

Tema 3: Análisis en el dominio de la frecuencia

Enrique San Andrés



Cartagena99

CLASES PARTICULARES, TUTORÍAS TÉCNICAS ONLINE
LLAMA O ENVÍA WHATSAPP: 689 45 44 70

ONLINE PRIVATE LESSONS FOR SCIENCE STUDENTS
CALL OR WHATSAPP:689 45 44 70

Objetivos del tema

- Analizaremos la respuesta de los circuitos lineales frente a excitaciones sinusoidales
 - Fasores – impedancias
 - Potencia compleja
 - Circuitos resonantes
 - Fundamentos de filtrado de señales

Programa de la asignatura

1. Elementos de un circuito y métodos de análisis en corriente continua: Resistencias, fuentes de voltaje y de corriente, fuentes dependientes. Leyes de Kirchhoff. Técnicas de análisis: combinación de elementos, análisis por nodos, análisis por mallas, principio de superposición, teoremas de Thévenin y Norton. El amplificador operacional ideal. Circuitos simples con amplificadores operacionales. Análisis de circuitos asistido por ordenador.
2. Análisis en el dominio del tiempo: Respuesta transitoria de circuitos con condensadores e inductancias. Circuitos de primer y segundo orden.
3. Análisis en el dominio de la frecuencia: Excitación sinusoidal. Fasores. Impedancia.

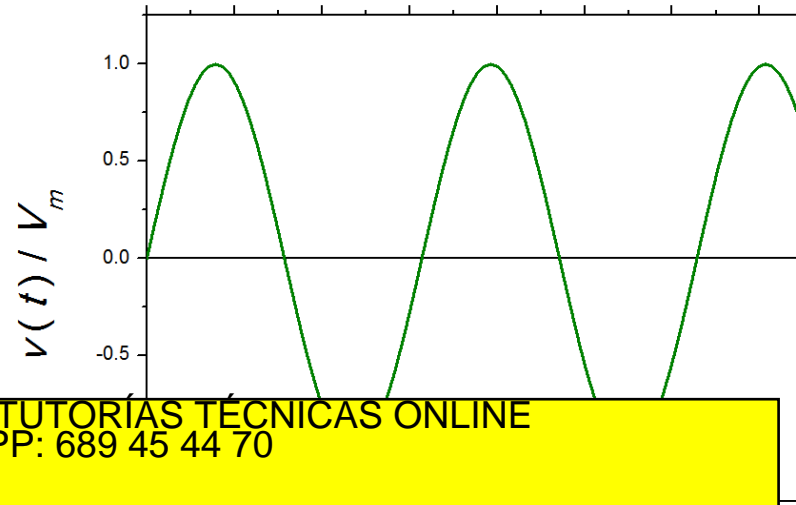
CLASES PARTICULARES, TUTORÍAS TÉCNICAS ONLINE
LLAMA O ENVÍA WHATSAPP: 689 45 44 70

ONLINE PRIVATE LESSONS FOR SCIENCE STUDENTS
CALL OR WHATSAPP:689 45 44 70

Cartagena99

Análisis en régimen sinusoidal

- Vamos a estudiar respuesta con fuentes variables con el tiempo **sinusoidales**
 - Denominación habitual: corriente alterna (AC)
- Razones para estudiar este tipo de excitación y no exponencial, lineal, triangular...
 - 1.- Aparece naturalmente en un sistema resonante amortiguado (sistema de 2º orden)
 - 2.- Aparece en solución de ecuaciones diferenciales
 - Derivada de sen \rightarrow cos
 - Derivada de cos \rightarrow -sen



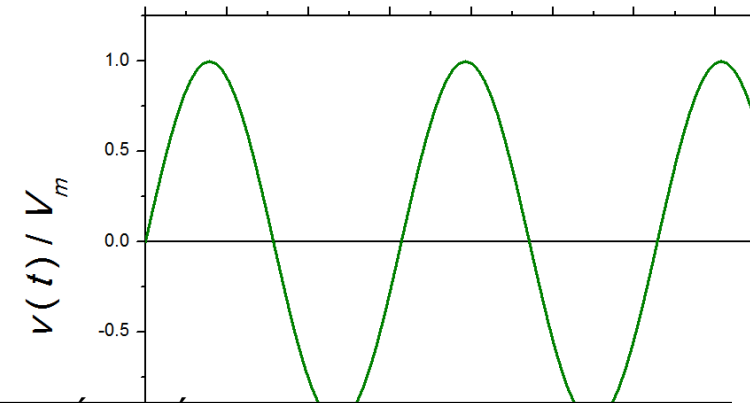
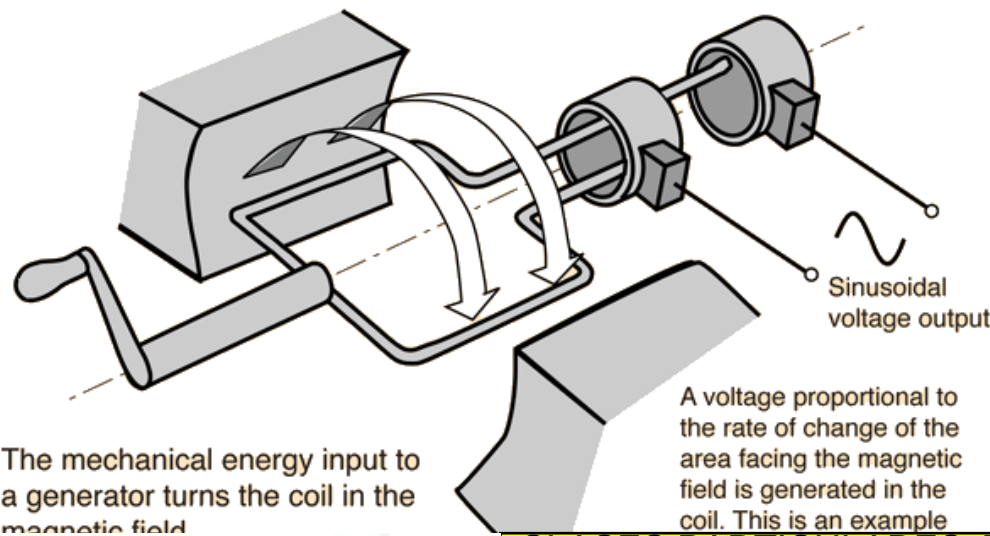
Cartagena99

CLASES PARTICULARES, TUTORÍAS TÉCNICAS ONLINE
LLAMA O ENVÍA WHATSAPP: 689 45 44 70

ONLINE PRIVATE LESSONS FOR SCIENCE STUDENTS
CALL OR WHATSAPP:689 45 44 70

Análisis en régimen sinusoidal

- 3.- Los generadores típicos utilizan una espira que gira a velocidad angular uniforme y un imán permanente (o viceversa)
 - Producen una tensión que es una senoide



Cartagena99

CLASES PARTICULARES, TUTORÍAS TÉCNICAS ONLINE
LLAMA O ENVÍA WHATSAPP: 689 45 44 70

ONLINE PRIVATE LESSONS FOR SCIENCE STUDENTS
CALL OR WHATSAPP:689 45 44 70

Análisis en régimen sinusoidal

- 4.-**Toda función periódica puede descomponerse en sinusoides: series de Fourier**
 - Permite pasar del dominio del tiempo al dominio de la frecuencia
 - Sin rigor: toda función periódica se puede expresar como una suma de sinusoidales con frecuencia múltiplo de la frecuencia de la señal



Fuente: Lucas V. Barbosa
- Wikimedia commons

Cartagena99

CLASES PARTICULARES, TUTORÍAS TÉCNICAS ONLINE
LLAMA O ENVÍA WHATSAPP: 689 45 44 70

ONLINE PRIVATE LESSONS FOR SCIENCE STUDENTS
CALL OR WHATSAPP:689 45 44 70

Transformada de Fourier

- Cálculo de la serie de Fourier de una señal periódica

$$f(t) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} \left[a_n \cos\left(\frac{2\pi n}{T} t\right) + b_n \operatorname{sen}\left(\frac{2\pi n}{T} t\right) \right]$$

$$a_0 = \frac{2}{T} \int_0^T f(t) dt; \quad a_n = \frac{2}{T} \int_0^T f(t) \cos\left(\frac{2\pi n}{T} t\right) dt; \quad b_n = \frac{2}{T} \int_0^T f(t) \operatorname{sen}\left(\frac{2\pi n}{T} t\right) dt;$$

- Permite describir completamente una función periódica mediante un conjunto discreto de valores (amplitudes de cada uno de los términos periódicos) -> espectro discreto de frecuencias

- Las series de Fourier pueden extenderse a señales aperiódicas. → Transformada de

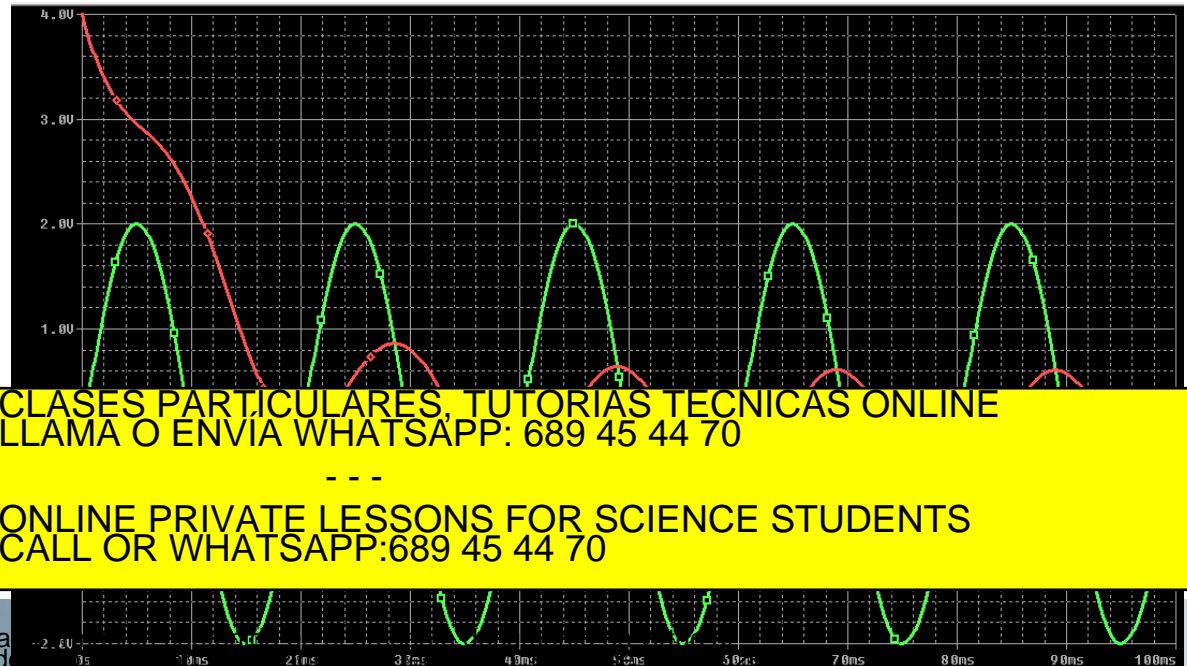
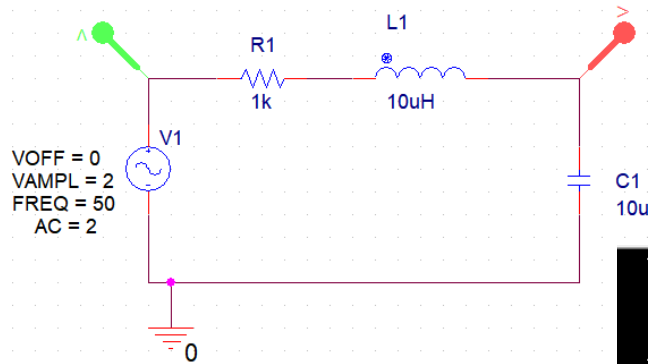
Cartagena99

CLASES PARTICULARES, TUTORÍAS TÉCNICAS ONLINE
LLAMA O ENVÍA WHATSAPP: 689 45 44 70

ONLINE PRIVATE LESSONS FOR SCIENCE STUDENTS
CALL OR WHATSAPP: 689 45 44 70

Análisis en régimen sinusoidal

- Un generador AC se conecta en un determinado momento: respuesta transitoria + forzada
 - Nos centraremos en el estacionario (respuesta forzada)



CLASES PARTICULARES, TUTORIAS TECNICAS ONLINE
LLAMA O ENVIA WHATSAPP: 689 45 44 70

ONLINE PRIVATE LESSONS FOR SCIENCE STUDENTS
CALL OR WHATSAPP:689 45 44 70

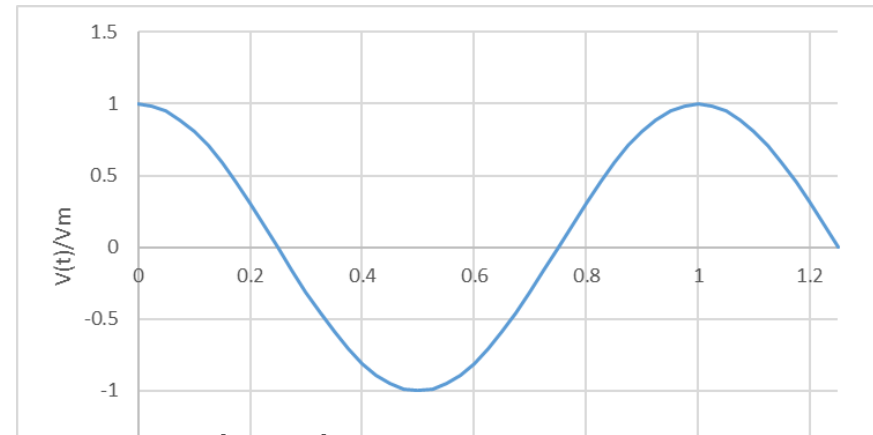
Cartagena99

Análisis en régimen sinusoidal

- Generador AC de tensión:

$$v(t) = V_m \cos(\omega t)$$

- V_m : amplitud de pico
- ωt argumento o fase [rad] o [°]
- ω frecuencia angular [rad/s]
- $T=2\pi/\omega$ periodo [s]
- $f = 1/T$ frecuencia temporal [s⁻¹]



Cartagena99

CLASES PARTICULARES, TUTORÍAS TÉCNICAS ONLINE
LLAMA O ENVÍA WHATSAPP: 689 45 44 70

ONLINE PRIVATE LESSONS FOR SCIENCE STUDENTS
CALL OR WHATSAPP:689 45 44 70

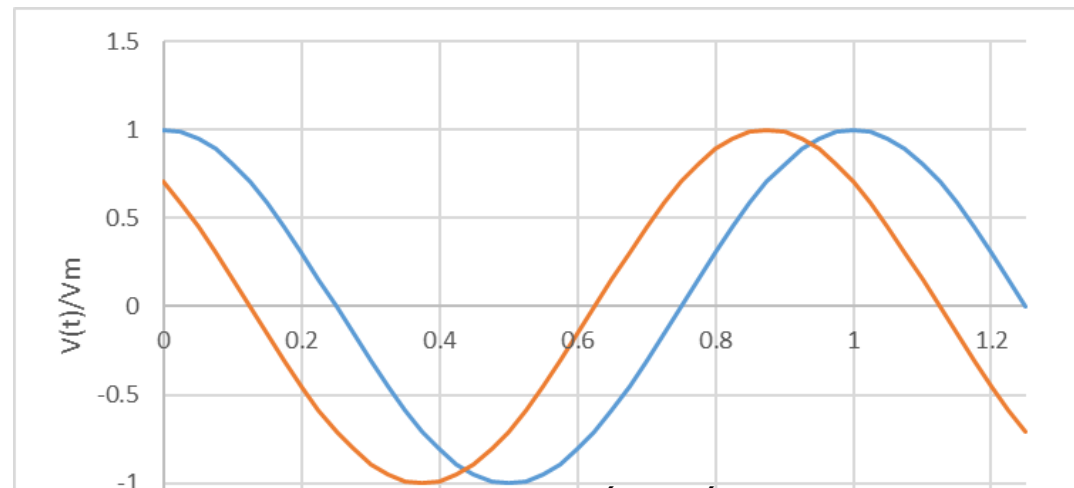
Análisis en régimen sinusoidal

- Fuente de tensión desfasada:

$$v(t) = V_m \cos(\omega t + \phi_0)$$

- ϕ_0 es la fase inicial

- Si ϕ_0 es positiva la señal está adelantada
- Si ϕ_0 es negativa está atrasada



CLASES PARTICULARES, TUTORÍAS TÉCNICAS ONLINE
LLAMA O ENVÍA WHATSAPP: 689 45 44 70

ONLINE PRIVATE LESSONS FOR SCIENCE STUDENTS
CALL OR WHATSAPP:689 45 44 70

Cartagena99

Análisis en régimen sinusoidal

- La elección de senos o cosenos es arbitraria

$$\operatorname{sen}(\varphi) = \cos\left(\varphi - \frac{\pi}{2}\right)$$

$$\cos(\varphi) = \operatorname{sen}\left(\varphi + \frac{\pi}{2}\right)$$

– Recordatorio

$$\operatorname{sen}(A \pm B) = \operatorname{sen}(A)\cos(B) \pm \cos(A)\operatorname{sen}(B)$$

$$\cos(A \pm B) = \cos(A)\cos(B) \mp \operatorname{sen}(A)\operatorname{sen}(B)$$

- Ej: determinar amplitud, fase inicial, periodo y

Cartagena99

CLASES PARTICULARES, TUTORÍAS TÉCNICAS ONLINE
LLAMA O ENVÍA WHATSAPP: 689 45 44 70

ONLINE PRIVATE LESSONS FOR SCIENCE STUDENTS
CALL OR WHATSAPP:689 45 44 70

Análisis en régimen sinusoidal

- Ej: calcular diferencia de fase entre las tensiones

$$v_1(t) = -10\cos(\omega t + 50^\circ); \quad v_2(t) = 12\text{sen}(\omega t - 10^\circ)$$

Cartagena99

CLASES PARTICULARES, TUTORÍAS TÉCNICAS ONLINE
LLAMA O ENVÍA WHATSAPP: 689 45 44 70

ONLINE PRIVATE LESSONS FOR SCIENCE STUDENTS
CALL OR WHATSAPP:689 45 44 70

Análisis en régimen sinusoidal

- Respuesta en alterna del circuito RL

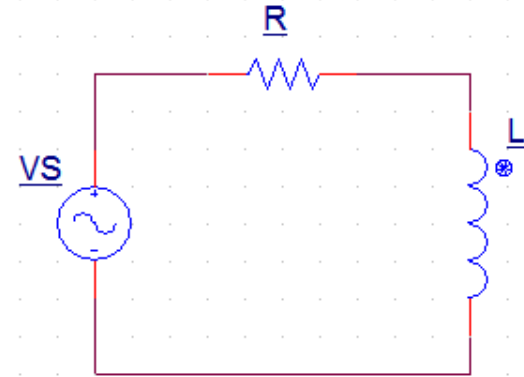
$$v_s(t) = V_m \cos(\omega t)$$

- Aplicando KVL

$$Ri + L \frac{di}{dt} = V_m \cos(\omega t)$$

- Ecuación diferencial lineal de primer orden: como solución particular vamos a probar una senoide de la misma frecuencia
 - Veremos que todas las corrientes y tensiones del circuito son sinusoidales de la misma frecuencia que la fuente
- Por tanto la solución particular (forzada) sería

$$i(t) = I \cos(\omega t + \phi)$$



Cartagena99

CLASES PARTICULARES, TUTORÍAS TÉCNICAS ONLINE
LLAMA O ENVÍA WHATSAPP: 689 45 44 70

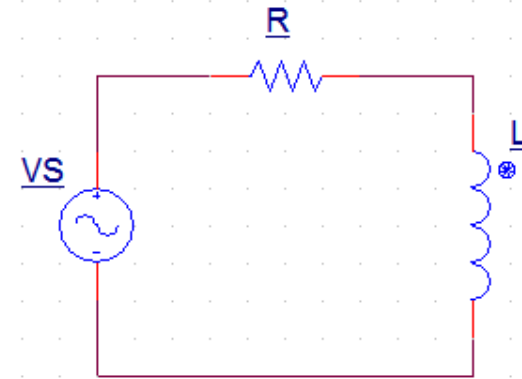
ONLINE PRIVATE LESSONS FOR SCIENCE STUDENTS
CALL OR WHATSAPP: 689 45 44 70

Análisis en régimen sinusoidal

$$i(t) = I_m \cos(\omega t + \phi_0)$$

- Para separar incógnitas

$$\begin{aligned} i(t) &= I_m \cos(\omega t + \phi_0) = I_m [\cos(\omega t)\cos(\phi_0) - \text{sen}(\omega t)\text{sen}(\phi_0)] = \\ &= A \cos(\omega t) + B \text{sen}(\omega t) \end{aligned}$$



- Relaciones entre incógnitas

$$\left. \begin{aligned} A &= I_m \cos(\phi_0) \\ B &= -I_m \text{sen}(\phi_0) \end{aligned} \right\} \begin{aligned} \phi_0 &= -\tan^{-1}\left(\frac{B}{A}\right) \\ I_m &= \sqrt{A^2 + B^2} \end{aligned}$$

- Determinación de A y B

$$Ri + L \frac{di}{dt} = V \cos(\omega t) \rightarrow$$

Cartagena99

CLASES PARTICULARES, TUTORÍAS TÉCNICAS ONLINE
LLAMA O ENVÍA WHATSAPP: 689 45 44 70

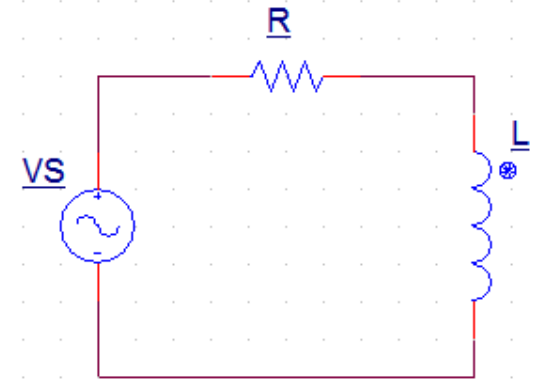
ONLINE PRIVATE LESSONS FOR SCIENCE STUDENTS
CALL OR WHATSAPP: 689 45 44 70

Análisis en régimen sinusoidal

- Determinación de A y B

$$(RA + LB\omega) \cos(\omega t) + (RB - AL\omega) \sin(\omega t) = V_m \cos(\omega t)$$

$$\left. \begin{array}{l} RA + \omega LB = V_m \\ RB - \omega LA = 0 \end{array} \right\} \Rightarrow \begin{array}{l} A = \frac{RV_m}{R^2 + (\omega L)^2} \\ B = \frac{\omega LV_m}{R^2 + (\omega L)^2} \end{array}$$



- Empleando relaciones anteriores

$$\left. \begin{array}{l} \phi_0 = -\tan^{-1}\left(\frac{B}{A}\right) = -\tan^{-1}\left(\frac{\omega L}{R}\right) \\ I = \frac{V_m}{\sqrt{A^2 + B^2}} \end{array} \right\} i(t) = \frac{V_m}{\sqrt{R^2 + (\omega L)^2}} \cos\left(\omega t - \tan^{-1}\left(\frac{\omega L}{R}\right)\right)$$

Cartagena99

CLASES PARTICULARES, TUTORÍAS TÉCNICAS ONLINE
LLAMA O ENVÍA WHATSAPP: 689 45 44 70

ONLINE PRIVATE LESSONS FOR SCIENCE STUDENTS
CALL OR WHATSAPP:689 45 44 70

Análisis en régimen sinusoidal

- Herramienta matemática para simplificar: *fasor*
- Definición de **fasor**:
 - Número complejo que representa la amplitud y la fase de una señal sinusoidal

$$v(t) = V_m \cos(\omega t + \varphi) \equiv \tilde{V} = V_m e^{j\varphi}$$

- No contiene información de la frecuencia
- Transforma ED en operaciones algebraicas con complejos

Cartagena99

CLASES PARTICULARES, TUTORÍAS TÉCNICAS ONLINE
LLAMA O ENVÍA WHATSAPP: 689 45 44 70

ONLINE PRIVATE LESSONS FOR SCIENCE STUDENTS
CALL OR WHATSAPP:689 45 44 70

Análisis en régimen sinusoidal

- Recordatorio de operaciones con complejos

$$z = x + jy = r_{\phi} = r(\cos \phi + j \operatorname{sen} \phi) = r e^{j\phi}; \quad r = \sqrt{x^2 + y^2}; \quad \phi = \tan^{-1} \frac{y}{x}$$

$$z_1 + z_2 = (x_1 + x_2) + j(y_1 + y_2)$$

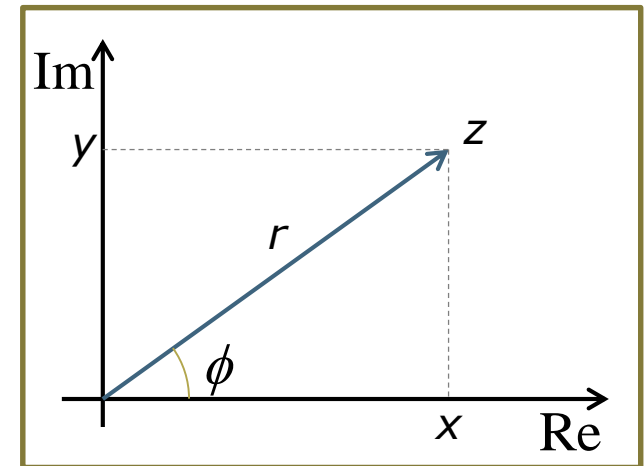
$$z_1 - z_2 = (x_1 - x_2) + j(y_1 - y_2)$$

$$z_1 \cdot z_2 = (r_1 r_2)_{\phi_1 + \phi_2}$$

$$\frac{z_1}{z_2} = \left(\frac{r_1}{r_2} \right)_{\phi_1 - \phi_2}$$

$$\sqrt{z} = \sqrt{r} \phi/2$$

$$e^{j\theta} = \cos \theta + j \operatorname{sen} \theta; \quad j = \sqrt{-1}$$



Cartagena99

CLASES PARTICULARES, TUTORÍAS TÉCNICAS ONLINE
LLAMA O ENVÍA WHATSAPP: 689 45 44 70

ONLINE PRIVATE LESSONS FOR SCIENCE STUDENTS
CALL OR WHATSAPP: 689 45 44 70

Análisis en régimen sinusoidal

- Si la señal es $v(t) = V_m \cos(\omega t + \phi)$

– Entonces

$$v(t) = V_m \cos(\omega t + \phi) = \operatorname{Re}\left[V_m e^{j(\omega t + \phi)}\right] = \operatorname{Re}\left[V_m e^{j\phi} e^{j\omega t}\right] = \operatorname{Re}\left[\tilde{V} e^{j\omega t}\right]$$

donde $\tilde{V} = V_m e^{j\phi}$

– El uso de fasores sirve para trabajar en el dominio de la frecuencia en lugar de en el dominio del tiempo (dominio fasorial)

– Resumiendo:

- Paso al dominio del tiempo conocido el fasor:

$$v(t) = \operatorname{Re}\left[\tilde{V} e^{j\omega t}\right]$$

- Paso al dominio fasorial desde el dominio del tiempo

CLASES PARTICULARES, TUTORIAS TECNICAS ONLINE
LLAMA O ENVIA WHATSAPP: 689 45 44 70

ONLINE PRIVATE LESSONS FOR SCIENCE STUDENTS
CALL OR WHATSAPP:689 45 44 70

Cartagena99

Análisis en régimen sinusoidal

- Ej: sumar en el dominio fasorial las corrientes

$$i_1(t) = 4 \cos(\omega t + 30^\circ)$$

$$i_2(t) = 5 \operatorname{sen}(\omega t - 20^\circ)$$

Cartagena99

CLASES PARTICULARES, TUTORÍAS TÉCNICAS ONLINE
LLAMA O ENVÍA WHATSAPP: 689 45 44 70

ONLINE PRIVATE LESSONS FOR SCIENCE STUDENTS
CALL OR WHATSAPP:689 45 44 70

Análisis en régimen sinusoidal

- Supongamos una tensión general $v(t) = V_m \cos(\omega t + \phi)$
- Derivación

- En el dominio del tiempo

$$\frac{dv(t)}{dt} = -\omega V_m \operatorname{sen}(\omega t + \phi) = \omega V_m \cos\left(\omega t + \phi + \frac{\pi}{2}\right)$$

- Representación fasorial del resultado

$$\omega V_m e^{j\left(\phi + \frac{\pi}{2}\right)} = \omega V_m e^{j\phi} e^{j\frac{\pi}{2}} = j\omega \tilde{V}$$

- En conclusión

- Dominio del tiempo Dominio de la frecuencia

Cartagena99

CLASES PARTICULARES, TUTORÍAS TÉCNICAS ONLINE
LLAMA O ENVÍA WHATSAPP: 689 45 44 70

ONLINE PRIVATE LESSONS FOR SCIENCE STUDENTS
CALL OR WHATSAPP: 689 45 44 70

Análisis en régimen sinusoidal

- Integración

$$\int v(t) dt = \int V_m \cos(\omega t + \varphi) dt = \frac{V_m}{\omega} \text{sen}(\omega t + \varphi) = \frac{V_m}{\omega} \cos\left(\omega t + \varphi - \frac{\pi}{2}\right)$$

$$\frac{V_m}{\omega} e^{j\left(\varphi - \frac{\pi}{2}\right)} = \frac{V_m}{j\omega} e^{j\varphi} = \frac{\tilde{V}}{j\omega}$$

Cartagena99

$\int v(t) dt = \frac{\tilde{V}}{j\omega}$
CLASES PARTICULARES, TUTORÍAS TÉCNICAS ONLINE
LLAMA O ENVÍA WHATSAPP: 689 45 44 70

ONLINE PRIVATE LESSONS FOR SCIENCE STUDENTS
CALL OR WHATSAPP: 689 45 44 70

Análisis en régimen sinusoidal

- Supongamos una tensión general $v(t) = V_m \cos(\omega t + \phi)$
- Derivación

- Dominio del tiempo
- Dominio de la frecuencia

$$\frac{dv}{dt} \leftrightarrow j\omega\tilde{V}$$

- Integración

- Dominio del tiempo
- Dominio de la frecuencia

$$\int v dt \leftrightarrow \frac{\tilde{V}}{j\omega}$$

Cartagena99

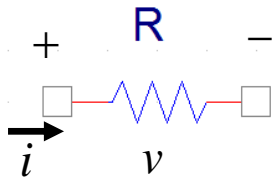
CLASES PARTICULARES, TUTORÍAS TÉCNICAS ONLINE
LLAMA O ENVÍA WHATSAPP: 689 45 44 70

ONLINE PRIVATE LESSONS FOR SCIENCE STUDENTS
CALL OR WHATSAPP: 689 45 44 70

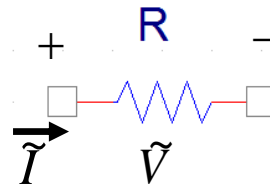
Relaciones fasoriales para R, L y C

• Resistencia

- Dominio del tiempo



- Dominio de la frecuencia



- Supongamos que

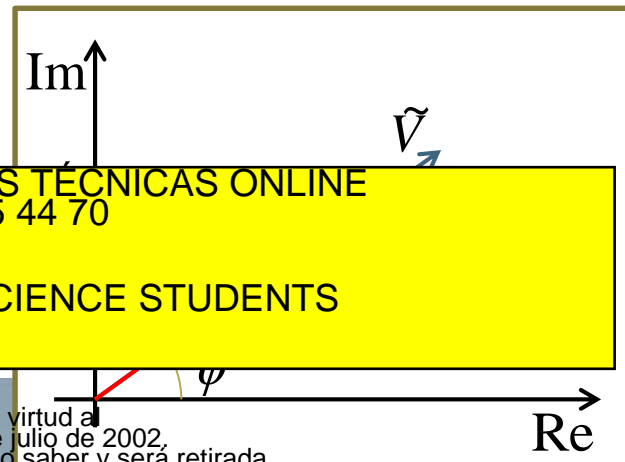
$$i = I_m \cos(\omega t + \phi) \longrightarrow \tilde{I} = I_m e^{j\phi}$$

- Ley de Ohm

$$v = Ri$$

$$v = RI_m \cos(\omega t + \phi) \longrightarrow \tilde{V} = RI_m e^{j\phi}$$

$$\tilde{V} = R\tilde{I}$$



Cartagena99

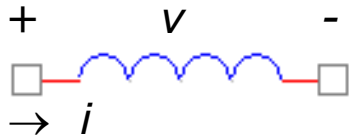
CLASES PARTICULARES, TUTORÍAS TÉCNICAS ONLINE
LLAMA O ENVÍA WHATSAPP: 689 45 44 70

ONLINE PRIVATE LESSONS FOR SCIENCE STUDENTS
CALL OR WHATSAPP:689 45 44 70

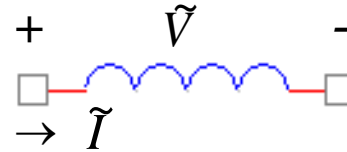
Relaciones fasoriales para R, L y C

• Inductancia

- Dominio del tiempo



- Dominio de la frecuencia



- Supongamos que

$$i = I_m \cos(\omega t + \phi) \longrightarrow \tilde{I} = I_m e^{j\phi}$$

- Relación v-i

$$v = L \frac{di}{dt}$$

$$v = -\omega L I_m \text{sen}(\omega t + \phi) =$$

$$\tilde{V} = j\omega L \tilde{I}$$

Cartagena99

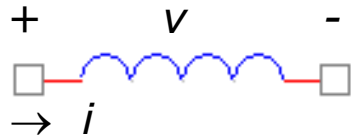
CLASES PARTICULARES, TUTORÍAS TÉCNICAS ONLINE
LLAMA O ENVÍA WHATSAPP: 689 45 44 70

ONLINE PRIVATE LESSONS FOR SCIENCE STUDENTS
CALL OR WHATSAPP:689 45 44 70

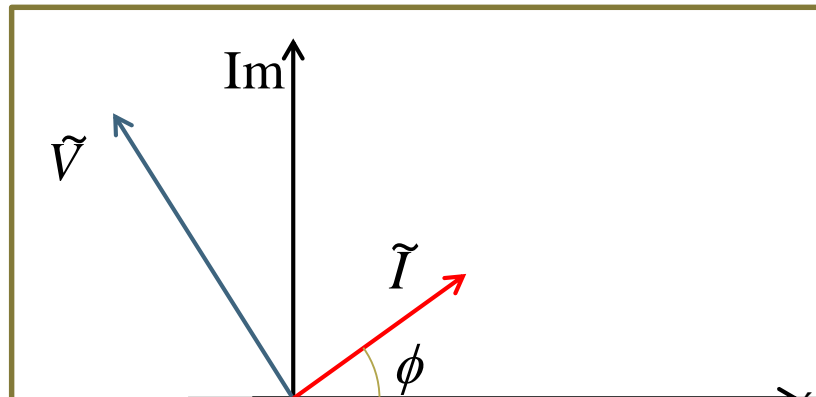
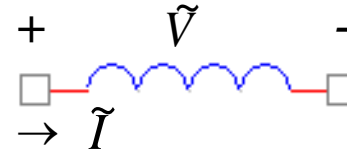
Relaciones fasoriales para R, L y C

- Bobina

- Dominio del tiempo



- Dominio de la frecuencia



$$\tilde{V} = j\omega L\tilde{I}$$

Cartagena99

CLASES PARTICULARES, TUTORÍAS TÉCNICAS ONLINE
LLAMA O ENVÍA WHATSAPP: 689 45 44 70

ONLINE PRIVATE LESSONS FOR SCIENCE STUDENTS
CALL OR WHATSAPP:689 45 44 70

Relaciones fasoriales para R, L y C

• Condensador

- Dominio del tiempo
- Dominio de la frecuencia

- Supongamos que

$$v = V_m \cos(\omega t + \phi) \longrightarrow \tilde{V} = V_m e^{j\phi}$$

- Relación $i-v$

$$i = C \frac{dv}{dt}$$

$$i = -\omega C V_m \text{sen}(\omega t + \phi) =$$

$$= \omega C V_m \cos\left(\omega t + \phi + \frac{\pi}{2}\right) \longrightarrow \tilde{I} = \omega C V_m e^{j\left(\phi + \frac{\pi}{2}\right)} = j\omega C V_m e^{j\phi}$$

$$\left. \begin{array}{l} \tilde{I} = j\omega C \tilde{V} \\ \tilde{V} = \frac{1}{j\omega C} \tilde{I} \end{array} \right\}$$

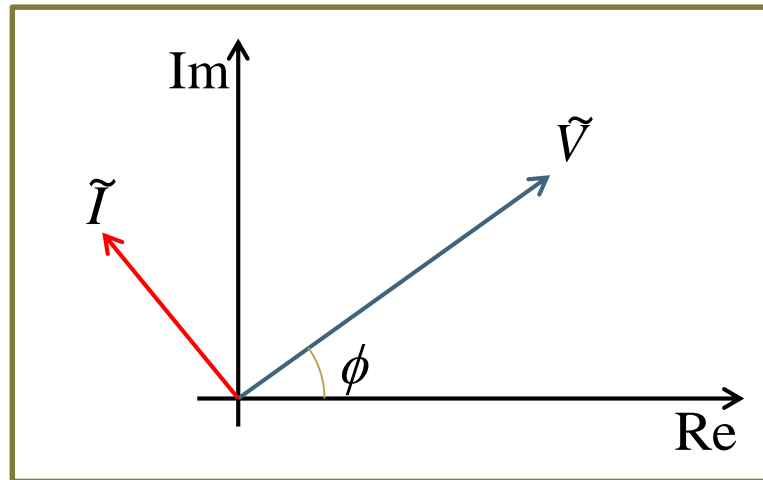
Cartagena99

CLASES PARTICULARES, TUTORÍAS TÉCNICAS ONLINE
LLAMA O ENVÍA WHATSAPP: 689 45 44 70

ONLINE PRIVATE LESSONS FOR SCIENCE STUDENTS
CALL OR WHATSAPP:689 45 44 70

Relaciones fasoriales para R, L y C

- Condensador



$$\tilde{I} = j\omega C\tilde{V}$$

$$\tilde{V} = \frac{1}{j\omega C}\tilde{I}$$

- La corriente se adelanta 90° respecto de la tensión

Cartagena99

CLASES PARTICULARES, TUTORÍAS TÉCNICAS ONLINE
LLAMA O ENVÍA WHATSAPP: 689 45 44 70

ONLINE PRIVATE LESSONS FOR SCIENCE STUDENTS
CALL OR WHATSAPP:689 45 44 70

Impedancia

- Acabamos de encontrar las relaciones entre los fasores corriente y tensión para R, L y C

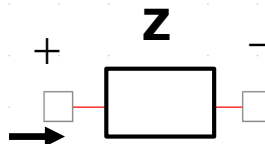
- Expresiones

$$\tilde{V} = R\tilde{I} \quad \tilde{V} = j\omega L\tilde{I} \quad \tilde{V} = \frac{1}{j\omega C}\tilde{I}$$

- Def. **Impedancia (Z)**

- Es la relación entre la tensión fasorial y la corriente fasorial

$$Z = \frac{\tilde{V}}{\tilde{I}}$$



CLASES PARTICULARES, TUTORÍAS TÉCNICAS ONLINE
LLAMA O ENVÍA WHATSAPP: 689 45 44 70

ONLINE PRIVATE LESSONS FOR SCIENCE STUDENTS
CALL OR WHATSAPP:689 45 44 70

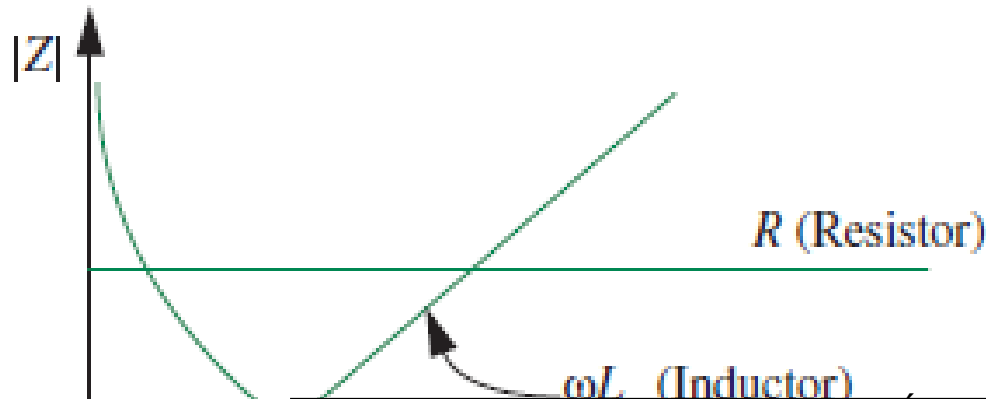
Cartagena99

Impedancia

- Impedancia de R, L y C

$$Z_R = R \quad Z_L = j\omega L \quad Z_C = \frac{1}{j\omega C} = -\frac{j}{\omega C}$$

- En general, depende de la frecuencia



CLASES PARTICULARES, TUTORÍAS TÉCNICAS ONLINE
LLAMA O ENVÍA WHATSAPP: 689 45 44 70

ONLINE PRIVATE LESSONS FOR SCIENCE STUDENTS
CALL OR WHATSAPP:689 45 44 70

Cartagena99

Impedancia

- En un elemento lineal general (o su combinación)

$$Z = R + jX$$

- R y X números reales
- R se denomina "Resistencia"
- X se denomina "Reactancia"
 - $X > 0$ se denomina reactancia inductiva
 - $X < 0$ se denomina reactancia capacitiva

Cartagena99

CLASES PARTICULARES, TUTORÍAS TÉCNICAS ONLINE
LLAMA O ENVÍA WHATSAPP: 689 45 44 70

ONLINE PRIVATE LESSONS FOR SCIENCE STUDENTS
CALL OR WHATSAPP:689 45 44 70

Impedancia

- Análogo de conductancia en AC: **Admitancia**

$$Y = \frac{1}{Z}$$

- Admitancia de elementos lineales

$$Y_R = \frac{1}{R} = G \quad Y_L = \frac{1}{j\omega L} \quad Y_C = j\omega C$$

$$Y = G + jB$$

- G y B números reales
- G se denomina "Conductancia"
- B se denomina "Susceptancia"

Cartagena99

CLASES PARTICULARES, TUTORÍAS TÉCNICAS ONLINE
LLAMA O ENVÍA WHATSAPP: 689 45 44 70

ONLINE PRIVATE LESSONS FOR SCIENCE STUDENTS
CALL OR WHATSAPP:689 45 44 70

Impedancia

- ¿Qué ocurre con Kirchoff en AC? Caso 1: KVL

$$v_1 + v_2 + \dots + v_n = 0$$

$$V_{m1} \cos(\omega t + \vartheta_1) + V_{m2} \cos(\omega t + \vartheta_2) + \dots + V_{mn} \cos(\omega t + \vartheta_n) = 0$$

$$\operatorname{Re}(V_{m1} e^{j\omega t} e^{j\theta_1}) + \operatorname{Re}(V_{m2} e^{j\omega t} e^{j\theta_2}) + \dots + \operatorname{Re}(V_{mn} e^{j\omega t} e^{j\theta_n}) = 0$$

$$\operatorname{Re}(V_{m1} e^{j\omega t} e^{j\theta_1} + V_{m2} e^{j\omega t} e^{j\theta_2} + \dots + V_{mn} e^{j\omega t} e^{j\theta_n}) = 0$$

$$\operatorname{Re}\left((V_{m1} e^{j\theta_1} + V_{m2} e^{j\theta_2} + \dots + V_{mn} e^{j\theta_n}) e^{j\omega t}\right) = 0$$

$$\operatorname{Re}\left((\tilde{V}_1 + \tilde{V}_2 + \dots + \tilde{V}_n) e^{j\omega t}\right) = 0$$

$$\tilde{V}_1 + \tilde{V}_2 + \dots + \tilde{V}_n = 0$$

CLASES PARTICULARES, TUTORÍAS TÉCNICAS ONLINE
LLAMA O ENVÍA WHATSAPP: 689 45 44 70

ONLINE PRIVATE LESSONS FOR SCIENCE STUDENTS
CALL OR WHATSAPP: 689 45 44 70

Cartagena99

Impedancia

- Leyes de Kirchhoff en el dominio de la frecuencia
 - Las leyes de Kirchhoff son válidas en el dominio de la frecuencia, donde deben expresarse en forma fasorial

- En cada lazo KVL
$$\sum_{m=1}^N \tilde{V}_m = 0$$

- En cada nudo KCL
$$\sum_{n=1}^N \tilde{I}_n = 0$$

- Por tanto, todas las técnicas de análisis estudiadas para DC pueden aplicarse a circuitos de alterna empleando fasores
 - En particular, combinaciones serie, paralelo, etc.

Cartagena99

CLASES PARTICULARES, TUTORÍAS TÉCNICAS ONLINE
LLAMA O ENVÍA WHATSAPP: 689 45 44 70

ONLINE PRIVATE LESSONS FOR SCIENCE STUDENTS
CALL OR WHATSAPP:689 45 44 70

Impedancia

- Ej: Asociación de impedancias

- Como la ley de ohm generalizada no cambia, ni Kirchhoff

- Impedancias en serie

$$Z_{eq} = Z_1 + Z_2 + Z_3 + \dots = \sum_{n=1}^N Z_n$$

- Admitancias (impedancias) en paralelo

$$Y_{eq} = Y_1 + Y_2 + Y_3 + \dots = \sum_{n=1}^N Y_n \Rightarrow \frac{1}{Z_{eq}} = \frac{1}{Z_1} + \frac{1}{Z_2} + \frac{1}{Z_3} + \dots = \sum_{n=1}^N \frac{1}{Z_n}$$

Cartagena99

CLASES PARTICULARES, TUTORÍAS TÉCNICAS ONLINE
LLAMA O ENVÍA WHATSAPP: 689 45 44 70

ONLINE PRIVATE LESSONS FOR SCIENCE STUDENTS
CALL OR WHATSAPP:689 45 44 70

Impedancia

- Ej: circuito RL con fuente de tensión sinusoidal

$$v_S = V_m \cos(\omega t) \quad \tilde{V}_S = V_m e^{j0} = V_m$$

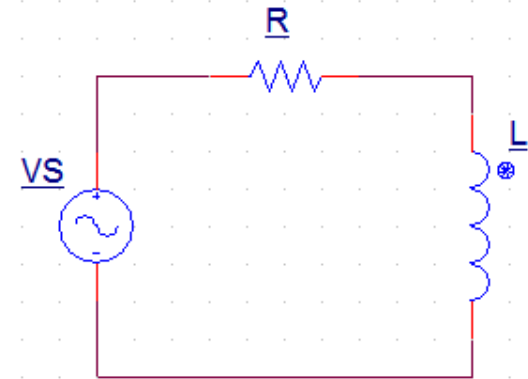
- KVL a la malla

$$\tilde{V}_S = Z_R \tilde{I} + Z_L \tilde{I} = R \tilde{I} + j\omega L \tilde{I} = (R + j\omega L) \tilde{I}$$

$$\tilde{I} = \frac{V_m}{(R + j\omega L)} = \frac{V_m}{|Z| e^{j\beta}} = \frac{V_m}{|Z|} e^{-j\beta}$$

$$\begin{cases} |Z| = \sqrt{R^2 + \omega^2 L^2} \\ \beta = \tan^{-1}\left(\frac{\omega L}{R}\right) \end{cases}$$

- Para pasar al dominio del tiempo



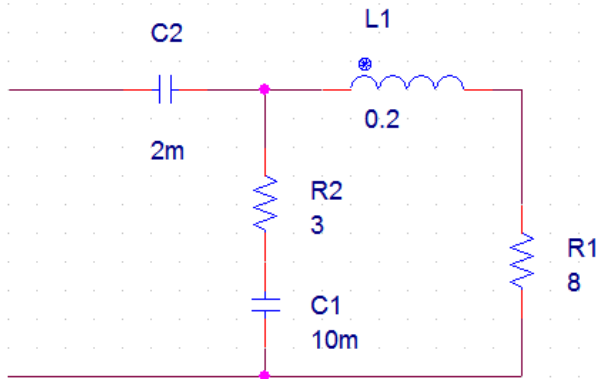
Cartagena99

CLASES PARTICULARES, TUTORÍAS TÉCNICAS ONLINE
LLAMA O ENVÍA WHATSAPP: 689 45 44 70

ONLINE PRIVATE LESSONS FOR SCIENCE STUDENTS
CALL OR WHATSAPP: 689 45 44 70

Impedancia

- Ej: calcular la impedancia equivalente si $\omega = 50\text{rad/s}$



Cartagena99

CLASES PARTICULARES, TUTORÍAS TÉCNICAS ONLINE
LLAMA O ENVÍA WHATSAPP: 689 45 44 70

ONLINE PRIVATE LESSONS FOR SCIENCE STUDENTS
CALL OR WHATSAPP:689 45 44 70

Análisis fasorial

- En resumen, para resolver un circuito en alterna se siguen los pasos
 1. Se transforma del dominio del tiempo al dominio de la frecuencia (análisis fasorial).
 2. Se calculan las impedancias
 3. Se resuelve el circuito con las técnicas del Tema 1.
 4. Se transforma de vuelta la solución al dominio del tiempo.

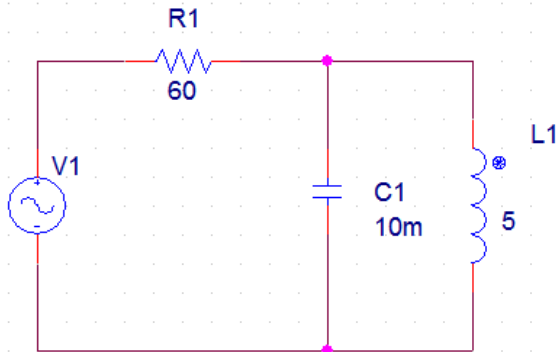
Cartagena99

CLASES PARTICULARES, TUTORÍAS TÉCNICAS ONLINE
LLAMA O ENVÍA WHATSAPP: 689 45 44 70

ONLINE PRIVATE LESSONS FOR SCIENCE STUDENTS
CALL OR WHATSAPP:689 45 44 70

Impedancia

- Ej: determinar la tensión en la bobina



$$V_1 = 20 \cos(4t - \pi/12)$$

Cartagena99

CLASES PARTICULARES, TUTORÍAS TÉCNICAS ONLINE
LLAMA O ENVÍA WHATSAPP: 689 45 44 70

ONLINE PRIVATE LESSONS FOR SCIENCE STUDENTS
CALL OR WHATSAPP:689 45 44 70

Análisis fasorial

- Circuitos equivalentes de Thévenin y Norton

- El teorema de Thévenin se aplican también en AC

- V_{oc} (ó V_{th}) es el voltaje (fasor) que aparece entre los terminales cuando B se desconecta
 - Z_{th} es la impedancia entre los terminales de A cuando todas las fuentes independientes se anulan (fuentes de tensión se cortocircuitan y fuentes de corriente en abierto)
 - Entonces, A se puede sustituir por una fuente de tensión real con $V_S = V_{oc}$ y $Z_{int} = Z_{th}$

- El teorema de Norton también es aplicable

- $I_N = V_{th} / Z_{th}$
 - $Z_N = Z_{th}$



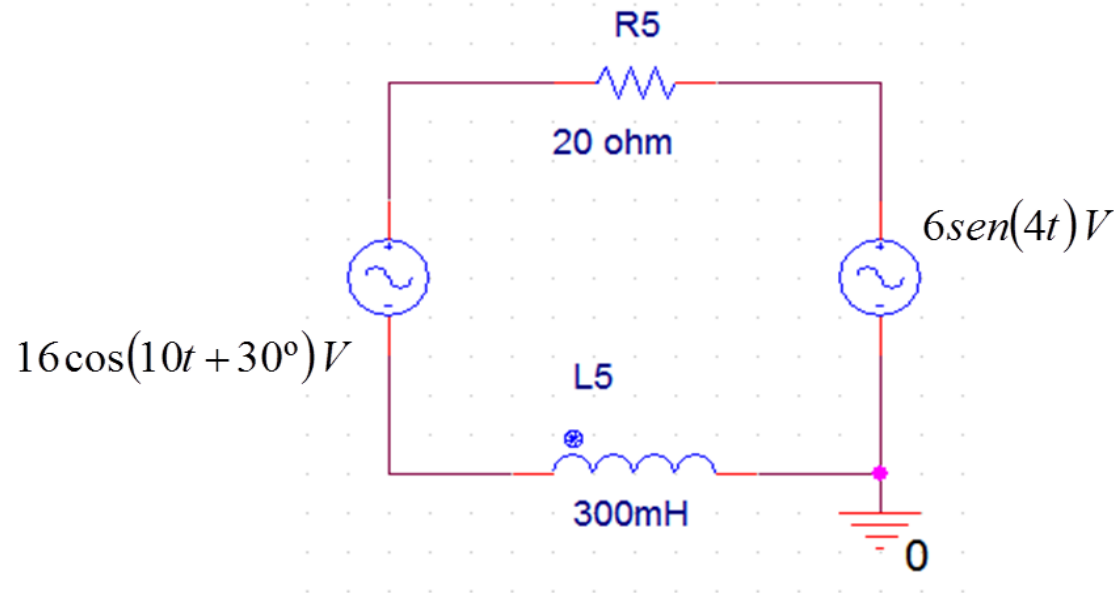
Cartagena99

CLASES PARTICULARES, TUTORÍAS TÉCNICAS ONLINE
LLAMA O ENVÍA WHATSAPP: 689 45 44 70

ONLINE PRIVATE LESSONS FOR SCIENCE STUDENTS
CALL OR WHATSAPP: 689 45 44 70

Análisis fasorial

- Cuidado si hay frecuencias diferentes



Cartagena99

CLASES PARTICULARES, TUTORÍAS TÉCNICAS ONLINE
LLAMA O ENVÍA WHATSAPP: 689 45 44 70

ONLINE PRIVATE LESSONS FOR SCIENCE STUDENTS
CALL OR WHATSAPP:689 45 44 70

Potencia

- Potencia instantánea

- Recordando el tema I, la potencia instantánea es el producto de $v(t)i(t)$
- Supongamos un circuito en régimen sinusoidal
- En una determinada parte del circuito

$$v(t) = V_m \cos(\omega t + \phi_v)$$

$$i(t) = I_m \cos(\omega t + \phi_i)$$

- Entonces $p(t) = v(t)i(t) = V_m I_m \cos(\omega t + \phi_v) \cos(\omega t + \phi_i)$

- Aplicando la identidad $\cos(A)\cos(B) = \frac{1}{2}(\cos(A-B) + \cos(A+B))$

- Resulta $p(t) = \frac{1}{2} V_m I_m \cos(\phi_v - \phi_i) + \frac{1}{2} V_m I_m \cos(2\omega t + \phi_v + \phi_i)$

Cartagena99

CLASES PARTICULARES, TUTORÍAS TÉCNICAS ONLINE
LLAMA O ENVÍA WHATSAPP: 689 45 44 70

- - -

ONLINE PRIVATE LESSONS FOR SCIENCE STUDENTS
CALL OR WHATSAPP: 689 45 44 70

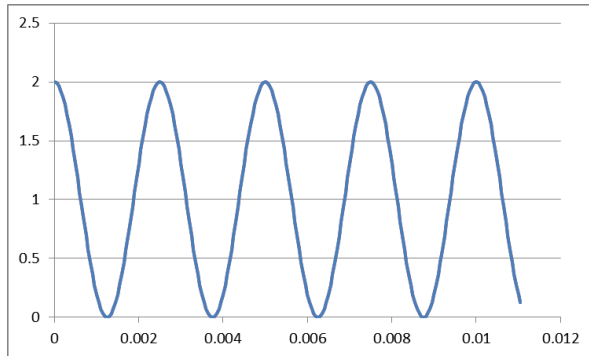
Potencia

- Potencia instantánea

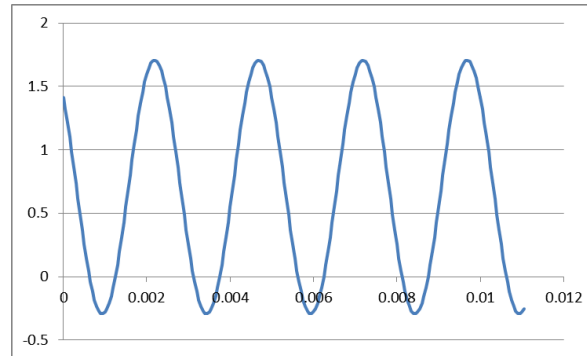
$$p(t) = \frac{1}{2} V_m I_m \cos(\phi_v - \phi_i) + \frac{1}{2} V_m I_m \cos(2\omega t + \phi_v + \phi_i)$$

- Ej: $V_m = 4V$, $I_m = 0.5A$, $T = 5ms$, $\phi_v = 0$

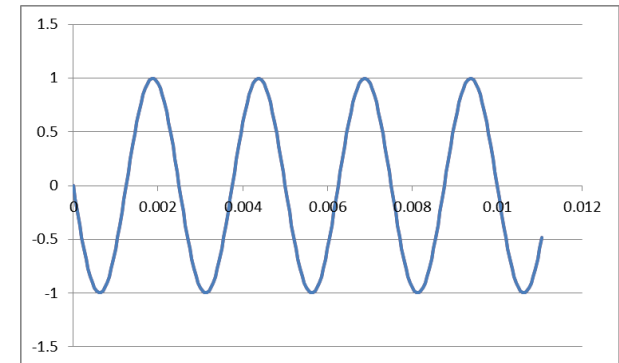
- $\phi_i = 0$



$\phi_i = \pi/4$



$\phi_i = \pi/2$



Cartagena99

CLASES PARTICULARES, TUTORÍAS TÉCNICAS ONLINE
LLAMA O ENVÍA WHATSAPP: 689 45 44 70

ONLINE PRIVATE LESSONS FOR SCIENCE STUDENTS
CALL OR WHATSAPP: 689 45 44 70

Potencia

- Potencia media, P

- Es el promedio de la potencia instantánea en un período

$$P = \frac{1}{T} \int_0^T p(t) dt$$

- Para señales de alterna

$$\begin{aligned} P &= \frac{1}{T} \int_0^T p(t) dt = \frac{1}{T} \int_0^T \left[\frac{1}{2} V_m I_m \cos(\phi_v - \phi_i) + \frac{1}{2} V_m I_m \cos(2\omega t + \phi_v + \phi_i) \right] dt = \\ &= \frac{V_m I_m \cos(\phi_v - \phi_i)}{2T} \underbrace{\int_0^T dt}_T + \frac{V_m I_m}{2T} \underbrace{\int_0^T \cos(2\omega t + \phi_v + \phi_i) dt}_0 = \end{aligned}$$

$$= \frac{1}{2} V_m I_m \cos(\phi_v - \phi_i)$$

Cartagena99

CLASES PARTICULARES, TUTORÍAS TÉCNICAS ONLINE
LLAMA O ENVÍA WHATSAPP: 689 45 44 70

ONLINE PRIVATE LESSONS FOR SCIENCE STUDENTS
CALL OR WHATSAPP: 689 45 44 70

Potencia

- Algunos casos particulares

- Circuito puramente resistivo (tensión y corriente en fase)

$$\phi_v = \phi_i \Rightarrow P = \frac{1}{2} V_m I_m \cos(0) = \frac{1}{2} V_m I_m$$

- Circuito puramente reactivo (L ó C)

$$\phi_v = \phi_i \pm \frac{\pi}{2} \Rightarrow P = \frac{1}{2} V_m I_m \cos\left(\pm \frac{\pi}{2}\right) = 0$$

Cartagena99

CLASES PARTICULARES, TUTORÍAS TÉCNICAS ONLINE
LLAMA O ENVÍA WHATSAPP: 689 45 44 70

ONLINE PRIVATE LESSONS FOR SCIENCE STUDENTS
CALL OR WHATSAPP:689 45 44 70

Potencia

- Potencia media, P

- Se puede calcular empleando fasores:

$$\tilde{V} = V_m e^{j\phi_v}$$

$$\tilde{I} = I_m e^{j\phi_i}$$

- Entonces

$$\begin{aligned} \frac{1}{2} \tilde{V} \cdot \tilde{I}^* &= \frac{1}{2} V_m e^{j\phi_v} I_m e^{-j\phi_i} = \frac{1}{2} V_m I_m e^{j\phi_v} e^{-j\phi_i} = \frac{1}{2} V_m I_m e^{j(\phi_v - \phi_i)} = \\ &= \frac{1}{2} V_m I_m [\cos(\phi_v - \phi_i) + j \operatorname{sen}(\phi_v - \phi_i)] \end{aligned}$$

- Por tanto:

Cartagena99

CLASES PARTICULARES, TUTORÍAS TÉCNICAS ONLINE
LLAMA O ENVÍA WHATSAPP: 689 45 44 70

ONLINE PRIVATE LESSONS FOR SCIENCE STUDENTS
CALL OR WHATSAPP: 689 45 44 70

Potencia

- Potencia media disipada, P

- En una carga general, Z_L

$$P = \operatorname{Re}\left(\frac{1}{2}\tilde{V} \cdot \tilde{I}^*\right) = \operatorname{Re}\left(\frac{1}{2}Z_L \tilde{I} \cdot \tilde{I}^*\right) = \frac{1}{2}\operatorname{Re}\left(Z_L |\tilde{I}|^2\right) = \frac{1}{2}|\tilde{I}|^2 \operatorname{Re}(Z_L) = \frac{1}{2}|\tilde{I}|^2 R_L$$

- Recordatorio: en DC $P = I^2 R$

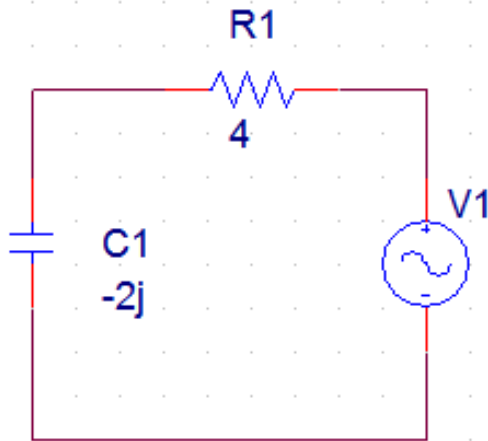
Cartagena99

CLASES PARTICULARES, TUTORÍAS TÉCNICAS ONLINE
LLAMA O ENVÍA WHATSAPP: 689 45 44 70

ONLINE PRIVATE LESSONS FOR SCIENCE STUDENTS
CALL OR WHATSAPP:689 45 44 70

Potencia

- Ej: calcular potencias medias de la fuente y de la resistencia



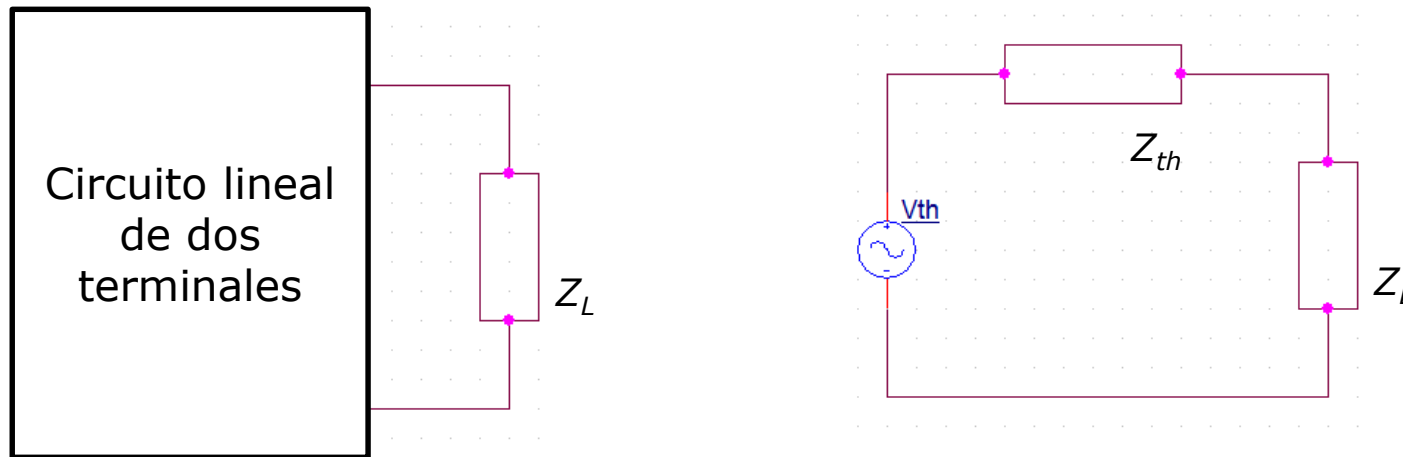
Cartagena99

CLASES PARTICULARES, TUTORÍAS TÉCNICAS ONLINE
LLAMA O ENVIA WHATSAPP: 689 45 44 70

ONLINE PRIVATE LESSONS FOR SCIENCE STUDENTS
CALL OR WHATSAPP:689 45 44 70

Máxima transferencia de potencia

- Supongamos que un circuito está conectado a una impedancia “regulable” Z_L
 - ¿Cuándo se transmitirá la máxima potencia a la carga?



- *Spoiler:* máxima transferencia de energía cuando $Z_L = Z_{th}^*$

Cartagena99

CLASES PARTICULARES, TUTORÍAS TÉCNICAS ONLINE
LLAMA O ENVÍA WHATSAPP: 689 45 44 70

ONLINE PRIVATE LESSONS FOR SCIENCE STUDENTS
CALL OR WHATSAPP:689 45 44 70

Potencia

- Para demostrarlo, partiremos del equivalente thèvenin

$$Z_{th} = R_{th} + jX_{th}; \quad Z_L = R_L + jX_L$$

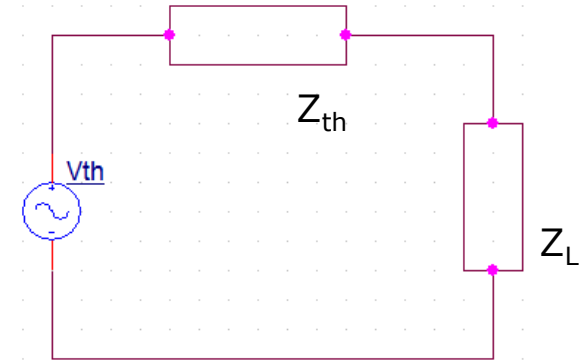
- Corriente por Z_L :

$$\tilde{I} = \frac{\tilde{V}_{th}}{Z_L + Z_{th}}$$

- Potencia media en Z_L :

$$P = \frac{1}{2} |\tilde{I}|^2 R_L = \frac{1}{2} \frac{|V_{th}|^2 R_L}{(R_{th} + R_L)^2 + (X_{th} + X_L)^2}$$

- Máximo: derivada nula



$\frac{\partial P}{\partial R_L}$

$$- |V_{th}|^2 R_L (X_{th} + X_L)$$

CLASES PARTICULARES, TUTORÍAS TÉCNICAS ONLINE
LLAMA O ENVÍA WHATSAPP: 689 45 44 70

ONLINE PRIVATE LESSONS FOR SCIENCE STUDENTS
CALL OR WHATSAPP:689 45 44 70

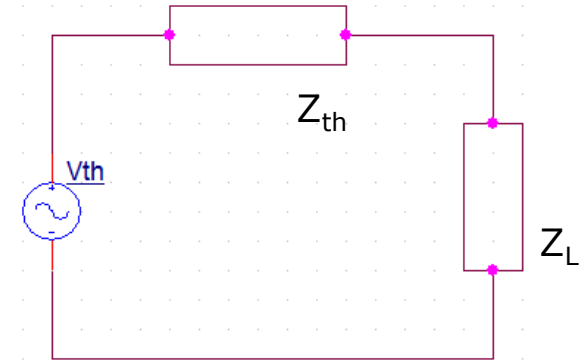
Cartagena99

Potencia

- Potencia media en Z_L :

$$P = \frac{1}{2} |\tilde{I}|^2 R_L = \frac{1}{2} \frac{|V_{th}|^2 R_L}{(R_{th} + R_L)^2}$$

- Máximo: derivadas nulas



$$\frac{\partial P}{\partial R_L} = 0 \Rightarrow \frac{|V_{th}|^2 \left[(R_{th} + R_L)^2 \right] - |V_{th}|^2 R_L 2(R_{th} + R_L)}{\left[(R_{th} + R_L)^2 \right]^2} = 0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow R_{th}^2 = R_L^2 \Rightarrow R_L = R_{th}$$

Cartagena99

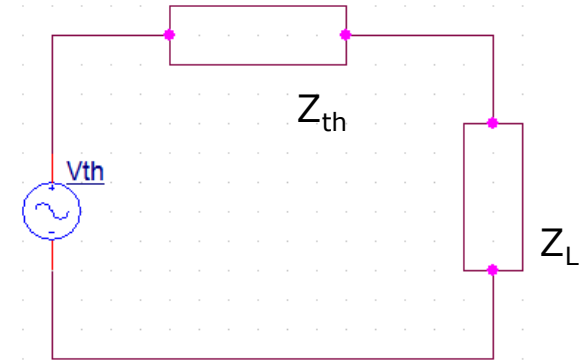
CLASES PARTICULARES, TUTORÍAS TÉCNICAS ONLINE
LLAMA O ENVÍA WHATSAPP: 689 45 44 70

ONLINE PRIVATE LESSONS FOR SCIENCE STUDENTS
CALL OR WHATSAPP: 689 45 44 70

Potencia

- En conclusión, la potencia máxima se da:

$$\left. \begin{array}{l} R_L = R_{th} \\ X_L = -X_{th} \end{array} \right\} Z_L = Z_{th}^*$$



$$P_{\max} = \frac{R_L}{2} \frac{|V_{th}|^2}{(R_{th} + R_L)^2 + (X_{th} + X_L)^2} = \frac{R_{th}}{2} \frac{|V_{th}|^2}{(2R_{th})^2 + (0)^2} = \frac{R_{th}}{2} \frac{|V_{th}|^2}{4(R_{th})^2}$$

$$P = \frac{|V_{th}|^2}{4R_{th}}$$

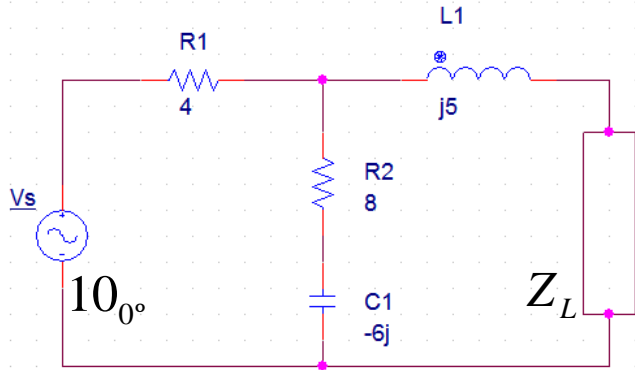
CLASES PARTICULARES, TUTORÍAS TÉCNICAS ONLINE
LLAMA O ENVÍA WHATSAPP: 689 45 44 70

ONLINE PRIVATE LESSONS FOR SCIENCE STUDENTS
CALL OR WHATSAPP:689 45 44 70

Cartagena99

Potencia

- Determinar la impedancia de carga que maximiza la potencia media



Cartagena99

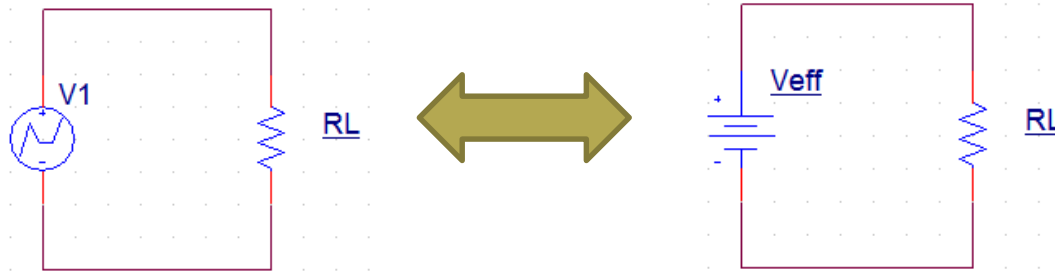
CLASES PARTICULARES, TUTORÍAS TÉCNICAS ONLINE
LLAMA O ENVÍA WHATSAPP: 689 45 44 70

- - -

ONLINE PRIVATE LESSONS FOR SCIENCE STUDENTS
CALL OR WHATSAPP:689 45 44 70

Valor eficaz

- Utilizado para simplificar cálculos de potencia transmitida a una carga por una fuente periódica (no necesariamente sinusoidal)
 - El valor eficaz de tensión (o corriente) de una fuente periódica es el valor que de una fuente de DC que comunicara la misma potencia a una carga resistiva



$$P = \frac{1}{R} \frac{1}{T} \int_0^T V^2 dt$$
$$P = \frac{1}{T} \int_0^T \frac{V_{eff}^2}{R} dt = \frac{V_{eff}^2}{R} \frac{1}{T} \int_0^T dt = \frac{V_{eff}^2}{R}$$

Cartagena99

CLASES PARTICULARES, TUTORÍAS TÉCNICAS ONLINE
LLAMA O ENVÍA WHATSAPP: 689 45 44 70

ONLINE PRIVATE LESSONS FOR SCIENCE STUDENTS
CALL OR WHATSAPP:689 45 44 70

Valor eficaz

- Ej: fuente sinusoidal

$$\begin{aligned} V_{eff} &= \sqrt{\frac{1}{T} \int_0^T V^2 dt} = \sqrt{\frac{1}{T} \int_0^T (V_0 \cos(\omega t))^2 dt} = V_0 \sqrt{\frac{1}{T} \int_0^T \cos^2(\omega t) dt} = \\ &= V_0 \sqrt{\frac{1}{T} \frac{1}{\omega} \left(\frac{\omega t}{2} + \frac{\text{sen}(2\omega t)}{4} \right) \Big|_0^T} = V_0 \sqrt{\frac{1}{T} \frac{1}{\omega} \frac{\omega T}{2}} = \frac{V_0}{\sqrt{2}} = 0.707 V_0 \end{aligned}$$

- Corriente eficaz
 - Razonamiento análogo

$$I_{eff} = \sqrt{\frac{1}{T} \int_0^T I^2 dt}$$

Cartagena99

CLASES PARTICULARES, TUTORÍAS TÉCNICAS ONLINE
LLAMA O ENVÍA WHATSAPP: 689 45 44 70

ONLINE PRIVATE LESSONS FOR SCIENCE STUDENTS
CALL OR WHATSAPP:689 45 44 70

Resonancia

- Coloquialmente: cuando a un sistema se le aplica una señal periódica y el sistema tiene un máximo de absorción de energía
 - Puede ser intencionada o no.
- Se dice que una red está en **resonancia** o es resonante si su voltaje y su corriente están en fase
 - Comportamiento puramente resistivo de la red.
 - Para que haya resonancia, si hay elementos reactivos debe haber al menos dos.
- Cuando está en resonancia la respuesta tiene la

Cartagena99

CLASES PARTICULARES, TUTORÍAS TÉCNICAS ONLINE
LLAMA O ENVÍA WHATSAPP: 689 45 44 70

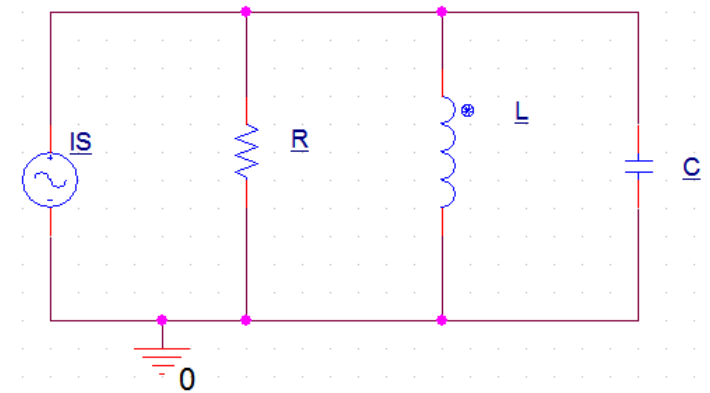
ONLINE PRIVATE LESSONS FOR SCIENCE STUDENTS
CALL OR WHATSAPP:689 45 44 70

Resonancia

• Resonancia en el circuito RLC paralelo

- Sería equivalente a alimentar un L y C conectados a un generador de corriente sinusoidal
- Admitancia vista desde la fuente

$$Y = \frac{1}{R} + j\left(\omega C - \frac{1}{\omega L}\right)$$



- Habrá resonancia cuando la fuente vea comportamiento resistivo

$$j\left(\omega C - \frac{1}{\omega L}\right) = 0 \Rightarrow \omega_0 = \frac{1}{\sqrt{LC}} \text{ rad.s}^{-1} \left(\text{ó } f_0 = \frac{1}{2\pi\sqrt{LC}} \text{ Hz} \right)$$

Cartagena99

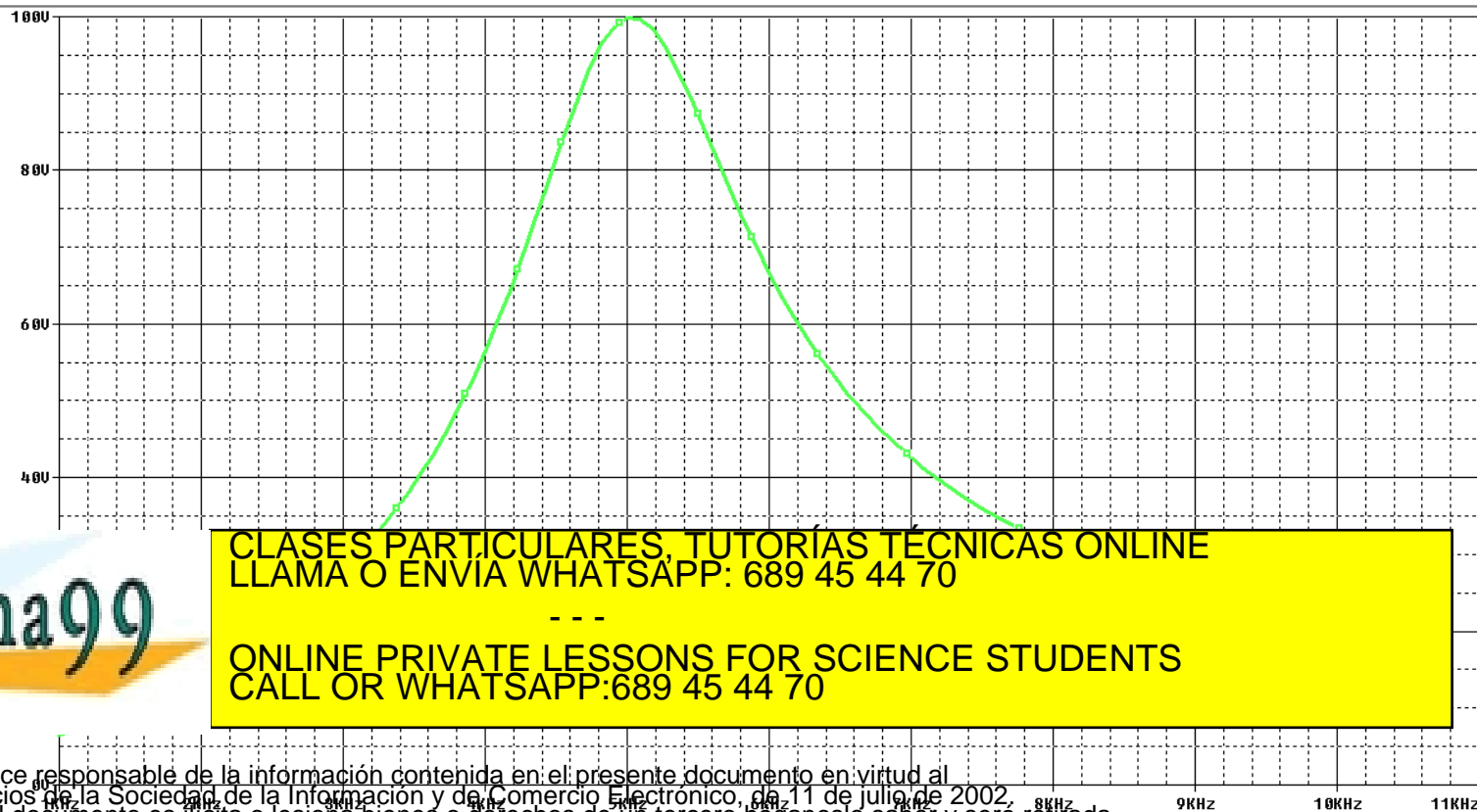
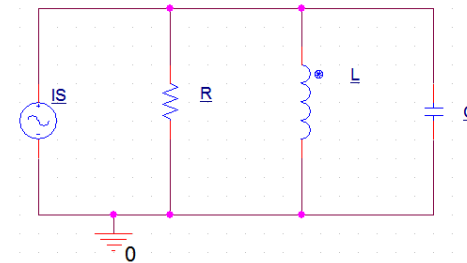
CLASES PARTICULARES, TUTORÍAS TÉCNICAS ONLINE
LLAMA O ENVÍA WHATSAPP: 689 45 44 70

ONLINE PRIVATE LESSONS FOR SCIENCE STUDENTS
CALL OR WHATSAPP:689 45 44 70

Resonancia

- Resonancia en el circuito RLC paralelo
 - Simulación con $R=100\text{ohm}$, $I_S=1\text{A}$, $L=1\text{mH}$, $C=1\text{uF}$

$$f_0 = \frac{1}{2\pi\sqrt{LC}} = 5.03 \text{ kHz}$$



CLASES PARTICULARES, TUTORÍAS TÉCNICAS ONLINE
LLAMA O ENVÍA WHATSAPP: 689 45 44 70

ONLINE PRIVATE LESSONS FOR SCIENCE STUDENTS
CALL OR WHATSAPP: 689 45 44 70

Cartagena99

Resonancia

- Que en resonancia la red tenga comportamiento resistivo no quiere decir que en C y L no haya corriente

$$\tilde{I}_L = \frac{\tilde{V}}{Z_L} = \frac{\tilde{I}R}{j\omega_0 L} \quad \tilde{I}_C = \frac{\tilde{V}}{Z_C} = j\omega_0 C \tilde{I}R$$

- Como $\frac{1}{\omega_0 L} = \omega_0 C$ entonces $\tilde{I}_C = -\tilde{I}_L = j\omega_0 C R \tilde{I} \Rightarrow \tilde{I}_C + \tilde{I}_L = 0$

- C y L se intercambian energía a la frecuencia de resonancia, y la corriente entre ellos puede ser (en módulo) superior a la de la fuente.

Cartagena99

CLASES PARTICULARES, TUTORÍAS TÉCNICAS ONLINE
LLAMA O ENVÍA WHATSAPP: 689 45 44 70

ONLINE PRIVATE LESSONS FOR SCIENCE STUDENTS
CALL OR WHATSAPP: 689 45 44 70

Resonancia

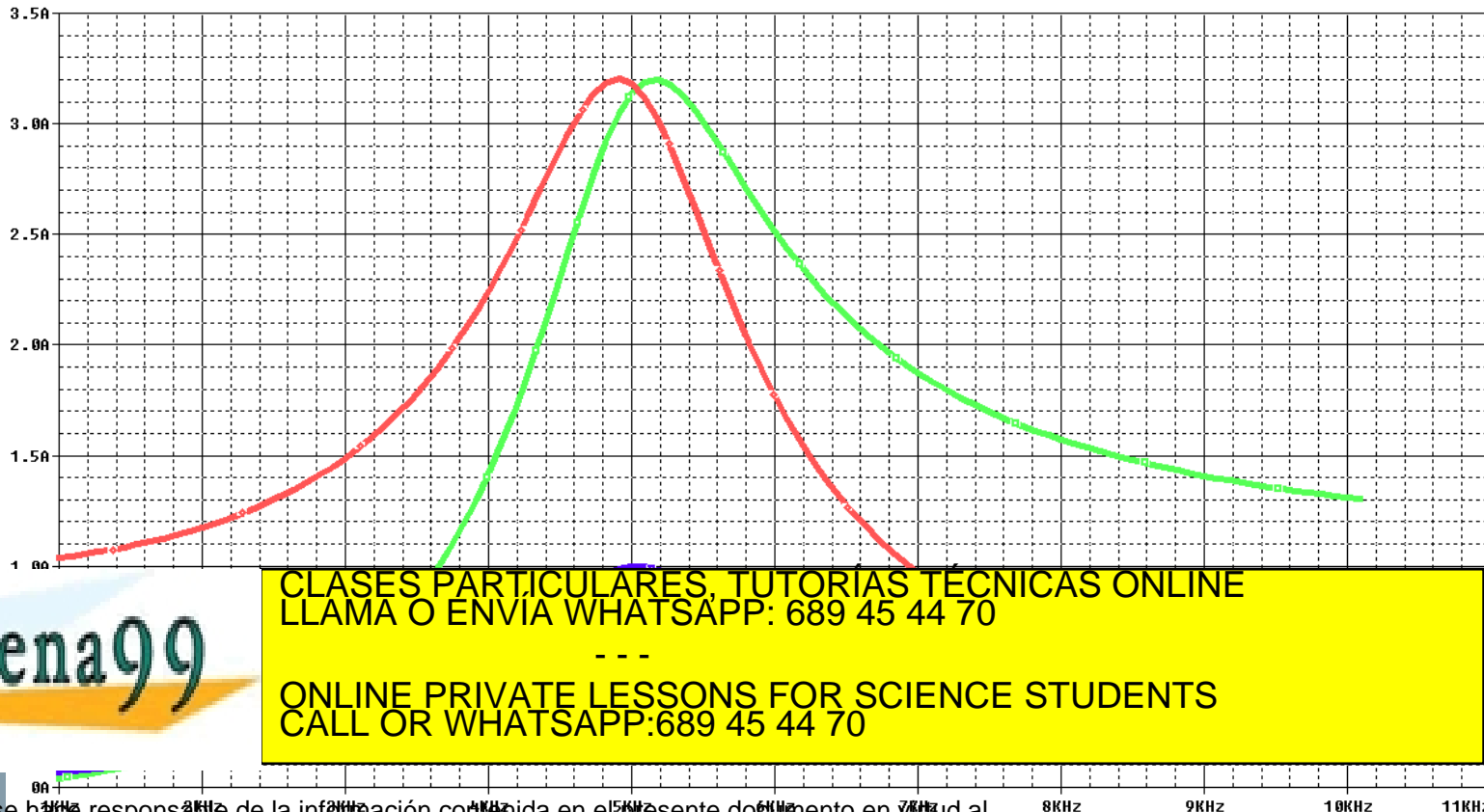
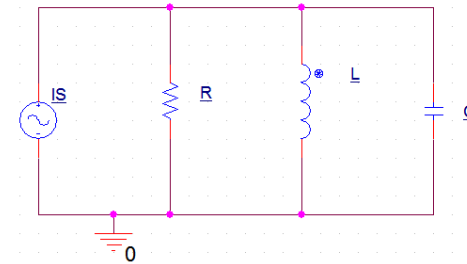
- Resonancia en el circuito RLC paralelo

- Simulación con $R=100\text{ohm}$, $I_S=1\text{A}$, $L=1\text{mH}$, $C=1\mu\text{F}$

$$f_0 = 5.03 \text{ kHz}$$

$$\omega_0 = 31.6 \cdot 10^3 \text{ rad}\cdot\text{s}^{-1}$$

$$\omega_0 C R I = 3.16 \text{ A}$$



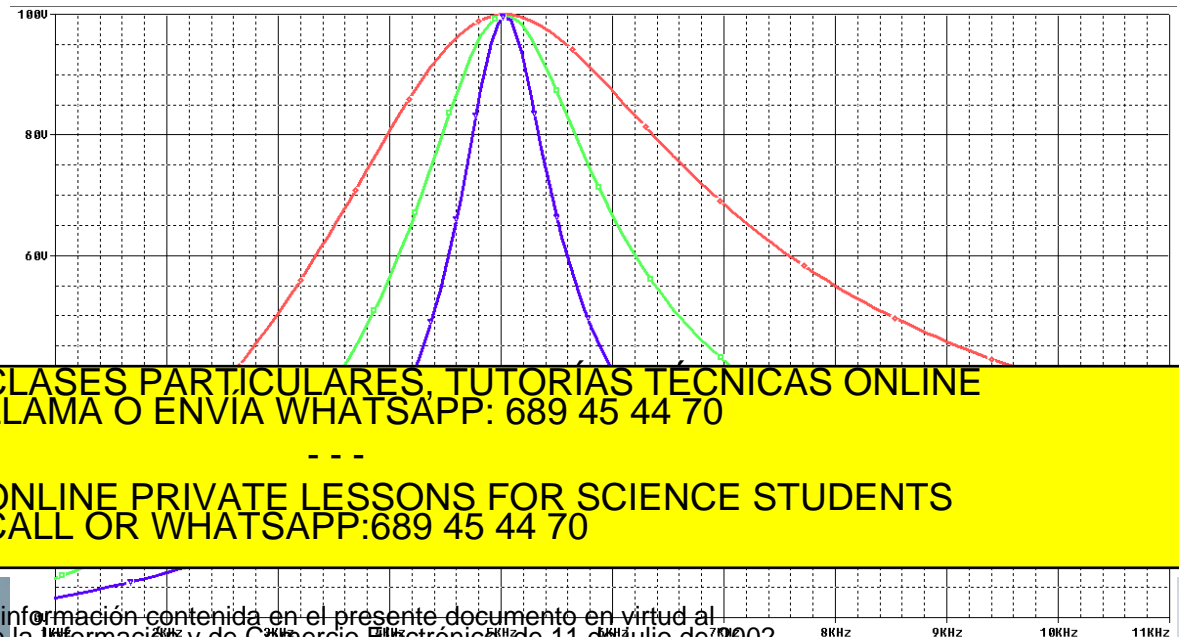
CLASES PARTICULARES, TUTORIAS TÉCNICAS ONLINE
LLAMA O ENVIA WHATSAPP: 689 45 44 70

ONLINE PRIVATE LESSONS FOR SCIENCE STUDENTS
CALL OR WHATSAPP:689 45 44 70

Cartagena99

Resonancia

- V_{out} en resonancia depende solamente de R
- La "esbeltez" de la curva depende de C y L
 - Azul: $L/2, C*2$
 - Roja: $L*2, C/2$
- Cuanto más estrecha, mayor selectividad de la resonancia: **factor de calidad Q**



Cartagena99

Resonancia

- Def: **factor de calidad** de un proceso resonante

$$Q = 2\pi \frac{\text{máx } E \text{ almacenada}}{E \text{ perdida por ciclo}}$$

- Un fenómeno naturalmente resonante típicamente $Q > 10$
 - P. ej: los rebotes de una pelota de golf $Q \sim 35$
- En nuestro caso la energía se almacena en C y L, y se disipa en la R
 - Circuito RLC paralelo máxima E en condensador: $\frac{1}{2} CV_{max}^2$
 - E disipada en un ciclo: $\frac{1}{2} \frac{V_{max}^2}{R} T$

$$Q = 2\pi \frac{\frac{1}{2} CV_{max}^2}{\frac{1}{2} \frac{V_{max}^2}{R} T} \Rightarrow Q = \omega_0 RC = R \sqrt{\frac{C}{L}}$$

Cartagena99

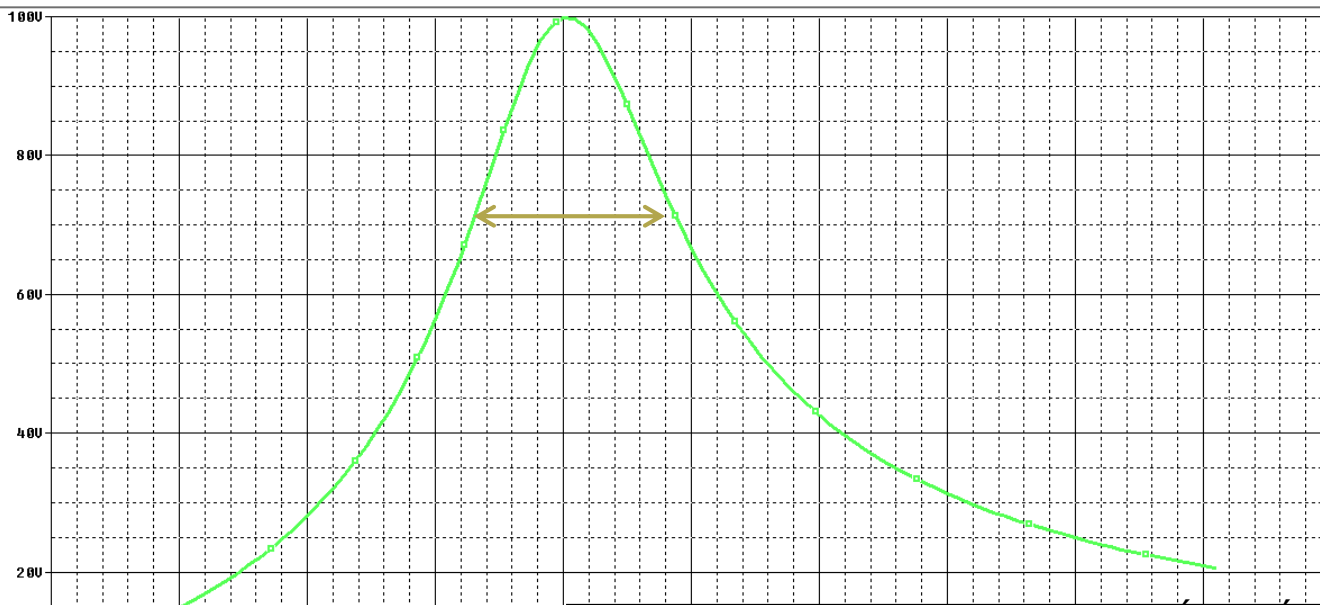
CLASES PARTICULARES, TUTORÍAS TÉCNICAS ONLINE
LLAMA O ENVÍA WHATSAPP: 689 45 44 70

ONLINE PRIVATE LESSONS FOR SCIENCE STUDENTS
CALL OR WHATSAPP: 689 45 44 70

Resonancia

- **Ancho de banda:** rango en el que $P_{out} \geq 0.5P_{max}$

– Potencia con cuadrado de $V \rightarrow$ ancho de banda en $V = \frac{V_{max}}{\sqrt{2}} = 0.707V_{max}$



$$\omega_1 = 4.3kHz$$

$$\omega_2 = 5.89kHz$$

$$BW = [4.3, 5.89]kHz = 1.59kHz$$

Cartagena99

CLASES PARTICULARES, TUTORÍAS TÉCNICAS ONLINE
LLAMA O ENVÍA WHATSAPP: 689 45 44 70

ONLINE PRIVATE LESSONS FOR SCIENCE STUDENTS
CALL OR WHATSAPP:689 45 44 70

Resonancia

- Las frecuencias de corte se pueden calcular analíticamente (RLC paralelo)

$$\omega_{1,2} = \omega_0 \sqrt{1 + \left(\frac{1}{2Q}\right)^2} \pm \frac{\omega_0}{2Q}$$

- Cuanto mayor es Q menor es el ancho de banda

$$BW = \omega_2 - \omega_1 = \frac{\omega_0}{Q}$$

- Para $Q > 10$ $\omega_{1,2} \approx \omega_0 \left(1 \pm \frac{1}{2Q}\right)$

Cartagena99

CLASES PARTICULARES, TUTORÍAS TÉCNICAS ONLINE
LLAMA O ENVÍA WHATSAPP: 689 45 44 70

ONLINE PRIVATE LESSONS FOR SCIENCE STUDENTS
CALL OR WHATSAPP:689 45 44 70

Resonancia

- Resumen de circuitos RLC resonantes

	Paralelo	Serie
Frecuencia de resonancia ω_0	$\frac{1}{\sqrt{LC}}$	$\frac{1}{\sqrt{LC}}$
Factor de calidad Q	$\frac{\omega_0 L}{R} = \frac{1}{\omega_0 RC}$	$\omega_0 RC = \frac{R}{\omega_0 L}$
Ancho de banda BW	$\frac{\omega_0}{Q}$	$\frac{\omega_0}{Q}$
Frecuencias de corte (media potencia)	$\omega_{1,2} = \omega_0 \sqrt{1 + \left(\frac{1}{2Q}\right)^2} \pm \frac{\omega_0}{2Q}$	$\omega_{1,2} = \omega_0 \sqrt{1 + \left(\frac{1}{2Q}\right)^2} \pm \frac{\omega_0}{2Q}$

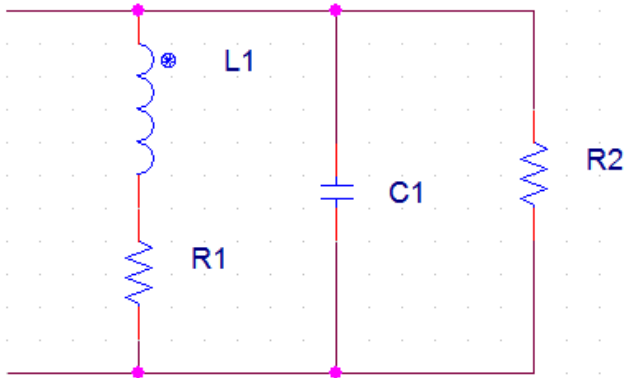
Cartagena99

CLASES PARTICULARES, TUTORÍAS TÉCNICAS ONLINE
 LLAMA O ENVÍA WHATSAPP: 689 45 44 70

ONLINE PRIVATE LESSONS FOR SCIENCE STUDENTS
 CALL OR WHATSAPP: 689 45 44 70

Resonancia

- Ej: calcular la frecuencia de resonancia del circuito



Cartagena99

CLASES PARTICULARES, TUTORÍAS TÉCNICAS ONLINE
LLAMA O ENVÍA WHATSAPP: 689 45 44 70

ONLINE PRIVATE LESSONS FOR SCIENCE STUDENTS
CALL OR WHATSAPP:689 45 44 70

Filtros

- Los filtros llevan empleándose desde los comienzos de la ingeniería eléctrica
 - Eliminación (atenuación) de frecuencias indeseadas
 - Amplificación de rangos determinados de frecuencias
- Def: Un filtro es un circuito que se diseña para permitir el paso (o amplificar) un determinado rango de frecuencias y rechazar (o atenuar) el resto.
 - Diseñar un filtro que cumpla unas determinadas especificaciones es un tema complejo, solo vamos a realizar una pequeña introducción

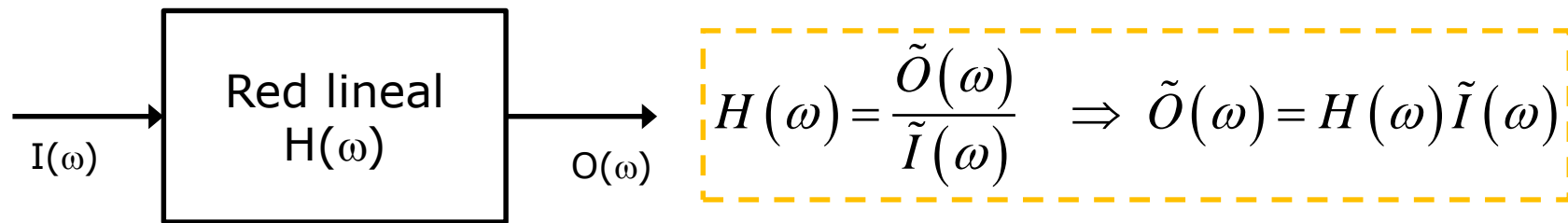
Cartagena99

CLASES PARTICULARES, TUTORÍAS TÉCNICAS ONLINE
LLAMA O ENVÍA WHATSAPP: 689 45 44 70

ONLINE PRIVATE LESSONS FOR SCIENCE STUDENTS
CALL OR WHATSAPP:689 45 44 70

Función de transferencia

- Herramienta para determinar la respuesta de un circuito frente a variedad de entradas.
 - En particular para analizar comportamiento de un filtro.
- $H(\omega) \equiv$ una magnitud *fasorial* (salida) del circuito dividida entre otra magnitud *fasorial* (entrada) en función de la frecuencia
 - I y O pueden ser voltajes o tensiones (o combinaciones)



Cartagena99

CLASES PARTICULARES, TUTORÍAS TÉCNICAS ONLINE
LLAMA O ENVÍA WHATSAPP: 689 45 44 70

ONLINE PRIVATE LESSONS FOR SCIENCE STUDENTS
CALL OR WHATSAPP:689 45 44 70

Función de transferencia

- En circuitos lineales entrada y salida pueden ser tensiones o corrientes → 4 posibilidades

– Ganancia en tensión $H(\omega) = \frac{\tilde{V}_o(\omega)}{\tilde{V}_i(\omega)} = A_V$

– Ganancia en corriente $H(\omega) = \frac{\tilde{I}_o(\omega)}{\tilde{I}_i(\omega)} = A_I$

– Transferencia de impedancia $H(\omega) = \frac{\tilde{V}_o(\omega)}{\tilde{I}_i(\omega)}$

– Transferencia de admitancia $H(\omega) = \frac{\tilde{I}_o(\omega)}{\tilde{V}_i(\omega)}$

Cartagena99

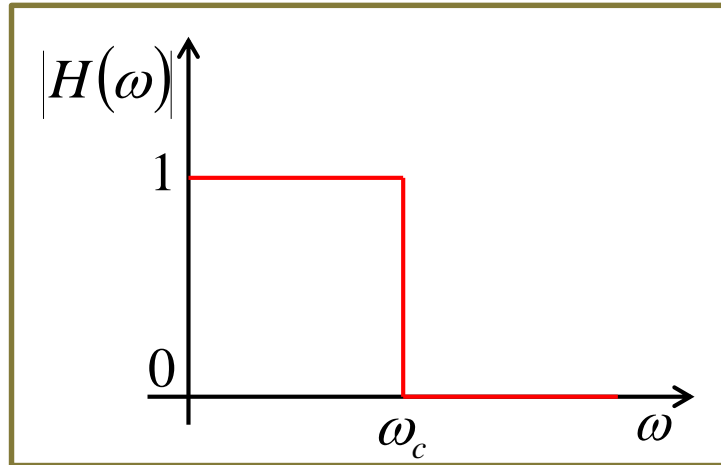
CLASES PARTICULARES, TUTORÍAS TÉCNICAS ONLINE
LLAMA O ENVÍA WHATSAPP: 689 45 44 70

ONLINE PRIVATE LESSONS FOR SCIENCE STUDENTS
CALL OR WHATSAPP:689 45 44 70

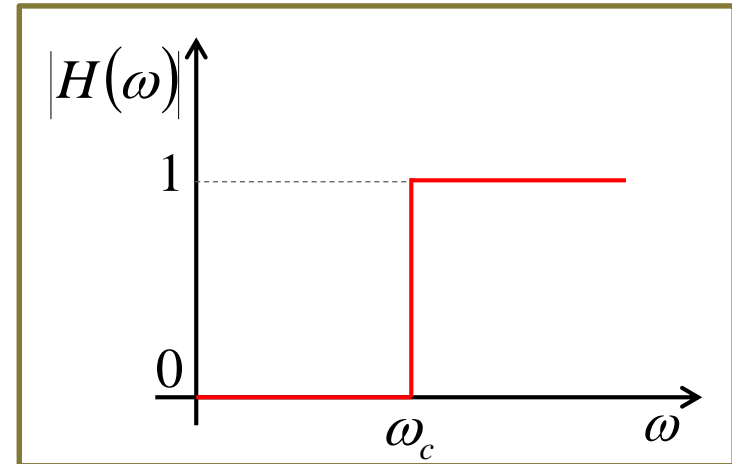
Filtros

• Clasificación de filtros ideales

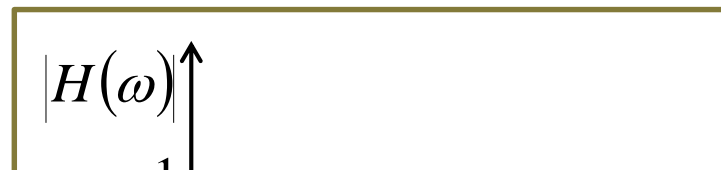
- Filtro pasa-baja



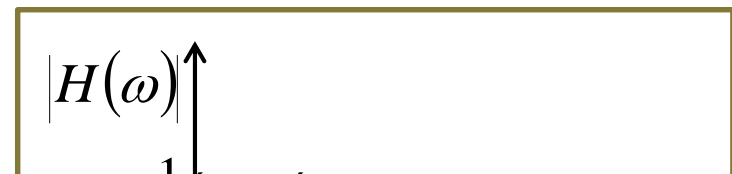
- Filtro pasa-alta



- Filtro pasa-banda



- Filtro rechaza-banda



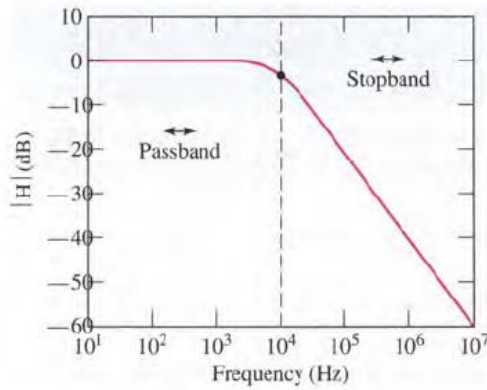
CLASES PARTICULARES, TUTORIAS TÉCNICAS ONLINE
LLAMA O ENVIA WHATSAPP: 689 45 44 70

ONLINE PRIVATE LESSONS FOR SCIENCE STUDENTS
CALL OR WHATSAPP:689 45 44 70

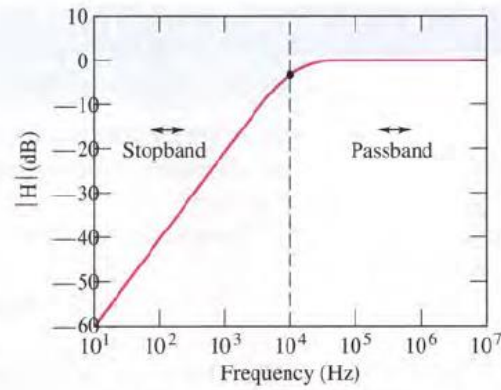
Cartagena99

Filtros

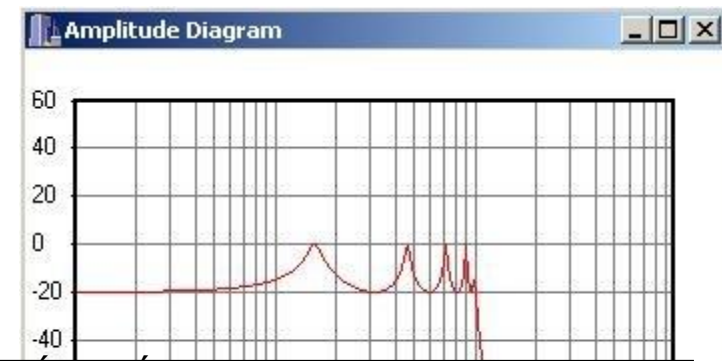
- Los filtros ideales son irrealizables.
 - Atenuación de la banda de paso
 - Parte de las frecuencias de rechazo no son filtradas
 - Rizado



(a)



(b)



Cartagena99

CLASES PARTICULARES, TUTORÍAS TÉCNICAS ONLINE
LLAMA O ENVÍA WHATSAPP: 689 45 44 70
- - -
ONLINE PRIVATE LESSONS FOR SCIENCE STUDENTS
CALL OR WHATSAPP: 689 45 44 70

Filtros

- Tipos de circuitos (analógicos) de filtrado
 - **Pasivos:** constan solamente de elementos pasivos (R, L ó C) y por tanto no puede producir amplificación.
 - Empleados desde hace unos 80-90 años...
 - En general necesitan inductancias (caras, pesadas y voluminosas) por lo que son difíciles de fabricar con circuitos integrados.
 - **Activos:** constan además de elementos activos (transistores, operacionales, etc.) por lo que pueden además amplificar señales.
 - Más sencillos de fabricar en un único circuito integrado

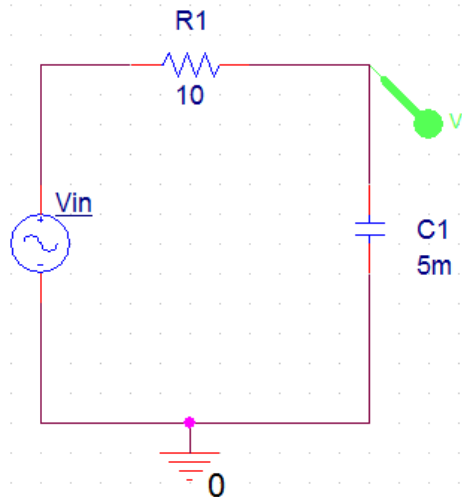
Cartagena99

CLASES PARTICULARES, TUTORÍAS TÉCNICAS ONLINE
LLAMA O ENVÍA WHATSAPP: 689 45 44 70

ONLINE PRIVATE LESSONS FOR SCIENCE STUDENTS
CALL OR WHATSAPP:689 45 44 70

Función de transferencia

- Ej: obtener $A_V(\omega)$ del circuito RC y representar respuesta frente a señales sinusoidales



$$\left. \begin{aligned} Z_R &= R \\ Z_C &= \frac{1}{j\omega C} \end{aligned} \right\} \tilde{V}_o = \frac{Z_C}{Z_R + Z_C} \tilde{V}_i$$

$$A_V = \frac{\tilde{V}_o}{\tilde{V}_i} = \frac{1}{R + \frac{1}{j\omega C}} = \frac{1}{1 + j\omega RC}$$

- Al pasarlo al dominio del tiempo habrá una atenuación y un desfase dependiendo de la frecuencia.

Cartagena99

CLASES PARTICULARES, TUTORÍAS TÉCNICAS ONLINE
LLAMA O ENVÍA WHATSAPP: 689 45 44 70

ONLINE PRIVATE LESSONS FOR SCIENCE STUDENTS
CALL OR WHATSAPP:689 45 44 70

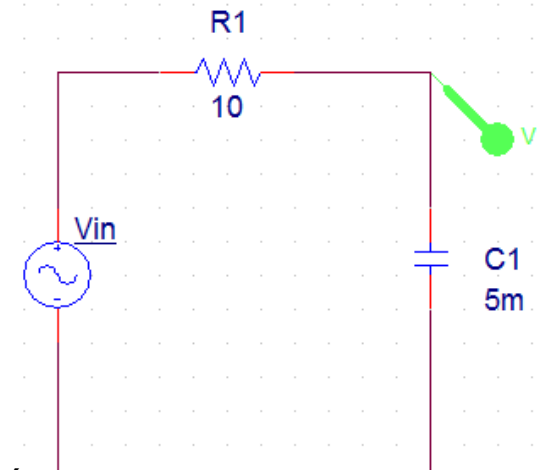
Función de transferencia

- Ej: obtener $A_V(\omega)$ del circuito RC y representar respuesta frente a señales sinusoidales

$$A_V = \frac{\tilde{V}_o}{\tilde{V}_i} = \frac{1}{1 + j\omega RC}$$

– Representación: módulo y argumento (fase)

$$|A_V| = \frac{1}{\sqrt{1 + \frac{\omega^2}{\left(\frac{1}{RC}\right)^2}}} = \frac{1}{\sqrt{1 + \frac{\omega^2}{\omega_c^2}}}$$



Cartagena99

CLASES PARTICULARES, TUTORÍAS TÉCNICAS ONLINE
LLAMA O ENVÍA WHATSAPP: 689 45 44 70

ONLINE PRIVATE LESSONS FOR SCIENCE STUDENTS
CALL OR WHATSAPP:689 45 44 70

Función de transferencia

- Ej: obtener $A_V(\omega)$ del circuito RC y representar respuesta frente a señales sinusoidales
 - Manualmente: algunos puntos importantes
 - $\omega_c = 1/RC = 20 \text{ rad.s}^{-1} = 3.18 \text{ Hz}$

$$|A_V| = \frac{1}{\sqrt{1 + \frac{\omega^2}{\omega_c^2}}}$$

$$\arg(A_V) = -\arctg\left(\frac{\omega}{\omega_c}\right)$$

ω/ω_c	$ A_V $	ϕ
0	1	0
.5	0.89	-26.6°
1	0.707	-45°
2	.45	-63°
10	0.1	-84°

Cartagena99

CLASES PARTICULARES, TUTORÍAS TÉCNICAS ONLINE
LLAMA O ENVÍA WHATSAPP: 689 45 44 70

ONLINE PRIVATE LESSONS FOR SCIENCE STUDENTS
CALL OR WHATSAPP: 689 45 44 70

Función de transferencia

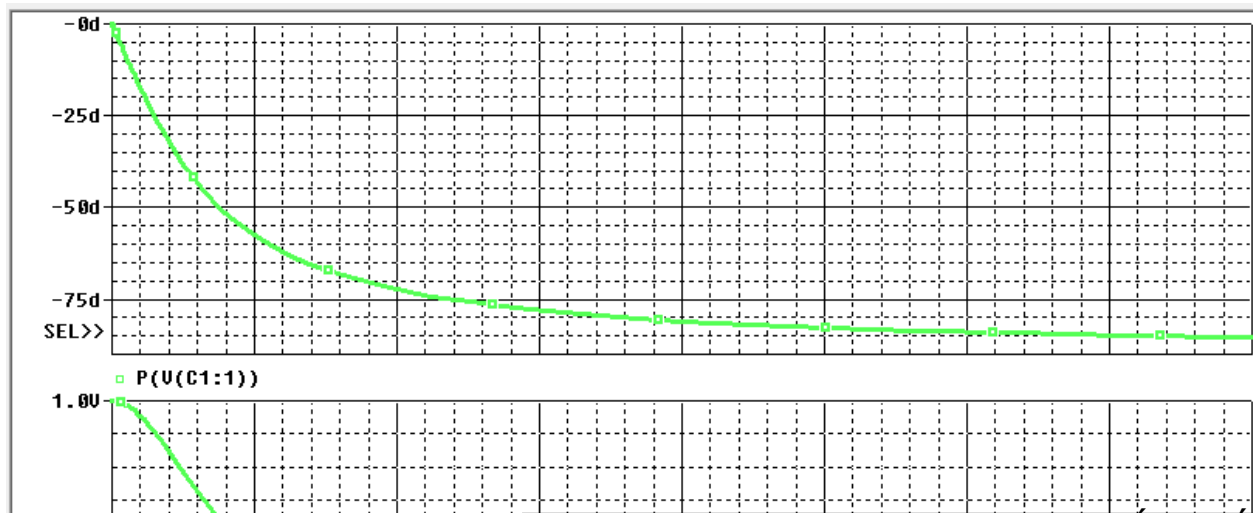
- Ej obtener $A_V(\omega)$ del circuito RC y representar respuesta frente a señales sinusoidales

- PSPICE

- $\omega_c = 1/RC = 20 \text{ rad/s}$ (3.18 Hz)

$$|A_V| = \frac{1}{\sqrt{1 + \frac{\omega^2}{\omega_c^2}}}$$

$$\arg(A_V) = -\arctg\left(\frac{\omega}{\omega_c}\right)$$



Cartagena99

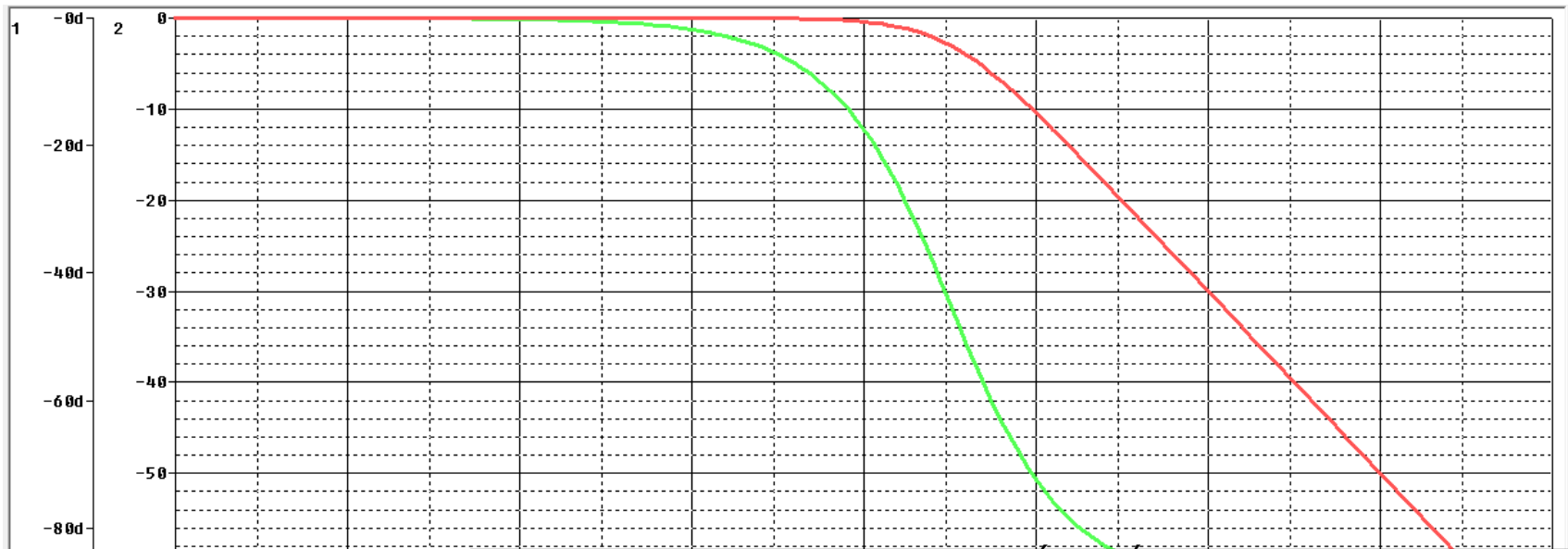
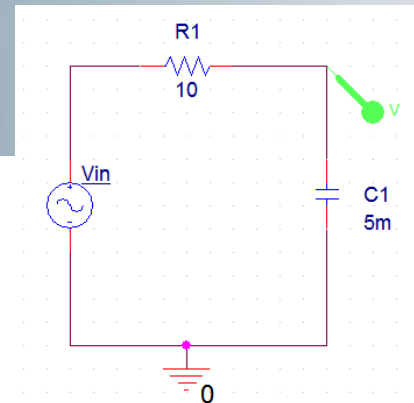
CLASES PARTICULARES, TUTORÍAS TÉCNICAS ONLINE
LLAMA O ENVÍA WHATSAPP: 689 45 44 70

ONLINE PRIVATE LESSONS FOR SCIENCE STUDENTS
CALL OR WHATSAPP: 689 45 44 70

Filtros pasivos

- Filtro pasivo pasa-baja

- Representación más visual: diagrama de Bode



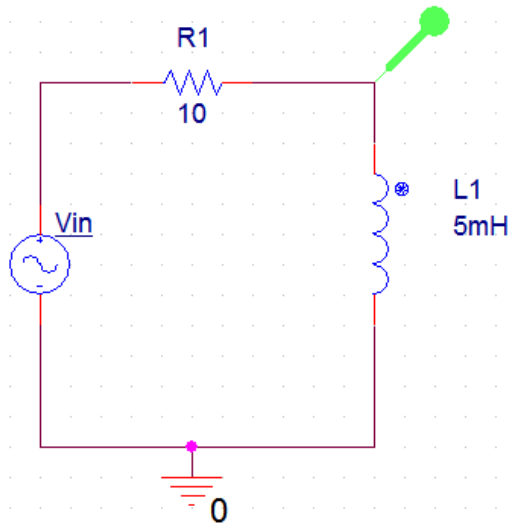
Cartagena99

CLASES PARTICULARES, TUTORÍAS TÉCNICAS ONLINE
LLAMA O ENVÍA WHATSAPP: 689 45 44 70

ONLINE PRIVATE LESSONS FOR SCIENCE STUDENTS
CALL OR WHATSAPP:689 45 44 70

Función de transferencia

- Ej: obtener $A_V(\omega)$ del circuito RL y representar respuesta frente a señales sinusoidales



$$\left. \begin{array}{l} Z_R = R \\ Z_L = j\omega L \end{array} \right\} \tilde{V}_o = \frac{Z_L}{Z_R + Z_L} \tilde{V}_i$$

$$A_V = \frac{j\omega L}{R + j\omega L}$$

Cartagena99

CLASES PARTICULARES, TUTORÍAS TÉCNICAS ONLINE
LLAMA O ENVÍA WHATSAPP: 689 45 44 70

ONLINE PRIVATE LESSONS FOR SCIENCE STUDENTS
CALL OR WHATSAPP:689 45 44 70

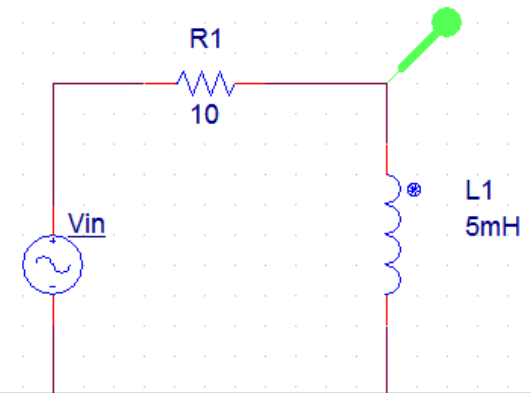
Función de transferencia

- Ej: obtener $A_V(\omega)$ del circuito RL y representar respuesta frente a señales sinusoidales

$$A_V = \frac{j\omega L}{R + j\omega L}$$

- Necesitamos representar módulo y argumento

$$|A_V| = \frac{\omega L}{\sqrt{R^2 + \omega^2 L^2}} = \frac{\frac{\omega}{\omega_c}}{\sqrt{1 + \frac{\omega^2}{\omega_c^2}}} \quad \left(\omega_c = \frac{R}{L} \right)$$



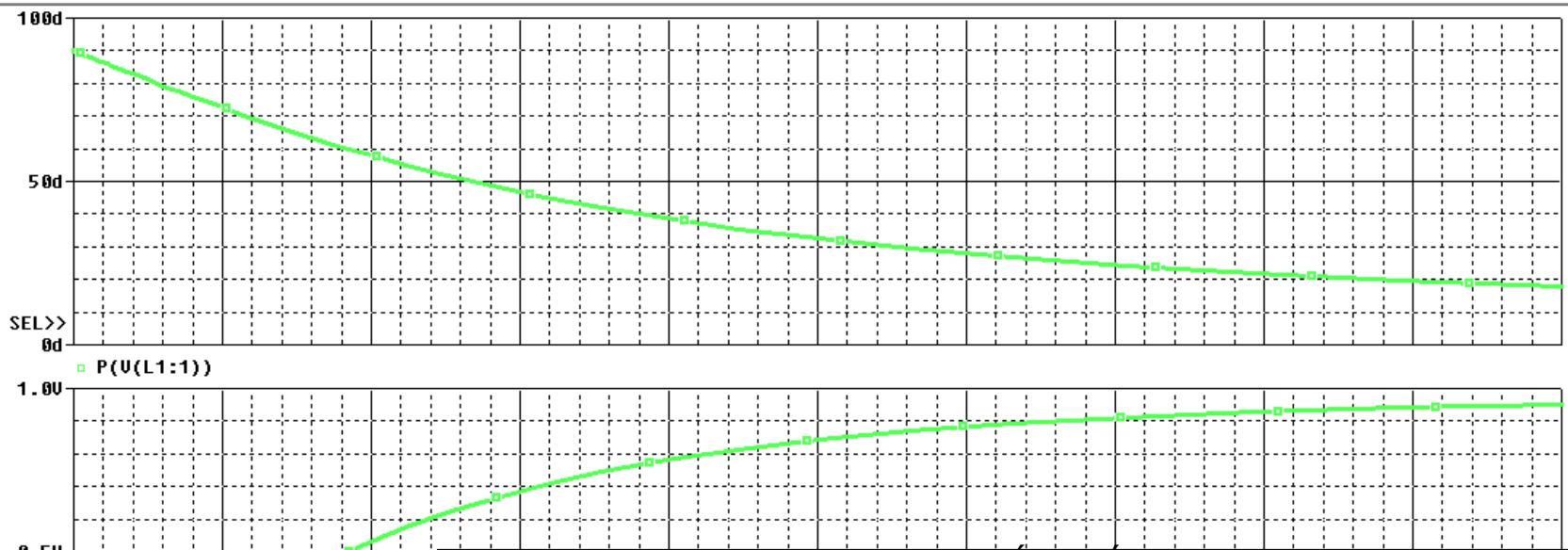
Cartagena99

CLASES PARTICULARES, TUTORÍAS TÉCNICAS ONLINE
LLAMA O ENVÍA WHATSAPP: 689 45 44 70

ONLINE PRIVATE LESSONS FOR SCIENCE STUDENTS
CALL OR WHATSAPP:689 45 44 70

Función de transferencia

- Ej: obtener $A_V(\omega)$ del circuito RL y representar respuesta frente a señales sinusoidales
 - $\omega_c = R/L = 2000 \text{ rad}\cdot\text{s}^{-1} = 318 \text{ Hz}$



Cartagena99

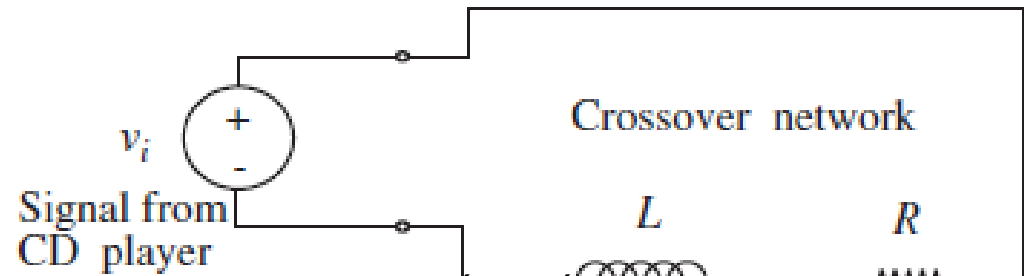
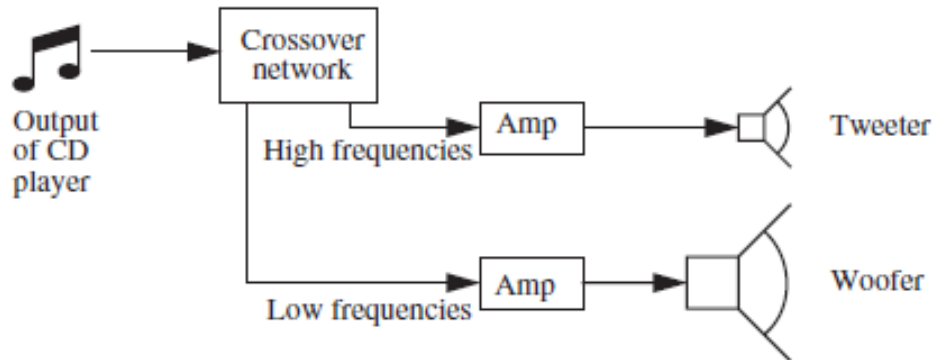
CLASES PARTICULARES, TUTORÍAS TÉCNICAS ONLINE
LLAMA O ENVÍA WHATSAPP: 689 45 44 70

ONLINE PRIVATE LESSONS FOR SCIENCE STUDENTS
CALL OR WHATSAPP: 689 45 44 70

U(L1:1)

Filtros pasivos

- Ejemplo de aplicación



CLASES PARTICULARES, TUTORIAS TECNICAS ONLINE
LLAMA O ENVIA WHATSAPP: 689 45 44 70

ONLINE PRIVATE LESSONS FOR SCIENCE STUDENTS
CALL OR WHATSAPP:689 45 44 70

Cartagena99

Filtros pasivos

- En general en un filtro (habitualmente de V pero puede ser de I) se definen las **frecuencias de corte** como las frecuencias a las que el filtro atenúa un factor 0.707 respecto al máximo
 - Se corresponden con los puntos en los que la potencia es la mitad de la máxima
 - Pasa-baja y pasa-alta tienen una única frecuencia de corte
 - Pasa-banda y rechazo-banda tienen dos frecuencias de corte que determinan **el ancho de banda** ($\omega_2 - \omega_1$)
 - Además de la frecuencia de corte determinada, un buen filtro tiene una caída brusca y poco rizado.

Cartagena99

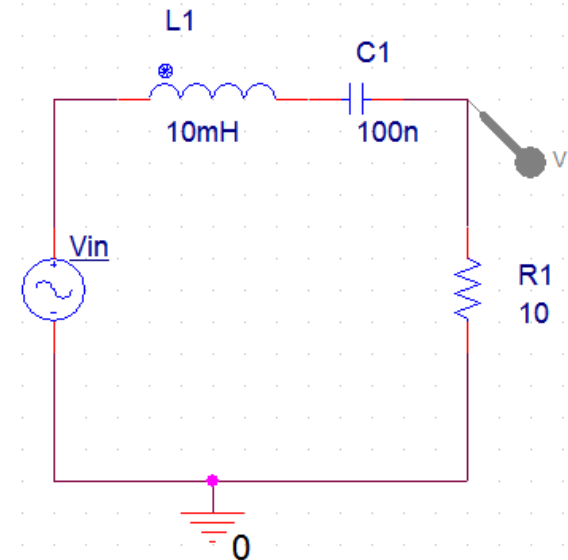
CLASES PARTICULARES, TUTORÍAS TÉCNICAS ONLINE
LLAMA O ENVÍA WHATSAPP: 689 45 44 70

ONLINE PRIVATE LESSONS FOR SCIENCE STUDENTS
CALL OR WHATSAPP: 689 45 44 70

Filtros pasivos

- Filtro pasa-banda

- Una posibilidad es combinar un pasa-baja en serie con un pasa-alta
 - No es lo ideal por necesitar muchos elementos y complejidad del cálculo de para un rango determinado
- Más habitual: circuito RLC (serie o paralelo)



CLASES PARTICULARES, TUTORÍAS TÉCNICAS ONLINE
LLAMA O ENVÍA WHATSAPP: 689 45 44 70

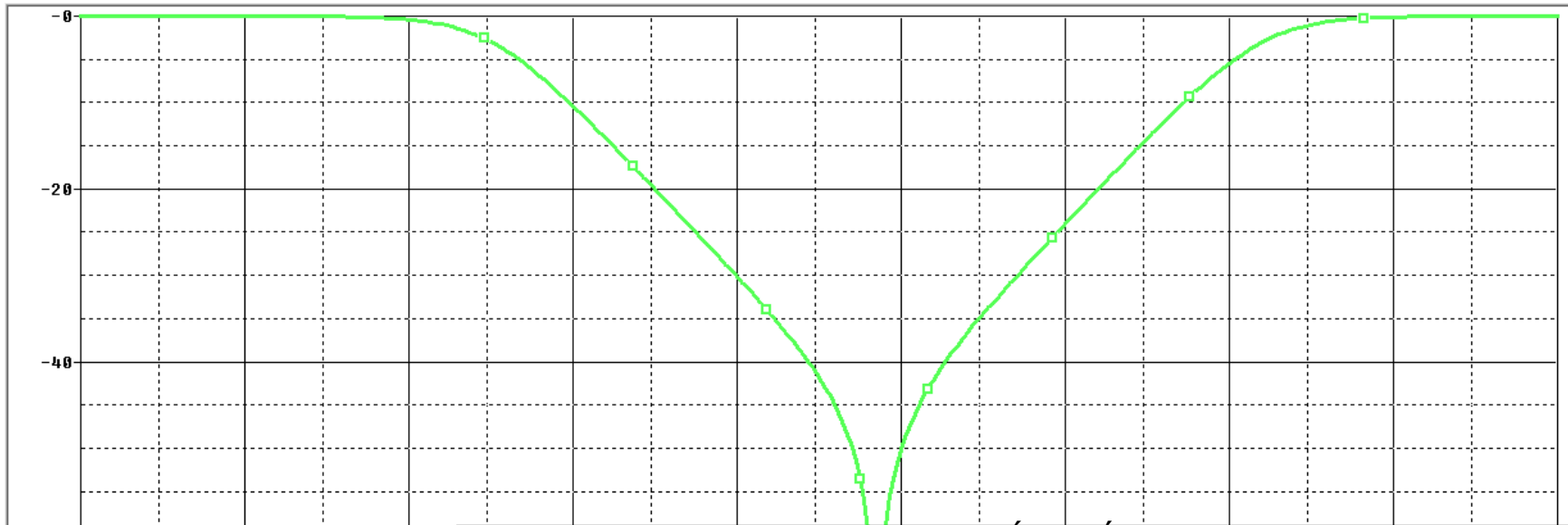
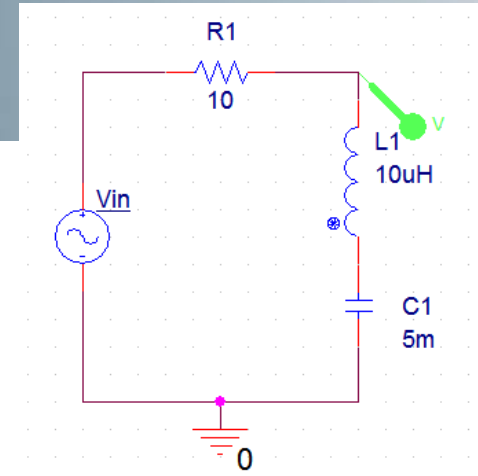
ONLINE PRIVATE LESSONS FOR SCIENCE STUDENTS
CALL OR WHATSAPP:689 45 44 70

Cartagena99

Filtros pasivos

- Filtro rechaza-banda

- Por ejemplo, tomando la salida entre L y C
 - Expresiones análogas a las anteriores



Cartagena99

CLASES PARTICULARES, TUTORÍAS TÉCNICAS ONLINE
LLAMA O ENVÍA WHATSAPP: 689 45 44 70

ONLINE PRIVATE LESSONS FOR SCIENCE STUDENTS
CALL OR WHATSAPP:689 45 44 70

10mHz 100mHz 1.0Hz 10Hz 100Hz 1.0kHz 10kHz 100kHz 1.0MHz 10MHz

Filtros pasivos

- Conclusiones sobre los filtros pasivos
 - Su ganancia máxima es la unidad, no amplifican.
 - Su diseño no es único, existen diferentes opciones para un mismo criterio de diseño.
 - Los filtros que hemos visto son los más simples, con más elementos se pueden obtener funciones de transferencia más complejas.

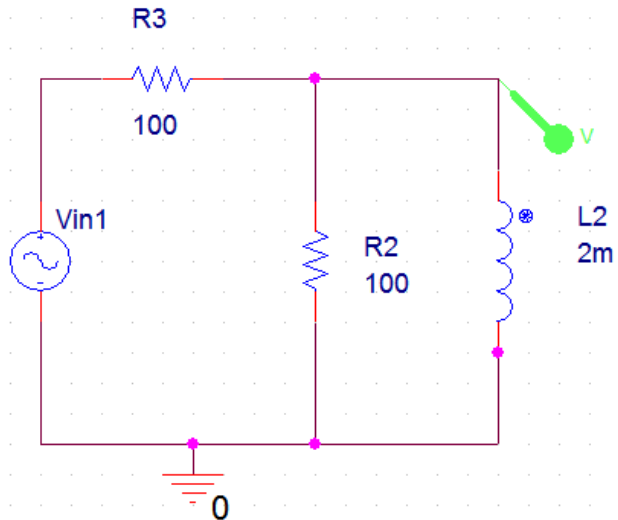
Cartagena99

CLASES PARTICULARES, TUTORÍAS TÉCNICAS ONLINE
LLAMA O ENVÍA WHATSAPP: 689 45 44 70

ONLINE PRIVATE LESSONS FOR SCIENCE STUDENTS
CALL OR WHATSAPP:689 45 44 70

Filtros pasivos

- Ej: determinar tipo de filtro y frecuencias de corte



Cartagena99

CLASES PARTICULARES, TUTORÍAS TÉCNICAS ONLINE
LLAMA O ENVÍA WHATSAPP: 689 45 44 70

ONLINE PRIVATE LESSONS FOR SCIENCE STUDENTS
CALL OR WHATSAPP:689 45 44 70

Filtros activos

- Los filtros pasivos tienen limitaciones
 - Generalmente necesitan bobinas (voluminosas, caras y poco integrables)
 - Se comportan mal para frecuencias por debajo de la radiofrecuencia ($f < 3\text{kHz}$)
 - Por eso son útiles sobre todo a alta frecuencia
 - Difícil de controlar la ganancia en tensión
- Los filtros activos intentan superar estas limitaciones
 - Pueden ser más pequeños y baratos al evitar inductancias.
 - Se pueden integrar.
 - Pueden proporcionar ganancia de manera sencilla (unir filtrado y amplificación)
 - Se pueden combinar empleando amplificadores de aislamiento.
 - Es más sencillo el diseño en cascada.

Cartagena99

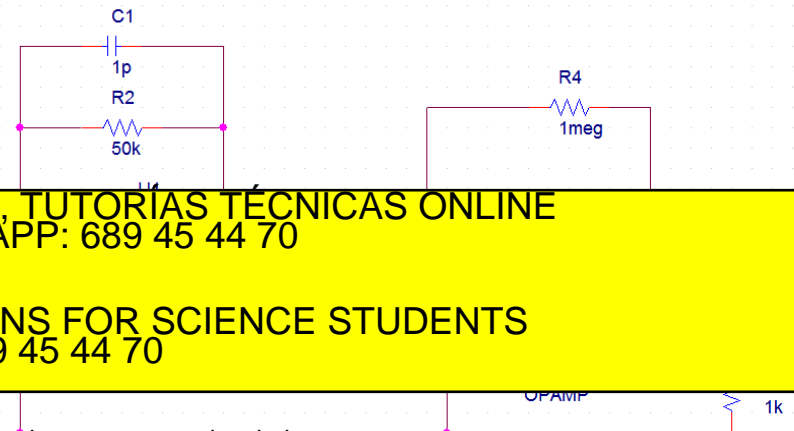
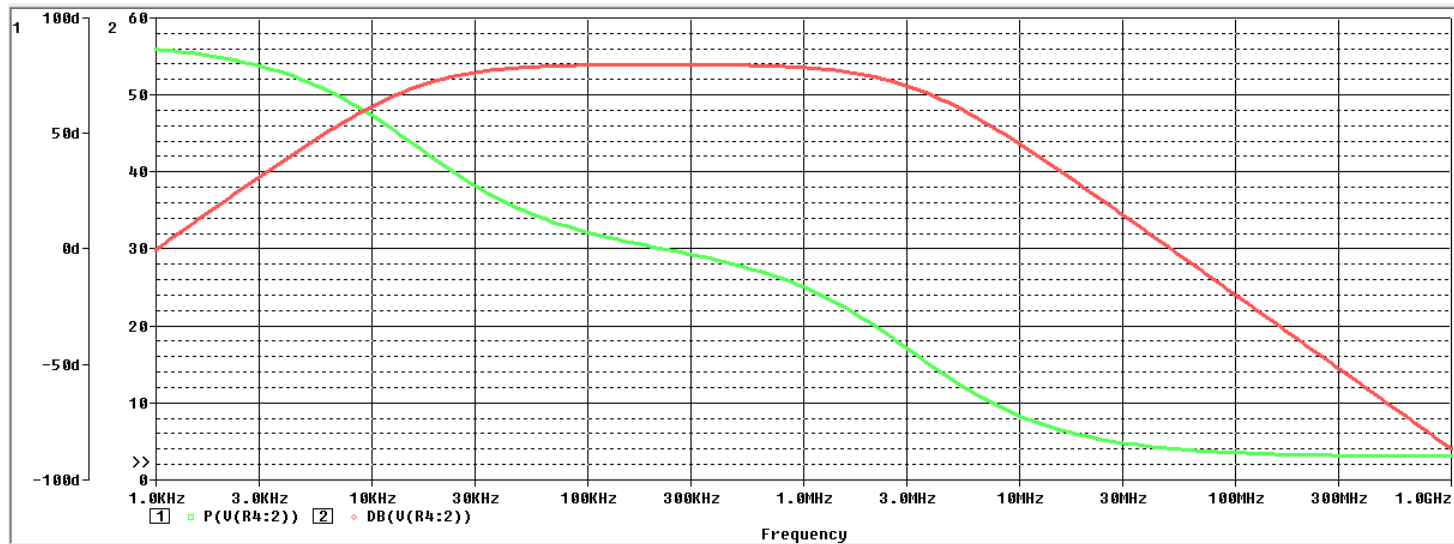
CLASES PARTICULARES, TUTORÍAS TÉCNICAS ONLINE
LLAMA O ENVÍA WHATSAPP: 689 45 44 70

ONLINE PRIVATE LESSONS FOR SCIENCE STUDENTS
CALL OR WHATSAPP:689 45 44 70

Filtros activos

- Ej. de filtro pasa-banda

- Se puede hacer una realización en cascada pasa-baja con pasa-alta



CLASES PARTICULARES, TUTORÍAS TÉCNICAS ONLINE
LLAMA O ENVÍA WHATSAPP: 689 45 44 70

ONLINE PRIVATE LESSONS FOR SCIENCE STUDENTS
CALL OR WHATSAPP:689 45 44 70

Cartagena99

Objetivos del tema

- Hemos estudiado cómo se comportan los circuitos lineales frente a excitaciones sinusoidales
 - Fasores – impedancias
 - Potencia compleja
 - Concepto de resonancia, resonancia en circuitos
 - Introducción al filtrado de señales

Programa de la asignatura

1. Elementos de un circuito y métodos de análisis en corriente continua: Resistencias, fuentes de voltaje y de corriente, fuentes dependientes. Leyes de Kirchhoff. Técnicas de análisis: combinación de elementos, análisis por nodos, análisis por mallas, principio de superposición, teoremas de Thévenin y Norton. El amplificador operacional ideal. Circuitos simples con amplificadores operacionales. Análisis de circuitos asistido por ordenador.
2. Análisis en el dominio del tiempo: Respuesta transitoria de circuitos con condensadores e inductancias. Circuitos de primer y segundo orden.
3. Análisis en el dominio de la frecuencia: Excitación sinusoidal. Fasores. Impedancia.

CLASES PARTICULARES, TUTORÍAS TÉCNICAS ONLINE
LLAMA O ENVÍA WHATSAPP: 689 45 44 70

ONLINE PRIVATE LESSONS FOR SCIENCE STUDENTS
CALL OR WHATSAPP:689 45 44 70

Cartagena99