

Tema 2.1: Preliminares matemáticos

Diseño y Análisis de Algoritmos



Universidad
Rey Juan Carlos

Cartagena99

CLASES PARTICULARES TUTORÍAS
LLAMA O ENVIA WHATSAPP. 689 45 44 70
ONLINE PRIVATE LESSONS FOR SC
CALL OR WHATSAPP. 689 45 44 70

Contenidos

1 Introducción

2 Series generales

3 Series útiles

Cartagena99

CLASES PARTICULARES TUTORÍAS
LLAMA O ENVÍA WHATSAPP. 689 45 44 70
ONLINE PRIVATE LESSONS FOR SC
CALL OR WHATSAPP. 689 45 44 70

Preliminares Matemáticos

- Las matemáticas son fundamentales para el estudio y análisis de algoritmos
 - Es una de las ideas principales que tenéis que sacar de la asignatura
- En la asignatura solo veremos conceptos matemáticos básicos para poder analizar algoritmos iterativos y recursivos
- En este tema nos centraremos únicamente en series (sumatorios), útiles para analizar algoritmos iterativos

Cartagena99

CLASES PARTICULARES TUTORÍAS
LLAMA O ENVIA WHATSAPP. 689 45 44 70
ONLINE PRIVATE LESSONS FOR SC
CALL OR WHATSAPP. 689 45 44 70

Aritméticas ($a_i = a_{i-1} + r$)

$$\sum_{i=1}^n a_i = \frac{1}{2}(a_1 + a_n)n$$

$$\sum_{i=J_0}^{J_F} a_i = \frac{1}{2}(a_{J_0} + a_{J_F})(J_F - J_0 + 1)$$

$$\sum_{i=1}^n k = kn \quad (a_i = k, \quad r = 0)$$

Cartagena99

CLASES PARTICULARES TUTORÍAS
 LLAMA O ENVIA WHATSAPP. 689 45 44 70
 ONLINE PRIVATE LESSONS FOR SC
 CALL OR WHATSAPP. 689 45 44 70

Geométricas ($a_i = a_{i-1} \cdot r$)

$$S = \sum_{i=0}^{n-1} kr^i = \frac{r^n - 1}{r - 1} k \quad (a_i = kr^i)$$

$$\begin{array}{r} S = k + kr + kr^2 + \dots + kr^{n-1} \\ rS = + kr + kr^2 + \dots + kr^{n-1} + kr^n \\ \hline rS - S = -k \phantom{+ \dots + kr^{n-1}} + kr^n \end{array}$$

$$\Rightarrow S = \frac{r^n - 1}{r - 1} k$$

Cartagena99

CLASES PARTICULARES TUTORÍAS
 LLAMA O ENVÍA WHATSAPP. 689 45 44 70
 ONLINE PRIVATE LESSONS FOR SC
 CALL OR WHATSAPP. 689 45 44 70

Series telescópicas

$$\sum_{i=1}^n (a_i - a_{i-1}) = a_n - a_0$$

- Ejemplo:

$$\sum_{i=1}^{n-1} \frac{1}{i(i+1)} = \sum_{i=1}^{n-1} \left(\frac{1}{i} - \frac{1}{i+1} \right) = +1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{2} - \frac{1}{3} + \dots + \frac{1}{n-1} - \frac{1}{n} = 1 - \frac{1}{n}$$

- Todo encaja, en realidad hemos hecho: $a_i = -1/(i+1)$

Cartagena99

CLASES PARTICULARES, TUTORÍAS
 LLAMA O ENVÍA WHATSAPP. 689 45 44 70
 ONLINE PRIVATE LESSONS FOR SC
 CALL OR WHATSAPP. 689 45 44 70

Productorios

- Lo más importante es conocer la relación entre productorios y sumatorios al utilizar **logaritmos**

$$\log \left(\prod_{i=1}^n a_i \right) = \sum_{i=1}^n \log a_i$$

- Se emplea mucho en probabilidad
 - Para simplificar cálculos
 - Para evitar desbordamientos, ya que al multiplicar muchas

Cartagena99

CLASES PARTICULARES TUTORÍAS
LLAMA O ENVÍA WHATSAPP. 689 45 44 70
ONLINE PRIVATE LESSONS FOR SC
CALL OR WHATSAPP. 689 45 44 70

Derivar series

$$S = 1 \cdot 1 + 2 \cdot 2 + 3 \cdot 4 + 4 \cdot 8 + \dots + N \cdot 2^{N-1} = \sum_{i=1}^N i2^{i-1}$$

$$T = 1 + x + x^2 + \dots + x^{n-1} = \frac{x^n - 1}{x - 1}$$

$$\frac{dT}{dx} = 1 + 2x + 3x^2 + \dots + (n-1)x^{n-2} = \frac{1 - nx^{n-1} + (n-1)x^n}{(x-1)^2}$$

- Para $x = 2$ y $n = N + 1$ tenemos la primera serie:

Cartagena99

CLASES PARTICULARES, TUTORÍAS
 LLAMA O ENVÍA WHATSAPP. 689 45 44 70
 ONLINE PRIVATE LESSONS FOR SC
 CALL OR WHATSAPP. 689 45 44 70

Aproximación por integrales

- Para muchas series no obtendremos una fórmula analítica
- Tendremos que recurrir a cotas
- Para $f(x)$ monótona creciente:

$$\int_{m-1}^n f(x) dx \leq \sum_{i=m}^n f(i) \leq \int_m^{n+1} f(x) dx$$

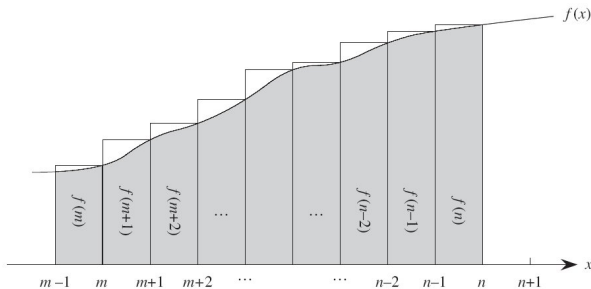
- Para $f(x)$ monótona decreciente:

Cartagena99

CLASES PARTICULARES, TUTORÍAS
 LLAMA O ENVÍA WHATSAPP. 689 45
 ONLINE PRIVATE LESSONS FOR SC
 CALL OR WHATSAPP. 689 45 44 70

Funciones monótonas crecientes - cota inferior

$$\int_{m-1}^n f(x) dx \leq \sum_{i=m}^n f(i)$$

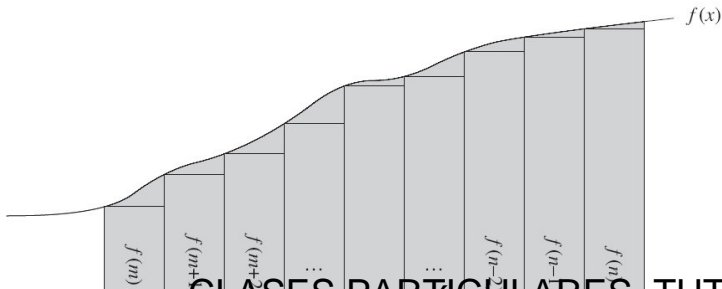


Cartagena99

CLASES PARTICULARES TUTORÍAS
 LLAMA O ENVIA WHATSAPP. 689 45
 ONLINE PRIVATE LESSONS FOR SC
 CALL OR WHATSAPP. 689 45 44 70

Funciones monótonas crecientes - cota superior

$$\sum_{i=m}^n f(i) \leq \int_m^{n+1} f(x) dx$$



Cartagena99

CLASES PARTICULARES TUTORÍAS
 LLAMA O ENVÍA WHATSAPP. 689 45
 ONLINE PRIVATE LESSONS FOR SC
 CALL OR WHATSAPP. 689 45 44 70

Ejemplo

- Acotar $\sum_{i=1}^n \frac{1}{i}$

- Cota superior

$$\sum_{i=2}^n \frac{1}{i} \leq \int_1^n \frac{1}{x} dx = \ln(n) \quad \Rightarrow$$

$$\sum_{i=1}^n \frac{1}{i} \leq \ln(n) + 1$$

- Cota inferior

Cartagena99

CLASES PARTICULARES TUTORÍAS
 LLAMA O ENVIA WHATSAPP. 689 45 44 70
 ONLINE PRIVATE LESSONS FOR SC
 CALL OR WHATSAPP. 689 45 44 70

Armónica

$$S = \sum_{i=1}^n \frac{1}{i} = \ln n + \gamma + \mathcal{O}(1/n)$$

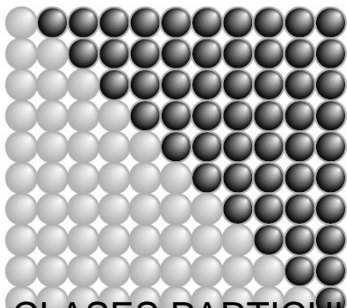
- $\gamma \simeq 0,577$ es la constante de Euler
- $\mathcal{O}(1/n)$ es un término muy pequeño
- La serie se puede acotar utilizando la “aproximación por integrales”

Cartagena99

CLASES PARTICULARES TUTORÍAS
LLAMA O ENVÍA WHATSAPP. 689 45 44 70
ONLINE PRIVATE LESSONS FOR SC
CALL OR WHATSAPP. 689 45 44 70

Series útiles

$$\sum_{i=1}^n i = 1 + 2 + 3 + \dots + n = \frac{n(n+1)}{2}$$



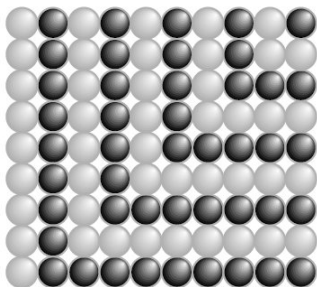
Cartagena99

CLASES PARTICULARES TUTORÍAS
 LLAMA O ENVIA WHATSAPP. 689 45
 ONLINE PRIVATE LESSONS FOR SC
 CALL OR WHATSAPP. 689 45 44 70

Más sencillo

Series útiles

$$\sum_{j=1}^n (2j - 1) = 1 + 3 + 5 + 7 + \dots + (2n - 1) = n^2$$



Cartagena99

CLASES PARTICULARES TUTORÍAS
LLAMA O ENVÍA WHATSAPP. 689 45 44 70
ONLINE PRIVATE LESSONS FOR SC
CALL OR WHATSAPP. 689 45 44 70

Series útiles

$$\sum_{i=1}^n i^2 = 1^2 + 2^2 + 3^2 + \dots + n^2 = \frac{n(2n+1)(n+1)}{6}$$

- Demostración:

$$\sum_{i=1}^n i^2 = 1 + 4 + 9 + 16 + \dots + n^2$$

1	1	1	1	1
	3	3	3	3
		5	5	5
			7	7

Cartagena99

CLASES PARTICULARES TUTORÍAS
 LLAMA O ENVÍA WHATSAPP. 689 45 44 70
 ONLINE PRIVATE LESSONS FOR SC
 CALL OR WHATSAPP. 689 45 44 70

Series útiles

- Utilizando la descomposición anterior y agrupando por filas:

$$\begin{aligned}
 S &= \sum_{i=1}^n i^2 = 1 \cdot n + 3 \cdot (n-1) + 5 \cdot (n-2) + \cdots + (2n-1) \cdot 1 = \\
 &= \sum_{i=1}^n (2i-1)(n-i+1) = \sum_{i=1}^n (2in - 2i^2 + 2i - n + i - 1) = \\
 &= \sum_{i=1}^n (2n+3)i - 2 \sum_{i=1}^n i^2 - \sum_{i=1}^n n - \sum_{i=1}^n 1 =
 \end{aligned}$$

Cartagena99

CLASES PARTICULARES TUTORÍAS
 LLAMA O ENVIA WHATSAPP. 689 45 44 70
 ONLINE PRIVATE LESSONS FOR SC
 CALL OR WHATSAPP. 689 45 44 70

Series útiles

- Pasando la serie deseada al lado izquierdo:

$$3S = \frac{(2n+3)n(n+1)}{2} - n^2 - n$$

$$S = \frac{n(2n^2 + 3n + 1)}{6} = \frac{n \cdot 2(n + \frac{1}{2})(n + 1)}{6}$$

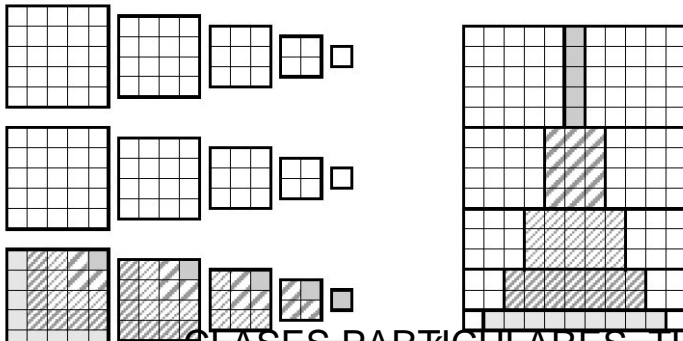
$$S = \frac{n(2n+1)(n+1)}{6}$$

Cartagena99

CLASES PARTICULARES TUTORÍAS
LLAMA O ENVÍA WHATSAPP. 689 45 44 70
ONLINE PRIVATE LESSONS FOR SC
CALL OR WHATSAPP. 689 45 44 70

Series útiles

- Demostración visual:

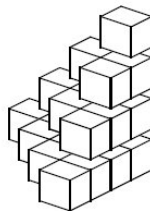
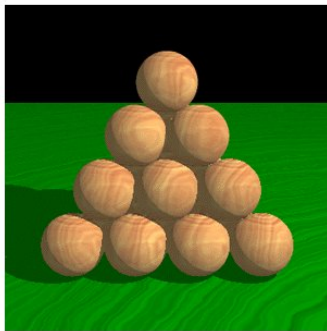
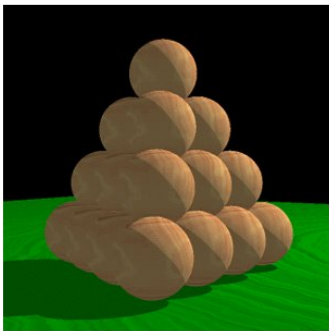


Cartagena99

CLASES PARTICULARES TUTORÍAS
 LLAMA O ENVÍA WHATSAPP. 689 45
 ONLINE PRIVATE LESSONS FOR SC
 CALL OR WHATSAPP. 689 45 44 70

Ejercicio

- Contar el número de bolas para una pirámide de altura n



Cartagena99

CLASES PARTICULARES, TUTORÍAS
LLAMA O ENVÍA WHATSAPP. 689 45 44 70
ONLINE PRIVATE LESSONS FOR SCIENCE
CALL OR WHATSAPP. 689 45 44 70

Solución

- Agrupando los términos en cada paréntesis:

$$S = \sum_{i=1}^n \frac{i(i+1)}{2} = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^n i^2 + \frac{1}{2} \sum_{i=1}^n i$$

- Agrupando según el número de veces que se suma un determinado entero:

$$S = \sum_{i=1}^n i(n-i+1) = n \sum_{i=1}^n i - \sum_{i=1}^n i^2 + \sum_{i=1}^n i$$

- La solución es:

Cartagena99

CLASES PARTICULARES TUTORÍAS
 LLAMA O ENVÍA WHATSAPP. 689 45 44 70
 ONLINE PRIVATE LESSONS FOR SC
 CALL OR WHATSAPP. 689 45 44 70

Series útiles

$$\sum_{i=1}^n i^3 = \left(\sum_{i=1}^n i \right)^2 = \left(\frac{n(n+1)}{2} \right)^2$$

- Se puede ver gracias a:

$$1^2 = 1^3$$

$$3^2 = 1^3 + 2^3$$

$$6^2 = 1^3 + 2^3 + 3^3$$

$$10^2 = 1^3 + 2^3 + 3^3 + 4^3$$

Cartagena99

CLASES PARTICULARES TUTORÍAS
 LLAMA O ENVÍA WHATSAPP. 689 45 44 70
 ONLINE PRIVATE LESSONS FOR SC
 CALL OR WHATSAPP. 689 45 44 70