Tema 4: Redes bipuerto

Enrique San Andrés
Sagrario Muñoz

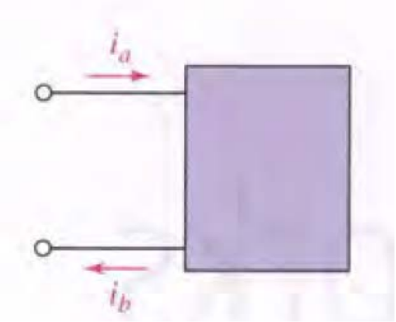
Esquema

- Redes bipuerto
  - Parámetros generales de una red bipuerto
  - Circuitos equivalentes
  - Transformaciones de redes bipuertos
- Bobinas acopladas
- Transformadores
  - Transformador lineal
  - Transformador ideal
  - Aplicaciones de transformadores

Programa de la asignatura
1. Elementos de un circuito y métodos de análisis en corriente continua: Resistencias, fuentes de voltaje y de corriente, fuentes dependientes. Leyes de Kirchhoff. Técnicas de análisis: combinación de elementos, análisis por nodos, análisis por mallas, principio de superposición, teoremas de Thévenin y Norton. El amplificador operacional ideal. Circuitos simples con amplificadores operacionales. Análisis de circuitos asistido por ordenador.
2. Análisis en el dominio del tiempo: Respuesta transitoria de circuitos con condensadores e inductancias. Circuitos de primer y segundo orden.
3. Análisis en el dominio de la frecuencia: Excitación sinusoidal. Fasores. Impedancia. Potencia compleja. Resonancia. Introducción al filtrado de señales.
4. Redes bipuerto: parámetros generales y transformaciones. Inductancias acopladas magnéticamente. Transformador lineal. Transformador ideal.
5. Introducción a los circuitos no lineales.

Parámetros generales

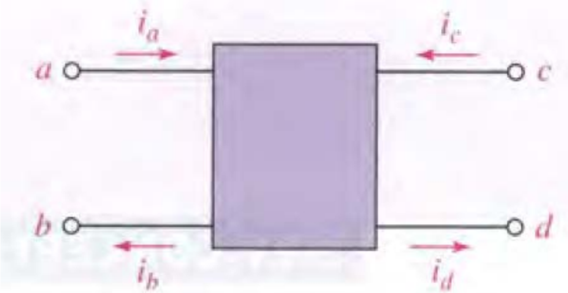
- Un par de terminales por el que una señal entra o sale de una red se denomina **puerto**
  - A cada puerto de una red se le conecta o un elemento (fuente, impedancia...) o el puerto de otra red.
    - Las redes se interconectan a través de sus puertos.
  - En general se considera que los nodos internos no son accesibles, y que no se conectan elementos entre puertos.
  - Las redes que vamos a tratar serán lineales (pasivas ó activas)



- Red monopuerto
  - Obviamente $i_a = i_b$
- Si hay más de un puerto se denomina red **multipuerto** $\rightarrow$ dos puertos: bipuerto

Parámetros generales

- <u>Red bipuerto</u>
  - Red de elementos que consta de dos pares de terminales (cuadripolo)
    - Entrada (subíndice *i* ó 1)
    - Salida (subíndice *o* ó 2)
  - En cada puerto, la corriente que entra por terminal + igual a la que sale por el terminal –
    - $i_a = i_b = I_1$
    - $i_c = i_d = I_2$
  - Las corrientes se suelen considerar entrantes por el terminal +
  - Si la red no contiene fuentes **independientes** $\Rightarrow$ relación lineal entre V e I
    - La tensión V_1 dependerá linealmente de las corrientes I_1 y I_2
    - Lo mismo para V_2

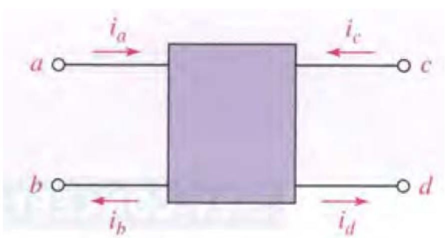


$$\left.\begin{array}{l} V_1 = Z_{11}I_1 + Z_{12}I_2 \\ V_2 = Z_{21}I_1 + Z_{22}I_2 \end{array}\right\} \Rightarrow \begin{bmatrix} V_1 \\ V_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} Z_{11} & Z_{12} \\ Z_{21} & Z_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} I_1 \\ I_2 \end{bmatrix}$$

Parámetros generales

- En este caso los coeficientes que ligan V_1, V_2, I_1 e I_2 tienen unidades de impedancia (Ω comp.) $\rightarrow$ **parámetros Z** ó parámetros de circuito abierto

$$\left.\begin{aligned} V_1 &= Z_{11}I_1 + Z_{12}I_2 \\ V_2 &= Z_{21}I_1 + Z_{22}I_2 \end{aligned}\right\} \Rightarrow \begin{cases} Z_{11} = \left.\dfrac{V_1}{I_1}\right|_{I_2=0} & \text{Impedancia de entrada} \\[2ex] Z_{12} = \left.\dfrac{V_1}{I_2}\right|_{I_1=0} & \\[2ex] Z_{21} = \left.\dfrac{V_2}{I_1}\right|_{I_2=0} & \text{Impedancias de transferencia} \\[2ex] Z_{22} = \left.\dfrac{V_2}{I_2}\right|_{I_1=0} & \text{Impedancia de salida} \end{cases}$$



Parámetros generales

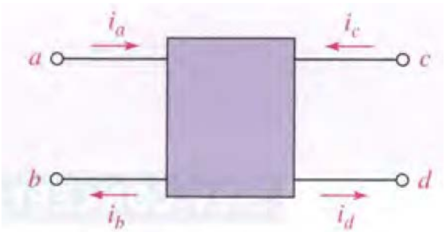
- Si $Z_{12} = Z_{21}$ el cuadripolo se denomina **recíproco**
  - Si la red es pasiva generalmente el cuadripolo es recíproco.
  - Si hay fuentes dependientes generalmente no lo es

$$\left.\begin{aligned} V_1 &= Z_{11}I_1 + Z_{12}I_2 \\ V_2 &= Z_{21}I_1 + Z_{22}I_2 \end{aligned}\right\} \Rightarrow \begin{cases} Z_{11} = \left.\dfrac{V_1}{I_1}\right|_{I_2=0} \\ Z_{12} = \left.\dfrac{V_1}{I_2}\right|_{I_1=0} \\ Z_{21} = \left.\dfrac{V_2}{I_1}\right|_{I_2=0} \\ Z_{22} = \left.\dfrac{V_2}{I_2}\right|_{I_1=0} \end{cases}$$

Impedancia de entrada

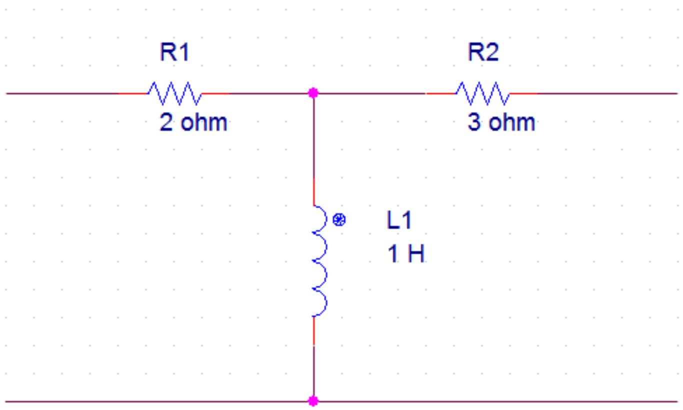
Impedancias de transferencia

Impedancia de salida



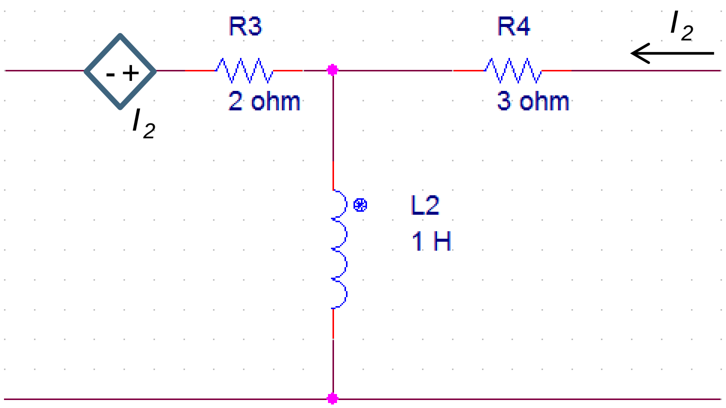
Parámetros generales

- Ej. Determinar los parámetros Z



Parámetros generales

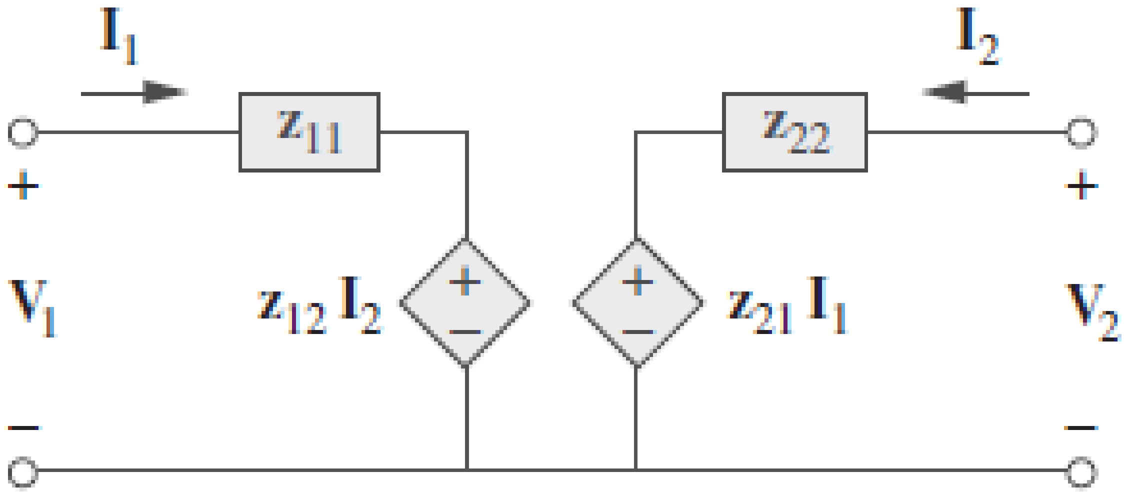
- Ej. Determinar los parámetros Z



Parámetros generales

- Circuito equivalente de una red con parámetros Z conocidos

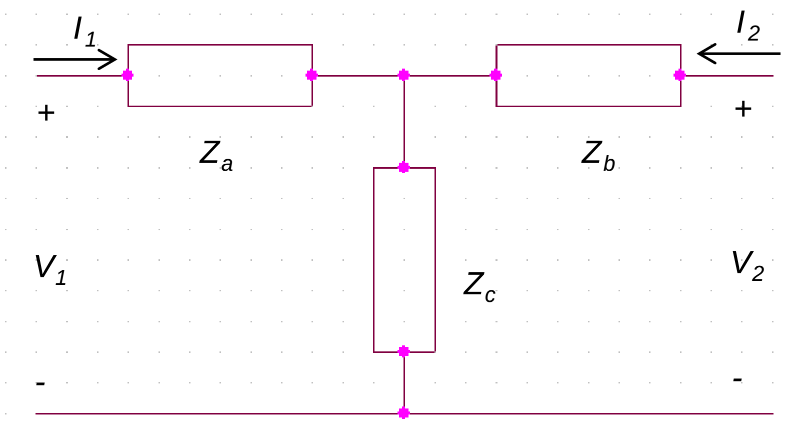
$$\left.\begin{aligned} V_1 &= Z_{11}I_1 + Z_{12}I_2 \\ V_2 &= Z_{21}I_1 + Z_{22}I_2 \end{aligned}\right\}$$



Parámetros generales

- Circuito equivalente en T de un circuito recíproco
  - Siguiendo las definiciones

$$\left\{\begin{aligned} Z_{11} &= \left.\frac{V_1}{I_1}\right|_{I_2=0} = Z_a + Z_c \\ Z_{12} &= \left.\frac{V_1}{I_2}\right|_{I_1=0} = Z_c \\ Z_{21} &= \left.\frac{V_2}{I_1}\right|_{I_2=0} = Z_c \\ Z_{22} &= \left.\frac{V_2}{I_2}\right|_{I_1=0} = Z_b + Z_c \end{aligned}\right\} \Rightarrow \left\{\begin{aligned} Z_a &= Z_{11} - Z_{12} \\ Z_b &= Z_{22} - Z_{12} \\ Z_c &= Z_{12} \end{aligned}\right.$$



Parámetros generales

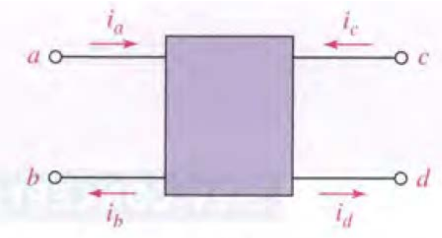
- Parámetros de admitancia
  - Si se describen las ecuaciones de cuadripolo en función de las tensiones en lugar de las corrientes, los coeficientes tendrán unidades de admitancia (mho ó ohm^{-1}).

$$\left.\begin{aligned} I_1 &= Y_{11}V_1 + Y_{12}V_2 \\ I_2 &= Y_{21}V_1 + Y_{22}V_2 \end{aligned}\right\} \Rightarrow \begin{bmatrix} I_1 \\ I_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} Y_{11} & Y_{12} \\ Y_{21} & Y_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} V_1 \\ V_2 \end{bmatrix}$$

  - Denominación: *parámetros Y* o *parámetros de admitancia en cortocircuito.*

$$Y_{11} = \left.\frac{I_1}{V_1}\right|_{V_2=0} \qquad Y_{12} = \left.\frac{I_1}{V_2}\right|_{V_1=0}$$

$$Y_{21} = \left.\frac{I_2}{V_1}\right|_{V_2=0} \qquad Y_{22} = \left.\frac{I_2}{V_2}\right|_{V_1=0}$$

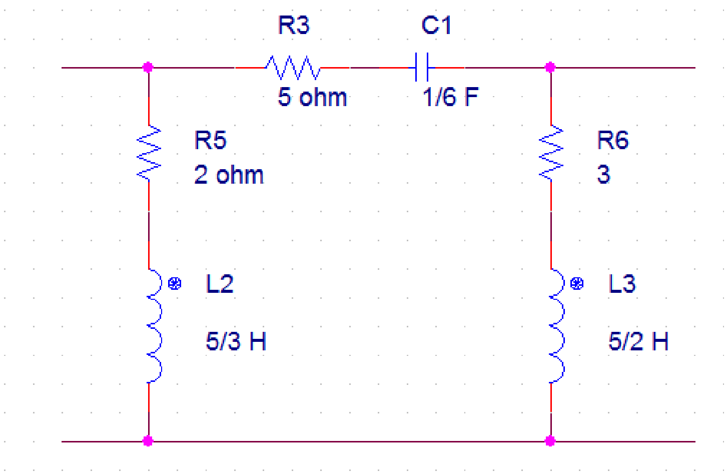


  - Conocida una relación del cuadripolo, se conocen todas:

$$\begin{bmatrix} V_1 \\ V_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} Z_{11} & Z_{12} \\ Z_{21} & Z_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} I_1 \\ I_2 \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{bmatrix} Z_{11} & Z_{12} \\ Z_{21} & Z_{22} \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} V_1 \\ V_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} I_1 \\ I_2 \end{bmatrix} \Rightarrow [Y] = [Z]^{-1}$$

Parámetros generales

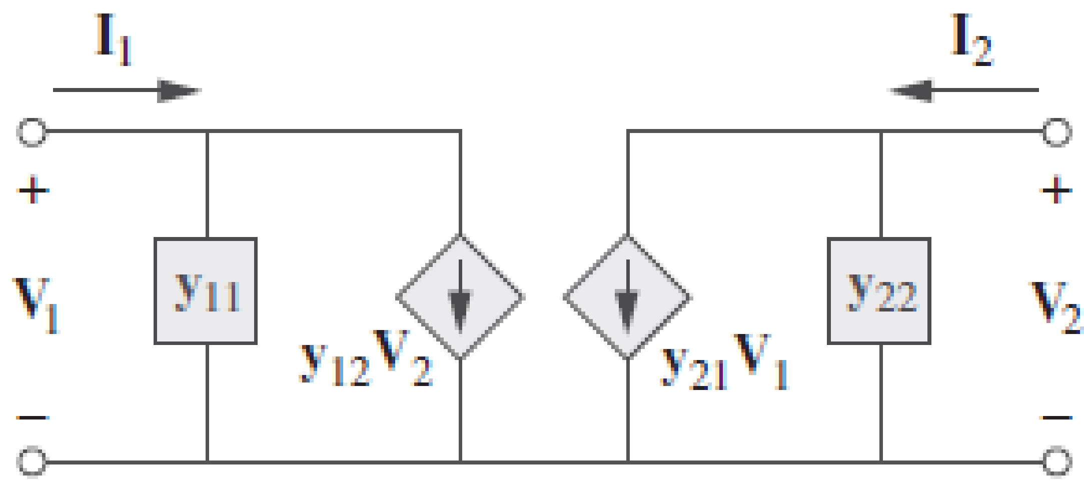
- Ej: Determinar los parámetros Y



Parámetros generales

- Circuito equivalente general de una red en Y

$$I_1 = Y_{11}V_1 + Y_{12}V_2$$
$$I_2 = Y_{21}V_1 + Y_{22}V_2$$



Parámetros generales

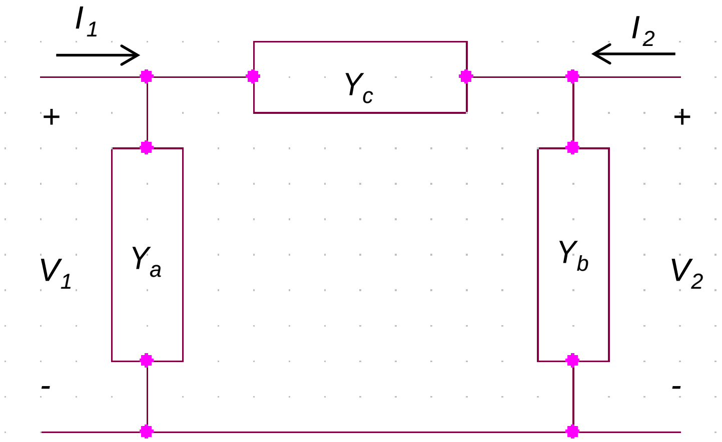
- Equivalente en π de circuitos recíprocos

$$I_1 = Y_{11}V_1 + Y_{12}V_2$$
$$I_2 = Y_{21}V_1 + Y_{22}V_2$$

$$Y_{11} = \left.\frac{I_1}{V_1}\right|_{V_2=0} = Y_a + Y_c \Rightarrow Y_a = Y_{11} + Y_{12}$$

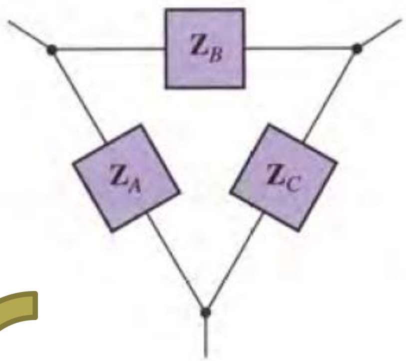
$$Y_{12} = \left.\frac{I_1}{V_2}\right|_{V_1=0} = -Y_c = Y_{21}$$

$$Y_{22} = \left.\frac{I_2}{V_2}\right|_{V_1=0} = Y_b + Y_c \Rightarrow Y_b = Y_{22} + Y_{12}$$



Parámetros generales

- Transformación triángulo $\rightarrow$ estrella



$$Y_{11} = \frac{1}{Z_A} + \frac{1}{Z_B}$$

$$Y_{12} = Y_{21} = -\frac{1}{Z_B}$$

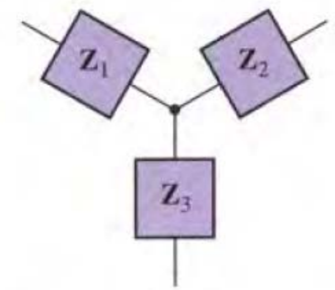
$$Y_{22} = \frac{1}{Z_C} + \frac{1}{Z_B}$$

$$[Z] = [Y]^{-1}$$

$$Z_{11} = Z_1 + Z_3$$

$$Z_{12} = Z_{21} = Z_3$$

$$Z_{22} = Z_2 + Z_3$$

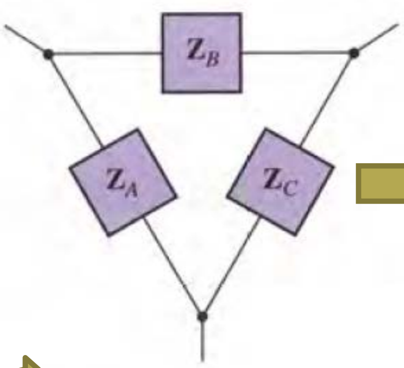


(b)

$$\boxed{\begin{aligned} Z_1 &= \frac{Z_A Z_B}{Z_A + Z_B + Z_C} \\ Z_2 &= \frac{Z_B Z_C}{Z_A + Z_B + Z_C} \\ Z_3 &= \frac{Z_C Z_A}{Z_A + Z_B + Z_C} \end{aligned}}$$

Parámetros generales

- Transformación triángulo $\leftarrow$ estrella

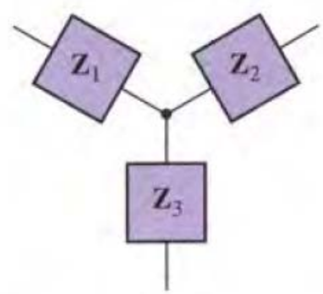


$$Z_A = \frac{Z_1Z_2 + Z_2Z_3 + Z_3Z_1}{Z_2}$$

$$Z_B = \frac{Z_1Z_2 + Z_2Z_3 + Z_3Z_1}{Z_3}$$

$$Z_C = \frac{Z_1Z_2 + Z_2Z_3 + Z_3Z_1}{Z_1}$$

$$Z_{11} = Z_1 + Z_3$$
$$Z_{12} = Z_{21} = Z_3$$
$$Z_{22} = Z_2 + Z_3$$



(b)

$$[Y] = [Z]^{-1}$$

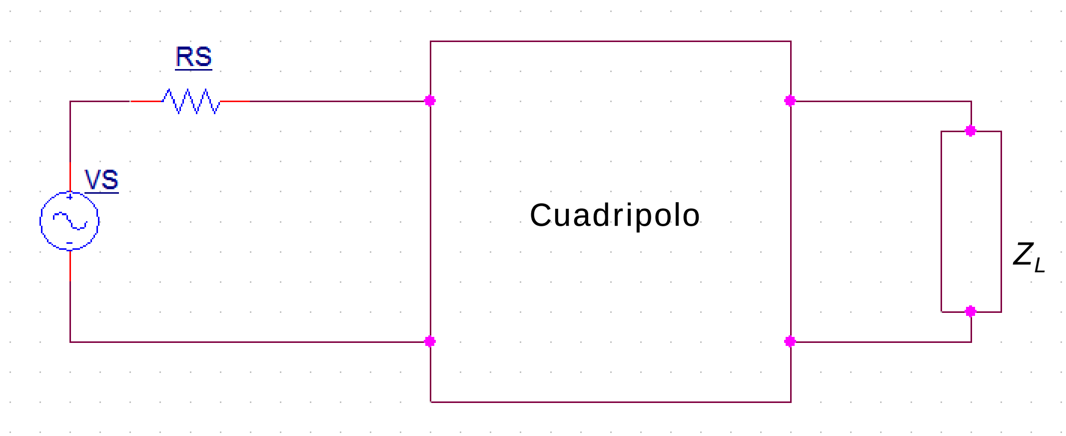
$$Y_{11} = \frac{1}{Z_A} + \frac{1}{Z_B}$$

$$Y_{12} = Y_{21} = -\frac{1}{Z_B}$$

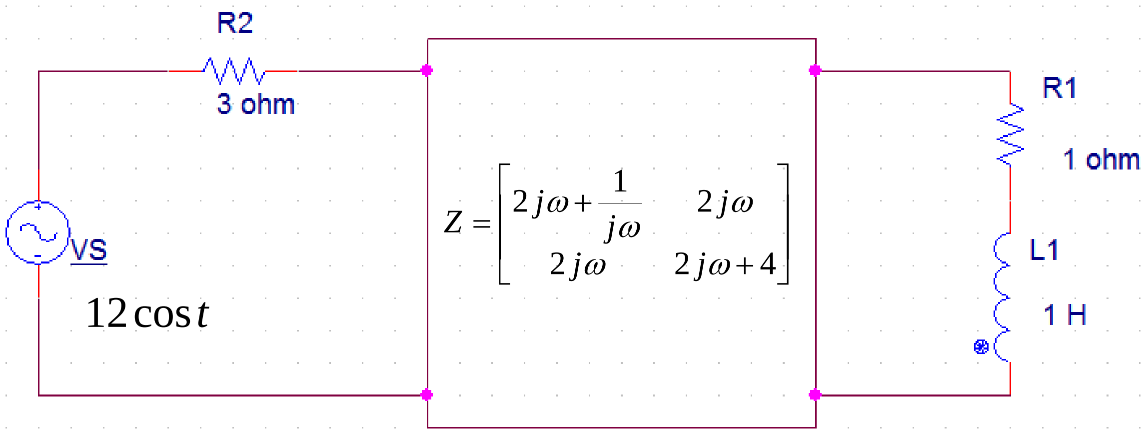
$$Y_{22} = \frac{1}{Z_C} + \frac{1}{Z_B}$$

Aplicación de las características del cuadripolo

- Conocido Z (o Y) podemos saber la respuesta del circuito sin necesidad de conocer el funcionamiento interno del cuadripolo
  - Ej: conexión de un generador real a la entrada y una carga a la salida.

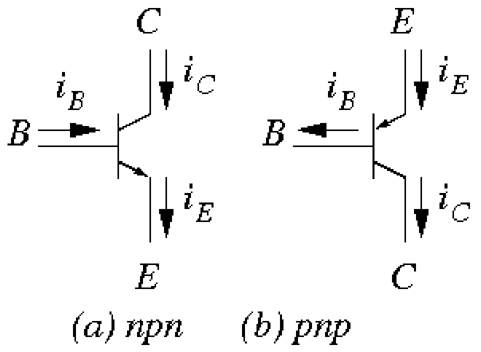


Aplicación de las características del cuadripolo



Parámetros híbridos

- Especialmente indicados para modelar el transistor bipolar
  - Híbridos porque “mezclan” tensiones y corrientes.
  - Variables independientes I_1 y V_2
  - Variables dependientes V_1 y I_2



$$\begin{bmatrix} V_1 \\ I_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} h_{11} & h_{12} \\ h_{21} & h_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} I_1 \\ V_2 \end{bmatrix}$$

  - Unidades

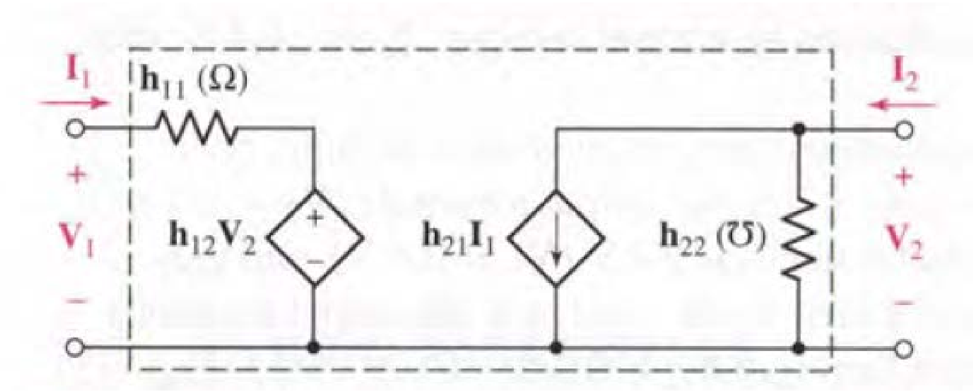
$$h_{11} = \left.\frac{V_1}{I_1}\right|_{V_2=0} \Rightarrow \Omega \qquad h_{12} = \left.\frac{V_1}{V_2}\right|_{I_1=0} \Rightarrow adi.$$

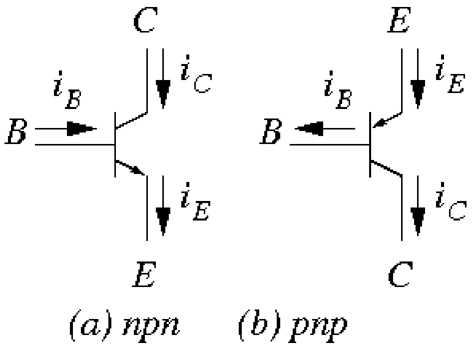
$$h_{21} = \left.\frac{I_2}{I_1}\right|_{V_2=0} \Rightarrow adi. \qquad h_{22} = \left.\frac{I_2}{V_2}\right|_{I_1=0} \Rightarrow \Omega^{-1}$$

  - Transistor tiene 3 terminales: como red de 2 puertos 1 terminal común

Parámetros híbridos

- En el transistor h_{11} y h_{22} tienen comportamiento resistivo / conductivo, y h_{21} y h_{12} son valores reales
- En un circuito cualquiera serían impedancias / imaginarios.
- Circuito equivalente





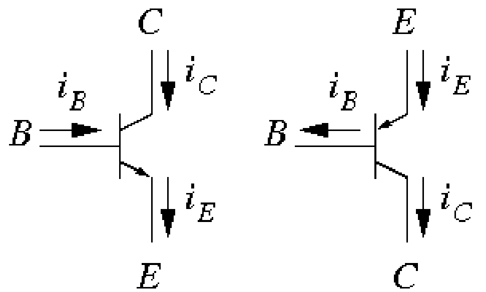
$$\begin{bmatrix} V_1 \\ I_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} h_{11} & h_{12} \\ h_{21} & h_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} I_1 \\ V_2 \end{bmatrix}$$

- h_{11} es una impedancia de entrada -> h_i
- h_{22} es una admitancia de salida -> h_o
- h_{21} influye en salida en función de entrada -> h_f
- h_{12} influye en entrada en función de salida -> h_r

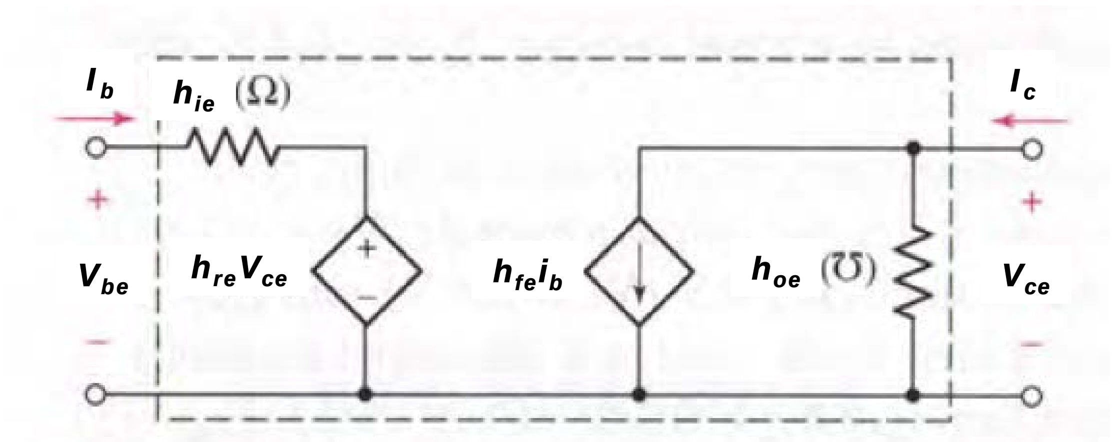
Parámetros híbridos

- En transistor se señala el terminal común:
  - Por ejemplo, emisor común -> h_{ie}, h_{oe}, h_{fe}, h_{re}.

$$\begin{bmatrix} V_{be} \\ I_c \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} h_{ie} & h_{re} \\ h_{fe} & h_{oe} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} I_b \\ V_{ce} \end{bmatrix}$$



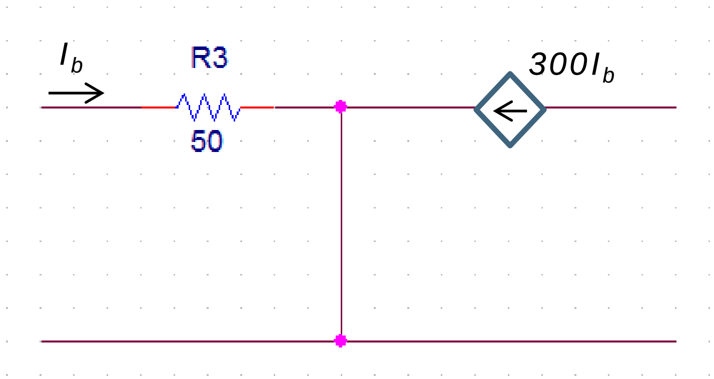
(a) npn (b) pnp



- Con V_1 e I_2 como variables independientes: parámetros *g* (apenas se usan)

Parámetros híbridos

- Ej. Determinar parámetros *h*

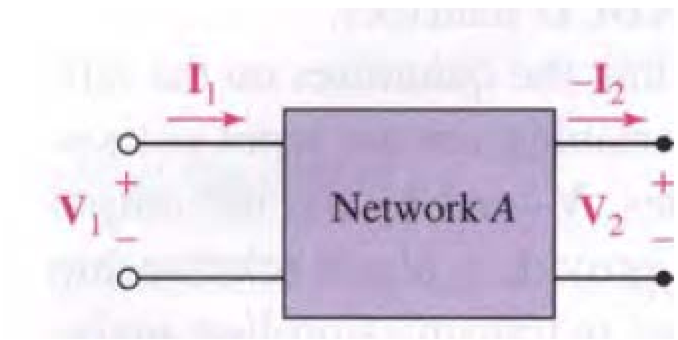


Parámetros de transmisión

- Parámetros de transmisión (*T*)
  - Se obtienen eligiendo (V_2,$-I_2$) como variables independientes y (V_1,I_1) como variables dependientes

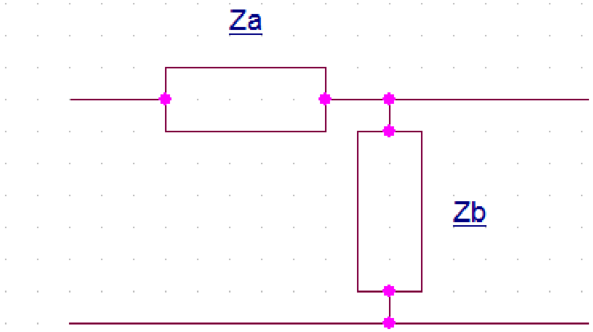
$$\left.\begin{aligned} V_1 &= AV_2 + B(-I_2) \\ I_1 &= CV_2 + D(-I_2) \end{aligned}\right\} \Rightarrow \begin{bmatrix} V_1 \\ I_1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A & B \\ C & D \end{bmatrix} \begin{bmatrix} V_2 \\ -I_2 \end{bmatrix}$$

  - Las dimensiones de cada parámetro son diferentes
  - Útiles en cálculo de líneas de transmisión / conexión módulos en cascada



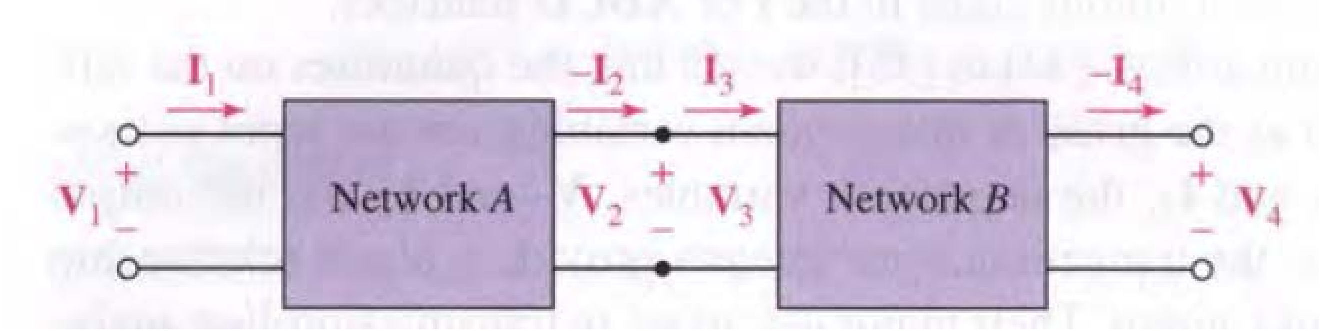
Parámetros de transmisión

- Ej. Determinar parámetros *T*



Interconexión

- Interconexión en cascada
  - Cuando se conecta la salida de una red a la entrada de otra



$$\left.\begin{array}{l}\begin{bmatrix}V_1\\I_1\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}A & B\\C & D\end{bmatrix}\begin{bmatrix}V_2\\-I_2\end{bmatrix}\\[2ex]\begin{bmatrix}V_3\\I_3\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}A' & B'\\C' & D'\end{bmatrix}\begin{bmatrix}V_4\\-I_4\end{bmatrix}\end{array}\right\}\begin{bmatrix}V_1\\I_1\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}A & B\\C & D\end{bmatrix}\begin{bmatrix}A' & B'\\C' & D'\end{bmatrix}\begin{bmatrix}V_4\\-I_4\end{bmatrix}$$

  - OJO: El producto es un producto matricial
  - Son posibles otras combinaciones de redes (serie, paralelo)

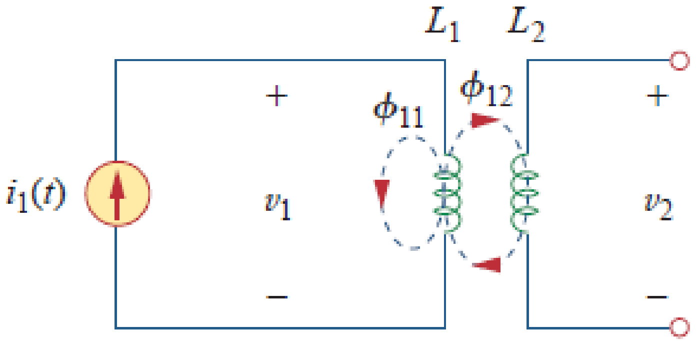
Transformación entre representaciones

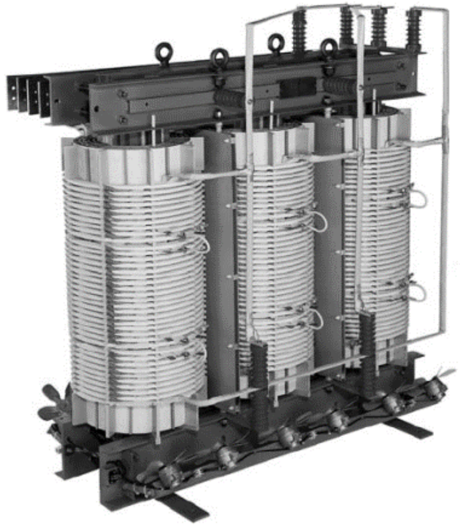
	y		z		h		t	
y	y_{11}	y_{12}	$\frac{z_{22}}{\Delta_z}$	$\frac{-z_{12}}{\Delta_z}$	$\frac{1}{h_{11}}$	$\frac{-h_{12}}{h_{11}}$	$\frac{t_{22}}{t_{12}}$	$\frac{-\Delta_t}{t_{12}}$
	y_{21}	y_{22}	$\frac{-z_{21}}{\Delta_z}$	$\frac{z_{11}}{\Delta_z}$	$\frac{h_{21}}{h_{11}}$	$\frac{\Delta_h}{h_{11}}$	$\frac{-1}{t_{12}}$	$\frac{t_{11}}{t_{12}}$
z	$\frac{y_{22}}{\Delta_y}$	$\frac{-y_{12}}{\Delta_y}$	z_{11}	z_{12}	$\frac{\Delta_h}{h_{22}}$	$\frac{h_{12}}{h_{22}}$	$\frac{t_{11}}{t_{21}}$	$\frac{\Delta_t}{t_{21}}$
	$\frac{-y_{21}}{\Delta_y}$	$\frac{y_{11}}{\Delta_y}$	z_{21}	z_{22}	$\frac{-h_{21}}{h_{22}}$	$\frac{1}{h_{22}}$	$\frac{1}{t_{21}}$	$\frac{t_{22}}{t_{21}}$
h	$\frac{1}{y_{11}}$	$\frac{-y_{12}}{y_{11}}$	$\frac{\Delta_z}{z_{22}}$	$\frac{z_{12}}{z_{22}}$	h_{11}	h_{12}	$\frac{t_{12}}{t_{22}}$	$\frac{\Delta_t}{t_{22}}$
	$\frac{y_{21}}{y_{11}}$	$\frac{\Delta_y}{y_{11}}$	$\frac{-z_{21}}{z_{22}}$	$\frac{1}{z_{22}}$	h_{21}	h_{22}	$\frac{-1}{t_{22}}$	$\frac{t_{21}}{t_{22}}$
t	$\frac{-y_{22}}{y_{21}}$	$\frac{-1}{y_{21}}$	$\frac{z_{11}}{z_{21}}$	$\frac{\Delta_z}{z_{21}}$	$\frac{-\Delta_h}{h_{21}}$	$\frac{-h_{11}}{h_{21}}$	t_{11}	t_{12}
	$\frac{-\Delta_y}{y_{21}}$	$\frac{-y_{11}}{y_{21}}$	$\frac{1}{z_{21}}$	$\frac{z_{22}}{z_{21}}$	$\frac{-h_{22}}{h_{21}}$	$\frac{-1}{h_{21}}$	t_{21}	t_{22}

For all parameter sets: $\Delta_p = p_{11}p_{22} - p_{12}p_{21}$.

Transformador

- Corriente por un conductor $\rightarrow$ campo magnético
  - Cuando atraviesa un lazo se habla de *flujo magnético*.
  - Produce el efecto de la auto-inductancia (bobinas).
- Si campo generado por un conductor produce un flujo magnético variable con el tiempo en otro lazo aparece el fenómeno de **inductancia mutua**
  - Aparece una tensión entre los extremos del segundo lazo.
- fundamento de los circuitos acoplados magnéticamente: **transformador.**





Transformador

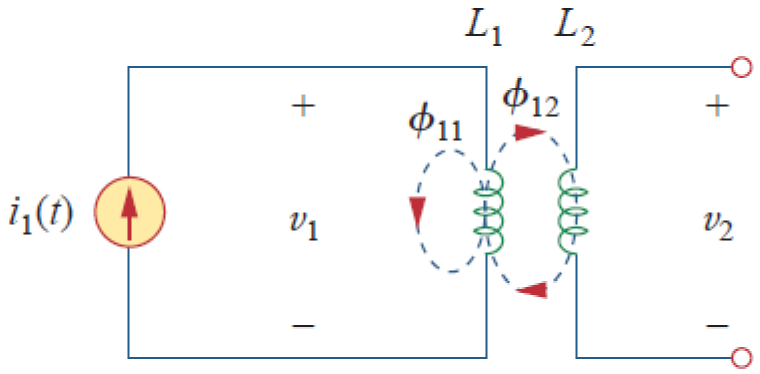
- Inductancia mutua
  - Tema 2: la (auto)inductancia aparece por efecto del flujo magnético

$$v(t) = L\frac{di(t)}{dt}$$

  - Origen físico
    - En conductores lineales el flujo magnético producido por una corriente es proporcional a su magnitud
    - La *fem* inducida por un campo variable con el tiempo es proporcional a la variación del flujo magnético
  - La **inductancia mutua** es la aparición de una *fem* (tensión) en un determinado elemento producida por variaciones de flujo magnético producido por otro elemento.

Transformador

- Inductancia mutua
  - Suponiendo dos inductancias (bobinas) próximas, el campo magnético producido por una genera un flujo magnético en la otra, mayor cuanto más próximas estén.



  - El acoplamiento es bidireccional
  - Obviando por ahora el signo de la tensión inducida, se define el **coeficiente de inductancia mutua** o simplemente **inductancia mutua** como:

$$v_2(t) = M_{21} \frac{di_1(t)}{dt}$$

Transformador

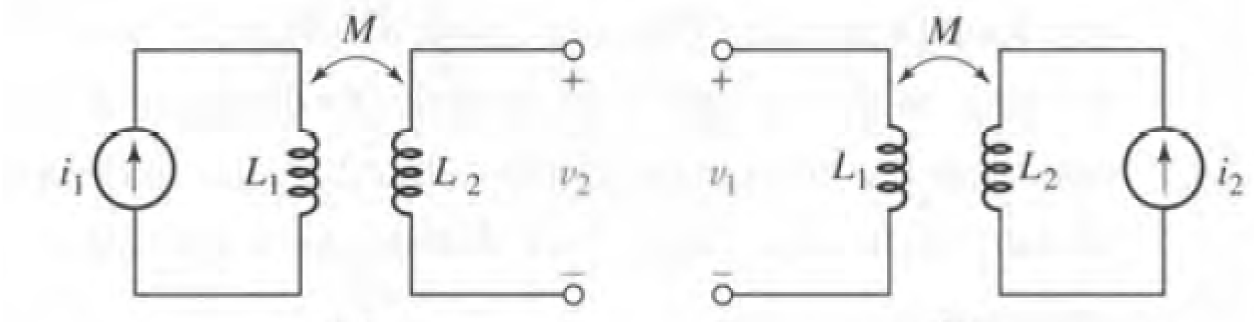
- Inductancia mutua
  - Análogamente, si se aplica corriente al segundo puerto

$$v_1(t) = M_{12} \frac{di_2(t)}{dt}$$

  - Demostraremos además que:

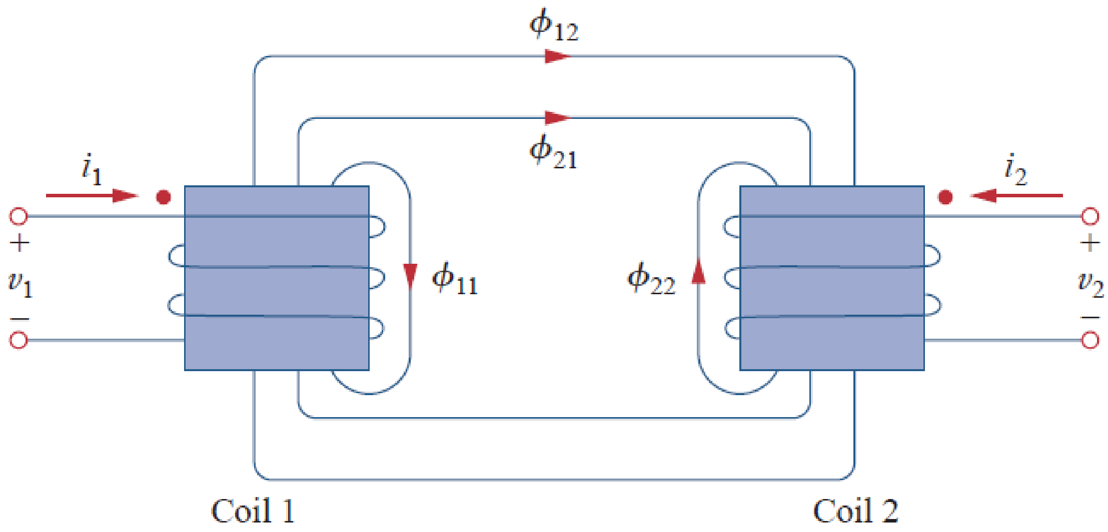
$$M_{12} = M_{21} = M$$

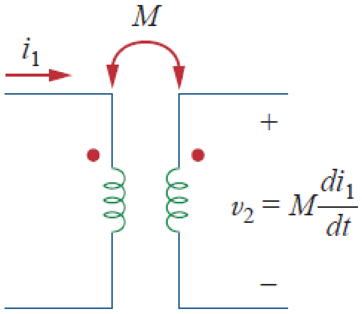
    - Unidades iguales a las de las inductancias: Henrio (H)
    - M>0
  - Notación para señalar el acoplamiento magnético:



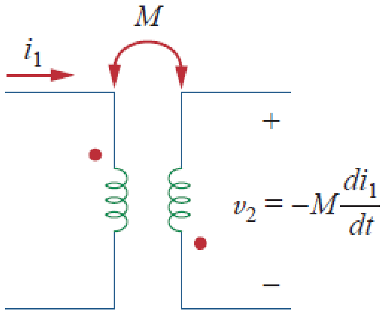
Transformador

- Inductancia mutua
  - Bobinas: convenio positivo de signos
  - Bobinas acopladas: **Convención del punto** → Si la corriente que entra por el terminal con punto de una bobina aumenta, aparece una tensión positiva en el terminal con punto de la segunda.



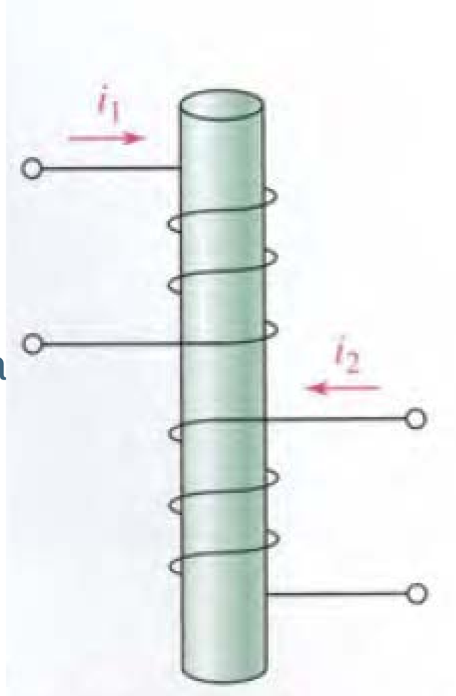


(a)



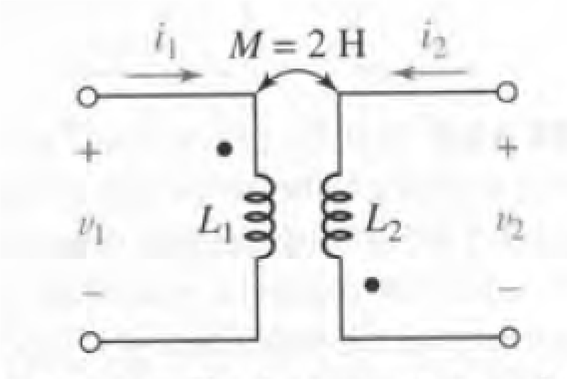
Transformador

- Origen físico de la convención de puntos
  - Supongamos que las bobinas están fabricadas enrollando cable sobre un cilindro como en la figura.
  - Si i_1 aumenta, produce un campo magnético creciente apuntando hacia la bobina 2 (regla de la mano derecha).
  - Un aumento de i_2 también produce un flujo creciente hacia abajo.
    - Flujos aditivos.
  - La tensión en cada bobina depende de la variación de flujo a su través.
  - Por tanto, si $i_2 = 0$ la tensión en el terminal superior de la bobina 2 será mayor si la corriente i_1 está creciendo.
  - Viceversa, si $i_1 = 0$ la tensión en el terminal superior de la bobina 1 será mayor si la corriente i_2 está creciendo.
    - En consecuencia, el punto estaría en los terminales superiores (o inferiores) de las bobinas.



Transformador

- Ej: determinar
  - a) v_1 si $i_2 = 5\ \mathrm{sen}(45t)$ y $i_1 = 0$
  - b) v_2 si $i_1 = -8\ e^{-t}$ y $i_2 = 0$

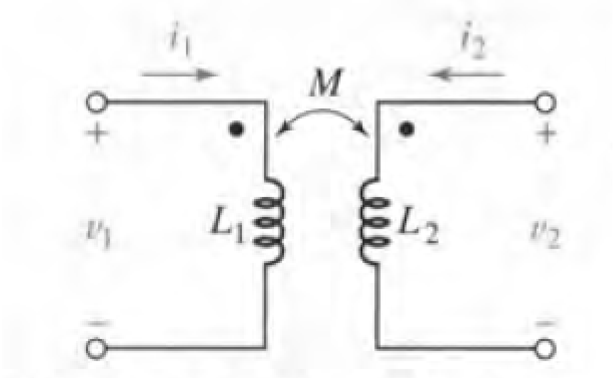


Transformador

- Tensión combinada de la inducción mutua
  - Si ambas bobinas tienen corriente la *fem* (tensión) de cada puerto tendrá un doble origen
    - La autoinducción de cada bobina (L_1 ó L_2)
    - La inducción muta (M)

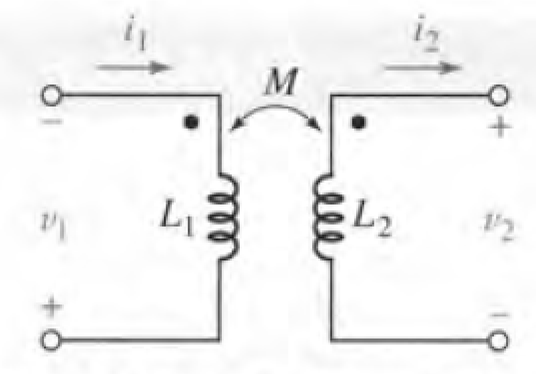
$$v_1 = L_1 \frac{di_1}{dt} + M \frac{di_2}{dt}$$

$$v_2 = M \frac{di_1}{dt} + L_2 \frac{di_2}{dt}$$



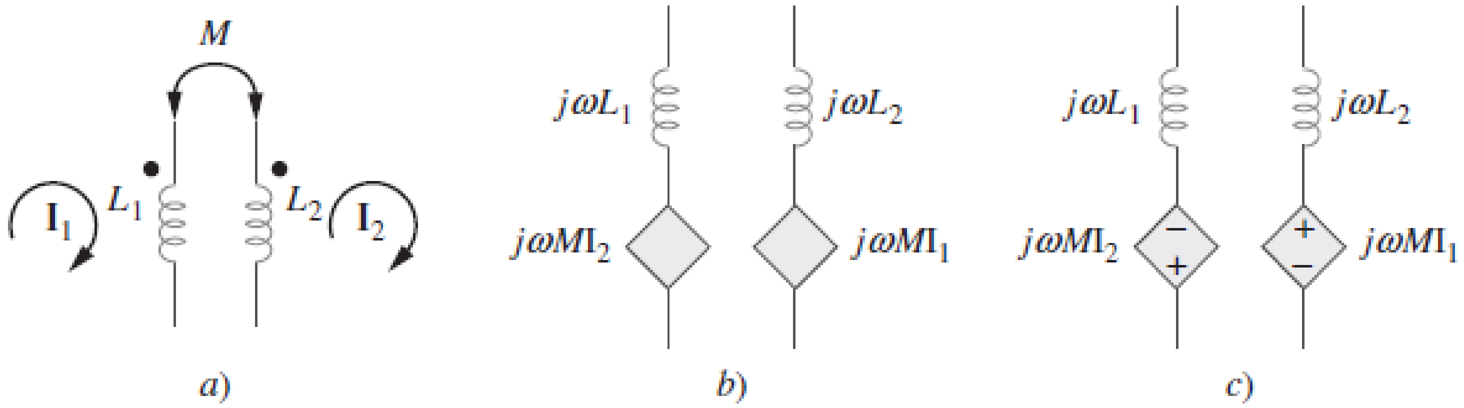
Transformador

- Ej: determinar v_1 y v_2 con el criterio de la figura



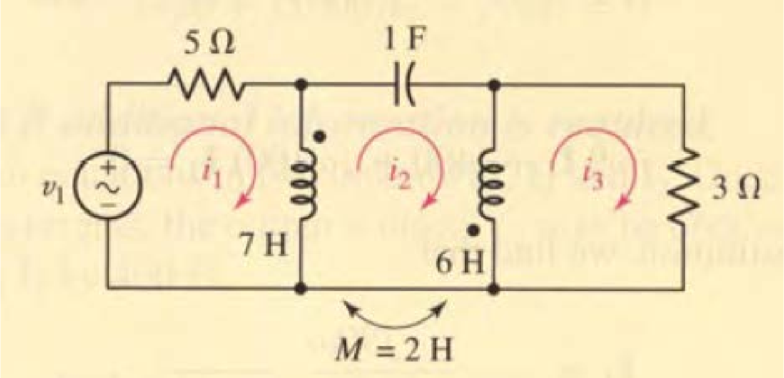
Transformador

- Método para ayudar con el análisis
  - No es estrictamente necesario, pero puede ayudar



Transformador

- Escribir las ecuaciones de malla en forma fasorial.



Transformador

- Energía en bobinas acopladas
  - Queremos saber la energía almacenada cuando la corriente es I_1 e I_2 (DC)
  - Para calcularla, primero supondremos que subimos i_1 con $i_2 = 0$ y calcularemos energía total almacenada (intervalo 1)

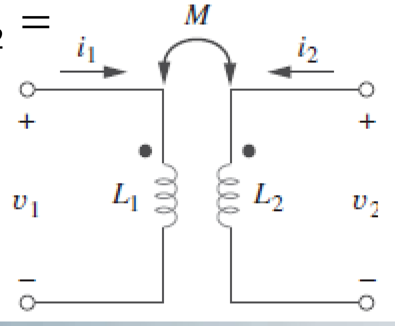
$$p_1(t) = v_1 i_1 = i_1 L_1 \frac{di_1}{dt} \Rightarrow w_1 = \frac{1}{2} L_1 I_1^{\,2}$$

  - En el segundo intervalo, subimos i_2 manteniendo I_1
    - En la bobina 2 no hay tensión inducida al ser I_1 constante
    - Tensión inducida en 1 por variación de i_2 es $M_{12} \frac{di_2}{dt}$

$$p_2(t) = I_1 v_1 + i_2 v_2 = I_1 M_{12} \frac{di_2}{dt} + i_2 L_2 \frac{di_2}{dt} \Rightarrow$$

$$w_2 = \int_0^T p_2(t) dt = I_1 M_{12} \int_0^T \frac{di_2}{dt} dt + \int_0^T i_2 L_2 \frac{di_2}{dt} dt = I_1 M_{12} \int_0^{I_2} di_2 + L_2 \int_0^{I_2} i_2 di_2 =$$

$$= M_{12} I_1 I_2 + \frac{1}{2} L_2 I_2^{\,2}$$



Transformador

- Energía en bobinas acopladas
  - Por tanto, la energía almacenada en los intervalos 1 y 2 es:

$$w = w_1 + w_2 = \frac{1}{2} L_1 I_1^{\,2} + M_{12} I_1 I_2 + \frac{1}{2} L_2 I_2^{\,2}$$

  - Si hubiéramos invertido el orden, primero subiendo i_2 y luego i_1

$$w = w_1 + w_2 = \frac{1}{2} L_1 I_1^{\,2} + M_{21} I_1 I_2 + \frac{1}{2} L_2 I_2^{\,2}$$

  - Por tanto, como la energía tiene que ser la misma en los dos casos

$$M_{12} = M_{21} = M$$

  - Atención: hemos supuesto corrientes entrantes por puntos. Si las dos salientes mismo resultado, pero si una es saliente y la otra entrante $\rightarrow$ término cruzado con signo -.

$$w = \frac{1}{2} L_1 I_1^{\,2} + \frac{1}{2} L_2 I_2^{\,2} \pm M I_1 I_2$$

Transformador

- Coeficiente de acoplamiento de bobinas *k*

$$w = \frac{1}{2} L_1 I_1^{\ 2} + \frac{1}{2} L_2 I_2^{\ 2} \pm M I_1 I_2 \geq 0$$

$$\frac{1}{2} L_1 I_1^{\ 2} + \frac{1}{2} L_2 I_2^{\ 2} - M I_1 I_2 \geq 0$$

$$\frac{1}{2} L_1 I_1^{\ 2} - \sqrt{L_1 L_2} I_1 I_2 + \frac{1}{2} L_2 I_2^{\ 2} + \sqrt{L_1 L_2} I_1 I_2 - M I_1 I_2 \geq 0$$

$$\underbrace{\frac{1}{2}\left(\sqrt{L_1} I_1 - \sqrt{L_2} I_2\right)^2}_{\geq 0 \ \Rightarrow} + \underbrace{\left(\sqrt{L_1 L_2} - M\right)}_{\geq 0} I_1 I_2 \geq 0$$

Transformador

- Coeficiente de acoplamiento de dos bobinas:
  - Por tanto:

$$M \leq \sqrt{L_1}\sqrt{L_2}$$

  - El coeficiente de acoplamiento da una indicación de cuánto se aproxima M a su valor máximo. Se define como:

$$k = \frac{M}{\sqrt{L_1 L_2}}; \quad 0 \leq k \leq 1$$

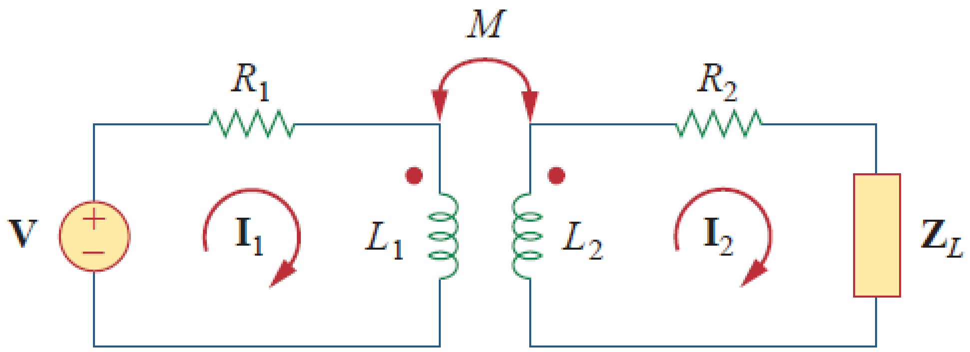
  - Cuanto más próximas están las bobinas el flujo magnético producido por L_1 en L_2 es mayor, y eso produce un acoplamiento mayor y *k* se aproxima a 1
  - Si prácticamente todo el campo que produce L_1 pasa por L_2 entonces *k* ~ 1 y se dice que las bobinas están **estrechamente acopladas**

Transformador

- Transformador
  - Un transformador es una red de dos puertos que contiene dos bobinas acopladas magnéticamente.
  - Estudiaremos dos tipos de transformadores
    - Transformador lineal
      - Típico para alta frecuencia
    - Transformador ideal
      - Habitual para regulación de V

Transformador lineal

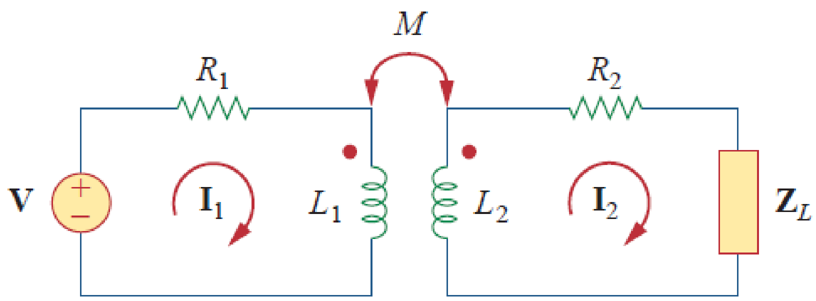
- Contiene dos bobinas acopladas magnéticamente
- Lineal porque basado en $\phi = L\,I$
  - Los materiales magnéticos que se usan en muchos transformadores pueden producir una relación no lineal entre flujo y corriente
- El terminal de entrada se denomina **primario**
- El terminal de salida se denomina **secundario**



  - En muchos de estos transformadores no se usa núcleo magnético, lo que produce acoplamientos ~0.1-0.2.

Transformador lineal

- Ecuaciones de malla



$$\begin{cases} V - R_1 I_1 - j\omega L_1 I_1 + j\omega M I_2 = 0 \\ -R_2 I_2 - Z_L I_2 - j\omega L_2 I_2 + j\omega M I_1 = 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} \left(R_1 + j\omega L_1\right) I_1 - j\omega M I_2 = V \\ -j\omega M I_1 + \left(R_2 + j\omega L_2 + Z_L\right) I_2 = 0 \end{cases}$$

$$\left.\begin{matrix} \left(R_1 + j\omega L_1\right) = Z_{11} \\ \left(R_2 + j\omega L_2 + Z_L\right) = Z_{22} \end{matrix}\right\} \Rightarrow \begin{cases} V = Z_{11} I_1 - j\omega M I_2 \\ 0 = -j\omega M I_1 + Z_{22} I_2 \end{cases}$$

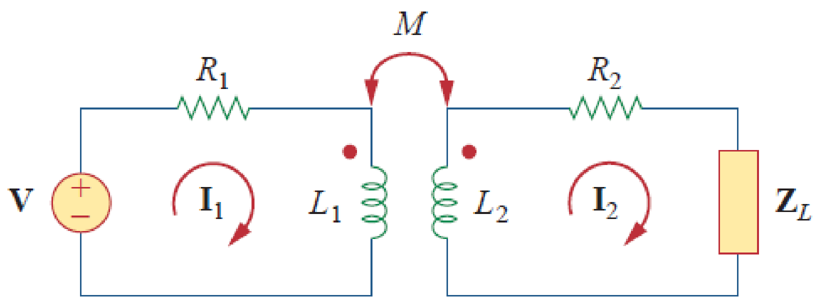
- Impedancia de entrada $Z_{in} = \dfrac{V}{I_1}$

$$I_2 = \frac{j\omega M}{Z_{22}} I_1 \Rightarrow V = \left(Z_{11} - \frac{j\omega M}{Z_{22}} j\omega M\right) I_1 = \left(Z_{11} + \frac{\omega^2 M^2}{Z_{22}}\right) I_1$$

$$\boxed{Z_{in} = Z_{11} + \frac{\omega^2 M^2}{Z_{22}}}$$

Transformador lineal

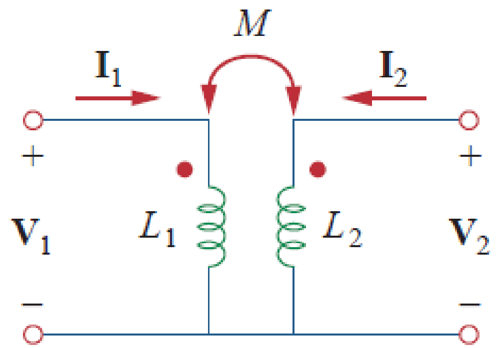
- Ej: obtener Z_{in}
  - R_1 = 3 ohm, R_2 = 6 ohm
  - L_1 = 2 mH, L_2 = 10 mH, M = 4 mH
  - ω = 5000 rad/s



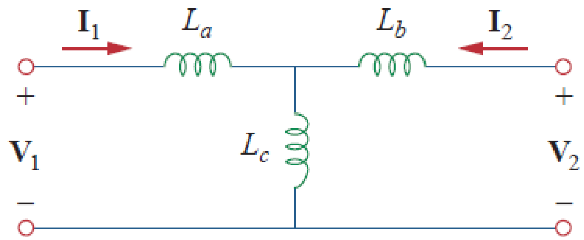
a) Z_L = 10 ohm; b) Z_L = 20j ohm; c) Z_L = 10+20j ohm; d) Z_L = -20j ohm;

- Red equivalente en T
  - Puede ser interesante transformar el circuito para que en el análisis no aparezcan bobinas acopladas magnéticamente.
  - Para ello tenemos que suponer que se unen los terminales negativos de las bobinas.

$$\begin{bmatrix} V_1 \\ V_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} j\omega L_1 & j\omega M \\ j\omega M & j\omega L_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} I_1 \\ I_2 \end{bmatrix}$$



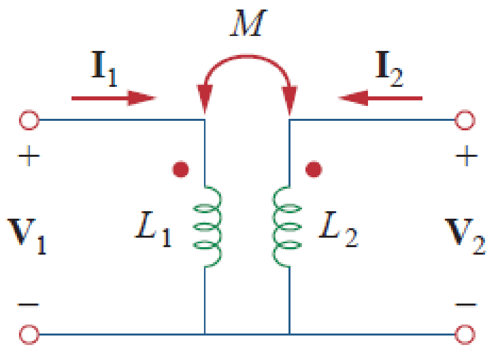
$$\begin{bmatrix} V_1 \\ V_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} j\omega(L_a + L_c) & j\omega L_c \\ j\omega L_c & j\omega(L_b + L_c) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} I_1 \\ I_2 \end{bmatrix}$$



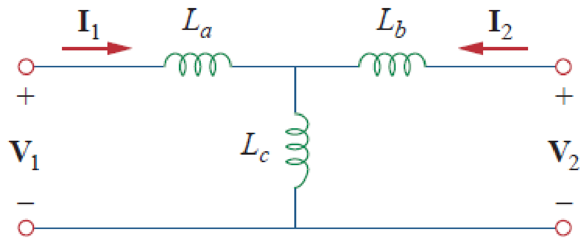
Transformador lineal

- Red equivalente en T
  - Comparando ambos circuitos, es claro que $L_C=M$, $L_a=L_1-M$, $L_b=L_2-M$
  - El circuito equivalente puede tener inductancias negativas!

$$\begin{bmatrix} V_1 \\ V_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} j\omega L_1 & j\omega M \\ j\omega M & j\omega L_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} I_1 \\ I_2 \end{bmatrix}$$

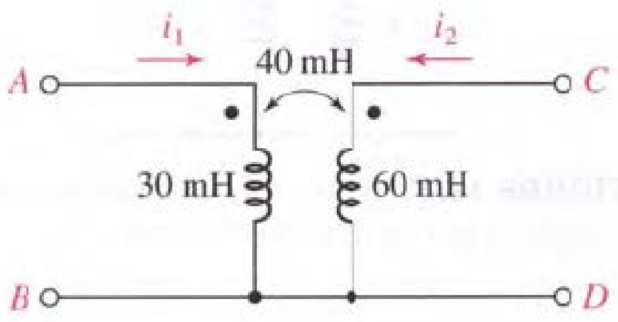


$$\begin{bmatrix} V_1 \\ V_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} j\omega(L_a + L_c) & j\omega L_c \\ j\omega L_c & j\omega(L_b + L_c) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} I_1 \\ I_2 \end{bmatrix}$$



Transformador lineal

- Ej: encontrar el circuito equivalente en T



Transformador ideal

- El transformador ideal modela un transformador real en el que
  - 1.- El acoplamiento se aproxima a 1
    - Todo el campo que genera la bobina 1 pasa a través de la bobina 2.
  - 2.- Las impedancias del primario y el secundario son muy grandes en comparación con las impedancias del circuito.
  - 3.- La resistencia de los cables es despreciable
- Para conseguirlo se bobinan el **primario** y el **secundario** sobre un mismo núcleo de material ferromagnético
  - Parámetro crítico: **relación de vueltas “*a*”**

$$a = \frac{N_2}{N_1}$$

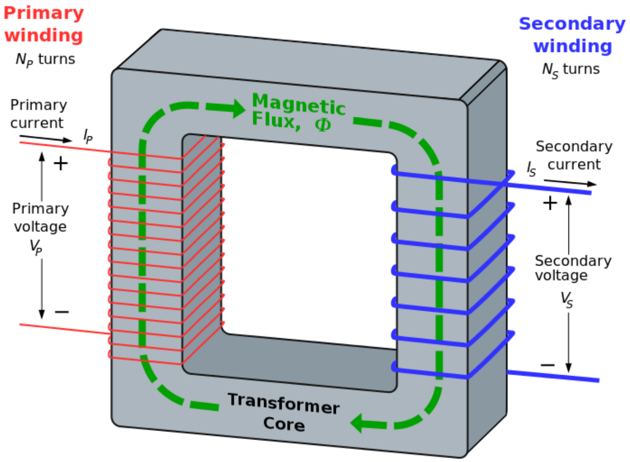
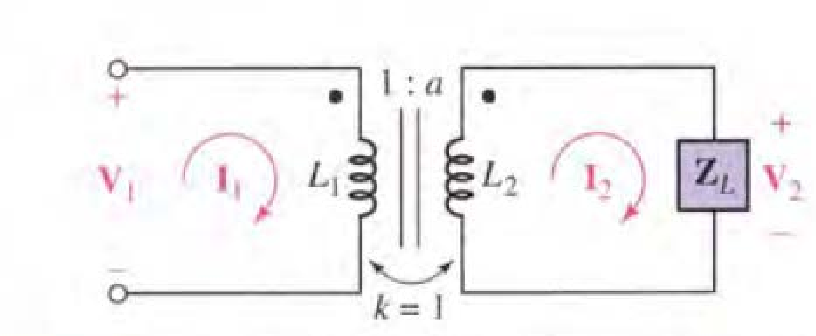


Figura: BillC at the English language Wikipedia [GFDL or CC-BY-SA-3.0], via Wikimedia Commons

Transformador ideal

- Relación de vueltas
  - La autoinductancia de una bobina es proporcional al **cuadrado** del número de vueltas (Física):
    - Si una corriente I fluye por una bobina de N vueltas (espira) el flujo total será N veces el de una sola espira.
    - Cuando la corriente varía, varía el flujo, y esta variación produce una tensión en cada espira proporcional a N veces la variación del flujo.
    - Como hay N vueltas, la tensión será proporcional a $N*N=N^2$
  - Si tenemos dos bobinados, L_1 y L_2, cada uno con N_1 y N_2 vueltas, con la misma geometría de espira

$$\frac{L_2}{L_1} = \frac{N_2^{\ 2}}{N_1^{\ 2}} = a^2$$

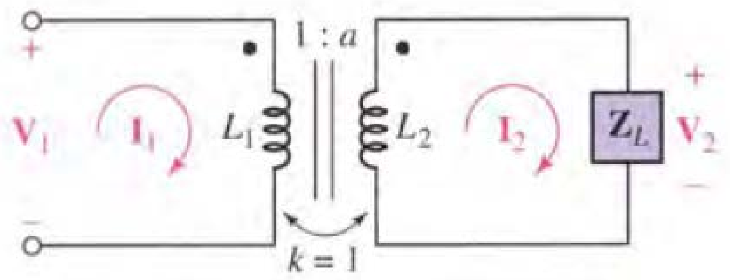


Transformador ideal

- Análisis en alterna (KVL)

$$V_1 - (j\omega L_1) I_1 + j\omega M I_2 = 0$$

$$j\omega M I_1 - (j\omega L_2 + Z_L) I_2 = 0$$



  – **Impedancia de entrada (transformador ideal)**

$$\left.\begin{array}{l} Z_{in} = \dfrac{V_1}{I_1} \\[2ex] I_2 = \dfrac{j\omega M}{Z_L + j\omega L_2} I_1 \Rightarrow V_1 = \left(j\omega L_1 + \dfrac{\omega^2 M^2}{Z_L + j\omega L_2} \right) I_1 \end{array}\right\} Z_{in} = j\omega L_1 + \frac{\omega^2 M^2}{Z_L + j\omega L_2}$$

$$\left.\begin{array}{l} M^2 = L_1 L_2 \\ L_2 = a^2 L_1 \end{array}\right\} \Rightarrow Z_{in} = j\omega L_1 + \frac{\omega^2 L_1 L_2}{Z_L + j\omega L_2} = j\omega L_1 + \frac{\omega^2 a^2 L_1^{\,2}}{Z_L + j\omega a^2 L_1}$$

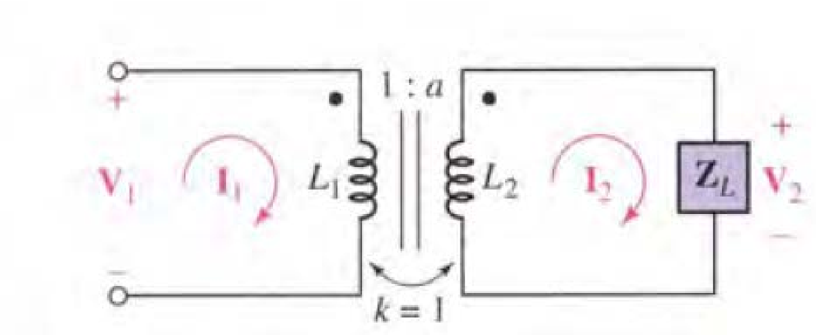
Transformador ideal

– Agrupando términos

$$Z_{in} = j\omega L_1 + \frac{\omega^2 a^2 L_1^{\,2}}{Z_L + j\omega a^2 L_1} = \frac{j\omega L_1 Z_L}{Z_L + j\omega a^2 L_1} = \frac{Z_L}{\dfrac{Z_L}{j\omega L_1} + a^2}$$

– Como las inductancias son grandes

$$\boxed{Z_{in} \cong \frac{Z_L}{a^2}}$$



– La impedancia de carga aparece reflejada en el primario con un factor que depende de *a*.

- Ej: transformador con 100 vueltas en primario, 10^4 en secundario
  – $a = 100$, $a^2 = 10^4$
  – Una resistencia de 20 kΩ se observa como 20 Ω
  – Una inductancia de 200 mH aparece como 20 μH

Transformador ideal

- Ajuste de corriente
  - Se puede emplear un transformador para cambiar el nivel de corriente
  - KVL en la malla de salida

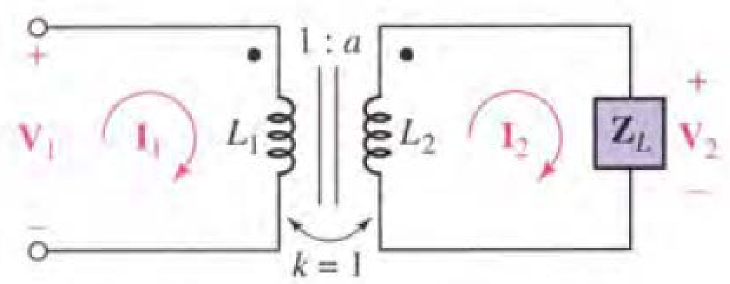
$$j\omega M I_1 - \left(j\omega L_2 + Z_L \right) I_2 = 0 \Rightarrow \frac{I_2}{I_1} = \frac{j\omega M}{Z_L + j\omega L_2}$$

  - Las inductancias son muy grandes

$$\frac{I_2}{I_1} \cong \frac{j\omega M}{j\omega L_2} = \frac{M}{L_2} = \frac{\sqrt{L_1 L_2}}{L_2} = \sqrt{\frac{L_1}{L_2}} = \frac{1}{a}$$

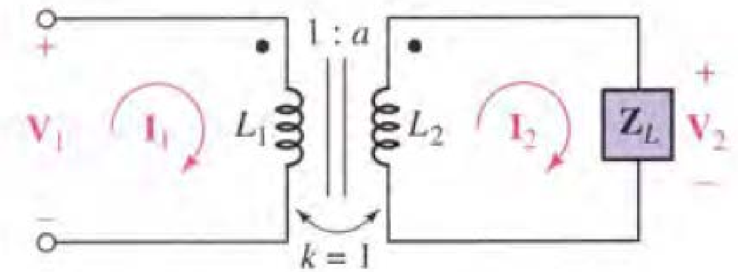
  - **La corriente del secundario se reduce en un factor *a***
  - O bien

$$\boxed{N_1 I_1 = N_2 I_2}$$



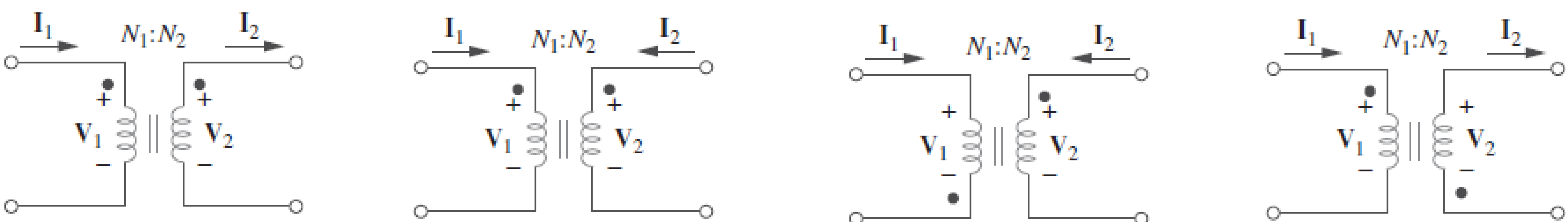
Transformador ideal

- Ajuste de tensión
  - Se suele emplear un transformador para cambiar el nivel de tensión
  - La tensión de salida será $V_2 = I_2 Z_L$
  - La de entrada al transformador $V_1 = I_1 Z_L' = I_1 \dfrac{Z_L}{a^2}$
  - Combinando ambas $$\frac{V_2}{V_1} = \frac{I_2}{I_1} a^2 = \frac{1}{a} a^2 = a$$
  - **La tensión en el secundario aumenta en un factor *a*** (transformador elevador o reductor)
  - O bien $$\boxed{\frac{V_1}{N_1} = \frac{V_2}{N_2}}$$



Transformador ideal

- Signos de tensión y corriente
  - Si V_1 y V_2 **ambos** son positivos o negativos en el punto $\rightarrow$ signo + en relación de las tensiones
  - Si I_1 y I_2 **ambas** son entrantes o salientes por el punto $\rightarrow$ signo - en la relación de las corrientes



a) $\frac{\mathbf{V}_2}{\mathbf{V}_1} = \frac{N_2}{N_1} \qquad \frac{\mathbf{I}_2}{\mathbf{I}_1} = \frac{N_1}{N_2}$

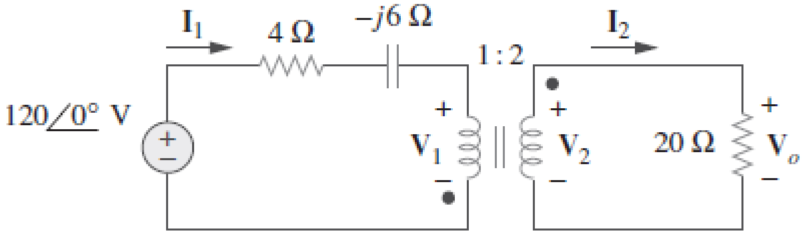
b) $\frac{\mathbf{V}_2}{\mathbf{V}_1} = \frac{N_2}{N_1} \qquad \frac{\mathbf{I}_2}{\mathbf{I}_1} = -\frac{N_1}{N_2}$

c) $\frac{\mathbf{V}_2}{\mathbf{V}_1} = -\frac{N_2}{N_1} \qquad \frac{\mathbf{I}_2}{\mathbf{I}_1} = \frac{N_1}{N_2}$

d) $\frac{\mathbf{V}_2}{\mathbf{V}_1} = -\frac{N_2}{N_1} \qquad \frac{\mathbf{I}_2}{\mathbf{I}_1} = -\frac{N_1}{N_2}$

Transformador ideal

- Ej: obtener I_1, V_o y la potencia compleja suministrada

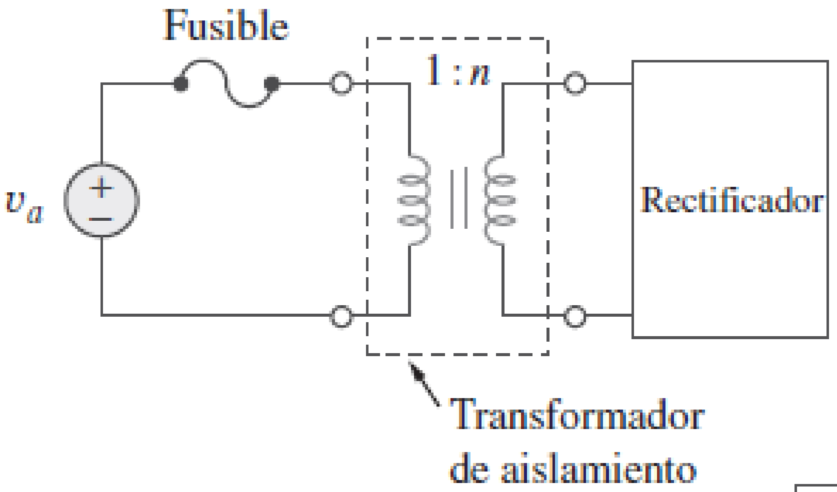


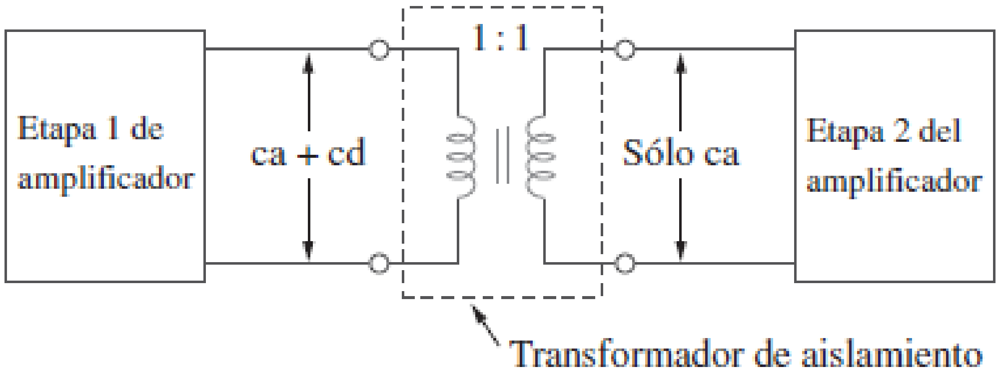
Aplicaciones

- Aislamiento galvánico
- Para ajuste de tensión / corriente
  - Redes de distribución
- Acoplo de impedancias
- Filtrado de señales

Aplicaciones

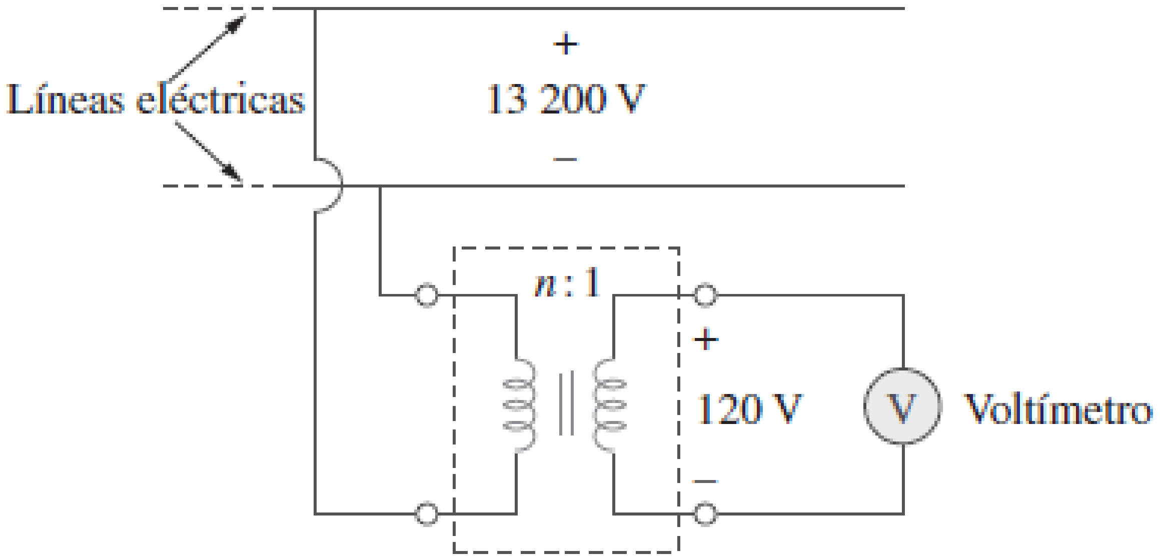
- Aislamiento galvánico





Aplicaciones

- Medida de altas tensiones



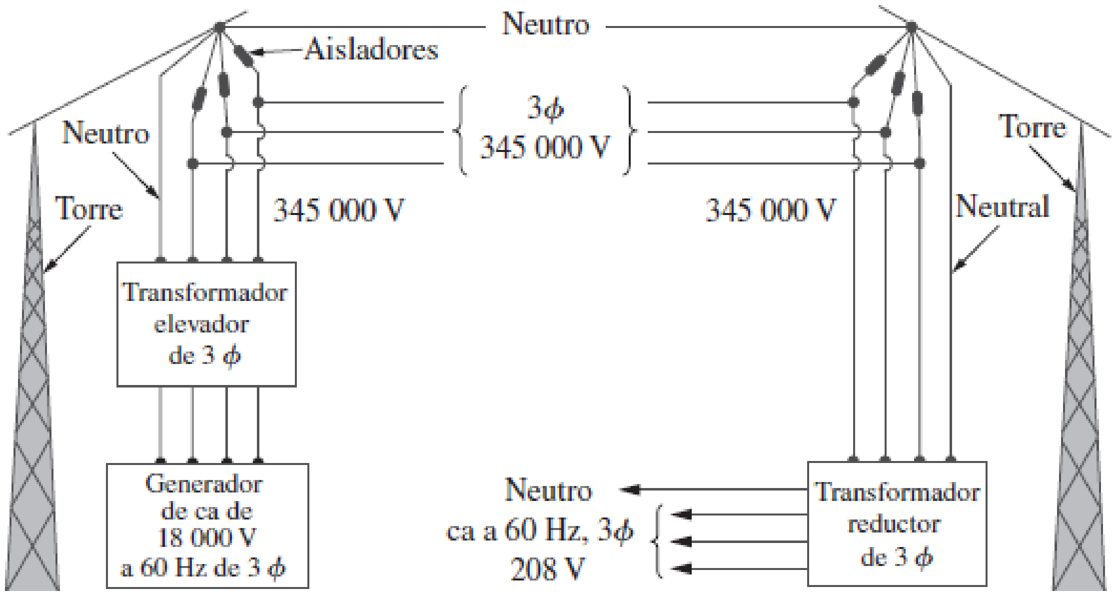
Aplicaciones

- Distribución de la electricidad

$$N_1 I_1 = N_2 I_2$$

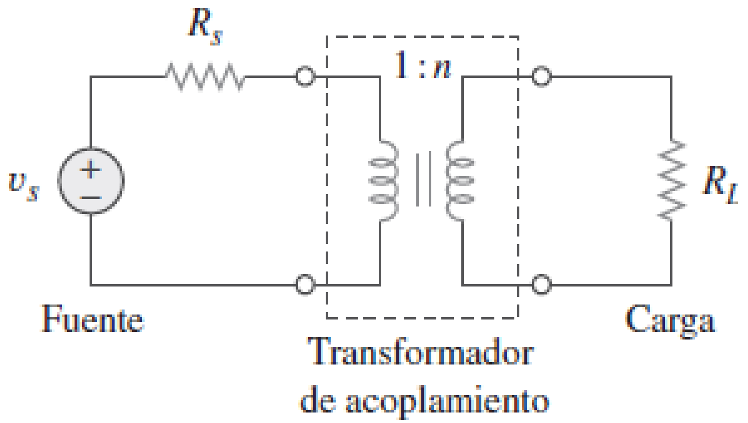
$$\frac{V_1}{N_1} = \frac{V_2}{N_2}$$

$$P_1 = \mathrm{Re}\left(\frac{1}{2} V_1 I_1^{\ *}\right) = \mathrm{Re}\left(\frac{1}{2}\frac{N_1}{N_2} V_2 \frac{N_2}{N_1} I_2^{\ *}\right) = \mathrm{Re}\left(\frac{1}{2} V_2 I_2^{\ *}\right) = P_2$$



Aplicaciones

- Acoplo de impedancias
  - Se maximizar la potencia cuando $R_{in}=R_s$



$$Z_{in} \cong \frac{Z_L}{n^2} \Rightarrow R_{in} = \frac{R_L}{n^2}$$

Aplicaciones

- Ej: obtener relación de vueltas para el acoplamiento óptimo de un altavoz de 12 Ω a un amplificador con impedancia de salida de 192 kΩ. Calcular la potencia en el altavoz sin y con transformador.