

# Fundamentos de Transmisión y Propagación de Ondas

➔ **TEMA I. EL MODELO ELECTROMAGNÉTICO BASADO EN LAS ECUACIONES DE MAXWELL.**

- TEMA II. MEDIOS Y TRANSFERENCIA DE ENERGÍA.
- TEMA III. ONDAS PLANAS HOMOGÉNEAS (OPH).
- TEMA IV. INCIDENCIA DE ONDAS PLANAS SOBRE OBSTÁCULOS PLANOS.
- TEMA V. ONDAS GUIADAS POR SOPORTE FÍSICO. LA LÍNEA DE TRANSMISIÓN.

---

**Fundamentos de Transmisión y Propagación de Ondas**  
 2º curso, 2º cuatrim. del Grado en Ing. de T<sup>as</sup> y Servicios de Telecomunicación  
 Escuela Politécnica Superior, Universidad Autónoma de Madrid  
 Jorge A. Ruiz Cruz (jorge.ruizcruz@uam.es, http://rfcas.eps.uam.es)

➔ **TEMA I. EL MODELO ELECTROMAGNÉTICO BASADO EN LAS ECUACIONES DE MAXWELL.**

OBJETIVOS ESPECIFICOS POR TEMA SEGÚN LA GUÍA DOCENTE DE FTPO	
<b>Al final del tema* el estudiante deberá ser capaz de:</b>	
1.1	Enunciar las ecuaciones de Maxwell en forma diferencial e integral en el tiempo, con las relaciones constitutivas para medios sencillos
1.2	Identificar las ecuaciones del régimen estático, quasi-estático y con variación temporal arbitraria
1.3	Operar con vectores cuyas componentes son números complejos y dominar la notación vectorial y los números complejos
1.4	Utilizar los operadores vectoriales y aplicarlos a las ecuaciones de Maxwell



**CLASES PARTICULARES, TUTORÍAS TÉCNICAS ONLINE  
 LLAMA O ENVÍA WHATSAPP: 689 45 44 70**

---

**ONLINE PRIVATE LESSONS FOR SCIENCE STUDENTS  
 CALL OR WHATSAPP:689 45 44 70**

# Tema I. El modelo electromagnético basado en las ecuaciones de Maxwell.

## I.1. DEFINICIÓN DEL MODELO ELECTROMAGNÉTICO MACROSCÓPICO: ECUACIONES DE MAXWELL EN EL DOMINIO DEL TIEMPO

- I.2. DEFINICIÓN DE LOS MEDIOS MATERIALES EN EL MODELO ELECTROMAGNÉTICO.
- I.3. DEFINICIÓN DE RÉGIMEN ESTÁTICO: ELECTROSTÁTICA Y MAGNETOSTÁTICA.
- I.4. DEFINICIÓN DE RÉGIMEN DE VARIACIÓN TEMPORAL LENTA. LEYES DE KIRCHOFF.
- I.5. DEFINICIÓN DE RÉGIMEN DE VARIACIÓN TEMPORAL ARBITRARIA.
- I.6. TRANSFORMADA DE FOURIER APLICADA A LAS ECUACIONES DE MAXWELL. RÉGIMEN MONOCROMÁTICO.

Jorge A. Ruiz Cruz (jorge.ruizcruz@uam.es, <http://rfcas.eps.uam.es>)  
Escuela Politécnica Superior, Universidad Autónoma de Madrid

Grupo de RadioFrecuencia:  
Circuitos, Antenas y Sistemas **RF** C. A. S.

FTPO (2014-15)

3

J.A.R.C

ver. 1.0

## I.1. Definición del modelo electromagnético macroscópico: ecuaciones de Maxwell en el dominio del tiempo.

- “Fundamentos de Transmisión y Propagación de Ondas” (FTPO) es una asignatura de introducción a los campos electromagnéticos en el ámbito de los sistemas de comunicaciones.
- Los fenómenos de transmisión y propagación de ondas son estudiados mediante el modelo electromagnético de Maxwell. Este modelo es el que se utilizará durante toda la asignatura.
- El enfoque de FTPO es deductivo: se partirá de las leyes fundamentales, las ecuaciones de Maxwell cuyo estudio se inicia en este tema. De estas ecuaciones fundamentales se irán derivando leyes y resultados específicos para distintos casos

**CLASES PARTICULARES, TUTORÍAS TÉCNICAS ONLINE  
LLAMA O ENVÍA WHATSAPP: 689 45 44 70**

---

**ONLINE PRIVATE LESSONS FOR SCIENCE STUDENTS  
CALL OR WHATSAPP:689 45 44 70**

# Introducción



- Considérese una sistema de **tele**-comunicaciones donde el emisor y el receptor están situados en diferentes puntos muy distantes uno del otro.
- El medio de transmisión puede ser un cable (medio guiado) o ondas radioeléctricas emitidas y recibidas por una antena emisora y otra receptora (las ideas básicas de propagación en ambos casos se estudiarán en esta asignatura).
- Supóngase que el emisor transmite una señal (en forma de energía electromagnética) durante un breve instante de tiempo, de forma que el tiempo que tarda la energía en llegar al receptor es mucho mayor que el tiempo de emisión.
- El hecho es que el sistema (si está bien diseñado) ha permitido el intercambio de la señal de información. Pero ¿quién es el portador de esta energía durante el tiempo de propagación del emisor al receptor?.
- La respuesta es que la energía la transporta el campo electromagnético, y por tanto, dicho campo tiene entidad física. La noción del campo electromagnético es la base de la teoría moderna del electromagnetismo y el “vehículo” donde “transportar señales” para los sistemas de comunicaciones.

# Contexto del modelo electromagnético de Maxwell



- Se pueden reconocer tres grandes áreas en la física:
  - Gravitacional (interacción entre masas).
  - Electromagnética (interacción entre cargas).
  - Nuclear (interacción entre partículas subatómicas), que a su vez puede dividirse en dos (según el rango de las interacciones): fuerte y débil.
- Esta asignatura está enfocada a los fenómenos de naturaleza electromagnética, cuyo estudio se puede abordar desde el **modelo propuesto por James Clerk Maxwell**.
- Este es un modelo que describe los **fenómenos electromagnéticos en el ámbito macroscópico**, usando como herramientas los campos vectoriales y las ecuaciones

**CLASES PARTICULARES, TUTORÍAS TÉCNICAS ONLINE  
LLAMA O ENVÍA WHATSAPP: 689 45 44 70**

---

**ONLINE PRIVATE LESSONS FOR SCIENCE STUDENTS  
CALL OR WHATSAPP:689 45 44 70**

# Modelo macroscópico vs. microscópico

- El modelo de Maxwell está orientado a los fenómenos electromagnéticos, los cuales tienen su origen en la interacción entre cargas: se va a ver ahora que se entiende desde un punto de vista macroscópico al hablar de distribuciones de carga y de corriente.

- Si la carga en la materia se presenta con carácter discreto y microscópico, ¿cómo se entiende el mencionado “*punto de vista macroscópico*”?

- La respuesta está en tomar en el estudio elementos de volumen **suficientemente grandes** para englobar un elevado número de partículas discretas cargadas,

- **pero a su vez suficientemente pequeño** para poder utilizar una descripción basada en cálculo diferencial.

↕ compromiso

- Ej: Un cubo elemental de una micra ( $10^{-6}m$ ) tiene un volumen de  $10^{-18}m^3$ , el cual contiene unos  $10^{11}$  átomos.

- Cualquier función que varíe en saltos de una micra, será útil desde el punto de vista macroscópico, porque engloba el efecto agregado de muchas partículas,

- y a su vez, cualquier volumen de este tamaño podrá considerarse como un elemento diferencial de volumen  $dV$ .

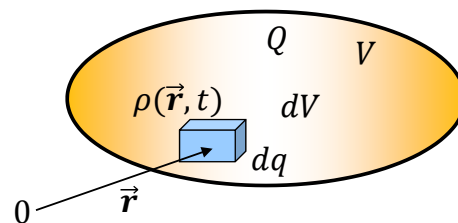
## Distribución de carga (I)

- De esta manera, se podrá definir una densidad volumétrica de carga (carga por unidad de volumen) que describa como está distribuida la carga por el espacio:

$$\rho(\vec{r}, t) \equiv \lim_{\Delta V \rightarrow 0} \frac{\Delta q}{\Delta V} \quad \text{densidad volumétrica de carga} \quad [C/m^3]$$

- La carga total en un recinto cualquiera  $V$  será:

$$Q(t) = \iiint_V \rho(\vec{r}, t) dV \quad [C]$$



CLASES PARTICULARES, TUTORÍAS TÉCNICAS ONLINE  
LLAMA O ENVÍA WHATSAPP: 689 45 44 70

---

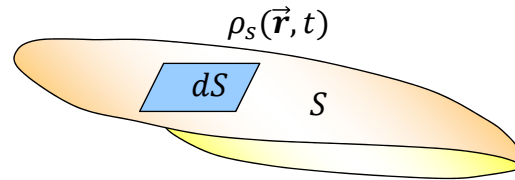
ONLINE PRIVATE LESSONS FOR SCIENCE STUDENTS  
CALL OR WHATSAPP:689 45 44 70

# Distribución de carga (y II)

- Densidad superficial de carga:

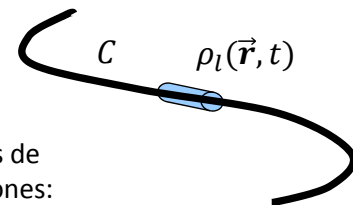
$$\rho_s(\vec{r}, t) \equiv \lim_{\Delta S \rightarrow 0} \frac{\Delta q}{\Delta S} \quad [C/m^2]$$

$$Q(t) = \iint_S \rho_s(\vec{r}, t) dS \quad [C]$$



- También se puede hablar de densidades lineales de carga: dos dimensiones suficientemente grandes macroscópicamente pero despreciables frente a la distancia de observación:

$$\rho_l(\vec{r}, t) \equiv \lim_{\Delta l \rightarrow 0} \frac{\Delta q}{\Delta l} \quad Q(t) = \int_C \rho_l(\vec{r}, t) dl$$



- Para las conversiones matemáticas entre las distintas distribuciones de corriente se usa la función delta de Dirac en una, dos y tres dimensiones:

- Ej: especificar una distribución superficial (sobre superficie  $\vec{r} = \vec{r}_s$ ) de carga como una función densidad volumétrica

$$\rho(\vec{r}) = \rho_s(\vec{r}) \delta^{1D}(\vec{r} - \vec{r}_s)$$

- Ej: "carga puntual en  $\vec{r}_0$ " (desde el punto de vista macroscópico)

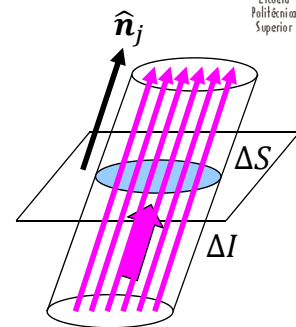
$$\rho(\vec{r}) = q_0 \delta^{3D}(\vec{r} - \vec{r}_0)$$

# Distribución de corriente (I)

- Si las cargas están en movimiento, se tendrá una distribución de corriente, cuya densidad se puede caracterizar como el:

cociente entre la cantidad de carga por unidad de tiempo que atraviesa un elemento de superficie normal a la dirección en que se mueven y el valor de dicho elemento

$$J(\vec{r}, t) \equiv \lim_{\Delta S \rightarrow 0} \frac{\Delta q / \Delta t}{\Delta S} = \lim_{\Delta S \rightarrow 0} \frac{\Delta I}{\Delta S} \quad [(C/s)/m^2] = [A/m^2]$$



- Se define el **vector densidad de corriente** para tener la información de la dirección y sentido de movimiento de las cargas (por convención histórica **se fija el sentido según las cargas positivas**) que se definirá con el vector dirección unitario y sin dimensiones  $\hat{n}$ :

**CLASES PARTICULARES, TUTORÍAS TÉCNICAS ONLINE  
LLAMA O ENVÍA WHATSAPP: 689 45 44 70**

---

**ONLINE PRIVATE LESSONS FOR SCIENCE STUDENTS  
CALL OR WHATSAPP: 689 45 44 70**



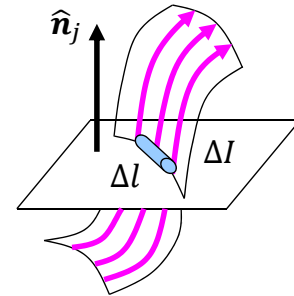
## Distribución de corriente (II)

• El vector de densidad de corriente  $\vec{J}(\vec{r}, t)$  es, estrictamente, un vector de densidad superficial de corriente volumétrica:

- Densidad superficial porque es la densidad de flujo de cargas a través de una superficie en la unidad de tiempo
- Corriente volumétrica porque las cargas se mueven dentro de un volumen

• También existe el vector densidad lineal de corriente superficial, o simplemente **vector densidad superficial de corriente**  $\vec{J}_s(\vec{r}, t)$  (porque modela la corriente fluyendo por una superficie) definido como:

- Vector dirigido según la línea de flujo de corriente que pasa por el punto o, dicho de otra manera, “vector contenido en la superficie por la que circula la corriente”
- cuyo módulo es la carga por unidad de tiempo que cruza la unidad de longitud de la línea ortogonal a la línea de flujo

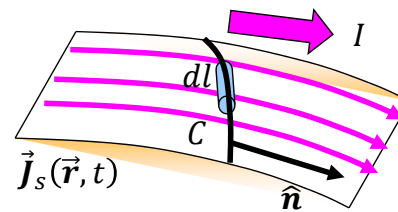


$$\vec{J}_s(\vec{r}, t) \equiv \hat{n}_j \lim_{\Delta l \rightarrow 0} \frac{\Delta q / \Delta t}{\Delta l} = \hat{n}_j \lim_{\Delta l \rightarrow 0} \frac{\Delta I}{\Delta l} \quad [A/m]$$

## Distribución de corriente (y III)

• La corriente que fluye por una superficie se podría calcular integrando la densidad de corriente superficial sobre la línea de interés:

$$I(t) = \int_C \vec{J}_s(\vec{r}, t) \cdot \hat{n} dl \quad [A]$$



• También es útil el concepto de corriente filiforme: aproximación de las corrientes que circulan a lo largo de un recinto de dimensiones transversales despreciables frente a la distancia al punto de observación:

CLASES PARTICULARES, TUTORÍAS TÉCNICAS ONLINE  
LLAMA O ENVÍA WHATSAPP: 689 45 44 70

---

ONLINE PRIVATE LESSONS FOR SCIENCE STUDENTS  
CALL OR WHATSAPP:689 45 44 70

# Ley de conservación de la carga

• Un postulado clave de los desarrollos que se van hacer es la conservación de la carga, de acuerdo con el hecho de no existir evidencia ni comprobación alguna de que la carga pueda crearse o destruirse desde el punto de vista macroscópico:

• La disminución de la carga almacenada en un recinto  $V$  (fijo) al transcurrir el tiempo vendrá dada por el flujo de corriente a través de la superficie  $S$  que lo rodea:

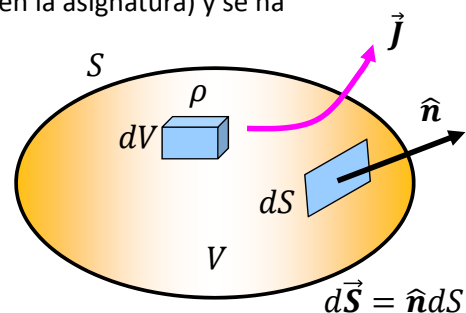
$$-\frac{d}{dt} \left( \iiint_V \rho dV \right) = \oiint_S \vec{J} \cdot d\vec{S}$$

$$\frac{-d}{dt} \left( \iiint_V \rho dV \right) = \iiint_V \frac{-\partial \rho}{\partial t} dV = \oiint_S \vec{J} \cdot d\vec{S} \stackrel{(1)}{=} \iiint_V \nabla \cdot \vec{J} dV \Rightarrow \iiint_V (\nabla \cdot \vec{J} + \frac{\partial \rho}{\partial t}) dV = 0$$

- Se ha supuesto que se cumplen las condiciones matemáticas para intercambiar la derivación y el signo integral (se hará muy frecuentemente en la asignatura) y se ha aplicado el teorema de Gauss en (1).

- Puesto que además la igualdad se debe cumplir para cualquier volumen (fijo en  $t$ ) que se elija:

$$\nabla \cdot \vec{J}(\vec{r}, t) + \frac{\partial \rho(\vec{r}, t)}{\partial t} = 0 \quad \text{Ecuación de continuidad de la carga}$$



# El campo electromagnético. Definición

• Se denomina punto ordinario del espacio a todo aquel en el que las propiedades físicas del medio no presentan discontinuidades.

• El campo electromagnético es el conjunto de los cuatro campos vectoriales dependientes de la posición en el espacio y del tiempo siguientes:

- $\vec{E}(\vec{r}, t)$  : Intensidad de campo Eléctrico
- $\vec{D}(\vec{r}, t)$  : Inducción Eléctrica
- $\vec{B}(\vec{r}, t)$  : Inducción Magnética
- $\vec{H}(\vec{r}, t)$  : Intensidad de campo Magnético

que son finitos, continuos, y con derivadas finitas y continuas en todos los

**CLASES PARTICULARES, TUTORÍAS TÉCNICAS ONLINE  
LLAMA O ENVÍA WHATSAPP: 689 45 44 70**

---

**ONLINE PRIVATE LESSONS FOR SCIENCE STUDENTS  
CALL OR WHATSAPP:689 45 44 70**



# Fuentes del campo electromagnético



- El postulado de Maxwell define las fuentes de tipo rotacional del campo E-M:

$$\nabla \times \vec{E}(\vec{r}, t) = -\frac{\partial \vec{B}(\vec{r}, t)}{\partial t}$$

$$\nabla \times \vec{H}(\vec{r}, t) = \vec{J}(\vec{r}, t) + \frac{\partial \vec{D}(\vec{r}, t)}{\partial t}$$

(“donde hay variación temporal de  $\vec{B}$ , hay líneas de  $\vec{E}$  *circulando* alrededor) y donde hay  $\vec{J}$  y/o variación temporal de  $\vec{D}$ , hay  $\vec{H}$  *circulando* a su alrededor):

- Las fuentes de tipo divergencia, se pueden obtener de las dos anteriores, como se verá luego:

$$\nabla \cdot \vec{D}(\vec{r}, t) = \rho(\vec{r}, t) \quad (\text{“las líneas de } \vec{D} \text{ salen/entran de/en las cargas } +/ - \text{”})$$

$$\nabla \cdot \vec{B}(\vec{r}, t) = 0 \quad (\text{“las líneas de } \vec{B} \text{ son cerradas”})$$

- A la vista de las ecuaciones anteriores,  $\rho$  y  $\vec{J}$  (relacionadas por la ecuación de continuidad), es decir, las cargas eléctricas en reposo o en movimiento, son las fuentes “*originales*” del campo electromagnético.
- Sin embargo, un campo electromagnético puede originar una redistribución de las cargas, lo cual a su vez modificará el campo: por eso no siempre está muy clara la separación entre causa y efecto y a veces que se habla de campo fuente, campo impreso,...

# Fuentes del campo EM tipo divergencia



- Divergencia aplicada a la primera ecuación de Maxwell:

$$\nabla \cdot \left\{ \nabla \times \vec{E} = -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t} \right\} \Rightarrow \nabla \cdot \nabla \times \vec{E} = 0 = \nabla \cdot \frac{\partial \vec{B}}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial t} (\nabla \cdot \vec{B}) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \nabla \cdot \vec{B} = \text{cte en el tiempo}$$

- Por experimentación y atendiendo a que las líneas de  $\vec{B}$  se cierran sobre si mismas, se concluye que:  $\nabla \cdot \vec{B}(\vec{r}, t) = 0$

- Divergencia aplicada a la segunda ecuación de Maxwell, junto con la ecuación de continuidad:

**CLASES PARTICULARES, TUTORÍAS TÉCNICAS ONLINE  
LLAMA O ENVÍA WHATSAPP: 689 45 44 70**

---

**ONLINE PRIVATE LESSONS FOR SCIENCE STUDENTS  
CALL OR WHATSAPP:689 45 44 70**

Cartagena99



# Distribuciones de carga y corriente libres



- En las ecuaciones de Maxwell,  $\rho$  se refiere a la densidad de carga libre.
  - Ej: electrones de conducción en un metal o los electrones que inyecta en un dieléctrico un haz electrónico de alta energía.
  - El término libres viene en oposición al término de cargas ligadas (las que se acumulan en los desplazamientos que ocurren a escala molecular cuando se le aplica un campo eléctrico a un dieléctrico ideal, y que por tanto están ligadas a estructuras bien definidas).
- Igualmente, en las ecuaciones de Maxwell  $\vec{J}$  se refiere a las densidades de corrientes libres, que puede comprender tanto corrientes de conducción como convección:
  - Corrientes de convección: movimiento de cargas en el vacío o un gas enrarecido: haces de electrones en un tubo de rayos catódicos o violentos movimientos de partículas durante una tormenta; **no se rigen por la ley de Ohm.**
  - Corrientes de conducción: cuando se aplica un campo eléctrico a un conductor tiene lugar un movimiento organizado de los electrones de conducción; **se rigen por la ley de Ohm.**
- Los diferentes tipos de materiales y la ley de Ohm generalizada, se verán en el siguiente tema.

# Corrientes externas e inducidas



- Las corrientes de que aparecen en la 2ª ecuación de Maxwell también se pueden dividir en corrientes externas e inducidas:

$$\vec{J}(\vec{r}, t) = \vec{J}_{ext}(\vec{r}, t) + \vec{J}_{ind}(\vec{r}, t) \implies \nabla \times \vec{H} = \vec{J}_{ext} + \vec{J}_{ind} + \frac{\partial \vec{D}}{\partial t}$$

$\vec{J}_{ext}$ : las impuestas/impresas por quien desea generar el campo electromagnético. (las que impone el generador y mantiene independientemente del campo producido, "análogo al generador ideal en teoría de circuitos")

$\vec{J}_{ind}$ : las que aparecen inducidas en diferentes puntos del espacio por el hecho de que haya cargas y corrientes libres en el seno del campo electromagnético producido

CLASES PARTICULARES, TUTORÍAS TÉCNICAS ONLINE  
LLAMA O ENVÍA WHATSAPP: 689 45 44 70

---

ONLINE PRIVATE LESSONS FOR SCIENCE STUDENTS  
CALL OR WHATSAPP:689 45 44 70

# Efectos “observables” del campo electromagnético

- Introducidos los cuatro vectores fundamentales de electromagnetismo, surgen las preguntas: ¿cómo caracterizarlos?, ¿cómo se reflejan o que efectos tienen en las propiedades de la materia?

- Una posible caracterización resulta posible en base a los efectos de tipo mecánico que viene ligados a los campos, las cargas y las corrientes (recuérdese los experimentos de Coulomb, Ampere, Gauss,..)

- Si en una zona del espacio  $V'$  existen campos  $\vec{E}, \vec{B}$  y se admite que al hacer presente en ese volumen  $V'$  una distribución  $\rho'$  o  $\vec{J}'$  ajenos a dichos campos no los perturban, se puede escribir de acuerdo a la evidencia experimental:

$$\Delta \vec{F}(\vec{r}, t) = \Delta q(\vec{E}(\vec{r}, t) + \vec{v} \times \vec{B}(\vec{r}, t))$$

[N]

**Fuerza de Lorentz** que aparece sobre una carga elemental  $\Delta q$  que se mueve a velocidad  $\vec{v}$  en el seno de un campo EM

$$\vec{F}(t) = \iiint_{V'} \rho' \vec{E} dV' + \iiint_{V'} \vec{J}' \times \vec{B} dV'$$

Fuerza total que aparece sobre la distribución de cargas y corriente

$$\vec{J}'(\vec{r}, t) = \rho'(\vec{r}, t) \vec{v} \quad [\text{A/m}^2]$$

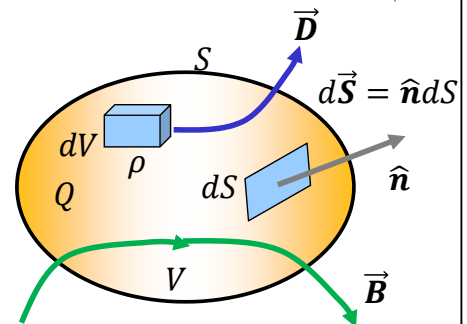
# Flujo de los vectores inducción eléctrica y magnética

- **Ley de Gauss:** el flujo total de  $\vec{D}$  sobre una superficie cerrada  $S$  es igual a la carga total en el volumen  $V$  encerrado por  $S$

$$\nabla \cdot \vec{D}(\vec{r}, t) = \rho(\vec{r}, t) \iff \oiint_S \vec{D}(\vec{r}, t) \cdot d\vec{S} = Q(t)$$

- **Ley del flujo nulo** de  $\vec{B}$  a través de una **superficie cerrada:**

$$\nabla \cdot \vec{B}(\vec{r}, t) = 0 \iff \oiint_S \vec{B}(\vec{r}, t) \cdot d\vec{S} = 0$$



CLASES PARTICULARES, TUTORÍAS TÉCNICAS ONLINE  
LLAMA O ENVÍA WHATSAPP: 689 45 44 70

---

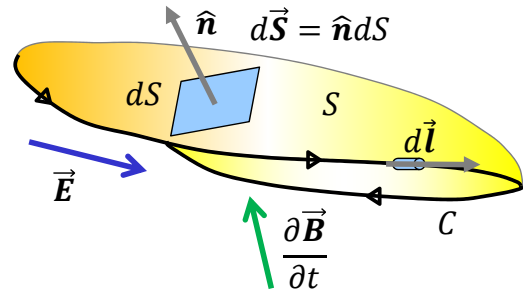
ONLINE PRIVATE LESSONS FOR SCIENCE STUDENTS  
CALL OR WHATSAPP:689 45 44 70

# Circulación del vector intensidad de campo eléctrico

- **Ley de inducción de Faraday:** la circulación de  $\vec{E}$  a través un contorno cerrado (fuerza electromotriz) es igual al flujo de la inducción magnética que lo atraviesa, con signo negativo:

$$\nabla \times \vec{E}(\vec{r}, t) = -\frac{\partial \vec{B}(\vec{r}, t)}{\partial t} \iff fem_E(t) = \oint_C \vec{E}(\vec{r}, t) \cdot d\vec{l} = -\frac{d\Phi_B(t)}{dt}$$

- La fuente vectorial del campo  $\vec{E}$  es la variación temporal de inducción magnética ( $\partial \vec{B} / \partial t$ ): el campo  $\vec{E}$  circula alrededor de un campo  $\vec{B}$  variable en el tiempo



- La demostración se basa en el teorema de Stokes aplicado a una superficie S (fija en el tiempo) que se apoya sobre un contorno cerrado C (1):

$$\oint_C \vec{E} \cdot d\vec{l} \stackrel{(1)}{=} \iint_S \nabla \times \vec{E} \cdot d\vec{S} = \iint_S -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t} \cdot d\vec{S} = -\frac{d}{dt} \left( \iint_S \vec{B}(\vec{r}, t) \cdot d\vec{S} \right)$$

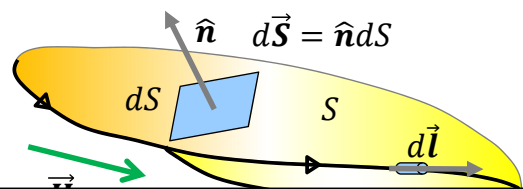
- Notar que el resultado se mantiene para cualquier otra superficie S que se apoye en C.

# Circulación del vector intensidad de campo magnético

- **Ley de Ampere generalizada:** la circulación de  $\vec{H}$  a través un contorno cerrado es igual a la suma total de corrientes generalizadas (libres y de desplazamiento) que lo atraviesan:

$$\nabla \times \vec{H}(\vec{r}, t) = \vec{J}(\vec{r}, t) + \frac{\partial \vec{D}(\vec{r}, t)}{\partial t} \iff \oint_C \vec{H}(\vec{r}, t) \cdot d\vec{l} = I(t) + \frac{d\Phi_D(t)}{dt}$$

- Las fuentes vectoriales del campo  $\vec{H}$  son las corrientes libres ( $\vec{J}$ ) y de desplazamiento ( $\partial \vec{D} / \partial t$ ): el campo  $\vec{H}$  circula alrededor de ellas



- La demostración se basa de nuevo en el teorema de Stokes aplicado a una superficie S (fija en el tiempo) que se apoya sobre un contorno cerrado C (1):

CLASES PARTICULARES, TUTORÍAS TÉCNICAS ONLINE  
LLAMA O ENVÍA WHATSAPP: 689 45 44 70

---

ONLINE PRIVATE LESSONS FOR SCIENCE STUDENTS  
CALL OR WHATSAPP:689 45 44 70

Cartagena99

	Forma diferencial	Forma integral
• Ley de Faraday	$\nabla \times \vec{E} = -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t}$	$\oint_C \vec{E} \cdot d\vec{l} = -\frac{d}{dt} \left( \iint_S \vec{B} \cdot d\vec{S} \right)$ (= fem <sub>E</sub> (t) = - $\frac{d\Phi_B}{dt}$ )
• Ley de Ampere generalizada	$\nabla \times \vec{H} = \vec{J} + \frac{\partial \vec{D}}{\partial t}$	$\oint_C \vec{H} \cdot d\vec{l} = \iint_S \vec{J} \cdot d\vec{S} + \frac{d}{dt} \left( \iint_S \vec{D} \cdot d\vec{S} \right)$ (= $I + \frac{d\Phi_D}{dt} = I + I_{desp}$ )
• Ley de Gauss	$\nabla \cdot \vec{D} = \rho$	$\oiint_S \vec{D} \cdot d\vec{S} = \iiint_V \rho dV$ (= Q)
• Ley del campo magnético	$\nabla \cdot \vec{B} = 0$	$\oiint_S \vec{B} \cdot d\vec{S} = 0$

## Puntos no ordinarios. Cambio de medio.

- El campo electromagnético se ha postulado en puntos ordinarios del espacio (donde las propiedades físicas del medio no presentan discontinuidades).
- ¿Qué sucede en los puntos no ordinarios, es decir, cuando hay discontinuidades abruptas de medio? En este caso, las ecuaciones diferenciales (que implican continuidad de las funciones implicadas) no son válidas en la **superficies de discontinuidad** entre medios diferentes.
- Desde el punto de vista macroscópico cada medio tendrás sus propiedades físicas particulares y las funciones que lo describan, y por tanto la superficie de separación implica un cambio brusco de los mismos.

transición virtual



**CLASES PARTICULARES, TUTORÍAS TÉCNICAS ONLINE  
LLAMA O ENVÍA WHATSAPP: 689 45 44 70**

---

**ONLINE PRIVATE LESSONS FOR SCIENCE STUDENTS  
CALL OR WHATSAPP:689 45 44 70**

# Condiciones de contorno en puntos no ordinarios

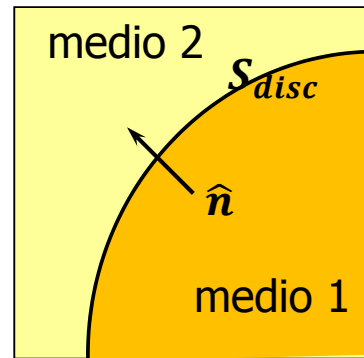
- Las condiciones de contorno (también denominadas de salto o de frontera) en la superficie del cambio de medio  $S_{disc}$  (también llamada superficie de contacto, de discontinuidad o interfaz entre los medios) son :

$$\hat{n} \times (\vec{E}_2(\vec{r}, t) - \vec{E}_1(\vec{r}, t))|_{S_{disc}} = \mathbf{0}$$

$$\hat{n} \times (\vec{H}_2(\vec{r}, t) - \vec{H}_1(\vec{r}, t))|_{S_{disc}} = \vec{J}_s(\vec{r}, t)$$

$$\hat{n} \cdot (\vec{D}_2(\vec{r}, t) - \vec{D}_1(\vec{r}, t))|_{S_{disc}} = \rho_s(\vec{r}, t)$$

$$\hat{n} \cdot (\vec{B}_2(\vec{r}, t) - \vec{B}_1(\vec{r}, t))|_{S_{disc}} = 0$$



- En la interfaz, las componentes tangenciales de  $\vec{E}$  y las normales de  $\vec{B}$  son continuas. Si existe densidad superficial de carga en la interfaz, las comp. normales de  $\vec{D}$  serán discontinuas. Si existe densidad superficial de corriente en la interfaz, las comp. normales de  $\vec{H}$  serán discontinuas.
- De igual manera que las ecuaciones de Maxwell fundamentales son dos (las del rotacional), las fundamentales aquí son las condiciones de contorno para  $\vec{E}$  y  $\vec{H}$ .



CLASES PARTICULARES, TUTORÍAS TÉCNICAS ONLINE  
LLAMA O ENVÍA WHATSAPP: 689 45 44 70

---

ONLINE PRIVATE LESSONS FOR SCIENCE STUDENTS  
CALL OR WHATSAPP:689 45 44 70