

Divide y vencerás

Diseño y Análisis de Algoritmos



Universidad
Rey Juan Carlos

Cartagena99

CLASES PARTICULARES TUTORÍAS
LLAMA O ENVÍA WHATSAPP. 689 45 44 70
ONLINE PRIVATE LESSONS FOR SC
CALL OR WHATSAPP. 689 45 44 70

Contenidos

- 1 Introducción
- 2 Transforma y vencerás
- 3 Decrementa y vencerás
- 4 Divide y vencerás

Cartagena99

CLASES PARTICULARES TUTORÍAS
LLAMA O ENVÍA WHATSAPP. 689 45 44 70
ONLINE PRIVATE LESSONS FOR SC
CALL OR WHATSAPP. 689 45 44 70

Introducción

Cartagena99

CLASES PARTICULARES TUTORÍAS
LLAMA O ENVÍA WHATSAPP. 689 45 44 70
ONLINE PRIVATE LESSONS FOR SCIENCE
CALL OR WHATSAPP. 689 45 44 70

Divide y vencerás

- Uno de los más importantes paradigmas de diseño algorítmico
- Se basa en la resolución de un problema dividiéndolo en dos o más subproblemas de igual tipo o similar
- El proceso continúa hasta que éstos llegan a ser lo suficientemente sencillos como para que se resuelvan directamente
- Al final, las soluciones a cada uno de los subproblemas se combinan para dar una solución al problema original
- Muchos algoritmos basados en esta estrategia son recursivos

Cartagena99

CLASES PARTICULARES TUTORÍAS
LLAMA O ENVIA WHATSAPP. 689 45 44 70
ONLINE PRIVATE LESSONS FOR SC
CALL OR WHATSAPP. 689 45 44 70

Simplificación y descomposición de problemas

- Las palabras clave en este tema van a ser la **simplificación** y la **descomposición** de problemas
- Veremos tres estrategias para simplificar y descomponer problemas:
 - **Transforma y vencerás**
 - **Decrementa y vencerás**
 - **Divide y vencerás**

Cartagena99

CLASES PARTICULARES TUTORÍAS
LLAMA O ENVÍA WHATSAPP. 689 45 44 70
ONLINE PRIVATE LESSONS FOR SC
CALL OR WHATSAPP. 689 45 44 70

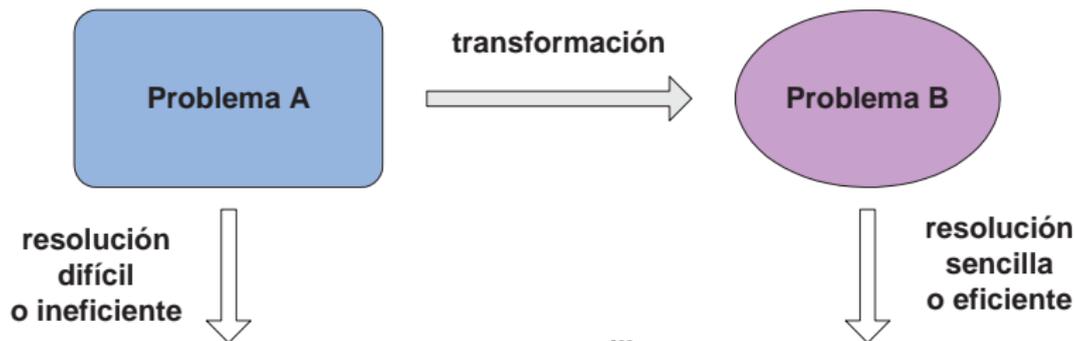
Transforma y vencerás

Cartagena99

CLASES PARTICULARES TUTORÍAS
LLAMA O ENVIA WHATSAPP. 689 45 44 70
ONLINE PRIVATE LESSONS FOR SCIENCE
CALL OR WHATSAPP. 689 45 44 70

Transforma y vencerás

- Esta estrategia también se denomina **reducción**
- Esta técnica procura resolver un problema transformándolo en otro más simple, conocido, o para el que existan algoritmos eficientes



Cartagena99

CLASES PARTICULARES TUTORÍAS
LLAMA O ENVÍA WHATSAPP. 689 45 44 70
ONLINE PRIVATE LESSONS FOR SCIENCE
CALL OR WHATSAPP. 689 45 44 70

Encontrar la mediana de un array desordenado

- Sea un array v de n números
- 1 Ordenar el array $v \rightarrow \Theta(n \log n)$
- 2 Devolver
 - $v[(n+1)/2]$ si n es impar
 - $\frac{v[n/2] + v[1 + n/2]}{2}$ si n es par

4	2	5	5	6	1	0	3	4	5	8	7
---	---	---	---	---	---	---	---	---	---	---	---



ordenar

0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11
---	---	---	---	---	---	---	---	---	---	----	----

Cartagena99

CLASES PARTICULARES TUTORÍAS
 LLAMA O ENVIA WHATSAPP. 689 45 44 70
 ONLINE PRIVATE LESSONS FOR SC
 CALL OR WHATSAPP. 689 45 44 70

Estimación del valor de π

- Planteamos un problema alternativo
- Buscamos una **aproximación del perímetro p de un círculo** de radio R

$$p = 2\pi R \quad \Rightarrow \quad \pi = \frac{p}{2R}$$

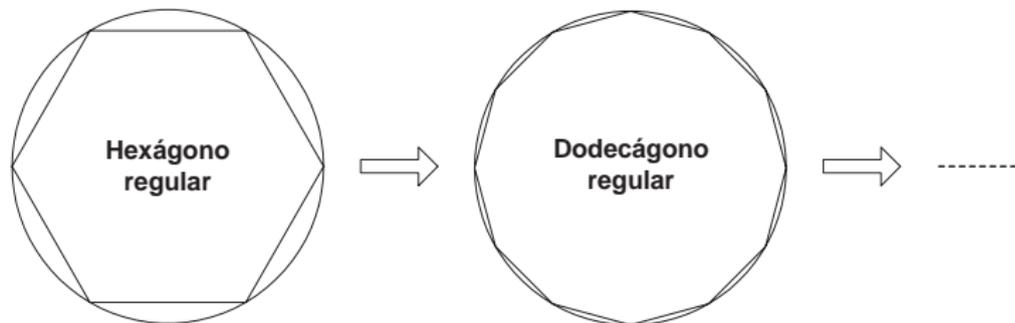
- Aproximamos un círculo con un polígono regular inscrito o circunscrito al círculo
- El perímetro del polígono inscrito p_i nos dará una cota inferior de p
- El perímetro del polígono circunscrito p_c nos dará una cota superior de p

Cartagena99

CLASES PARTICULARES TUTORÍAS
LLAMA O ENVÍA WHATSAPP. 689 45 44 70
ONLINE PRIVATE LESSONS FOR SC
CALL OR WHATSAPP. 689 45 44 70

Estimación del valor de π

- Comenzamos por un polígono regular inscrito (por ejemplo, un hexágono), cuyo perímetro será $6R$
- A continuación, doblamos el número de lados, obteniendo una mejor aproximación

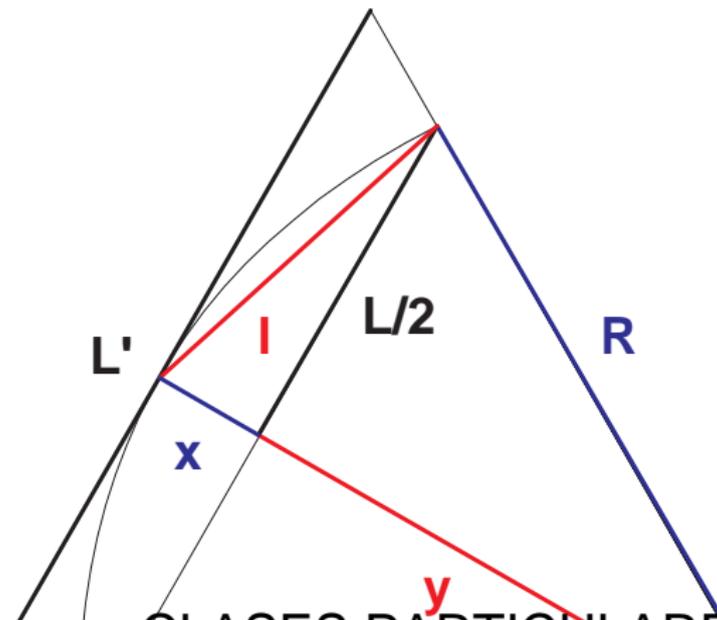


- El perímetro de un polígono con el doble de lados se puede obtener

Cartagena99

CLASES PARTICULARES TUTORÍAS
LLAMA O ENVÍA WHATSAPP. 689 45 44 70
ONLINE PRIVATE LESSONS FOR SC
CALL OR WHATSAPP. 689 45 44 70

Estimación del valor de π



Cartagena99

CLASES PARTICULARES TUTORÍAS
LLAMA O ENVIA WHATSAPP. 689 45 44 70
ONLINE PRIVATE LESSONS FOR SCIENCE
CALL OR WHATSAPP. 689 45 44 70

Estimación del valor de π

- Si el lado de un polígono inscrito mide L , se puede hallar la longitud un lado del polígono l con el doble de lados

$$R^2 = y^2 + \left(\frac{L}{2}\right)^2 \Rightarrow y = \sqrt{R^2 - \left(\frac{L}{2}\right)^2} \quad x = R - y = R - \sqrt{R^2 - \left(\frac{L}{2}\right)^2}$$

$$l = \sqrt{\left(\frac{L}{2}\right)^2 + R^2 + R^2 - \left(\frac{L}{2}\right)^2 - 2R\sqrt{R^2 - \left(\frac{L}{2}\right)^2}} = R\sqrt{2 - \sqrt{4 - \left(\frac{L}{R}\right)^2}}$$

- El lado L' de un polígono circunscrito se puede hallar a partir del lado L de un polígono inscrito

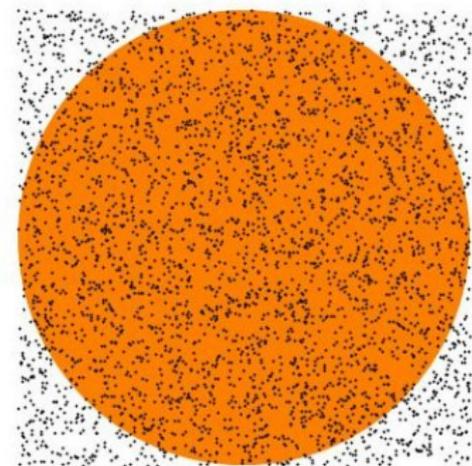
$$\frac{L'}{R} = \frac{L}{y} \Rightarrow L' = \frac{LR}{y}$$

- La estimación de π se puede mejorar si se aumenta el número de lados

Cartagena99

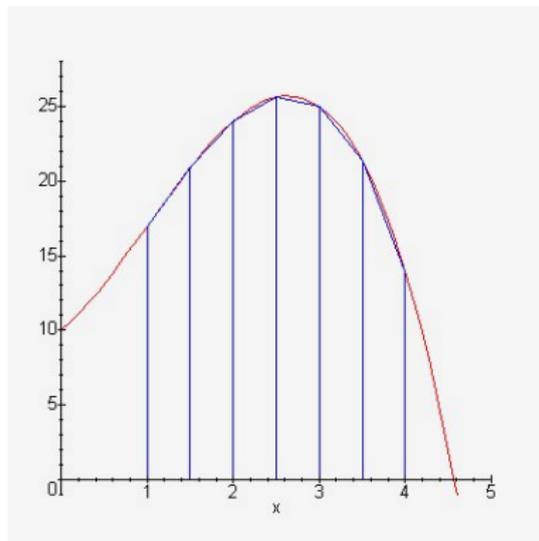
CLASES PARTICULARES TUTORÍAS
 LLAMA O ENVIA WHATSAPP. 689 45 44 70
 ONLINE PRIVATE LESSONS FOR SC
 CALL OR WHATSAPP. 689 45 44 70

Otros métodos para estimar del valor de π



inside: 2860 outside: 818 total: 3678
 $\pi \approx 4 \times 2860 / 3678 = 3.11039$

Simulación Monte Carlo



Integración numérica

Cartagena99

CLASES PARTICULARES TUTORÍAS
 LLAMA O ENVÍA WHATSAPP. 689 45 44 70
 ONLINE PRIVATE LESSONS FOR SCIENCE
 CALL OR WHATSAPP. 689 45 44 70

Raíz cuadrada

- Deseamos hallar \sqrt{a}
- Transformamos el problema en el de **hallar un cero de una función**

$$x = \sqrt{a} \rightarrow x^2 = a \rightarrow x^2 - a = 0$$

- Por tanto, querremos hallar un cero de la función $y = x^2 - a$
- Como x será generalmente un número real, nos podemos conformar con una aproximación
- Hay varios métodos para resolver este nuevo problema, por ejemplo:

Cartagena99

CLASES PARTICULARES, TUTORÍAS
LLAMA O ENVÍA WHATSAPP. 689 45 44 70
ONLINE PRIVATE LESSONS FOR SC
CALL OR WHATSAPP. 689 45 44 70

Método de Newton-Raphson

- Se trata de un método iterativo, que parte de un valor inicial x_0 , y aplica la siguiente regla para hallar un cero de la función $f(x)$:

$$x_{n+1} = x_n - \frac{f(x_n)}{f'(x_n)}$$

- En cada iteración se busca la recta tangente a $f(x)$ que pasa por el punto $(x_n, f(x_n))$
- El corte de la recta con el eje de abscisas constituye el nuevo punto x_{n+1}



Cartagena99

CLASES PARTICULARES TUTORÍAS
LLAMA O ENVIA WHATSAPP. 689 45 44 70
ONLINE PRIVATE LESSONS FOR SCIENCE
CALL OR WHATSAPP. 689 45 44 70

Método de Newton-Raphson

- El método surge del desarrollo de $f(x)$ en serie de Taylor, para un entorno del punto x_n :

$$f(x) = f(x_n) + f'(x_n)(x - x_n) + (x - x_n)^2 \frac{f''(x_n)}{2!} + \dots$$

- Si se trunca el desarrollo a partir del término de grado 2, se obtiene la recta tangente (que pasa por el punto $(x_n, f(x_n))$)
- Posteriormente evaluamos en x_{n+1} :

$$f(x_{n+1}) = f(x_n) + f'(x_n)(x_{n+1} - x_n)$$

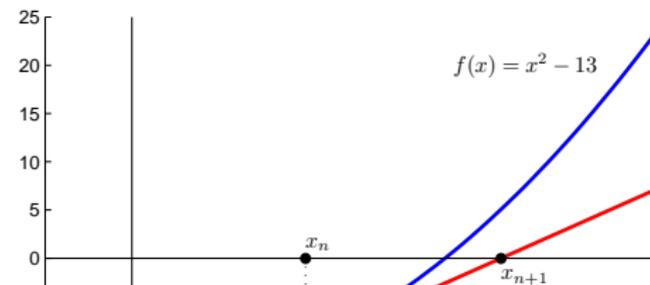
Cartagena99

CLASES PARTICULARES TUTORÍAS
LLAMA O ENVÍA WHATSAPP. 689 45 44 70
ONLINE PRIVATE LESSONS FOR SCIENCE
CALL OR WHATSAPP. 689 45 44 70

Raíz cuadrada - método de Newton-Raphson

- Debemos aplicar la regla para $f(x) = x^2 - a$, con $f'(x) = 2x$

$$x_{n+1} = x_n - \frac{x_n^2 - a}{2x_n} = \frac{2x_n^2}{2x_n} - \frac{x_n^2 - a}{2x_n} = \frac{x_n^2 + a}{2x_n}$$



Cartagena99

CLASES PARTICULARES TUTORÍAS
LLAMA O ENVIA WHATSAPP. 689 45 44 70
ONLINE PRIVATE LESSONS FOR SCIENCE
CALL OR WHATSAPP. 689 45 44 70

Factorización LU

- Supongamos que queremos resolver un sistema de ecuaciones $Ax = b$ repetidas veces, para muchos valores diferentes de b , pero para la misma matriz A
- Para acelerar el cálculo se puede realizar una factorización LU
- Sea A una matriz cuadrada invertible, buscamos una factorización $A = LU$, donde L es triangular inferior, y U triangular superior (del mismo tamaño). Para una matriz de 3×3 tendríamos:

$$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} l_{11} & 0 & 0 \\ l_{21} & l_{22} & 0 \\ l_{31} & l_{32} & l_{33} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_{11} & u_{12} & u_{13} \\ 0 & u_{22} & u_{23} \\ 0 & 0 & u_{33} \end{bmatrix}$$

- Para resolver el sistema $Ax = b$ ahora se van a resolver dos, pero más sencillos:

$$Ax = LUx = b \Rightarrow Ly = b, Ux = y$$

Cartagena99

CLASES PARTICULARES, TUTORÍAS
 LLAMA O ENVÍA WHATSAPP. 689 45 44 70
 ONLINE PRIVATE LESSONS FOR SC
 CALL OR WHATSAPP. 689 45 44 70

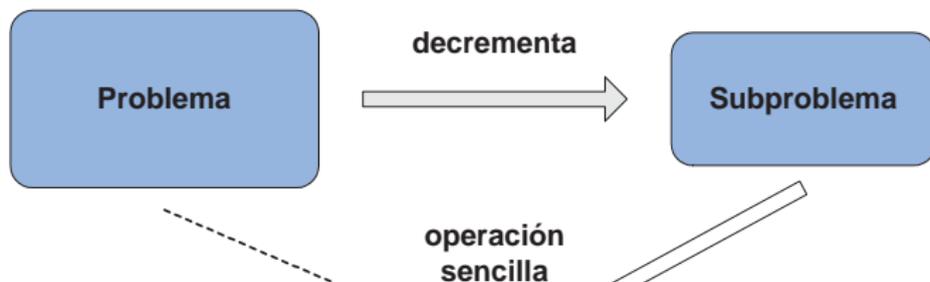
Decrementa y vencerás

Cartagena99

CLASES PARTICULARES TUTORÍAS
LLAMA O ENVIA WHATSAPP. 689 45 44 70
ONLINE PRIVATE LESSONS FOR SCIENCE
CALL OR WHATSAPP. 689 45 44 70

Decrementa y vencerás

- La descomposición de un problema genera un solo subproblema
- La solución al subproblema puede ser la solución al problema original
- Para otros problemas se requiere realizar alguna operación adicional con la solución al subproblema

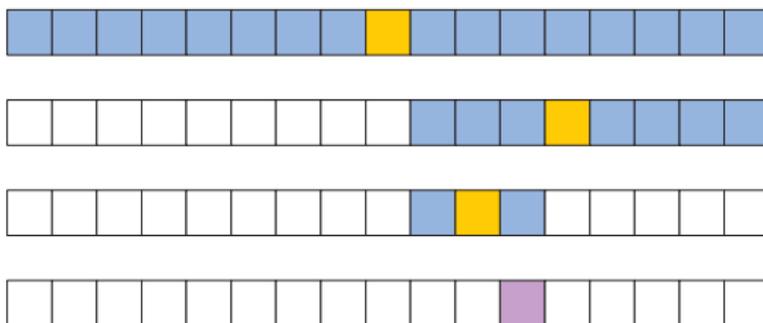


Cartagena99

CLASES PARTICULARES TUTORÍAS
LLAMA O ENVÍA WHATSAPP. 689 45 44 70
ONLINE PRIVATE LESSONS FOR SCIENCE
CALL OR WHATSAPP. 689 45 44 70

Búsqueda binaria en un array ordenado

- Se compara el elemento central con el elemento a buscar
- Si no se encuentra se busca en alguna de las dos mitades

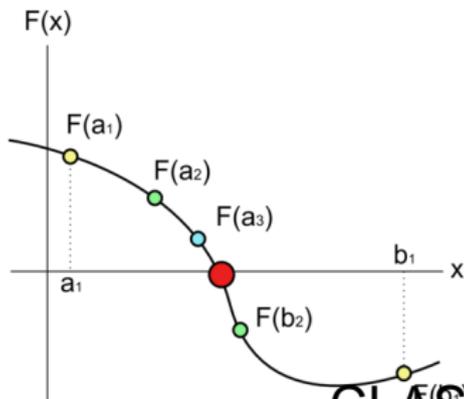


Cartagena99

CLASES PARTICULARES TUTORÍAS
LLAMA O ENVIA WHATSAPP. 689 45 44 70
ONLINE PRIVATE LESSONS FOR SCIENCE
CALL OR WHATSAPP. 689 45 44 70

Método de bipartición

- Método para hallar un cero de una función f continua en un intervalo $[a, b]$
- Los signos de $f(a)$ y $f(b)$ son distintos



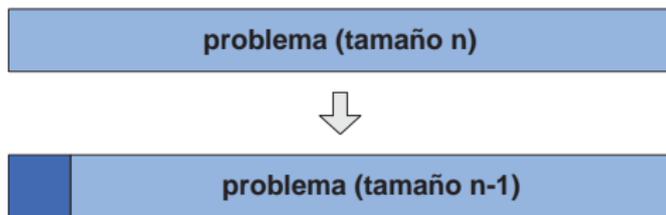
- Se busca un cero en la mitad del intervalo $c = (a + b)/2$
- Si no se encuentra se busca en $[a, c]$ o $[c, b]$
- Se repite el proceso hasta una determinada precisión ε (hasta que el ancho del intervalo sea

Cartagena99

CLASES PARTICULARES TUTORÍAS
 LLAMA O ENVÍA WHATSAPP. 689 45
 ONLINE PRIVATE LESSONS FOR SC
 CALL OR WHATSAPP. 689 45 44 70

Ordenación por selección

- 1 Encontrar el menor elemento de una lista
- 2 Intercambiarlo con el primero de la lista
- 3 Aplicar el algoritmo de nuevo al resto de la lista (toda la lista salvo el primer elemento)



Cartagena99

CLASES PARTICULARES, TUTORÍAS
LLAMA O ENVÍA WHATSAPP. 689 45
ONLINE PRIVATE LESSONS FOR SC
CALL OR WHATSAPP. 689 45 44 70

Algoritmo de Euclides

- La reducción del tamaño del problema no siempre es tan obvia
- El algoritmo de Euclides encuentra el máximo común divisor de dos números naturales
- Hay dos versiones

$$mcd1(m, n) = \begin{cases} n & \text{si } m = 0 \\ mcd1(n, m) & \text{si } m > n \\ mcd1(m, n - m) & \text{si } (m \leq n) \text{ y } (m \neq 0) \end{cases}$$

$$mcd2(m, n) = \begin{cases} n & \text{si } m = 0 \\ mcd2(n \% m, m) & \text{si } m \neq 0 \end{cases}$$

Cartagena99

CLASES PARTICULARES TUTORÍAS
LLAMA O ENVIA WHATSAPP. 689 45 44 70
ONLINE PRIVATE LESSONS FOR SC
CALL OR WHATSAPP. 689 45 44 70

Algoritmo de Euclides - Demostración $mcd1$

$$mcd1(m, n) = \begin{cases} n & \text{si } m = 0 \\ mcd1(n, m) & \text{si } m > n \\ mcd1(m, n - m) & \text{si } (m \leq n) \text{ y } (m \neq 0) \end{cases}$$

- Supongamos que $m \leq n$ (en caso contrario el propio algoritmo intercambia los parámetros)
- $m = az$, $n = bz$, con $a \leq b$
 - z son los factores primos (máximo común múltiplo)
 - a y b no comparten factores primos
- Hacemos $b = a + c$
- $n = bz = (a + c)z = (a_1 \cdots a_k + c_1 \cdots c_l)z$
 - No se puede sacar factor común. Si se pudiera sería otro factor de z .
 - a , c no comparten primos

Cartagena99

CLASES PARTICULARES TUTORÍAS
 LLAMA O ENVÍA WHATSAPP. 689 45 44 70
 ONLINE PRIVATE LESSONS FOR SC
 CALL OR WHATSAPP. 689 45 44 70

$$mcd(m, n) = mcd1(m, n) = mcd1(az, bz) = mcd1(az, cz) = mcd1(m, n - m)$$

Algoritmo de Euclides - Demostración $mcd2$

$$mcd2(m, n) = \begin{cases} n & \text{si } m = 0 \\ mcd2(n \% m, m) & \text{si } m \neq 0 \end{cases}$$

- Supongamos que $m \leq n$ (en caso contrario el propio algoritmo intercambia los parámetros)
- $m = az$, $n = bz$, con $a \leq b$
 - z son los factores primos
 - a y b no comparten factores primos
- Hacemos $b = ac + d$, donde c y d son el cociente y el resto de b/a
- a y d no pueden compartir factores, de lo contrario serían también factores de b
- Por tanto:

Cartagena99

CLASES PARTICULARES, TUTORÍAS
LLAMA O ENVÍA WHATSAPP. 689 45 44 70
ONLINE PRIVATE LESSONS FOR SC
CALL OR WHATSAPP. 689 45 44 70

Potencia en tiempo $\Theta(\log n)$

$$5^{13} = 5^{1101_2} = 1 \cdot 5^8 + 1 \cdot 5^4 + 0 \cdot 5^2 + 1 \cdot 5^1$$

- Algoritmo iterativo:

aux	e	e%2	suma
5^1	13	1	5^1
5^2	6	0	$0 + 5^1$
5^4	3	1	$5^4 + 0 + 5^1$
5^8	1	1	$5^8 + 5^4 + 0 + 5^1$

- Algoritmo recursivo (se calculan potencias de la mitad de tamaño, y luego se combina su resultado):

- $b^0 = 1$

- $b^e = b^{e/2} \cdot b^{e/2}$

Cartagena99

CLASES PARTICULARES, TUTORÍAS
 LLAMA O ENVÍA WHATSAPP. 689 45
 ONLINE PRIVATE LESSONS FOR SC
 CALL OR WHATSAPP. 689 45 44 70

una vez, obteniéndose un algoritmo eficiente

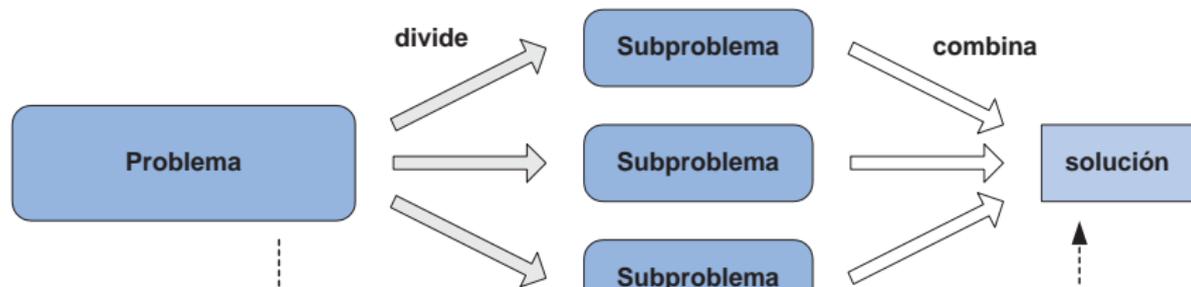
Divide y vencerás

Cartagena99

CLASES PARTICULARES TUTORÍAS
LLAMA O ENVIA WHATSAPP. 689 45 44 70
ONLINE PRIVATE LESSONS FOR SC
CALL OR WHATSAPP. 689 45 44 70

Divide y vencerás

- La descomposición de un problema genera varios subproblemas
- Las soluciones a los subproblemas se combinan para generar la solución al problema original, la cual puede requerir alguna operación adicional



Cartagena99

CLASES PARTICULARES TUTORÍAS
LLAMA O ENVÍA WHATSAPP. 689 45
ONLINE PRIVATE LESSONS FOR SC
CALL OR WHATSAPP. 689 45 44 70

Máximo de un vector de números

- Caso base
 - Si el vector tiene tamaño 1 se devuelve el elemento
- Descomposición
 - m_1 = máximo de la primera mitad del vector
 - m_2 = máximo de la segunda mitad del vector
- Combinación
 - máximo = $\max\{m_1, m_2\}$

$$\max(v) = \begin{cases} v[1] & \text{si } n = 1 \\ \max(\max(v[1..n/2]), \max(v[n/2+1..n])) & \text{si } n \geq 2 \end{cases}$$

Cartagena99

CLASES PARTICULARES TUTORÍAS
LLAMA O ENVÍA WHATSAPP. 689 45 44 70
ONLINE PRIVATE LESSONS FOR SCIENCE
CALL OR WHATSAPP. 689 45 44 70

Máximo de un vector de números

- ¿Conseguimos un algoritmo más eficiente que una búsqueda lineal?
- No. Sea cual sea nuestra estrategia tenemos que mirar todos los elementos del vector
 - Este problema tiene una cota inferior $\Omega(n)$

$$T(n) = \begin{cases} 1 & \text{si } n = 1 \\ 1 + 2T(n/2) & \text{si } n > 1 \end{cases}$$

- A pesar de dividir el problema por dos, pero tenemos que resolver dos problemas
- El árbol de recursión tiene del orden de 2^h nodos, donde h es la altura del árbol

Cartagena99

CLASES PARTICULARES TUTORÍAS
LLAMA O ENVÍA WHATSAPP. 689 45 44 70
ONLINE PRIVATE LESSONS FOR SC
CALL OR WHATSAPP. 689 45 44 70

Máximo de un vector de números

```
1 public static int max2 (int[] v) {
2     return maxDyV (v, 0, v.length-1);
3 }
4 private static int max (int m, int n) {
5     return (m>n?m:n);
6 }
7 public static int maxDyV (int[] v, int inf, int sup) {
8     if (inf==sup)
9         return v[inf];
10    else {
11        int medio = (inf+sup)/2;
12        return max (maxDyV (v, inf, medio),
13                    maxDyV (v, medio+1, sup));
14    }
```

Cartagena99

CLASES PARTICULARES TUTORÍAS
LLAMA O ENVÍA WHATSAPP. 689 45 44 70
ONLINE PRIVATE LESSONS FOR SC
CALL OR WHATSAPP. 689 45 44 70

Merge-sort

- Sea un vector de tamaño n
- Algoritmo de ordenación en tiempo $\Theta(n \log n)$
 - En todos los casos: mejor, peor, y medio
- Memoria auxiliar
 - $\Theta(n)$ en todos los casos: mejor, peor, y medio
 - Se denominan: "out-of-place": se requiere un vector auxiliar de tamaño n . Es decir, la ordenación no se realiza en el propio vector

Cartagena99

CLASES PARTICULARES TUTORÍAS
LLAMA O ENVÍA WHATSAPP. 689 45 44 70
ONLINE PRIVATE LESSONS FOR SCIENCE
CALL OR WHATSAPP. 689 45 44 70

Merge-sort

- Caso base
 - Si el vector tiene tamaño 1 se devuelve el elemento
- Descomposición
 - Se divide el vector en dos, generalmente por la mitad, y se ordenan las dos partes por separado
- Combinación
 - Se mezclan las dos mitades ordenadas

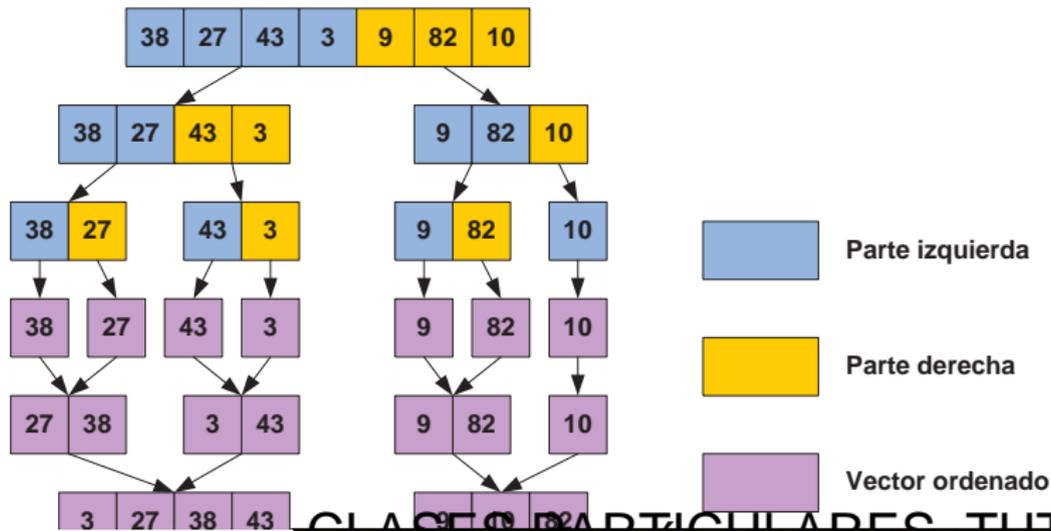
$$T(n) = \begin{cases} 1 & \text{si } n = 1 \\ n + 2T(n/2) & \text{si } n > 1 \end{cases}$$

Cartagena99

CLASES PARTICULARES TUTORÍAS
LLAMA O ENVÍA WHATSAPP. 689 45 44 70
ONLINE PRIVATE LESSONS FOR SCIENCE
CALL OR WHATSAPP. 689 45 44 70

Merge-sort

- Paso a paso

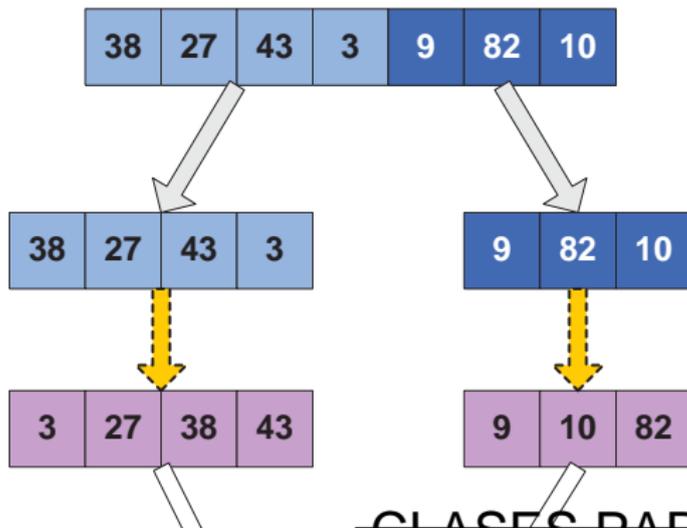


Cartagena99

CLASES PARTICULARES TUTORÍAS
 LLAMA O ENVIA WHATSAPP. 689 45
 ONLINE PRIVATE LESSONS FOR SC
 CALL OR WHATSAPP. 689 45 44 70

Merge-sort

- Para diseñar el código, es mejor pensar en este esquema



Descomponer el problema

Ordenar subproblemas

Cartagena99

CLASES PARTICULARES TUTORÍAS
 LLAMA O ENVIA WHATSAPP. 689 45 44 70
 ONLINE PRIVATE LESSONS FOR SCIENCE
 CALL OR WHATSAPP. 689 45 44 70

Implementación del Merge-sort I

```
1 void mergeSort1 (int[] v) {
2     ordenarPorMezcla1 (v, 0, v.length-1);
3 }
4
5 void ordenarPorMezcla1 (int[] v, int inf, int sup) {
6     if (inf<sup) {
7         int medio = (inf+sup)/2;
8         ordenarPorMezcla1 (v, inf, medio);
9         ordenarPorMezcla1 (v, medio+1, sup);
10        mezclar1 (v, inf, medio, sup);
11    }
12 }
```

Cartagena99

CLASES PARTICULARES TUTORÍAS
LLAMA O ENVIA WHATSAPP. 689 45 44 70
ONLINE PRIVATE LESSONS FOR SC
CALL OR WHATSAPP. 689 45 44 70

Implementación del Merge-sort I

- Mezcla ineficiente (puede ocasionar errores en tiempo de ejecución)

```
1 void mezclar1 (int[] v, int inf, int medio, int sup) {  
2     //vector auxiliar de longitud n (lento)  
3     int[] vAux = new int[v.length];  
4     ...
```

- Mezcla eficiente

```
1 void mezclar1_mejor (int[] v, int inf, int medio, int sup) {  
2     //vector auxiliar de longitud exacta  
3     int[] vAux = new int[superficie];
```

Cartagena99

CLASES PARTICULARES TUTORÍAS
LLAMA O ENVÍA WHATSAPP. 689 45 44 70
ONLINE PRIVATE LESSONS FOR SC
CALL OR WHATSAPP. 689 45 44 70

Implementación alternativa del Merge-sort II

- El parámetro auxiliar debe pasarse por referencia

```
1 void mergeSort2 (int[] v) {
2     //vector auxiliar de longitud n, se propaga
3     int[] vAux = new int[v.length];
4
5     ordenarPorMezcla2 (v, 0, v.length-1, vAux);
6 }
7
8 void ordenarPorMezcla2 (int[] v, int inf, int sup, int[] vAux) {
9     if (inf<sup) {
10        int medio = (inf+sup)/2;
11        ordenarPorMezcla2 (v, inf, medio, vAux);
12        ordenarPorMezcla2 (v, medio+1, sup, vAux);
13        mezclar2 (v, inf, medio, sup, vAux);
14    }
15 }
```

Cartagena99

CLASES PARTICULARES TUTORÍAS
LLAMA O ENVIA WHATSAPP. 689 45 44 70
ONLINE PRIVATE LESSONS FOR SC
CALL OR WHATSAPP. 689 45 44 70

Quick-sort

- Caso base
 - Si el vector tiene tamaño 1 se devuelve el elemento
- Descomposición
 - Se escoge un elemento “pivote”
 - Se divide el vector en tres partes:
 - Parte izquierda: elementos menores o iguales que el pivote
 - El propio pivote
 - Parte derecha: elementos mayores que el pivote
 - Posteriormente se ordenan las partes izquierda y derecha

Combinación
Cartagena99

CLASES PARTICULARES TUTORÍAS
LLAMA O ENVÍA WHATSAPP. 689 45 44 70
ONLINE PRIVATE LESSONS FOR SCIENCE
CALL OR WHATSAPP. 689 45 44 70

Quick-sort

- Esquema:

26	5	37	1	61	11	59	15	48	19
----	---	----	---	----	----	----	----	----	----



Descomponer el problema

11	5	19	1	15	26	59	61	48	37
----	---	----	---	----	----	----	----	----	----



Ordenar subproblemas

1	5	11	15	19	26	37	48	59	61
---	---	----	----	----	----	----	----	----	----

trivial

Cartagena99

Combinar soluciones

CLASES PARTICULARES TUTORÍAS
 LLAMA O ENVIA WHATSAPP. 689 45 44 70
 ONLINE PRIVATE LESSONS FOR SCIENCE
 CALL OR WHATSAPP. 689 45 44 70

Quick-sort

- Caso mejor (el elemento pivote está en la mitad)

$$T(n) = \begin{cases} 1 & \text{si } n = 1 \\ 2T(n/2) + \Theta(n) & \text{si } n > 1 \end{cases} \Rightarrow \Theta(n \log n)$$

- Caso peor (un subvector queda siempre vacío)

$$T(n) = \begin{cases} 1 & \text{si } n = 1 \\ T(0) + T(n-1) + \Theta(n) & \text{si } n > 1 \end{cases} \Rightarrow \Theta(n^2)$$

Cartagena99

CLASES PARTICULARES TUTORÍAS
LLAMA O ENVÍA WHATSAPP. 689 45 44 70
ONLINE PRIVATE LESSONS FOR SC
CALL OR WHATSAPP. 689 45 44 70

Quick-sort

- Algoritmo de ordenación rápido en la práctica
 - Caso peor: $\Theta(n^2)$
 - Caso mejor: $\Theta(n \log n)$
 - Caso medio: $\Theta(n \log n)$
- Suele superar a otros algoritmos $\Theta(n \log n)$ al utilizar mejor las jerarquías de memoria
- Memoria auxiliar
 - $O(n)$

Cartagena99

CLASES PARTICULARES TUTORÍAS
LLAMA O ENVÍA WHATSAPP. 689 45 44 70
ONLINE PRIVATE LESSONS FOR SC
CALL OR WHATSAPP. 689 45 44 70

Implementación del Quick-sort

```
1 void quickSort (int[] v) {
2     ordenarRapido (v, 0, v.length-1);
3 }
4
5 void ordenarRapido (int[] v, int inf, int sup) {
6     if (inf<sup) {
7         int med = partir (v, inf, sup);
8         if (inf<med) ordenarRapido (v, inf, med-1);
9         if (med<sup) ordenarRapido (v, med+1, sup);
10    }
11 }
```

Cartagena99

CLASES PARTICULARES TUTORÍAS
LLAMA O ENVÍA WHATSAPP. 689 45 44 70
ONLINE PRIVATE LESSONS FOR SC
CALL OR WHATSAPP. 689 45 44 70

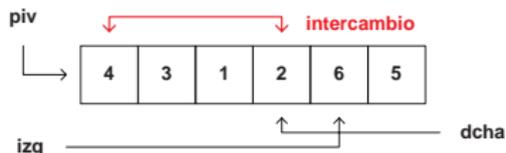
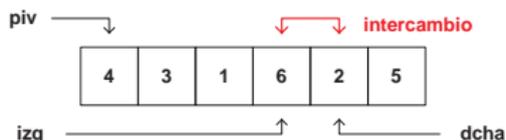
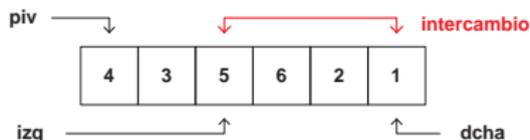
Implementación del Quick-sort

```
1 int partir (int[] v, int inf, int sup) {
2     int piv = v[inf];
3     int izq = inf+1;
4     int dcha = sup;
5     int temp;
6     do {
7         for (; v[izq]<=piv && izq<sup ; izq++);
8         for (; v[dcha]>piv /*&&dcha>inf*/; dcha--);
9         if (izq<dcha) {
10            temp = v[izq];
11            v[izq] = v[dcha];
12            v[dcha] = temp;
13        }
14    } while (izq<dcha);
15    /* v[inf] <-> v[dcha] */
16    temp = v[inf];
17    v[inf] = v[dcha];
```

Cartagena99

CLASES PARTICULARES TUTORÍAS
LLAMA O ENVÍA WHATSAPP. 689 45 44 70
ONLINE PRIVATE LESSONS FOR SC
CALL OR WHATSAPP. 689 45 44 70

Implementación del Quick-sort, método partir



Cartagena99

CLASES PARTICULARES TUTORÍAS
 LLAMA O ENVIA WHATSAPP. 689 45 44 70
 ONLINE PRIVATE LESSONS FOR SC
 CALL OR WHATSAPP. 689 45 44 70

Traspuesta de una matriz

- Sea una matriz A de dimensiones $n \times n$, donde n es una potencia de 2
- Se puede definir su traspuesta A^T dividiendo la matriz en bloques:

$$A = \left(\begin{array}{c|c} A_{11} & A_{12} \\ \hline A_{21} & A_{22} \end{array} \right) \Rightarrow A^T = \left(\begin{array}{c|c} A_{11}^T & A_{21}^T \\ \hline A_{12}^T & A_{22}^T \end{array} \right)$$

Cartagena99

CLASES PARTICULARES TUTORÍAS
LLAMA O ENVÍA WHATSAPP. 689 45 44 70
ONLINE PRIVATE LESSONS FOR SCIENCE
CALL OR WHATSAPP. 689 45 44 70

Implementación de la traspuesta de una matriz

```
1 void traspone (int[] [] m) {
2     trasponeDyV1 (m, 0, m.length-1, 0, m.length-1);
3 }
4
5 void trasponeDyV1 (int[] [] m,
6                 int fInicio, int fFin, int cInicio, int cFin) {
7     // caso básico de 1x1
8     if (fInicio<fFin) {
9         int fMedio = (fInicio+fFin)/2;
10        int cMedio = (cInicio+cFin)/2;
11        trasponeDyV1 (m, fInicio, fMedio, cInicio, cMedio);
12        trasponeDyV1 (m, fInicio, fMedio, cMedio+1, cFin);
13        trasponeDyV1 (m, fMedio+1, fFin, cInicio, cMedio);
14        trasponeDyV1 (m, fMedio+1, fFin, cMedio+1, cFin);
15        intercambiar (m, fMedio+1, cInicio, fInicio, cMedio+1, fFin-fMedio);
```

Cartagena99

CLASES PARTICULARES TUTORÍAS
LLAMA O ENVÍA WHATSAPP. 689 45 44 70
ONLINE PRIVATE LESSONS FOR SC
CALL OR WHATSAPP. 689 45 44 70

Implementación de la traspuesta de una matriz

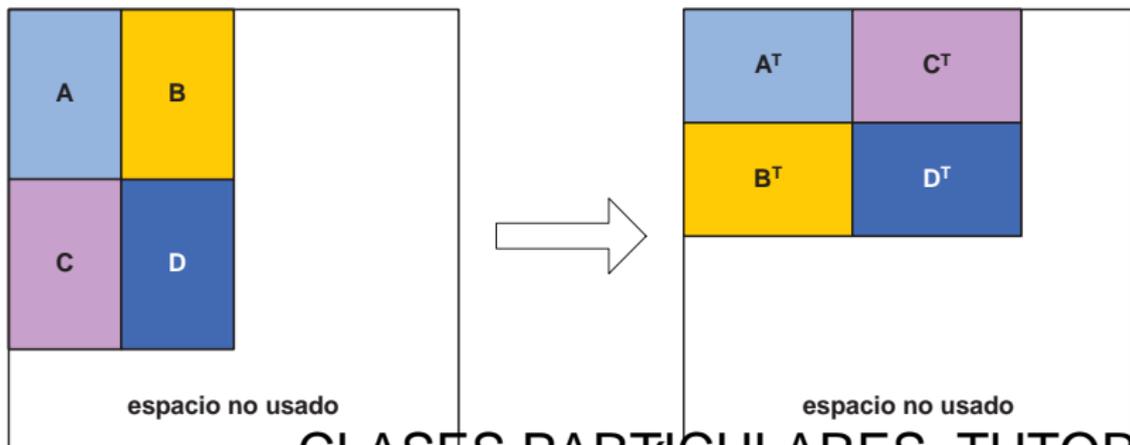
```
1 void intercambiar (int[] [] m,int fIniA, int cIniA,  
2                 int fIniB, int cIniB, int dimen) {  
3     for (int i=0; i<=dimen-1; i++)  
4         for (int j=0; j<=dimen-1; j++) {  
5             int aux = m[fIniA+i][cIniA+j];  
6             m[fIniA+i][cIniA+j] = m[fIniB+i][cIniB+j];  
7             m[fIniB+i][cIniB+j] = aux;  
8         }  
9 }
```

Cartagena99

CLASES PARTICULARES TUTORÍAS
LLAMA O ENVÍA WHATSAPP. 689 45 44 70
ONLINE PRIVATE LESSONS FOR SC
CALL OR WHATSAPP. 689 45 44 70

Traspuesta de una matriz no cuadrada

- También puede implementarse cuando n no es una potencia de dos, o incluso cuando la matriz no es cuadrada
- Se pueden usar matrices de tamaño fijo:



Cartagena99

CLASES PARTICULARES TUTORÍAS
LLAMA O ENVÍA WHATSAPP. 689 45 44 70
ONLINE PRIVATE LESSONS FOR SC
CALL OR WHATSAPP. 689 45 44 70

Multiplicación de matrices

- La división de una matriz en bloques tiene varias ventajas:
 - Simplifica operaciones algebraicas
 - Se puede aprovechar para construir algoritmos eficientes que hagan buen uso de la memoria caché
- Para realizar una multiplicación hay varias formas de dividir la matriz

$$A \cdot B = \begin{pmatrix} A_1 \\ A_2 \end{pmatrix} \cdot (B_1 \mid B_2) = \begin{pmatrix} A_1 B_1 & A_1 B_2 \\ A_2 B_1 & A_2 B_2 \end{pmatrix}$$

$$A \cdot B = (A_1 \mid A_2) \cdot \begin{pmatrix} B_1 \\ B_2 \end{pmatrix} = (A_1 B_1 + A_2 B_2)$$

Cartagena99

CLASES PARTICULARES TUTORÍAS
LLAMA O ENVÍA WHATSAPP. 689 45 44 70
ONLINE PRIVATE LESSONS FOR SC
CALL OR WHATSAPP. 689 45 44 70

Multiplicación de matrices - complejidad

- Sea A una matriz de $p \times q$, y B una matriz de $q \times r$
- El producto $C = AB$ requiere $\mathcal{O}(pqr)$ operaciones
- Considérese que las matrices son cuadradas de dimensión $n \times n$, y la siguiente descomposición:

$$A \cdot B = \begin{pmatrix} A_{11} & A_{12} \\ A_{21} & A_{22} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} B_{11} & B_{12} \\ B_{21} & B_{22} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} A_{11}B_{11} + A_{12}B_{21} & A_{11}B_{12} + A_{12}B_{22} \\ A_{21}B_{11} + A_{22}B_{21} & A_{21}B_{12} + A_{22}B_{22} \end{pmatrix}$$

$$T(n) = \begin{cases} 1 & \text{si } n = 1 \\ 8T(n/2) + 4\Theta(n^2) & \text{si } n > 1 \end{cases}$$

- 8 multiplicaciones (de matrices de $n/2 \times n/2$)

Cartagena99

CLASES PARTICULARES TUTORÍAS
 LLAMA O ENVÍA WHATSAPP. 689 45 44 70
 ONLINE PRIVATE LESSONS FOR SC
 CALL OR WHATSAPP. 689 45 44 70

Multiplicación de matrices - algoritmo de Strassen

- La operación básica más costosa es la multiplicación
- El algoritmo de Strassen consigue reducir el número de multiplicaciones
- Considérese la siguiente descomposición:

$$\begin{pmatrix} A_{11} & A_{12} \\ A_{21} & A_{22} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} B_{11} & B_{12} \\ B_{21} & B_{22} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} C_{11} & C_{12} \\ C_{21} & C_{22} \end{pmatrix}$$

$$M_1 = (A_{11} + A_{22})(B_{11} + B_{22})$$

$$C_{11} = M_1 + M_4 - M_5 + M_7$$

$$M_2 = (A_{21} + A_{22})B_{11}$$

$$C_{12} = M_3 + M_5$$

$$M_3 = A_{11}(B_{12} - B_{22})$$

$$C_{21} = M_2 + M_4$$

$$M_4 = A_{22}(B_{21} - B_{11})$$

$$C_{22} = M_1 - M_2 + M_3 + M_6$$

$$M_5 = (A_{11} + A_{12})B_{22}$$

CLASES PARTICULARES TUTORÍAS
 LLAMA O ENVÍA WHATSAPP. 689 45
 ONLINE PRIVATE LESSONS FOR SC
 CALL OR WHATSAPP. 689 45 44 70

Cartagena99

Multiplicación de matrices - algoritmo de Strassen

- Con esa factorización el algoritmo requiere
 - 7 multiplicaciones
 - 18 sumas

$$T(n) = \begin{cases} 1 & \text{si } n = 1 \\ 7T(n/2) + 18\Theta(n^2) & \text{si } n > 1 \end{cases}$$

- Por el teorema maestro: $T(n) = \Theta(n^{\log_2 7}) = \Theta(n^{2,807})$
- Solo es más eficiente que una multiplicación ordinaria si el tamaño de las matrices es muy elevado
- Actualmente hay un algoritmos en $\mathcal{O}(n^{2,376})$ (Coppersmith - Winograd)

Cartagena99

CLASES PARTICULARES TUTORÍAS
LLAMA O ENVIA WHATSAPP. 689 45 44 70
ONLINE PRIVATE LESSONS FOR SCIENCE
CALL OR WHATSAPP. 689 45 44 70