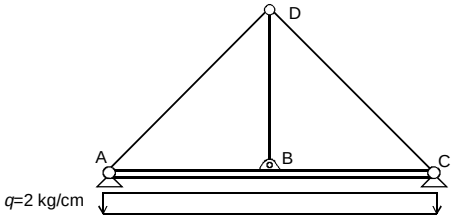


4.12.11 **Calcular las deformaciones en el extremo de una viga en voladizo sometida a una carga puntual, considerando la energía debida al esfuerzo cortante.**

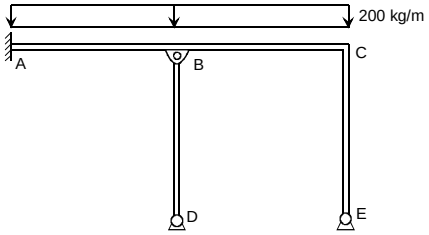


5. PÓRTICOS

5.13.1 Calcular los esfuerzos internos en la estructura de la figura.



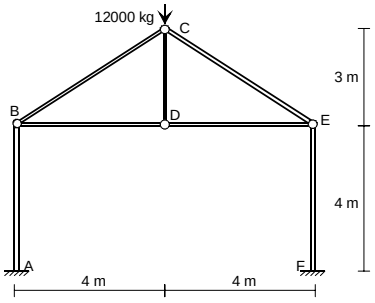
5.13.2 Calcular los esfuerzos internos en la estructura aporticada de la figura.



5.13.3 Calcular la deformación horizontal del punto medio de la barra CE, en la estructura del ejercicio 5.13.2.

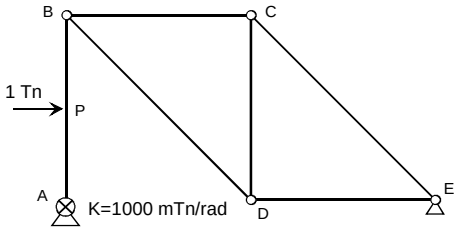
5.13.4 Calcular el giro del nudo C en la estructura del ejercicio 5.13.2.

5.13.5 La estructura de la figura está sometida a la fuerza de 12000 kg indicada y además todas sus barras sufren un calentamiento con una temperatura media T_m=+20 ºC y un gradiente T_g=200 ºC/m. Calcular los esfuerzos internos en las barras.



5.13.6 Calcular la deformación vertical del punto C en la estructura del ejemplo 5.13.5.

5.13.7 **Calcular los esfuerzos axiales y los momentos flectores en todos los elementos de la estructura de la figura. El apoyo A tiene una rigidez al giro de valor 1000 m Tn/rad.**



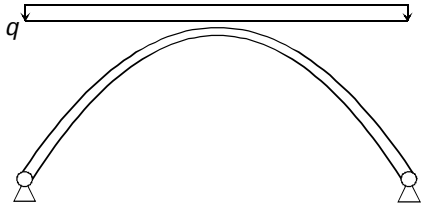
5.13.8 **Calcular la deformación horizontal del punto P de aplicación de la carga en la estructura del ejercicio 5.13.7.**

5.13.9 **Calcular la deformación vertical del punto D en la estructura del ejercicio 5.13.7.**

5.13.10 **Resolver la estructura del ejercicio 5.13.7 empleando como incógnita hiperestática el momento flector en la base de la barra AB.**

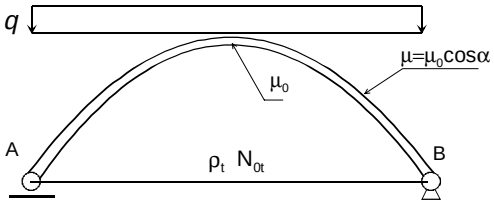
6. ARCOS

6.9.1 **Calcular los esfuerzos internos en un arco biarticulado simétrico, con directriz parabólica definida por su flecha *f* y su luz *L*, y que está sometido a una carga uniforme hacia abajo *q*. Despreciar la energía de esfuerzo axial, y suponer que la rigidez a flexión varía según la ley de la secante.**

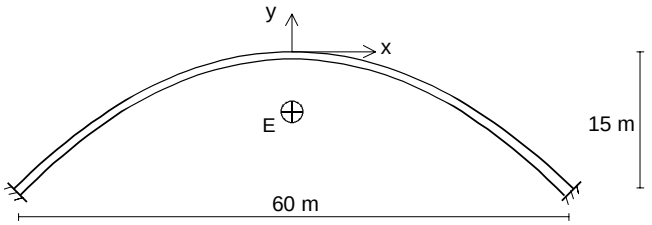


6.9.2 **Calcular los esfuerzos en el arco del ejercicio 6.9.1, pero cargado con una fuerza puntual *P* en su clave.**

6.9.3 **Sea un arco biarticulado simétrico con directriz parabólica definida por su base *L* y su flecha *f*. Se supone que el arco es rígido axialmente (γ=0) y con sección variable, tal que su flexibilidad a flexión varía según la ley $\mu=\mu_0 \cos\alpha$, siendo μ_0 la flexibilidad en la clave. El tirante tiene flexibilidad ρ y una pretensión inicial de valor N_{0t}. Calcular el esfuerzo en el tirante, el diagrama de flectores y la deformación del apoyo A.**



6.9.4 **Calcular la posición del centro elástico de un arco biempotrado simétrico, de directriz parabólica, con 60 m de luz y 15 m de flecha. La sección transversal es rectangular, de 1 m de ancho y canto *h* variable entre 2 m en la clave y 2.60 m en los apoyos, según la ley *h*=2+0.02 |*x*| (m). Despreciar la energía de esfuerzo axial.**



6.9.5 **Calcular las características de la sección equivalente del arco del ejercicio 6.9.4 respecto de su centro elástico.**

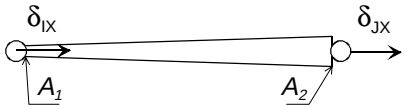
6.9.6 **Calcular los esfuerzos en el arco del ejercicio 6.9.4 bajo la acción de una carga puntual de 1000 kN aplicada a 10 m a la izquierda de la clave. Determinar la deformación vertical en el punto de aplicación de la carga.**

6.9.7 **Calcular los esfuerzos en el arco del ejercicio 6.9.4, bajo la acción de una carga distribuida de valor 100 kN/m.**

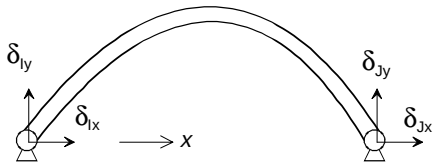
6.9.8 **Calcular los esfuerzos en el arco del ejercicio 6.9.4 bajo la acción de un incremento de temperatura uniforme de 20 ºC en todo él.**

7. RIGIDEZ DE LOS ELEMENTOS ESTRUCTURALES

7.17.1 **Calcular la matriz de rigidez de un elemento articulado en ambos extremos, con área variable de forma lineal entre dos valores A_1 y A_2.**



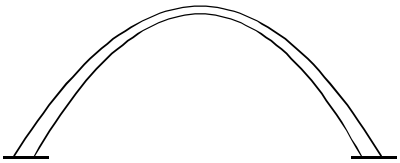
7.17.2 **Calcular la expresión general de la matriz de rigidez de un elemento curvo articulado en ambos extremos. Despreciar la energía de esfuerzo axial.**



7.17.3 **Aplicar los resultados del ejercicio 7.17.2 para el caso de un arco de directriz parabólica de flecha f y luz L, cuyo momento de inercia varía según la ley de la secante $I = I_0 \sec\alpha$, donde I_0 es el momento de inercia en la clave.**

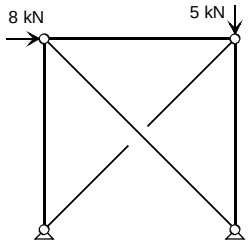
7.17.4 **Aplicar los resultados del ejercicio 7.17.2 para el caso de un arco de directriz circular de radio R y luz L. Suponer rigidez a flexión constante EI.**

7.17.5 **Calcular la matriz de rigidez de un arco empotrado en ambos extremos, con directriz parabólica de flecha f y luz L, y cuyo momento de inercia varía según la ley de la secante $I = I_0 \sec\alpha$, donde I_0 es el momento de inercia en la clave. Despreciar la energía de esfuerzo axial.**

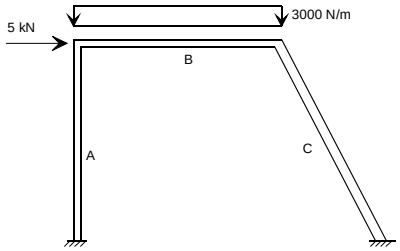


8. MÉTODO DE RIGIDEZ

8.21.1 Calcular los esfuerzos en la estructura de la figura.

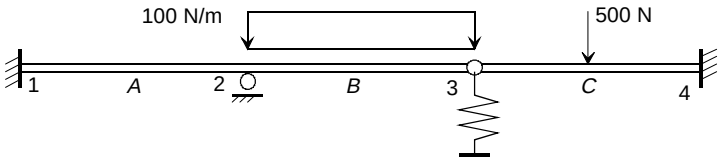


8.21.2 Calcular los esfuerzos en el pórtico de la figura.

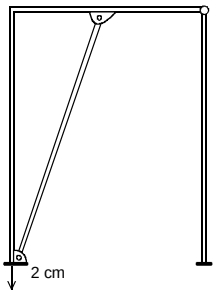


8.21.3 Calcular las deformaciones y esfuerzos producidos en la estructura del ejercicio 8.21.2 por un calentamiento de 20ºC en la cara superior de la viga B.

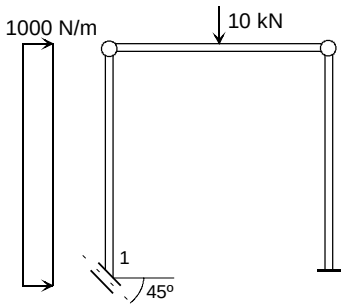
8.21.4 Calcular las deformaciones de los nudos y el esfuerzo en el muelle de la estructura mostrada en la figura.



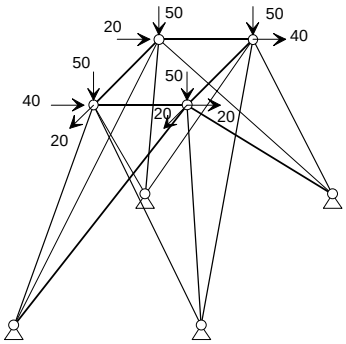
8.21.5 Calcular las deformaciones y los esfuerzos en el pórtico de la figura, cuando el apoyo 4 sufre un descenso de 2 cm.



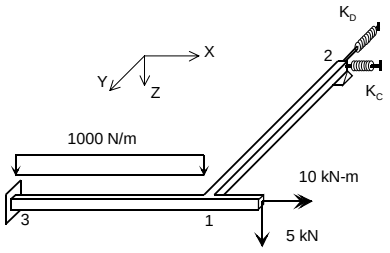
8.21.6 **En el pórtico de la figura existe un empotramiento deslizante en el nudo 1, orientado a 45º con respecto a la horizontal. Calcular las deformaciones y los esfuerzos en la barra A, bajo la acción de las cargas indicadas.**



8.21.7 **Calcular las deformaciones de los nudos y los esfuerzos en las barras de la celosía espacial de la figura.**

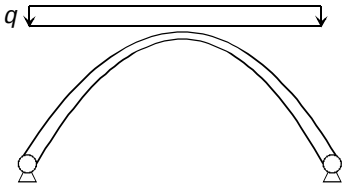


8.21.8 **Plantear las ecuaciones de equilibrio en la estructura de emparrillado plano mostrada en la figura y en base a ellas obtener las deformaciones de sus nudos. El nudo 2 está unido a la sustentación elásticamente, a través de dos resortes al giro.**

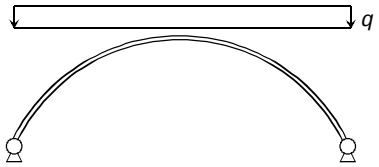


8.21.9 **En la estructura del ejercicio 8.21.8 la barra B sufre una variación de temperaturas, tal que su cara inferior (Z positivo) se calienta 20 ºC y su cara superior (Z negativo) se enfría 20 ºC. Calcular las deformaciones originadas en los nudos y los esfuerzos en la barra B.**

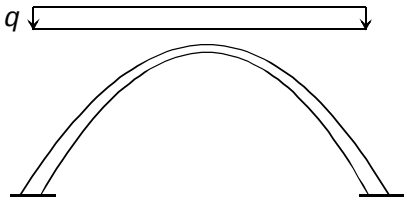
8.21.10 **Calcular las fuerzas de fase 0 de un arco parabólico de flecha f y luz L, articulado en ambos extremos, y cargado con una fuerza distribuida q. Suponer que su inercia varía según la ley de la secante $I = I_0 \sec\alpha$, donde I_0 es el valor en la clave y despreciar la energía del esfuerzo axial.**



8.21.11 **Calcular las fuerzas de fase 0 en un arco circular de radio R, articulado en ambos extremos, y cargado con una fuerza distribuida q, como se muestra en la figura. Suponer que la rigidez a flexión EI es constante, y despreciar la energía del esfuerzo axial.**

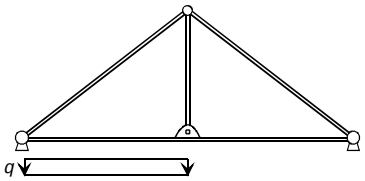


8.21.12 **Calcular las fuerzas de fase 0 de un arco empotrado en ambos extremos, de directriz parabólica con flecha f y luz L, y cargado con una fuerza distribuida q. Suponer que la rigidez a flexión varía según la ley de la secante $EI = EI_0 \sec\alpha$, donde I_0 es el momento de inercia en la clave y despreciar la energía del esfuerzo axial.**

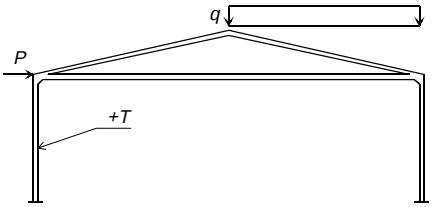


9. ESTRUCTURAS SIMÉTRICAS

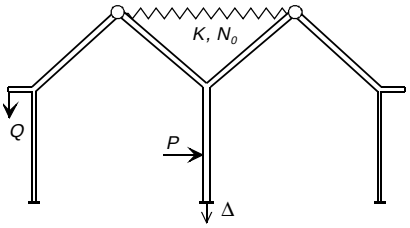
9.10.1 **Descomponer la estructura de la figura en suma de dos casos, simétrico y antimétrico.**



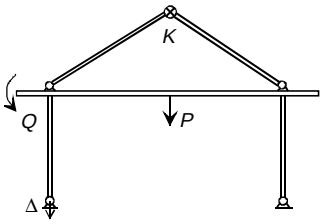
9.10.2 **Descomponer la estructura de la figura en suma de dos casos, simétrico y antimétrico.**



9.10.3 **Descomponer la estructura de la figura en suma de dos casos, simétrico y antimétrico. El muelle tiene un esfuerzo de pretensión inicial de valor N_0.**

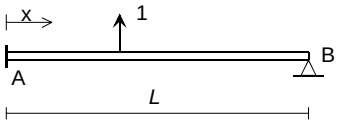


9.10.4 **Descomponer la estructura de la figura en suma de dos casos, simétrico y antimétrico.**

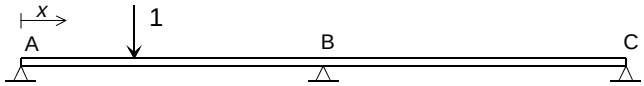


10. LÍNEAS DE INFLUENCIA

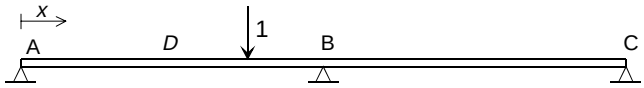
10.9.1 **Calcular la línea de influencia de la reacción en el apoyo B en una viga empotrada apoyada, recorrida por una carga unitaria.**



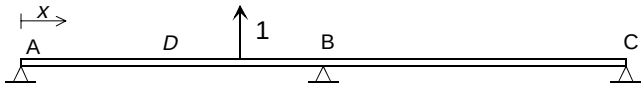
10.9.2 **Calcular la línea de influencia del momento flector en el apoyo B en una viga de dos vanos, apoyada en sus dos extremos y recorrida por una carga unitaria, como se indica en la figura.**



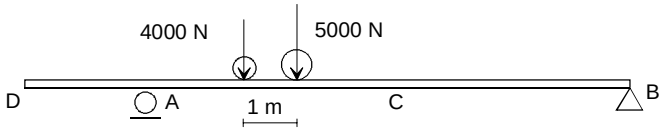
10.9.3 **Calcular la línea de influencia del momento flector en el punto D, centro del vano AB, en una viga de dos vanos iguales apoyada en sus dos extremos y recorrida por una carga unitaria, como se indica en la figura.**



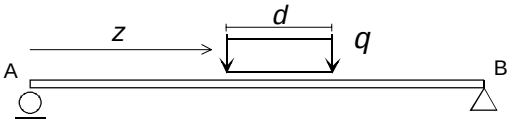
10.9.4 **Calcular la línea de influencia del esfuerzo cortante en el punto D, centro del vano AB, en una viga de dos vanos iguales, apoyada en sus dos extremos y recorrida por una carga unitaria en dirección vertical hacia arriba, como se indica en la figura.**



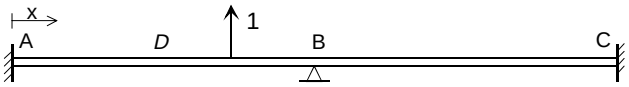
10.9.5 **La viga de la figura está recorrida por dos cargas de 5000 N y 4000 N respectivamente, separadas 1 m entre sí. Calcular los valores máximos de las reacciones en A y B así como del esfuerzo cortante y del momento flector en C. El movimiento de las cargas puede producirse sobre toda la viga, y con las cargas situadas en los dos sentidos.**



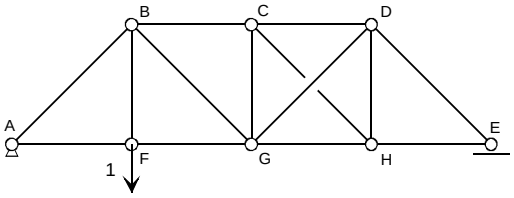
10.9.6 **Calcular el valor máximo del momento flector en el centro de una viga simplemente apoyada recorrida por una carga distribuida uniforme de valor *q*, actuando parcialmente sobre una distancia *d* .**



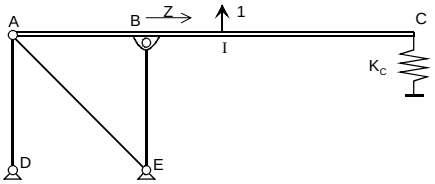
10.9.7 **Calcular la línea de influencia del esfuerzo cortante en el punto D, centro del vano AB, en una viga de dos vanos iguales, empotrada en sus dos extremos y recorrida por una carga unitaria en dirección vertical hacia arriba, como se indica en la figura.**



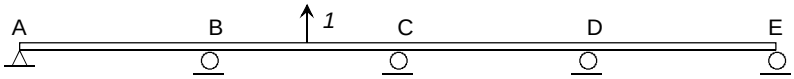
10.9.8 **Calcular la línea de influencia del esfuerzo axial en la barra CH de la celosía de la figura, cuando una carga unitaria móvil recorre su cordón inferior.**



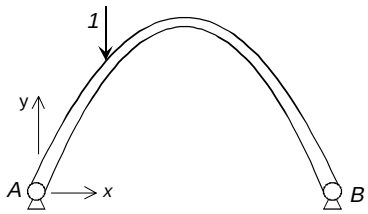
10.9.9 **Calcular la línea de influencia del esfuerzo axial en la barra BE de la estructura de la figura, cuando una carga unitaria móvil recorre el vano BC.**



10.9.10 **Calcular la línea de influencia del momento flector en el apoyo B de la viga continua de 4 vanos iguales mostrada en la figura, que está recorrida por una carga unitaria vertical y hacia arriba.**



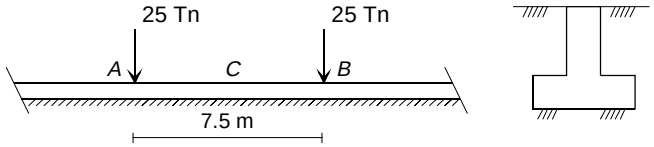
10.9.11 **Calcular las líneas de influencia de las reacciones en los apoyos de un arco biarticulado de directriz parabólica y apoyos al mismo nivel, recorrido por una carga unitaria vertical orientada hacia abajo.**
Suponer una variación del producto $EI = EI_0 \sec\alpha$, donde I_0 es el momento de inercia en la clave, y despreciar la energía de esfuerzo axial.



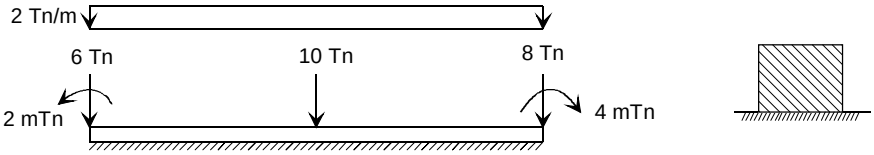
10.9.12 Calcular la línea de influencia del momento flector en un punto P del arco del ejercicio 10.9.11. El punto P está situado a una distancia $L \cdot a$ del apoyo izquierdo.

11. VIGAS EN FUNDACIÓN ELÁSTICA

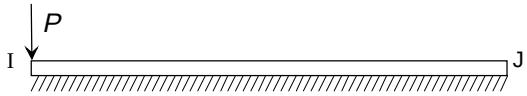
11.11.1 **Una viga en fundación elástica, de longitud infinita, tiene la sección transversal indicada en la figura. El material es hormigón con *E* 200000 kg/cm^2 y el coeficiente de balasto del terreno es de 10 kg/cm^3. Está sometida a dos cargas puntuales de 25 Tn cada una, separadas 7.5 m. Determinar los momentos flectores en la viga y la tensión sobre el terreno.**



11.11.2 **Una viga en fundación elástica, de 10 m de luz, tiene la sección transversal indicada en la figura. El material es hormigón con *E*= 200000 kg/cm^2 y el coeficiente de balasto del terreno es 10 kg/cm^3. Está sometida a las cargas indicadas en la figura. Determinar las deformaciones y los esfuerzos que se producen en los extremos y en el centro de la viga.**



11.11.3 **Determinar la deformada y el diagrama de momentos flectores de la viga de la figura.**



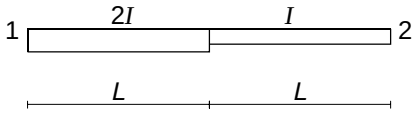
12. CONDENSACIÓN Y SUBESTRUCTURAS

12.5.1 **Obtener la matriz de rigidez del elemento empotrado - articulado por condensación.**

12.5.2 **Obtener una expresión general del vector de fuerzas nodales equivalentes de fase 0 para un elemento empotrado - articulado, partiendo del elemento biempotrado.**

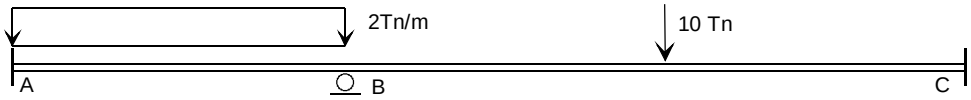
12.5.3 **Obtener una expresión general del vector de fuerzas nodales equivalentes de fase 0 de un elemento articulado - empotrado.**

12.5.4 **Obtener la expresión de la matriz de rigidez a flexión de un elemento combinado, formado por dos vigas del mismo material, con longitud *L* cada una de ellas, y momentos de inercia 2*I* e *I*, como se indica en la figura.**

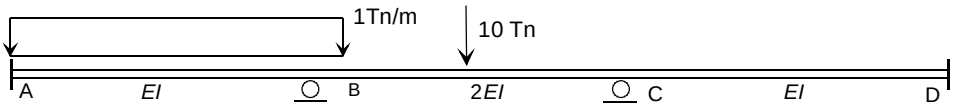


13. MÉTODO DE DISTRIBUCIÓN DE MOMENTOS

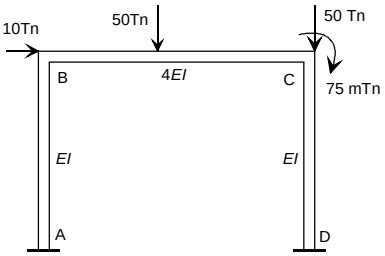
13.6.1 **Calcular el diagrama de momentos flectores y el giro del apoyo B en la viga continua de la figura. Los dos vanos tienen las mismas propiedades *EI*.**



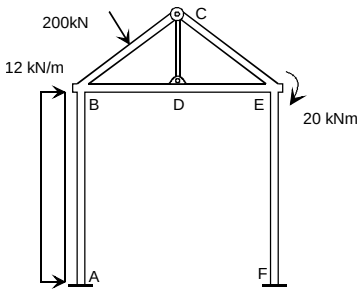
13.6.2 **Calcular el diagrama de momentos flectores y el giro de los apoyos en la viga continua de 3 vanos mostrada en la figura.**



13.6.3 **Calcular el diagrama de momentos flectores del pórtico simple mostrado en la figura.**



13.6.4 **Calcular el diagrama de momentos flectores del pórtico a dos aguas mostrado en la figura, empleando la descomposición en casos simétrico y antimétrico. Todas las barras tienen la misma rigidez *EI*.**



13.6.5 **Resolver el pórtico del ejercicio 13.6.3 empleando el método de rigidez, pero siguiendo las fases del método de Cross, a fin de estudiar la correspondencia entre ambos métodos.**

14. PANDEO Y ESTABILIDAD

14.19.1 **Calcular la carga crítica exacta de una viga biempotrada, de longitud $2L$ empleando el método de rigidez.**

14.19.2 **Calcular la carga crítica de una viga biempotrada, de longitud $2L$ empleando el método de rigidez y la expresión aproximada de la matriz de rigidez.**

14.19.3 **Calcular la carga crítica exacta de una viga columna que está empotrada en sus dos extremos, pero en uno de ellos tiene una deslizadera situada transversalmente a ella. Emplear el método de rigidez.**

14.19.4 **Calcular la carga crítica de la viga columna del ejercicio 14.19.3, pero empleando la expresión aproximada de la matriz de rigidez.**

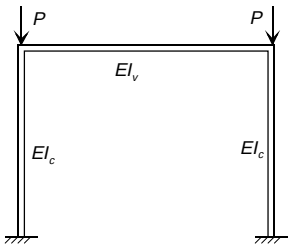
14.19.5 **Calcular la carga crítica de una viga columna empotrada en ambos extremos, y sometida a una carga distribuida uniforme q.**

14.19.6 **Calcular la carga crítica de una viga columna empotrada en ambos extremos, y sometida a una carga puntual Q en su punto central.**

14.19.7 **Calcular un valor aproximado de la carga crítica de pandeo de una viga empotrada articulada, sometida a una compresión P, empleando el método de rigidez.**

14.19.8 **Determinar el modulo reducido de una sección rectangular de ancho b y canto h.**

14.19.9 **Efectuar un análisis cualitativo de las cargas de pandeo del pórtico mostrado en la figura. Suponer que todas las barras son infinitamente rígidas a esfuerzo axial.**



14.19.10 **Determinar el primer modo de pandeo simétrico del pórtico del ejercicio 14.19.9. Particularizar la solución para los valores $L=H$, $I_v=2I_c$.**

14.19.11 **Determinar el primer modo de pandeo antisimétrico del pórtico del ejercicio 14.19.9. Particularizar la solución para los valores $L=H$, $I_v=2I_c$.**

Erratas

Página 356, segunda ecuación.

Los términos (5,1) y (6,1) de la matriz tienen valor nulo.

Página 414, enunciado del problema 9.11.8.

debe decir: "*Resolver el problema 6.11.9 empleando …*"

Página 176, primer párrafo.

Dice: "*… por expresiones similares a la (4.118).*"

Debe decir: "*… por expresiones similares a la (4.117).*"

Página 265, línea 4.

Dice: " *…polar de inercia respecto a* Z_L."

Debe decir: " *…polar de inercia respecto a* X_L."