

# Divide y vencerás

Diseño y Análisis de Algoritmos



Universidad  
Rey Juan Carlos

Cartagena99

CLASES PARTICULARES TUTORÍAS  
LLAMA O ENVÍA WHATSAPP. 689 45 44 70  
ONLINE PRIVATE LESSONS FOR SC  
CALL OR WHATSAPP. 689 45 44 70

# Contenidos

- 1 Introducción
- 2 Transforma y vencerás
- 3 Decrementa y vencerás
- 4 Divide y vencerás

Cartagena99

CLASES PARTICULARES TUTORÍAS  
LLAMA O ENVÍA WHATSAPP. 689 45 44 70  
ONLINE PRIVATE LESSONS FOR SC  
CALL OR WHATSAPP. 689 45 44 70

# Introducción

Cartagena99

CLASES PARTICULARES TUTORÍAS  
LLAMA O ENVÍA WHATSAPP. 689 45 44 70  
ONLINE PRIVATE LESSONS FOR SCIENCE  
CALL OR WHATSAPP. 689 45 44 70

# Divide y vencerás

- Uno de los más importantes paradigmas de diseño algorítmico
- Se basa en la resolución de un problema dividiéndolo en dos o más subproblemas de igual tipo o similar
- El proceso continúa hasta que éstos llegan a ser lo suficientemente sencillos como para que se resuelvan directamente
- Al final, las soluciones a cada uno de los subproblemas se combinan para dar una solución al problema original
- Muchos algoritmos basados en esta estrategia son recursivos

Cartagena99

CLASES PARTICULARES TUTORÍAS  
LLAMA O ENVÍA WHATSAPP. 689 45 44 70  
ONLINE PRIVATE LESSONS FOR SC  
CALL OR WHATSAPP. 689 45 44 70

# Simplificación y descomposición de problemas

- Las palabras clave en este tema van a ser la **simplificación** y la **descomposición** de problemas
- Veremos tres estrategias para simplificar y descomponer problemas:
  - **Transforma y vencerás**
  - **Decrementa y vencerás**
  - **Divide y vencerás**

Cartagena99

CLASES PARTICULARES TUTORÍAS  
LLAMA O ENVÍA WHATSAPP. 689 45 44 70  
ONLINE PRIVATE LESSONS FOR SCIENCE  
CALL OR WHATSAPP. 689 45 44 70

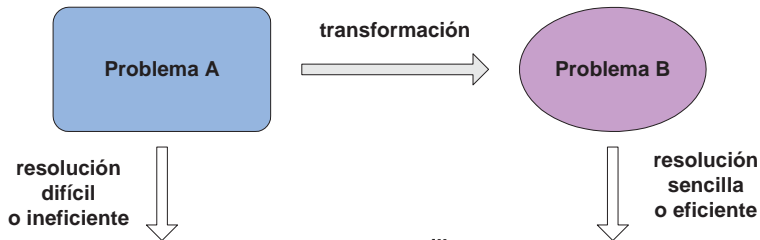
# Transforma y vencerás

Cartagena99

CLASES PARTICULARES TUTORÍAS  
LLAMA O ENVIA WHATSAPP. 689 45 44 70  
ONLINE PRIVATE LESSONS FOR SCIENCE  
CALL OR WHATSAPP. 689 45 44 70

# Transforma y vencerás

- Esta estrategia también se denomina **reducción**
- Esta técnica procura resolver un problema transformándolo en otro más simple, conocido, o para el que existan algoritmos eficientes



Cartagena99

CLASES PARTICULARES, TUTORÍAS  
LLAMA O ENVÍA WHATSAPP. 689 45 44 70  
ONLINE PRIVATE LESSONS FOR SCIENCE  
CALL OR WHATSAPP. 689 45 44 70

# Encontrar la mediana de un array desordenado

- Sea un array  $v$  de  $n$  números
- 1 Ordenar el array  $v \rightarrow \Theta(n \log n)$
- 2 Devolver
  - $v[(n+1)/2]$  si  $n$  es impar
  - $\frac{v[n/2] + v[1 + n/2]}{2}$  si  $n$  es par

4	2	5	5	6	1	0	3	4	5	8	7
---	---	---	---	---	---	---	---	---	---	---	---



ordenar

0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11
---	---	---	---	---	---	---	---	---	---	----	----

Cartagena99

CLASES PARTICULARES TUTORÍAS  
 LLAMA O ENVÍA WHATSAPP. 689 45 44 70  
 ONLINE PRIVATE LESSONS FOR SC  
 CALL OR WHATSAPP. 689 45 44 70



## Estimación del valor de $\pi$

- Planteamos un problema alternativo
- Buscamos una **aproximación del perímetro  $p$  de un círculo** de radio  $R$

$$p = 2\pi R \quad \Rightarrow \quad \pi = \frac{p}{2R}$$

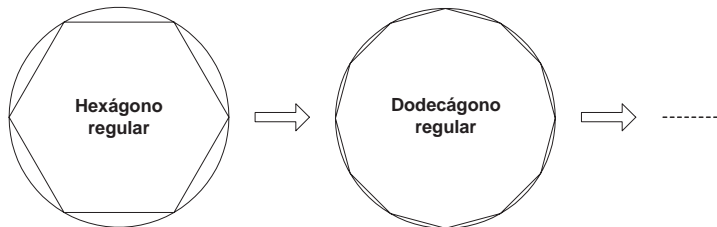
- Aproximamos un círculo con un polígono regular inscrito o circunscrito al círculo
- El perímetro del polígono inscrito  $p_i$  nos dará una cota inferior de  $p$
- El perímetro del polígono circunscrito  $p_c$  nos dará una cota superior de  $p$

Cartagena99

CLASES PARTICULARES TUTORÍAS  
LLAMA O ENVÍA WHATSAPP. 689 45 44 70  
ONLINE PRIVATE LESSONS FOR SCIENCE  
CALL OR WHATSAPP. 689 45 44 70

## Estimación del valor de $\pi$

- Comenzamos por un polígono regular inscrito (por ejemplo, un hexágono), cuyo perímetro será  $6R$
- A continuación, doblamos el número de lados, obteniendo una mejor aproximación

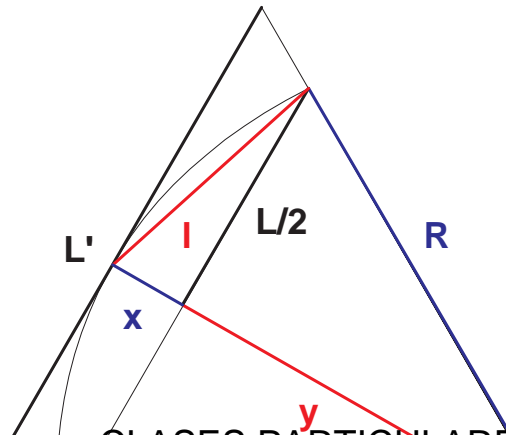


- El perímetro de un polígono con el doble de lados se puede obtener

Cartagena99

CLASES PARTICULARES TUTORÍAS  
LLAMA O ENVÍA WHATSAPP. 689 45 44 70  
ONLINE PRIVATE LESSONS FOR SC  
CALL OR WHATSAPP. 689 45 44 70

# Estimación del valor de $\pi$



Cartagena99

CLASES PARTICULARES TUTORÍAS  
LLAMA O ENVIA WHATSAPP. 689 45 44 70  
ONLINE PRIVATE LESSONS FOR SCIENCE  
CALL OR WHATSAPP. 689 45 44 70

## Estimación del valor de $\pi$

- Si el lado de un polígono inscrito mide  $L$ , se puede hallar la longitud un lado del polígono  $l$  con el doble de lados

$$R^2 = y^2 + \left(\frac{L}{2}\right)^2 \Rightarrow y = \sqrt{R^2 - \left(\frac{L}{2}\right)^2} \quad x = R - y = R - \sqrt{R^2 - \left(\frac{L}{2}\right)^2}$$

$$l = \sqrt{\left(\frac{L}{2}\right)^2 + R^2 + R^2 - \left(\frac{L}{2}\right)^2 - 2R\sqrt{R^2 - \left(\frac{L}{2}\right)^2}} = R\sqrt{2 - \sqrt{4 - \left(\frac{L}{R}\right)^2}}$$

- El lado  $L'$  de un polígono circunscrito se puede hallar a partir del lado  $L$  de un polígono inscrito

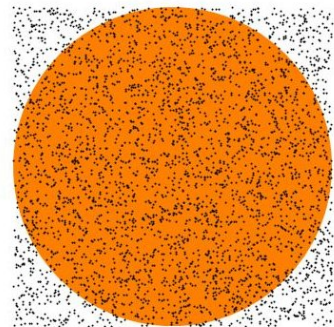
$$\frac{L'}{R} = \frac{L}{y} \Rightarrow L' = \frac{LR}{y}$$

- La estimación de  $\pi$  se puede mejorar si se aumenta el número de lados

Cartagena99

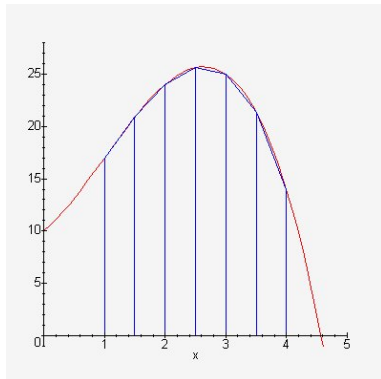
CLASES PARTICULARES TUTORÍAS  
 LLAMA O ENVIA WHATSAPP. 689 45 44 70  
 ONLINE PRIVATE LESSONS FOR SC  
 CALL OR WHATSAPP. 689 45 44 70

# Otros métodos para estimar del valor de $\pi$



inside: 2860    outside: 818    total: 3678  
 $\pi \approx 4 \times 2860 / 3678 = 3.11039$

Simulación Monte Carlo



Integración numérica

Cartagena99

CLASES PARTICULARES TUTORÍAS  
 LLAMA O ENVÍA WHATSAPP. 689 45 44 70  
 ONLINE PRIVATE LESSONS FOR SCIENCE  
 CALL OR WHATSAPP. 689 45 44 70

# Raíz cuadrada

- Deseamos hallar  $\sqrt{a}$
- Transformamos el problema en el de **hallar un cero de una función**

$$x = \sqrt{a} \rightarrow x^2 = a \rightarrow x^2 - a = 0$$

- Por tanto, querremos hallar un cero de la función  $y = x^2 - a$
- Como  $x$  será generalmente un número real, nos podemos conformar con una aproximación
- Hay varios métodos para resolver este nuevo problema, por ejemplo:

Cartagena99

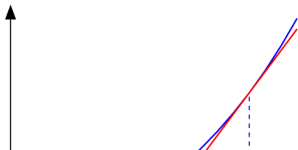
CLASES PARTICULARES, TUTORÍAS  
LLAMA O ENVÍA WHATSAPP. 689 45 44 70  
ONLINE PRIVATE LESSONS FOR SC  
CALL OR WHATSAPP. 689 45 44 70

# Método de Newton-Raphson

- Se trata de un método iterativo, que parte de un valor inicial  $x_0$ , y aplica la siguiente regla para hallar un cero de la función  $f(x)$ :

$$x_{n+1} = x_n - \frac{f(x_n)}{f'(x_n)}$$

- En cada iteración se busca la recta tangente a  $f(x)$  que pasa por el punto  $(x_n, f(x_n))$
- El corte de la recta con el eje de abscisas constituye el nuevo punto  $x_{n+1}$



Cartagena99

CLASES PARTICULARES TUTORÍAS  
LLAMA O ENVIA WHATSAPP. 689 45 44 70  
ONLINE PRIVATE LESSONS FOR SCIENCE  
CALL OR WHATSAPP. 689 45 44 70

# Método de Newton-Raphson

- El método surge del desarrollo de  $f(x)$  en serie de Taylor, para un entorno del punto  $x_n$ :

$$f(x) = f(x_n) + f'(x_n)(x - x_n) + (x - x_n)^2 \frac{f''(x_n)}{2!} + \dots$$

- Si se trunca el desarrollo a partir del término de grado 2, se obtiene la recta tangente (que pasa por el punto  $(x_n, f(x_n))$ )
- Posteriormente evaluamos en  $x_{n+1}$ :

$$f(x_{n+1}) = f(x_n) + f'(x_n)(x_{n+1} - x_n)$$

Cartagena99

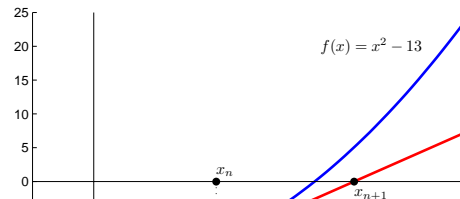
CLASES PARTICULARES TUTORÍAS  
LLAMA O ENVÍA WHATSAPP. 689 45 44 70  
ONLINE PRIVATE LESSONS FOR SCIENCE  
CALL OR WHATSAPP. 689 45 44 70



# Raíz cuadrada - método de Newton-Raphson

- Debemos aplicar la regla para  $f(x) = x^2 - a$ , con  $f'(x) = 2x$

$$x_{n+1} = x_n - \frac{x_n^2 - a}{2x_n} = \frac{2x_n^2 - x_n^2 - a}{2x_n} = \frac{x_n^2 + a}{2x_n}$$



Cartagena99

CLASES PARTICULARES TUTORÍAS  
LLAMA O ENVIA WHATSAPP. 689 45 44 70  
ONLINE PRIVATE LESSONS FOR SC  
CALL OR WHATSAPP. 689 45 44 70

# Factorización LU

- Supongamos que queremos resolver un sistema de ecuaciones  $Ax = b$  repetidas veces, para muchos valores diferentes de  $b$ , pero para la misma matriz  $A$
- Para acelerar el cálculo se puede realizar una factorización LU
- Sea  $A$  una matriz cuadrada invertible, buscamos una factorización  $A = LU$ , donde  $L$  es triangular inferior, y  $U$  triangular superior (del mismo tamaño). Para una matriz de  $3 \times 3$  tendríamos:

$$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} l_{11} & 0 & 0 \\ l_{21} & l_{22} & 0 \\ l_{31} & l_{32} & l_{33} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_{11} & u_{12} & u_{13} \\ 0 & u_{22} & u_{23} \\ 0 & 0 & u_{33} \end{bmatrix}$$

- Para resolver el sistema  $Ax = b$  ahora se van a resolver dos, pero más sencillos:

$$Ax = LUx = b \Rightarrow Ly = b, Ux = y$$

Cartagena99

CLASES PARTICULARES, TUTORÍAS  
 LLAMA O ENVÍA WHATSAPP. 689 45 44 70  
 ONLINE PRIVATE LESSONS FOR SC  
 CALL OR WHATSAPP. 689 45 44 70

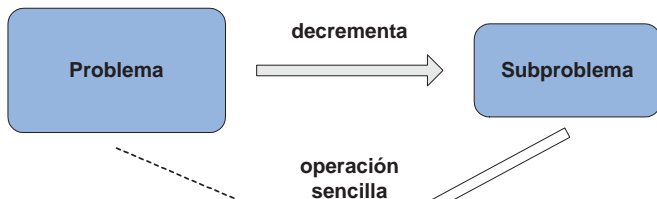
# Decrementa y vencerás

Cartagena99

CLASES PARTICULARES TUTORÍAS  
LLAMA O ENVÍA WHATSAPP. 689 45 44 70  
ONLINE PRIVATE LESSONS FOR SC  
CALL OR WHATSAPP. 689 45 44 70

## Decrementa y vencerás

- La descomposición de un problema genera un solo subproblema
- La solución al subproblema puede ser la solución al problema original
- Para otros problemas se requiere realizar alguna operación adicional con la solución al subproblema

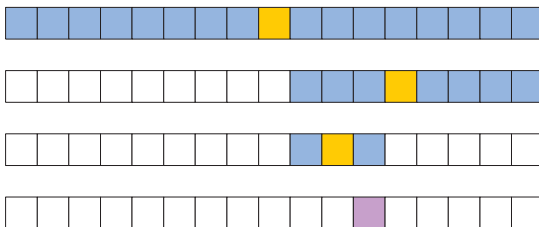


Cartagena99

CLASES PARTICULARES TUTORÍAS  
LLAMA O ENVÍA WHATSAPP. 689 45 44 70  
ONLINE PRIVATE LESSONS FOR SCIENCE  
CALL OR WHATSAPP. 689 45 44 70

# Búsqueda binaria en un array ordenado

- Se compara el elemento central con el elemento a buscar
- Si no se encuentra se busca en alguna de las dos mitades

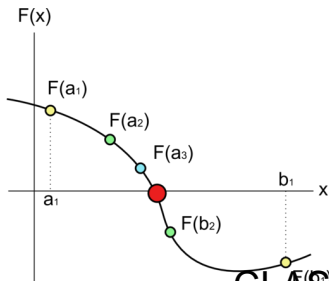


Cartagena99

CLASES PARTICULARES TUTORÍAS  
LLAMA O ENVIA WHATSAPP. 689 45 44 70  
ONLINE PRIVATE LESSONS FOR SCIENCE  
CALL OR WHATSAPP. 689 45 44 70

# Método de bipartición

- Método para hallar un cero de una función  $f$  continua en un intervalo  $[a, b]$
- Los signos de  $f(a)$  y  $f(b)$  son distintos



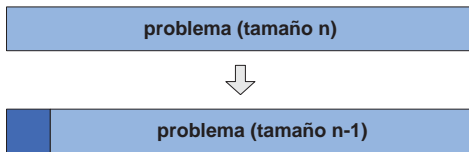
- Se busca un cero en la mitad del intervalo  $c = (a + b)/2$
- Si no se encuentra se busca en  $[a, c]$  o  $[c, b]$
- Se repite el proceso hasta una determinada precisión  $\varepsilon$  (hasta que el ancho del intervalo sea

Cartagena99

CLASES PARTICULARES TUTORÍAS  
 LLAMA O ENVÍA WHATSAPP. 689 45  
 ONLINE PRIVATE LESSONS FOR SC  
 CALL OR WHATSAPP. 689 45 44 70

# Ordenación por selección

- 1 Encontrar el menor elemento de una lista
- 2 Intercambiarlo con el primero de la lista
- 3 Aplicar el algoritmo de nuevo al resto de la lista (toda la lista salvo el primer elemento)



Cartagena99

CLASES PARTICULARES, TUTORÍAS  
LLAMA O ENVÍA WHATSAPP. 689 45 44 70  
ONLINE PRIVATE LESSONS FOR SCIENCE  
CALL OR WHATSAPP. 689 45 44 70

# Algoritmo de Euclides

- La reducción del tamaño del problema no siempre es tan obvia
- El algoritmo de Euclides encuentra el máximo común divisor de dos números naturales
- Hay dos versiones

$$mcd1(m, n) = \begin{cases} n & \text{si } m = 0 \\ mcd1(n, m) & \text{si } m > n \\ mcd1(m, n - m) & \text{si } (m \leq n) \text{ y } (m \neq 0) \end{cases}$$

$$mcd2(m, n) = \begin{cases} n & \text{si } m = 0 \\ mcd2(n \% m, m) & \text{si } m \neq 0 \end{cases}$$

Cartagena99

CLASES PARTICULARES TUTORÍAS  
 LLAMA O ENVIA WHATSAPP. 689 45 44 70  
 ONLINE PRIVATE LESSONS FOR SC  
 CALL OR WHATSAPP. 689 45 44 70



# Algoritmo de Euclides - Demostración $mcd1$

$$mcd1(m, n) = \begin{cases} n & \text{si } m = 0 \\ mcd1(n, m) & \text{si } m > n \\ mcd1(m, n - m) & \text{si } (m \leq n) \text{ y } (m \neq 0) \end{cases}$$

- Supongamos que  $m \leq n$  (en caso contrario el propio algoritmo intercambia los parámetros)
- $m = az$ ,  $n = bz$ , con  $a \leq b$ 
  - $z$  son los factores primos (máximo común múltiplo)
  - $a$  y  $b$  no comparten factores primos
- Hacemos  $b = a + c$
- $n = bz = (a + c)z = (a_1 \cdots a_k + c_1 \cdots c_l)z$ 
  - No se puede sacar factor común. Si se pudiera sería otro factor de  $z$ .
  - $a$ ,  $c$  no comparten primos

Cartagena99

CLASES PARTICULARES TUTORÍAS  
 LLAMA O ENVÍA WHATSAPP. 689 45 44 70  
 ONLINE PRIVATE LESSONS FOR SC  
 CALL OR WHATSAPP. 689 45 44 70

$$mcd(m, n) = mcd1(m, n) = mcd1(az, bz) = mcd1(az, cz) = mcd1(m, n - m)$$

# Algoritmo de Euclides - Demostración $mcd2$

$$mcd2(m, n) = \begin{cases} n & \text{si } m = 0 \\ mcd2(n \% m, m) & \text{si } m \neq 0 \end{cases}$$

- Supongamos que  $m \leq n$  (en caso contrario el propio algoritmo intercambia los parámetros)
- $m = az$ ,  $n = bz$ , con  $a \leq b$ 
  - $z$  son los factores primos
  - $a$  y  $b$  no comparten factores primos
- Hacemos  $b = ac + d$ , donde  $c$  y  $d$  son el cociente y el resto de  $b/a$
- $a$  y  $d$  no pueden compartir factores, de lo contrario serían también factores de  $b$
- Por tanto:

Cartagena99

CLASES PARTICULARES, TUTORÍAS  
LLAMA O ENVÍA WHATSAPP. 689 45 44 70  
ONLINE PRIVATE LESSONS FOR SC  
CALL OR WHATSAPP. 689 45 44 70

# Potencia en tiempo $\Theta(\log n)$

$$5^{13} = 5^{1101_2} = 1 \cdot 5^8 + 1 \cdot 5^4 + 0 \cdot 5^2 + 1 \cdot 5^1$$

- Algoritmo iterativo:

aux	e	e%2	suma
$5^1$	13	1	$5^1$
$5^2$	6	0	$0 + 5^1$
$5^4$	3	1	$5^4 + 0 + 5^1$
$5^8$	1	1	$5^8 + 5^4 + 0 + 5^1$

- Algoritmo recursivo (se calculan potencias de la mitad de tamaño, y luego se combina su resultado):

- $b^0 = 1$

- $b^e = b^{e/2} \cdot b^{e/2}$

Cartagena99

CLASES PARTICULARES, TUTORÍAS  
 LLAMA O ENVÍA WHATSAPP. 689 45  
 ONLINE PRIVATE LESSONS FOR SC  
 CALL OR WHATSAPP. 689 45 44 70

una vez, obteniéndose un algoritmo eficiente

www.cartagena99.com no se hace responsable de la información contenida en el

Si la información contenida en el documento es ilícita o lesiona bienes o derechos

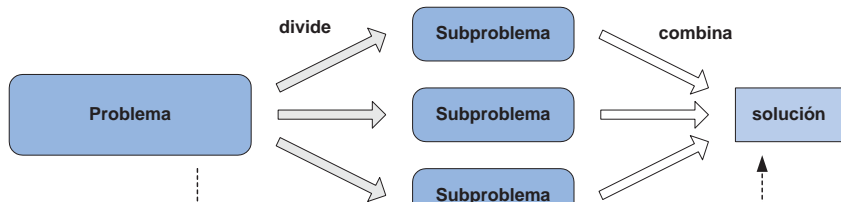
# Divide y vencerás

Cartagena99

CLASES PARTICULARES TUTORÍAS  
LLAMA O ENVIA WHATSAPP. 689 45 44 70  
ONLINE PRIVATE LESSONS FOR SCIENCE  
CALL OR WHATSAPP. 689 45 44 70

# Divide y vencerás

- La descomposición de un problema genera varios subproblemas
- Las soluciones a los subproblemas se combinan para generar la solución al problema original, la cual puede requerir alguna operación adicional



Cartagena99

CLASES PARTICULARES TUTORÍAS  
LLAMA O ENVÍA WHATSAPP. 689 45 44 70  
ONLINE PRIVATE LESSONS FOR SCIENCE  
CALL OR WHATSAPP. 689 45 44 70

# Máximo de un vector de números

- Caso base
  - Si el vector tiene tamaño 1 se devuelve el elemento
- Descomposición
  - $m_1$  = máximo de la primera mitad del vector
  - $m_2$  = máximo de la segunda mitad del vector
- Combinación
  - máximo =  $\max\{m_1, m_2\}$

$$\max(v) = \begin{cases} v[1] & \text{si } n = 1 \\ \max(\max(v[1..n/2]), \max(v[n/2+1..n])) & \text{si } n \geq 2 \end{cases}$$

Cartagena99

CLASES PARTICULARES TUTORÍAS  
LLAMA O ENVÍA WHATSAPP. 689 45 44 70  
ONLINE PRIVATE LESSONS FOR SCIENCE  
CALL OR WHATSAPP. 689 45 44 70

## Máximo de un vector de números

- ¿Conseguimos un algoritmo más eficiente que una búsqueda lineal?
- No. Sea cual sea nuestra estrategia tenemos que mirar todos los elementos del vector
  - Este problema tiene una cota inferior  $\Omega(n)$

$$T(n) = \begin{cases} 1 & \text{si } n = 1 \\ 1 + 2T(n/2) & \text{si } n > 1 \end{cases}$$

- A pesar de dividir el problema por dos, pero tenemos que resolver dos problemas
- El árbol de recursión tiene del orden de  $2^h$  nodos, donde  $h$  es la altura del árbol

Cartagena99

CLASES PARTICULARES TUTORÍAS  
LLAMA O ENVÍA WHATSAPP. 689 45 44 70  
ONLINE PRIVATE LESSONS FOR SC  
CALL OR WHATSAPP. 689 45 44 70

# Máximo de un vector de números

```
1 public static int max2 (int[] v) {
2     return maxDyV (v, 0, v.length-1);
3 }
4 private static int max (int m, int n) {
5     return (m>n?m:n);
6 }
7 public static int maxDyV (int[] v, int inf, int sup) {
8     if (inf==sup)
9         return v[inf];
10    else {
11        int medio = (inf+sup)/2;
12        return max (maxDyV (v, inf, medio),
13                    maxDyV (v, medio+1, sup));
14    }
```

Cartagena99

CLASES PARTICULARES TUTORÍAS  
LLAMA O ENVÍA WHATSAPP. 689 45 44 70  
ONLINE PRIVATE LESSONS FOR SC  
CALL OR WHATSAPP. 689 45 44 70



# Merge-sort

- Sea un vector de tamaño  $n$
- Algoritmo de ordenación en tiempo  $\Theta(n \log n)$ 
  - En todos los casos: mejor, peor, y medio
- Memoria auxiliar
  - $\Theta(n)$  en todos los casos: mejor, peor, y medio
  - Se denominan: "out-of-place": se requiere un vector auxiliar de tamaño  $n$ . Es decir, la ordenación no se realiza en el propio vector

Cartagena99

CLASES PARTICULARES TUTORÍAS  
LLAMA O ENVÍA WHATSAPP. 689 45 44 70  
ONLINE PRIVATE LESSONS FOR SC  
CALL OR WHATSAPP. 689 45 44 70

# Merge-sort

- Caso base
  - Si el vector tiene tamaño 1 se devuelve el elemento
- Descomposición
  - Se divide el vector en dos, generalmente por la mitad, y se ordenan las dos partes por separado
- Combinación
  - Se mezclan las dos mitades ordenadas

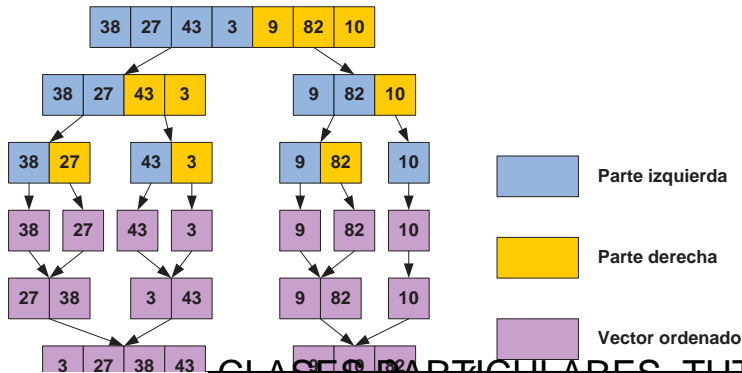
$$T(n) = \begin{cases} 1 & \text{si } n = 1 \\ n + 2T(n/2) & \text{si } n > 1 \end{cases}$$

Cartagena99

CLASES PARTICULARES TUTORÍAS  
LLAMA O ENVÍA WHATSAPP. 689 45 44 70  
ONLINE PRIVATE LESSONS FOR SCIENCE  
CALL OR WHATSAPP. 689 45 44 70

# Merge-sort

- Paso a paso

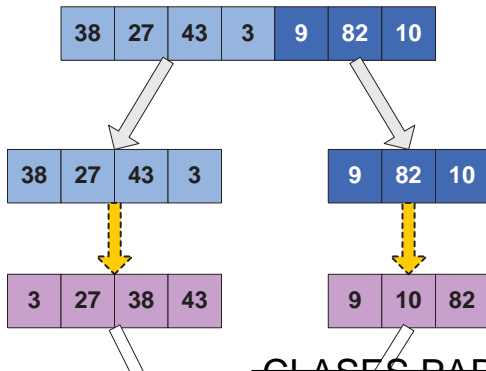


Cartagena99

CLASES PARTICULARES TUTORÍAS  
 LLAMA O ENVIA WHATSAPP. 689 45  
 ONLINE PRIVATE LESSONS FOR SC  
 CALL OR WHATSAPP. 689 45 44 70

# Merge-sort

- Para diseñar el código, es mejor pensar en este esquema



Descomponer el problema

Ordenar subproblemas

Cartagena99

CLASES PARTICULARES TUTORÍAS  
LLAMA O ENVIA WHATSAPP. 689 45 44 70  
ONLINE PRIVATE LESSONS FOR SCIENCE  
CALL OR WHATSAPP. 689 45 44 70

# Implementación del Merge-sort I

```
1 void mergeSort1 (int[] v) {  
2     ordenarPorMezcla1 (v, 0, v.length-1);  
3 }  
4  
5 void ordenarPorMezcla1 (int[] v, int inf, int sup) {  
6     if (inf<sup) {  
7         int medio = (inf+sup)/2;  
8         ordenarPorMezcla1 (v, inf, medio);  
9         ordenarPorMezcla1 (v, medio+1, sup);  
10        mezclar1 (v, inf, medio, sup);  
11    }  
12 }
```

Cartagena99

CLASES PARTICULARES TUTORÍAS  
LLAMA O ENVÍA WHATSAPP. 689 45 44 70  
ONLINE PRIVATE LESSONS FOR SC  
CALL OR WHATSAPP. 689 45 44 70

# Implementación del Merge-sort I

- Mezcla ineficiente (puede ocasionar errores en tiempo de ejecución)

```
1 void mezclar1 (int[] v, int inf, int medio, int sup) {  
2     //vector auxiliar de longitud n (lento)  
3     int[] vAux = new int[v.length];  
4     ...
```

- Mezcla eficiente

```
1 void mezclar1_mejor (int[] v, int inf, int medio, int sup) {  
2     //vector auxiliar de longitud exacta  
3     int[] vAux = new int[medio - inf + 1];
```

Cartagena99

CLASES PARTICULARES TUTORÍAS  
LLAMA O ENVÍA WHATSAPP. 689 45 44 70  
ONLINE PRIVATE LESSONS FOR SC  
CALL OR WHATSAPP. 689 45 44 70

# Implementación alternativa del Merge-sort II

- El parámetro auxiliar debe pasarse por referencia

```
1 void mergeSort2 (int[] v) {
2     //vector auxiliar de longitud n, se propaga
3     int[] vAux = new int[v.length];
4
5     ordenarPorMezcla2 (v, 0, v.length-1, vAux);
6 }
7
8 void ordenarPorMezcla2 (int[] v, int inf, int sup, int[] vAux) {
9     if (inf<sup) {
10        int medio = (inf+sup)/2;
11        ordenarPorMezcla2 (v, inf, medio, vAux);
12        ordenarPorMezcla2 (v, medio+1, sup, vAux);
13        mezclar2 (v, inf, medio, sup, vAux);
14    }
15 }
```

Cartagena99

CLASES PARTICULARES TUTORÍAS  
LLAMA O ENVÍA WHATSAPP. 689 45 44 70  
ONLINE PRIVATE LESSONS FOR SC  
CALL OR WHATSAPP. 689 45 44 70

# Quick-sort

- Caso base
  - Si el vector tiene tamaño 1 se devuelve el elemento
- Descomposición
  - Se escoge un elemento “pivote”
  - Se divide el vector en tres partes:
    - Parte izquierda: elementos menores o iguales que el pivote
    - El propio pivote
    - Parte derecha: elementos mayores que el pivote
  - Posteriormente se ordenan las partes izquierda y derecha

Combinación  
**Cartagena99**

CLASES PARTICULARES TUTORÍAS  
LLAMA O ENVÍA WHATSAPP. 689 45 44 70  
ONLINE PRIVATE LESSONS FOR SCIENCE  
CALL OR WHATSAPP. 689 45 44 70



# Quick-sort

- Esquema:

26	5	37	1	61	11	59	15	48	19
----	---	----	---	----	----	----	----	----	----



Descomponer el problema

11	5	19	1	15	26	59	61	48	37
----	---	----	---	----	----	----	----	----	----



Ordenar subproblemas

1	5	11	15	19	26	37	48	59	61
---	---	----	----	----	----	----	----	----	----

trivial

Cartagena99

Combinar soluciones

CLASES PARTICULARES Y TUTORÍAS  
 LLAMA O ENVIA WHATSAPP: 689 45 44 70  
 ONLINE PRIVATE LESSONS FOR SCIENCE  
 CALL OR WHATSAPP: 689 45 44 70

# Quick-sort

- Caso mejor (el elemento pivote está en la mitad)

$$T(n) = \begin{cases} 1 & \text{si } n = 1 \\ 2T(n/2) + \Theta(n) & \text{si } n > 1 \end{cases} \Rightarrow \Theta(n \log n)$$

- Caso peor (un subvector queda siempre vacío)

$$T(n) = \begin{cases} 1 & \text{si } n = 1 \\ T(0) + T(n-1) + \Theta(n) & \text{si } n > 1 \end{cases} \Rightarrow \Theta(n^2)$$

Cartagena99

CLASES PARTICULARES TUTORÍAS  
LLAMA O ENVÍA WHATSAPP. 689 45 44 70  
ONLINE PRIVATE LESSONS FOR SC  
CALL OR WHATSAPP. 689 45 44 70

# Quick-sort

- Algoritmo de ordenación rápido en la práctica
  - Caso peor:  $\Theta(n^2)$
  - Caso mejor:  $\Theta(n \log n)$
  - Caso medio:  $\Theta(n \log n)$
- Suele superar a otros algoritmos  $\Theta(n \log n)$  al utilizar mejor las jerarquías de memoria
- Memoria auxiliar
  - $O(n)$

Cartagena99

CLASES PARTICULARES TUTORÍAS  
LLAMA O ENVÍA WHATSAPP. 689 45 44 70  
ONLINE PRIVATE LESSONS FOR SC  
CALL OR WHATSAPP. 689 45 44 70

# Implementación del Quick-sort

```
1 void quickSort (int[] v) {
2     ordenarRapido (v, 0, v.length-1);
3 }
4
5 void ordenarRapido (int[] v, int inf, int sup) {
6     if (inf<sup) {
7         int med = partir (v, inf, sup);
8         if (inf<med) ordenarRapido (v, inf, med-1);
9         if (med<sup) ordenarRapido (v, med+1, sup);
10    }
11 }
```

Cartagena99

CLASES PARTICULARES TUTORÍAS  
LLAMA O ENVÍA WHATSAPP. 689 45 44 70  
ONLINE PRIVATE LESSONS FOR SC  
CALL OR WHATSAPP. 689 45 44 70

# Implementación del Quick-sort

```
1 int partir (int[] v, int inf, int sup) {
2     int piv = v[inf];
3     int izq = inf+1;
4     int dcha = sup;
5     int temp;
6     do {
7         for (; v[izq]<=piv && izq<sup ; izq++);
8         for (; v[dcha]>piv /*&&dcha>inf*/; dcha--);
9         if (izq<dcha) {
10            temp = v[izq];
11            v[izq] = v[dcha];
12            v[dcha] = temp;
13        }
14    } while (izq<dcha);
15    /* v[inf] <-> v[dcha] */
16    temp = v[inf];
17    v[inf] = v[dcha];
```

Cartagena99

CLASES PARTICULARES TUTORÍAS  
LLAMA O ENVÍA WHATSAPP. 689 45 44 70  
ONLINE PRIVATE LESSONS FOR SC  
CALL OR WHATSAPP. 689 45 44 70



# Traspuesta de una matriz

- Sea una matriz  $A$  de dimensiones  $n \times n$ , donde  $n$  es una potencia de 2
- Se puede definir su traspuesta  $A^T$  dividiendo la matriz en bloques:

$$A = \left( \begin{array}{c|c} A_{11} & A_{12} \\ \hline A_{21} & A_{22} \end{array} \right) \Rightarrow A^T = \left( \begin{array}{c|c} A_{11}^T & A_{21}^T \\ \hline A_{12}^T & A_{22}^T \end{array} \right)$$

Cartagena99

CLASES PARTICULARES TUTORÍAS  
LLAMA O ENVÍA WHATSAPP. 689 45 44 70  
ONLINE PRIVATE LESSONS FOR SCIENCE  
CALL OR WHATSAPP. 689 45 44 70

# Implementación de la traspuesta de una matriz

```
1 void traspone (int[] [] m) {
2     trasponeDyV1 (m, 0, m.length-1, 0, m.length-1);
3 }
4
5 void trasponeDyV1 (int[] [] m,
6                   int fInicio, int fFin, int cInicio, int cFin) {
7     // caso básico de 1x1
8     if (fInicio<fFin) {
9         int fMedio = (fInicio+fFin)/2;
10        int cMedio = (cInicio+cFin)/2;
11        trasponeDyV1 (m, fInicio, fMedio, cInicio, cMedio);
12        trasponeDyV1 (m, fInicio, fMedio, cMedio+1, cFin);
13        trasponeDyV1 (m, fMedio+1, fFin, cInicio, cMedio);
14        trasponeDyV1 (m, fMedio+1, fFin, cMedio+1, cFin);
15        intercambiar (m, fMedio+1, cInicio, fInicio, cMedio+1, fFin-fMedio);

```

Cartagena99

CLASES PARTICULARES TUTORÍAS  
LLAMA O ENVÍA WHATSAPP. 689 45 44 70  
ONLINE PRIVATE LESSONS FOR SC  
CALL OR WHATSAPP. 689 45 44 70



# Implementación de la traspuesta de una matriz

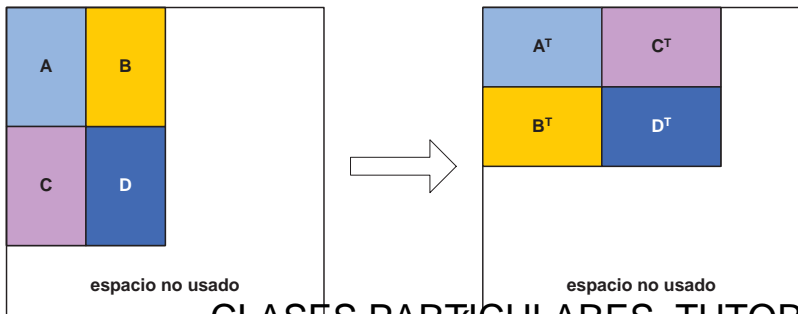
```
1 void intercambiar (int[] [] m,int fIniA, int cIniA,  
2                   int fIniB, int cIniB, int dimen) {  
3     for (int i=0; i<=dimen-1; i++)  
4       for (int j=0; j<=dimen-1; j++) {  
5         int aux = m[fIniA+i][cIniA+j];  
6         m[fIniA+i][cIniA+j] = m[fIniB+i][cIniB+j];  
7         m[fIniB+i][cIniB+j] = aux;  
8       }  
9 }
```

Cartagena99

CLASES PARTICULARES TUTORÍAS  
LLAMA O ENVÍA WHATSAPP. 689 45 44 70  
ONLINE PRIVATE LESSONS FOR SC  
CALL OR WHATSAPP. 689 45 44 70

## Traspuesta de una matriz no cuadrada

- También puede implementarse cuando  $n$  no es una potencia de dos, o incluso cuando la matriz no es cuadrada
- Se pueden usar matrices de tamaño fijo:



Cartagena99

CLASES PARTICULARES TUTORÍAS  
LLAMA O ENVÍA WHATSAPP. 689 45 44 70  
ONLINE PRIVATE LESSONS FOR SCIENCE  
CALL OR WHATSAPP. 689 45 44 70

# Multiplicación de matrices

- La división de una matriz en bloques tiene varias ventajas:
  - Simplifica operaciones algebraicas
  - Se puede aprovechar para construir algoritmos eficientes que hagan buen uso de la memoria caché
- Para realizar una multiplicación hay varias formas de dividir la matriz

$$A \cdot B = \begin{pmatrix} A_1 \\ A_2 \end{pmatrix} \cdot ( B_1 \mid B_2 ) = \begin{pmatrix} A_1 B_1 & A_1 B_2 \\ A_2 B_1 & A_2 B_2 \end{pmatrix}$$

$$A \cdot B = ( A_1 \mid A_2 ) \cdot \begin{pmatrix} B_1 \\ B_2 \end{pmatrix} = ( A_1 B_1 + A_2 B_2 )$$

Cartagena99

CLASES PARTICULARES TUTORÍAS  
LLAMA O ENVÍA WHATSAPP. 689 45 44 70  
ONLINE PRIVATE LESSONS FOR SC  
CALL OR WHATSAPP. 689 45 44 70

# Multiplicación de matrices - complejidad

- Sea  $A$  una matriz de  $p \times q$ , y  $B$  una matriz de  $q \times r$
- El producto  $C = AB$  requiere  $\mathcal{O}(pqr)$  operaciones
- Considérese que las matrices son cuadradas de dimensión  $n \times n$ , y la siguiente descomposición:

$$A \cdot B = \begin{pmatrix} A_{11} & A_{12} \\ A_{21} & A_{22} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} B_{11} & B_{12} \\ B_{21} & B_{22} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} A_{11}B_{11} + A_{12}B_{21} & A_{11}B_{12} + A_{12}B_{22} \\ A_{21}B_{11} + A_{22}B_{21} & A_{21}B_{12} + A_{22}B_{22} \end{pmatrix}$$

$$T(n) = \begin{cases} 1 & \text{si } n = 1 \\ 8T(n/2) + 4\Theta(n^2) & \text{si } n > 1 \end{cases}$$

- 8 multiplicaciones (de matrices de  $n/2 \times n/2$ )

Cartagena99

CLASES PARTICULARES TUTORÍAS  
 LLAMA O ENVÍA WHATSAPP. 689 45 44 70  
 ONLINE PRIVATE LESSONS FOR SC  
 CALL OR WHATSAPP. 689 45 44 70

# Multiplicación de matrices - algoritmo de Strassen

- La operación básica más costosa es la multiplicación
- El algoritmo de Strassen consigue reducir el número de multiplicaciones
- Considérese la siguiente descomposición:

$$\begin{pmatrix} A_{11} & A_{12} \\ A_{21} & A_{22} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} B_{11} & B_{12} \\ B_{21} & B_{22} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} C_{11} & C_{12} \\ C_{21} & C_{22} \end{pmatrix}$$

$$M_1 = (A_{11} + A_{22})(B_{11} + B_{22})$$

$$C_{11} = M_1 + M_4 - M_5 + M_7$$

$$M_2 = (A_{21} + A_{22})B_{11}$$

$$C_{12} = M_3 + M_5$$

$$M_3 = A_{11}(B_{12} - B_{22})$$

$$C_{21} = M_2 + M_4$$

$$M_4 = A_{22}(B_{21} - B_{11})$$

$$C_{22} = M_1 - M_2 + M_3 + M_6$$

$$M_5 = (A_{11} + A_{12})B_{22}$$

CLASES PARTICULARES TUTORÍAS  
 LLAMA O ENVÍA WHATSAPP. 689 45  
 ONLINE PRIVATE LESSONS FOR SC  
 CALL OR WHATSAPP. 689 45 44 70

Cartagena99

# Multiplicación de matrices - algoritmo de Strassen

- Con esa factorización el algoritmo requiere
  - 7 multiplicaciones
  - 18 sumas

$$T(n) = \begin{cases} 1 & \text{si } n = 1 \\ 7T(n/2) + 18\Theta(n^2) & \text{si } n > 1 \end{cases}$$

- Por el teorema maestro:  $T(n) = \Theta(n^{\log_2 7}) = \Theta(n^{2,807})$
- Solo es más eficiente que una multiplicación ordinaria si el tamaño de las matrices es muy elevado
- Actualmente hay un algoritmos en  $\mathcal{O}(n^{2,376})$  (Coppersmith - Winograd)

Cartagena99

CLASES PARTICULARES TUTORÍAS  
LLAMA O ENVIA WHATSAPP. 689 45 44 70  
ONLINE PRIVATE LESSONS FOR SC  
CALL OR WHATSAPP. 689 45 44 70