TEMA 2: Sistemas de ecuaciones lineales

1. Sistemas de n ecuaciones con n incógnitas. Método de Cramer

Comencemos resolviendo una *ecuación de una incógnita*

$$ax = b$$

Se nos pueden presentar 3 casos:
1. Si $a \neq 0$, la ecuación tiene *solución única* $x = \frac{b}{a}$.
2. Si $a = 0$ y $b = 0$, la ecuación tiene un *conjunto infinito* de soluciones ya que cualquier número real satisface esta ecuación.
3. Si $a = 0$ y $b \neq 0$ entonces esta ecuación no tiene soluciones.

1.1. Sistema de dos ecuaciones

Podemos avanzar un poco más y estudiar ahora un *sistema de ecuaciones con dos incógnitas.*

$$\begin{cases} a_1x + b_1y = c_1 \\ a_2x + b_2y = c_2 \end{cases}$$

Se llama **solución** de este sistema a todo par de valores que al sustituir por ellos a x e y cumplen las igualdades.

Para resolver este sistema, es decir, para dar una solución, podemos multiplicar la primera ecuación por b_2 y la segunda por $-b_1$ y sumándolas obtenemos que

$$x(a_1b_2 - a_2b_1) = c_1b_2 - c_2b_1$$

De esta manera siempre que $a_1b_2 - a_2b_1 \neq 0$ tendremos

$$x = \frac{c_1b_2 - c_2b_1}{a_1b_2 - a_2b_1} \qquad y = \frac{a_1c_2 - a_2c_1}{a_1b_2 - a_2b_1}$$

Así hemos encontrado la manera de obtener una única solución del sistema siempre que $a_1b_2 - a_2b_1 \neq 0$.

Observemos que los denominadores anteriores son el determinante de la **matriz de coeficientes**

$$A = \begin{pmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{pmatrix}$$

La condición que hemos obtenido para que el sistema tenga una única solución es que determinante de la matriz sea distinto de 0.
Además si nos fijamos en los numeradores de las expresiones para x e y, vemos que

$$x = \frac{\begin{vmatrix} c_1 & b_1 \\ c_2 & b_2 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix}}$$

De manera análoga para la otra solución obtenemos que

$$y = \frac{\begin{vmatrix} a_1 & c_1 \\ a_2 & c_2 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix}}$$

Estas expresiones son las ***fórmulas de Cramer*** para la resolución de una sistema de dos ecuaciones con dos incógnitas.

Soluciones del sistema

De la misma forma que hicimos en una ecuación podemos clasificar la soluciones de la siguiente forma:

- Si $DetA \neq 0$ el sistema tiene solución única.
- Si el determinante es cero, entonces se cumple que

  $$\frac{a_1}{a_2} = \frac{b_1}{b_2}$$

  es decir, los coeficientes de las incógnitas son proporcionales. Si además se tiene que

  $$\begin{vmatrix} c_1 & b_1 \\ c_2 & b_2 \end{vmatrix} = 0$$

  es decir, $\frac{c_1}{c_2} = \frac{b_1}{b_2}$, tambien los términos independientes son proporcionales, con lo que tenemos un conjunto de soluciones *infinito.*
- Si $|A| = 0$ pero el determinante anterior es distinto de cero, entonces las ecuaciones son contradictorias y el sistema *no tiene solución.*

Interpretación geométrica

Cada ecuación del sistema representa una recta, luego la solución del sistema determinará el punto de intersección de ambas rectas.
Si el determinante $a_1b_2 - a_2b_1 \neq 0$, entonces son dos rectas no paralelas que tienen un único punto en común.
En el caso en que $\frac{a_1}{a_2} = \frac{b_1}{b_2} \neq \frac{c_1}{c_2}$, las rectas son paralelas y por lo tanto, no tienen ningún punto en común.
Por último si las ecuaciones son proporcionales, entonces las ecuaciones determinan una misma recta y *todos* los puntos son *puntos de intersección.*

1.2. Sistema de tres ecuaciones lineales

Consideremos el siguiente *sistema de tres ecuaciones lineales con tres incógnitas*

$$\left\{\begin{array}{ccccccc} a_1x & + & b_1y & + & c_1z & = & d_1 \\ a_2x & + & b_2y & + & c_2z & = & d_2 \\ a_3x & + & b_3y & + & c_3z & = & d_3 \end{array}\right.$$

Llamamos *solución* de este sistema a la terna (α, β, γ) que convierten a estas ecuaciones en igualdades.

Consideramos la matriz de coeficientes

$$A = \begin{pmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{pmatrix}$$

Las formulas de Cramer se pueden extender al caso de tres incógnitas mediante un cálculo similar al realizado en el sistema de dos ecuaciones, obteniendo como soluciones del sistema

$$x = \frac{\begin{vmatrix} d_1 & b_1 & c_1 \\ d_2 & b_2 & c_2 \\ d_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix}}{|A|} \qquad y = \frac{\begin{vmatrix} a_1 & d_1 & c_1 \\ a_2 & d_2 & c_2 \\ a_3 & d_3 & c_3 \end{vmatrix}}{|A|} \qquad z = \frac{\begin{vmatrix} a_1 & b_1 & d_1 \\ a_2 & b_2 & d_2 \\ a_3 & b_3 & d_3 \end{vmatrix}}{|A|}$$

Siempre que $|A| \neq 0$.

Interpretación geométrica.

La interpretación geométrica de este sistema es sencilla. Cada ecuación representa un plano en el espacio, de forma que al resolver estudiamos cuál es la posición relativa de estos tres planos, pudiendose cortar en un punto, dos a dos en tres rectas paralelas, los tres en una misma recta, o ser paralelos o coincidentes,...

1.3. Sistemas de n ecuaciones con n incógnitas

Podemos generalizar las formulas de Cramer para un sistema de n ecuaciones con n incógnitas. Consideremos el sistema

$$\begin{array}{ccccccccc} a_{11}x_1 & + & a_{12}x_2 & + & \dots & + & a_{1n}x_n & = & b_1 \\ a_{21}x_1 & + & a_{22}x_2 & + & \dots & + & a_{2n}x_n & = & b_2 \\ \dots & & \dots & & \dots & & \dots & & \\ a_{n1}x_1 & + & a_{n2}x_2 & + & \dots & + & a_{nn}x_n & = & b_n \end{array}$$

Este sistema tendrá solución si el determinante de la matriz de coeficientes es distinto de cero. Las soluciones del sistema serán:

$$x_i = \frac{|B_i|}{|A|} \qquad i = 1, 2, \dots, n$$

donde B_i es la matriz de coeficientes en la que hemos sustituido la columna de términos independientes por la columna de los coeficientes de x_i.

$$B_i = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & b_1 & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & b_2 & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \dots & \vdots & \dots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & b_n & \dots & a_{nn} \end{pmatrix}$$

2. Teorema de Rouche-Frobenius

2.1. Definiciones

Llamamos ***sistema compatible*** a aquel sistema que tiene al menos una solución, en caso contrario decimos que el sistema es ***incompatible***. Si además esta solución es única, entonces decimos que el sistema es ***determinado***.

2.2. Teorema de Rouche-Frobenius

Existe un teorema que nos permite saber que tipo de soluciones tendrá el sistema de ecuaciones según el rango de la matriz de coeficiente y de la matriz ampliada.

Teorema 1 *Consideremos las matrices A de coeficientes y A^* o matriz ampliada que contiene en su última fila a los elementos independientes, entonces:*

1. Para que el sistema sea compatible *es necesario y suficiente que los rangos de la matriz de coeficientes y de la matriz ampliada sean iguales.*

2. Si además el rango de ambas matrices es igual al número de incógnitas, el sistema será compatible determinado. Si $rg(A) = rg(A^*) < n$ entonces el sistema es compatible indeterminado.

Existe un método para resolver comodamente sistemas compatibles indeterminados con las fórmulas de Cramer, lo veremos con un ejemplo:

Ejemplo: Resolver el siguiente sistema de ecuaciones:

$$\begin{cases} 2x_1 - 3x_2 + 5x_3 + 7x_4 = 1 \\ 4x_1 - 6x_2 + 2x_3 + 3x_4 = 2 \\ 2x_1 - 3x_2 - 11x_3 - 15x_4 = 1 \end{cases}$$

Este es un sistema compatible e indeterminado, ya que $r(A) = 2 = r(A^*) < 4$ Los pasos a seguir son:

1. Detectar un menor no nulo de A. Por ejemplo el menor $\begin{vmatrix} 5 & 7 \\ 2 & 3 \end{vmatrix} = 1 \neq 0$.
2. Suprimir las ecuaciones que corresponden a las filas que no estén contenidas en dicho menor de A.
   Nosotros suprimimos la última ecuación.

3. Pasamos a la derecha de la igualdad aquellas incógnitas que correspondan a las columnas que no estén en el menor elegido.

$$\begin{cases} 5x_3 + 7x_4 = 1 - 2x_1 + 3x_2 \\ 2x_3 + 3x_4 = 2 - 4x_1 + 6x_2 \end{cases}$$

4. Por último resolvemos utilizando las formulas de Cramer

$$x_3 = \frac{\begin{vmatrix} 1 - 2x_1 + 3x_2 & 7 \\ 2 - 4x_1 + 6x_2 & 3 \end{vmatrix}}{1} = 22x_1 - 33x_2 - 11$$

$$x_4 = \frac{\begin{vmatrix} 5 & 1 - 2x_1 + 3x_2 \\ 2 & 2 - 4x_1 + 6x_2 \end{vmatrix}}{1} = -16x_1 + 24x_2 + 8$$

Haciendo $x_1 = c_1$ y $x_2 = c_2$, se tiene que el conjunto solución es de la forma:

$$(x_1, x_2, x_3, x_4) = (c_1, c_2, 22c_1 - 33c_2 - 11, -16c_1 + 24c_2 + 8)$$

3. Expresión matricial de un sistema. Sistemas equivalentes

Ya hemos visto que podemos estudiar las soluciones de un sistema de ecuaciones lineales a través del rango de dos matrices (la de coeficientes y la ampliada).
En general, podemos escribir los sistemas en forma matricial haciendo

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \dots & \dots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & \dots & a_{nn} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \dots \\ x_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \dots \\ b_n \end{pmatrix}$$

O de manera abreviada $AX = B$.

De esta manera, un sistema queda determinado si conocemos su matriz de coeficientes y la matriz que contiene los términos independientes y así podremos calcular sus soluciones realizando operaciones en dichas matrices.

3.1. Sistemas equivalentes

Definición 1 *Dos sistemas de ecuaciones (con las mismas incógnitas) se dice que son* ***equivalentes*** *si tienen las mismas soluciones, es decir, si toda solución de uno de ellos es también solución del otro.*

Propiedad
Un sistema de ecuaciones lineales es *equivalente* a cualquiera de los sistemas que resultan de realizar operaciones elementales en él.

Utilizando la propiedad anterior, podemos resolver sistemas de ecuaciones lineales buscando un sistema equivalente más sencillo. Uno de los métodos de resolución de sistemas que utiliza esta propiedad es el método de Gauss

3.2. Método de Gauss

Todo sistema de ecuaciones lineales tiene un sistema equivalente escalonado. Es decir, realizando sucesivas operaciones elementales podemos obtener un sistema con una matriz escalonada.
El método de eliminación de Gauss consiste en la eliminación sucesiva de incógnitas a través de una matriz escalonada.

EJEMPLO: Resolver mediante el método de Gauss el siguiente sistema

$$\left\{\begin{array}{rcrcrcr} x_1 & + & 2x_2 & + & 3x_3 & = & 2 \\ x_1 & - & x_2 & + & x_3 & = & 0 \\ x_1 & + & 3x_2 & - & x_3 & = & -2 \\ 3x_1 & + & 4x_2 & + & 3x_3 & = & 0 \end{array}\right.$$

$$\left(\begin{array}{rrr|r} 1 & 2 & 3 & 2 \\ 1 & -1 & 1 & 0 \\ 1 & 3 & -1 & -2 \\ 3 & 4 & 3 & 0 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{rrr|r} 1 & 2 & 3 & 2 \\ 0 & -3 & -2 & -2 \\ 0 & 1 & -4 & -4 \\ 0 & -2 & -6 & -6 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{rrr|r} 1 & 2 & 3 & 2 \\ 0 & 0 & -14 & -14 \\ 0 & 1 & -4 & -4 \\ 0 & 0 & -14 & -14 \end{array}\right) \sim$$

Haciendo la ultima fila cero, dividiendo entre -14 la segunda fila y cambiandola por la tercera obtenemos el sistema equivalente (escalonado).

$$\left\{\begin{array}{rcrcrcr} x_1 & + & 2x_2 & + & 3x_3 & = & 2 \\ & & x_2 & - & 4x_3 & = & -4 \\ & & & & x_3 & = & 1 \end{array}\right.$$

La solución del sistema se obtiene comenzando por la última ecuación, y sustituyendo dicho valor sucesivamente en las ecuaciones anteriores. La solución es, por tanto, $(-1, 0, 1)$.
Observemos que el rango de la matriz de coeficientes y de la matriz ampliada es 3 e igual al número de incógnitas, luego el sistema es compatible determinado.

4. Sistemas homogeneos

Existe un caso particular de sistemas de sistemas de ecuaciones lineales que merece ser estudiado a parte.

Definición 2 *Llamamos* ***sistema homogeneo*** *a aquel sistema cuyos términos independientes son todos nulos.*

De manera inmediata podemos ver que este tipo de sistemas es siempre compatible, ya que una solución es $(x_1, x_2, \ldots, x_n) = (0, 0, \ldots, 0)$. Lo interesante es saber cuándo un sistema homogeneo tiene soluciones no nulas.

Teorema 2 *Para que el sistema homogeneo tenga soluciones no nulas es necesario y suficiente que el rango de la matriz de los coeficientes sea menor que el número de incógnitas.*
En este caso el sistema resulta compatible indeterminado y tiene un conjunto infinito de soluciones.

Teorema 3 *Para que un sistema homogéneo de n ecuaciones con n incógnitas posea soluciones no nulas es necesario y suficiente que su determinante sea igual a cero.*

Teorema 4 *Cualquier combinación lineal de soluciones de un sistema homogéneo es también una solución del sistema.*

Es interesante, por tanto, hallar las soluciones linealmente independientes del sistema en términos de las cuales se escribirán todas las demás soluciones.
El teorema anterior implica, por tanto, que la suma de dos soluciones del sistema homogéneo es también solución del sistema, así como la multiplicación de un número por una solución.

EJEMPLO: Resolver el sistema homogéneo y escribir las soluciones como combinación lineal de términos independientes

$$\left\{\begin{array}{l} 2x_1 - 3x_2 + x_3 - x_4 + 2x_5 = 0 \\ 3x_1 - x_3 + x_4 = 0 \\ x_1 + 3x_2 - 2x_3 + 2x_4 - 2x_5 = 0 \end{array}\right.$$

Primero calculamos el rango de la matriz, para ello transformaremos la matriz de coeficientes mediante operaciones elementales

$$\begin{pmatrix} 2 & -3 & 1 & -1 & 2 \\ 3 & 0 & -1 & 1 & 0 \\ 1 & 3 & -2 & 2 & -2 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & -6 & 3 & -3 & 4 \\ 3 & 0 & -1 & 1 & 0 \\ 1 & 3 & -2 & 2 & -2 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & -6 & 3 & -3 & 4 \\ 0 & 18 & -10 & 10 & -12 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

El rango de la matriz de coeficientes es 2, como el número de incógnitas es 5, el sistema es compatible indeterminado. Resolvemos el sistema mediante las fórmulas de Cramer siguiendo el método anteriormente expuesto

$$\left\{\begin{array}{l} 2x_1 - 3x_2 = -x_3 + x_4 - 2x_5 \\ 3x_1 = x_3 - x_4 \end{array}\right.$$

De esta manera las soluciones son

$$x_1 = \frac{1}{3}x_3 - \frac{1}{3}x_4$$

$$x_2 = \frac{5}{9}x_3 - \frac{5}{9}x_4 + \frac{2}{3}x_5$$

Podemos escribir las soluciones como combinación lineal de vectores independientes

$$(x_1, x_2, x_3, x_4, x_5) = c_3(\frac{1}{3}, \frac{5}{9}, 1, 0, 0) + c_4(-\frac{1}{3}, -\frac{5}{9}, 0, 1, 0)+$$

$$+c_5(0, \frac{2}{3}, 0, 0, 1)$$

Podemos resolver sistemas no homogéneos utilizando un sistema homogéneo. Consideremos el sistema no homogeneo

$$(1) \left\{\begin{array}{ccccccccc} a_{11}x_1 & + & a_{12}x_2 & + & \dots & + & a_{1n}x_n & = & b_1 \\ a_{21}x_1 & + & a_{22}x_2 & + & \dots & + & a_{2n}x_n & = & b_2 \\ \dots & & & & & & & & \\ a_{m1}x_1 & + & a_{m2}x_2 & + & \dots & + & a_{mn}x_n & = & b_n \end{array}\right.$$

de m ecuaciones con n incógnitas. Se denomina ***sistema homogéneo asociado*** al que se obtiene sustituyendo las b_i por cero.

Proposición 1 *La solución general del sistema es igual a la suma de la solución del sistema homogéneo asociado y de una solución del sistema.*

Teorema 5 *Sea v una solución de (1). Existen k soluciones linealmente independientes del sistema homogéneo asociado $u_1, \ldots, u_k$, tal que todas las soluciones de (1) son*

$$v + c_1 u_1 + \cdots + c_k u_k$$

donde c_i son números reales. A esta expresión se le denomina ***solución general*** *del sistema y a v* ***solución particular*** *del sistema.*

Ejemplo: Sea el sistema

$$\left\{ \begin{array}{c} 2x + y + t = 2 \\ 2z + 3t = 0 \\ x + 3z = 1 \end{array} \right.$$

que tiene como una de sus soluciones $(10, -20, -3, 2)$. Calcular todas sus soluciones.

Estudiamos el sistema asociado homogéneo

$$\left\{ \begin{array}{c} 2x + y + t = 0 \\ 2z + 3t = 0 \\ x + 3z = 0 \end{array} \right.$$

Tiene como solución general $(4{,}5\lambda; -10\lambda; -1{,}5\lambda; \lambda)$. Si encontramos una solución particular del sistema inicial, podemos escribir sus soluciones como combinación lineal de estas. De esta manera

$$(x, y, z, t) = (10; -20; -3; 2) + \lambda(4{,}5; -10; 1{,}5; 1)$$