

## TEMA 4 DETERMINANTES

### 4.0 DETERMINANTES

Por falta de tiempo solo se desarrollara de forma intuitiva

#### CONCEPTOS NECESARIOS:

$$S = \{1, \dots, n\}; \quad S_n = \{\sigma : S \rightarrow S / \sigma \text{ biyectiva}\}$$

$(S_n, \circ)$  grupo de las permutaciones (o sustituciones) de orden  $n$ ,  $\text{ord}S_n = n!$

Notación:  $\sigma = \begin{pmatrix} a_{i_1} & a_{i_2} & a_{i_3} & \dots & a_{i_n} \\ a_1 & a_2 & a_3 & \dots & a_n \end{pmatrix}$ , donde  $\begin{cases} \sigma(a_k) = a_{i_k}, k = 1, \dots, n \\ \{i_1, \dots, i_n\} = \{1, \dots, n\} \end{cases}$

Ejemplo:  $\sigma = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 3 \\ 1 & 2 & 3 \end{pmatrix}$

**Nº DE INVERSIONES DE UNA SUSTIUCIÓN:** Sean  $S = \{1, \dots, n\}$  y  $\sigma \in S_n$ .

$\sigma$  proporciona una **nueva ordenación** para los elementos de  $S$

$$\sigma = \begin{pmatrix} \sigma(1) & \sigma(2) & \sigma(3) & \dots & \sigma(i) & \dots & \sigma(j) & \dots & \sigma(n) \\ 1 & 2 & 3 & \dots & i & \dots & j & \dots & n \end{pmatrix}$$

$\sigma(i)$  y  $\sigma(j)$  forman una **inversión** si siendo  $i < j$  es  $\sigma(i) > \sigma(j)$

$I(\sigma)$  : **nº total de inversiones** que presentan entre si los elementos de una permutación  $\sigma$

Si  $I(\sigma)$  es **par** se dice que  $\sigma$  es **par**

Si  $I(\sigma)$  es **impar** se dice que  $\sigma$  es **impar**

El **nº de permutaciones pares** es igual el **nº de permutaciones impares**

e igual a  $\frac{n!}{2}$

#### SIGNATURA DE UNA SUSTITUCIÓN:

La **signatura** es una aplicación definida de la forma:

$$\begin{aligned} \varepsilon : S_n &\rightarrow \{-1, 1\} \\ \sigma &\rightarrow \epsilon(\sigma) = (-1)^{I(\sigma)} = \begin{cases} 1, & \text{si } \sigma \text{ es par} \\ -1, & \text{si } \sigma \text{ es impar} \end{cases} \end{aligned}$$

**EJEMPLOS:** 1)  $S = \{1, 2\}$ . Obtener:  $S_2$ . 2)  $S = \{1, 2, 3\}$ . Obtener:  $S_3$ .

**DEFINICIÓN:** Sean  $A = (a_{ij}) \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ ;  $S_n$  permutaciones de  $\{1, \dots, n\}$ .

$$\det A = \sum_{\sigma \in S_n} \epsilon(\sigma) a_{1\sigma(1)} a_{2\sigma(2)} \dots a_{n\sigma(n)} = \sum_{\sigma \in S_n} \epsilon(\sigma) a_{\sigma(1)1} a_{\sigma(2)2} \dots a_{\sigma(n)n}$$

Notación:  $\det A = |A| = \begin{vmatrix} a_{11} & \dots & a_{1n} \\ \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & \dots & a_{nn} \end{vmatrix}$

CLASES PARTICULARES, TUTORÍAS TÉCNICAS ONLINE  
LLAMA O ENVÍA WHATSAPP: 689 45 44 70

---

ONLINE PRIVATE LESSONS FOR SCIENCE STUDENTS  
CALL OR WHATSAPP: 689 45 44 70

Cartagena99

## 4.1 DETERMINANTES

**CASOS PARTICULARES:** (Reglas de cálculo en el caso 2x2 y 3x3)

Sea el sistema  $AX = B$ ;  $\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \end{pmatrix}$  con  $A$  invertible

$$\text{Como } \begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 = b_2 \end{cases} \sim \begin{cases} a_{21}a_{11}x_1 + a_{21}a_{12}x_2 = a_{21}b_1 \\ a_{11}a_{21}x_1 + a_{11}a_{22}x_2 = a_{11}b_2 \end{cases} \xrightarrow{E_2 \rightarrow E_2 - E_1}$$

$$\begin{cases} a_{21}a_{11}x_1 + a_{21}a_{12}x_2 = a_{21}b_1 \\ (a_{11}a_{22} - a_{21}a_{12})x_2 = a_{11}b_2 - a_{21}b_1 \end{cases} \Rightarrow x_2 = \frac{a_{11}b_2 - a_{21}b_1}{a_{11}a_{22} - a_{21}a_{12}} = \frac{\begin{vmatrix} a_{11} & b_1 \\ a_{21} & b_2 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix}}$$

$$\text{Analogamente } x_1 = \frac{a_{22}b_1 - a_{12}b_2}{a_{11}a_{22} - a_{21}a_{12}} = \frac{\begin{vmatrix} b_1 & a_{12} \\ b_2 & a_{22} \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix}}$$

### DETERMINANTES DE MATRICES 2x2 Y 3x3

1) **Matrices** (2 x 2)  $A \in \mathcal{M}_2(\mathbb{K})$   $\det A = a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}$

$$\begin{matrix} + & - \\ \begin{pmatrix} \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot \end{pmatrix} \\ - & + \end{matrix}$$

2) **Matrices** (3 x 3)  $A \in \mathcal{M}_3(\mathbb{K})$  **Regla de Sarrus**

$$\det A = a_{11}a_{22}a_{33} + a_{12}a_{23}a_{31} + a_{13}a_{21}a_{32} - a_{11}a_{23}a_{32} - a_{12}a_{21}a_{33} - a_{13}a_{22}a_{31}$$

$$\begin{matrix} (+) & & (-) \\ \begin{pmatrix} \boxed{\cdot} & \cdot & \cdot \\ \cdot & \boxed{\cdot} & \cdot \\ \cdot & \cdot & \boxed{\cdot} \end{pmatrix} & & \begin{pmatrix} \cdot & \cdot & \boxed{\cdot} \\ \cdot & \boxed{\cdot} & \cdot \\ \boxed{\cdot} & \cdot & \cdot \end{pmatrix} \end{matrix}$$

$$\begin{matrix} \boxed{a_{11}} & \boxed{a_{12}} & \boxed{a_{13}} & | & a_{11} & a_{12} & a_{13} & | & \boxed{a_{11}} & \boxed{a_{12}} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & | & a_{21} & a_{22} & a_{23} & | & a_{21} & a_{22} \end{matrix}$$

CLASES PARTICULARES, TUTORÍAS TÉCNICAS ONLINE  
LLAMA O ENVÍA WHATSAPP: 689 45 44 70

---

ONLINE PRIVATE LESSONS FOR SCIENCE STUDENTS  
CALL OR WHATSAPP: 689 45 44 70

Cartagena99

## DESARROLLO DE UN DETERMINANTE POR LOS ELEMENTOS DE UNA LINEA.

**DEFINICIÓN:** Sea  $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$

**Menor complementario del elemento  $a_{ij}$  ( $M_{ij}$ ) de  $A$ ,** es el determinante de la matriz de orden  $n - 1$  que se obtiene suprimiendo la fila  $i$ -ésima y la columna  $j$ -ésima de la matriz  $A$ .

**Adjunto de  $a_{ij}$  :**  $A_{ij} = (-1)^{i+j} M_{ij}$

**EJEMPLO:**

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 3 & 1 \\ 4 & 3 & 2 \\ 1 & 1 & 3 \end{pmatrix} \quad M_{12} = \begin{vmatrix} 4 & 2 \\ 1 & 3 \end{vmatrix} = 10 \quad A_{12} = (-1)^{1+2} M_{12} = -10$$

**PROPOSICIÓN:** Sea  $A = (a_{ij}) \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$

**Desarrollo por los elementos de la columna  $j$ -ésima :**

$$\det(A) = a_{1j}A_{1j} + a_{2j}A_{2j} + \dots + a_{nj}A_{nj} = \sum_{k=1}^n a_{kj}A_{kj}$$

**Desarrollo por los elementos de la fila  $i$ -ésima :**

$$\det(A) = a_{i1}A_{i1} + a_{i2}A_{i2} + \dots + a_{in}A_{in} = \sum_{k=1}^n a_{ik}A_{ik}$$

**EJEMPLO 1:** 1) Calcular los determinantes: Hoja 4.1

$$\begin{array}{l} 1\_v) \\ .. \\ .. \\ .. \end{array} \begin{vmatrix} 2 & 1 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 1 \\ 2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 1 \end{vmatrix} \quad \begin{array}{l} 1\_vi) \\ .. \\ .. \\ .. \end{array} \begin{vmatrix} 1 & 2 & 5 & 7 \\ 4 & -1 & 3 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & -3 \\ -1 & 2 & 7 & 5 \end{vmatrix} \quad \begin{array}{l} 1\_vii) \\ .. \\ .. \\ .. \end{array} \begin{vmatrix} 2 & 1 & -1 & 7 \\ 1 & -2 & 1 & 1 \\ -6 & -3 & -6 & -3 \\ 3 & 7 & 2 & 1 \end{vmatrix}$$

**EJEMPLO 2:** Calcular

$$2A) \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ 0 & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & a_{mn} \end{vmatrix}, \quad 2B) \begin{vmatrix} 2 & 1 & -1 & 7 \\ 0 & -2 & 1 & 1 \\ 1 & 3 & 0 & 1 \\ 1 & 7 & 2 & 1 \end{vmatrix}$$



CLASES PARTICULARES, TUTORÍAS TÉCNICAS ONLINE  
LLAMA O ENVÍA WHATSAPP: 689 45 44 70

---

ONLINE PRIVATE LESSONS FOR SCIENCE STUDENTS  
CALL OR WHATSAPP:689 45 44 70

Problema 1v) de la hoja de problemas 4.1

$$1v) \begin{vmatrix} 2 & 1 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 1 \\ 2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 1 \end{vmatrix} = 1$$

$$\begin{vmatrix} 2 & 1 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 1 \\ 2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 1 \end{vmatrix} = (-1)(-1)^{1+3} \begin{vmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 2 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 1 \end{vmatrix} + (1)(-1)^{2+3} \begin{vmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 2 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 1 \end{vmatrix} +$$

$$+ (0) \times (-1)^{3+3} \begin{vmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 1 \end{vmatrix} + (0) \times (-1)^{4+3} \begin{vmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 2 & 1 & 0 \end{vmatrix}$$

$$= - \begin{vmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 2 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 1 \end{vmatrix} - \begin{vmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 2 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 1 \end{vmatrix} =$$

$$= - \left[ (0) \times (-1)^{1+2} \begin{vmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} + (1) \times (-1)^{2+2} \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} + (-1) \times (-1)^{3+2} \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 0 \end{vmatrix} \right]$$

$$- \left[ (0) \times (-1)^{1+3} \begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 0 & -1 \end{vmatrix} + (0) \times (-1)^{2+3} \begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 0 & -1 \end{vmatrix} + (1) \times (-1)^{3+3} \begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 2 & 1 \end{vmatrix} \right]$$

$$= -[0 + 1 + (-2)] - [0 + 0 + 0] = 1$$

4

Cartagena99

CLASES PARTICULARES, TUTORÍAS TÉCNICAS ONLINE  
LLAMA O ENVÍA WHATSAPP: 689 45 44 70

---

ONLINE PRIVATE LESSONS FOR SCIENCE STUDENTS  
CALL OR WHATSAPP:689 45 44 70

**EJEMPLO 2:** Calcular

$$2A) \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ 0 & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & a_{nn} \end{vmatrix} = D_n$$

Por inducción

$$D_2 = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ 0 & a_{22} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22},$$

$$D_3 = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ 0 & a_{22} & a_{23} \\ \boxed{0} & \boxed{0} & \boxed{a_{33}} \end{vmatrix} = (-1)^{3+3} a_{33} \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ 0 & a_{22} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22}a_{33}$$

Supongamos se cumple

$$D_{n-1} = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n-1} \\ 0 & a_{22} & \dots & a_{2n-1} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & a_{(n-1)(n-1)} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22}a_{33}\dots a_{(n-1)(n-1)}$$

Entonces

$$D_n = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n-1} & a_{1n} \\ 0 & a_{22} & \dots & a_{2n-1} & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & a_{(n-1)(n-1)} & a_{(n-1)n} \\ \boxed{0} & \boxed{0} & \dots & \boxed{0} & \boxed{a_{nn}} \end{vmatrix} = a_{nn} \times \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n-1} \\ 0 & a_{22} & \dots & a_{2n-1} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & a_{(n-1)(n-1)} \end{vmatrix}$$

$$= a_{nn} \times (a_{11}a_{22}a_{33}\dots a_{(n-1)(n-1)}) = a_{11}a_{22}a_{33}\dots a_{(n-1)(n-1)}a_{nn}$$

5



CLASES PARTICULARES, TUTORÍAS TÉCNICAS ONLINE  
LLAMA O ENVÍA WHATSAPP: 689 45 44 70

---

ONLINE PRIVATE LESSONS FOR SCIENCE STUDENTS  
CALL OR WHATSAPP:689 45 44 70

$$2B) \begin{vmatrix} 2 & 1 & -1 & 7 \\ 0 & -2 & 1 & 1 \\ 1 & 3 & 0 & 1 \\ 1 & 7 & 2 & 1 \end{vmatrix}, \text{determinant: } \begin{vmatrix} 2 & 1 & -1 & 7 \\ 0 & -2 & 1 & 1 \\ 1 & 3 & 0 & 1 \\ 1 & 7 & 2 & 1 \end{vmatrix} = -34$$

$$\begin{aligned} & \begin{vmatrix} 2 & 1 & -1 & 7 \\ 0 & -2 & 1 & 1 \\ 1 & 3 & 0 & 1 \\ 1 & 7 & 2 & 1 \end{vmatrix} = (0) \times (-1)^{2+1} \times \begin{vmatrix} 1 & -1 & 7 \\ 3 & 0 & 1 \\ 7 & 2 & 1 \end{vmatrix} + (-2) \times (-1)^{2+2} \times \begin{vmatrix} 2 & -1 & 7 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \end{vmatrix} + \\ & + (1) \times (-1)^{2+3} \times \begin{vmatrix} 2 & 1 & 7 \\ 1 & 3 & 1 \\ 1 & 7 & 1 \end{vmatrix} + (1) \times (-1)^{2+4} \times \begin{vmatrix} 2 & 1 & -1 \\ 1 & 3 & 0 \\ 1 & 7 & 2 \end{vmatrix} = \\ & = \overbrace{0} - 2 \left[ (-1) \times (-1)^{2+1} \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} + (0) \times (-1)^{2+2} \begin{vmatrix} 2 & 7 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} + (2) \times (-1)^{3+2} \begin{vmatrix} 2 & 7 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} \right] + \\ & - \left[ (2) \times (-1)^{1+1} \times \begin{vmatrix} 3 & 1 \\ 7 & 1 \end{vmatrix} + (1) \times (-1)^{2+1} \times \begin{vmatrix} 1 & 7 \\ 7 & 1 \end{vmatrix} + (1) \times (-1)^{3+1} \times \begin{vmatrix} 1 & 7 \\ 3 & 1 \end{vmatrix} \right] \\ & + \left[ (-1) \times (-1)^{1+3} \times \begin{vmatrix} 1 & 3 \\ 1 & 7 \end{vmatrix} + (0) \times (-1)^{2+3} \times \begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 7 \end{vmatrix} + (2) \times (-1)^{3+3} \times \begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 3 \end{vmatrix} \right] = \\ & = -\overbrace{0} - 2 \times (0 + 0 + 10) - (2 \times (-4) - (-48) + (-20)) + ((-1) \times 4 + 0 + 2 \times 5) = \\ & = +0 - 20 - 20 + 6 = -34 \end{aligned}$$

6



**CLASES PARTICULARES, TUTORÍAS TÉCNICAS ONLINE  
LLAMA O ENVÍA WHATSAPP: 689 45 44 70**

---

**ONLINE PRIVATE LESSONS FOR SCIENCE STUDENTS  
CALL OR WHATSAPP:689 45 44 70**

**PROPIEDADES:**  $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$

1)  $\det A = \det A^T$

Ejemplo: 
$$\begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 4 & 5 \end{vmatrix} = 10 - 12 = -2 = \begin{vmatrix} 2 & 4 \\ 3 & 5 \end{vmatrix}$$

2) Si  $A'$  se obtiene a partir de  $A$  permutando dos líneas entre sí:  $\det A' = -\det A$

Ejemplo: 
$$\begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 4 & 5 \end{vmatrix} = -2 = (-1) \times \begin{vmatrix} 4 & 5 \\ 2 & 3 \end{vmatrix}$$

3) (análogamente para filas)

$$\begin{vmatrix} a_{11} & \dots & a_{1i-1} & \mathbf{b_{1i}+c_{1i}} & a_{1i+1} & \dots & a_{1n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & \dots & a_{ni-1} & \mathbf{b_{ni}+c_{ni}} & a_{ni+1} & \dots & a_{nn} \end{vmatrix} =$$
$$= \begin{vmatrix} a_{11} & \dots & a_{1i-1} & \mathbf{b_{1i}} & a_{1i+1} & \dots & a_{1n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & \dots & a_{ni-1} & \mathbf{b_{ni}} & a_{ni+1} & \dots & a_{nn} \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} a_{11} & \dots & a_{1i-1} & \mathbf{c_{1i}} & a_{1i+1} & \dots & a_{1n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & \dots & a_{ni-1} & \mathbf{c_{ni}} & a_{ni+1} & \dots & a_{nn} \end{vmatrix}$$

Ejemplo: 
$$\begin{vmatrix} 2+6 & 3 \\ 4-2 & 5 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 8 & 3 \\ 2 & 5 \end{vmatrix} = 34 = \begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 4 & 5 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} 6 & 3 \\ -2 & 5 \end{vmatrix} = -2 + 36$$

Ejemplo: 
$$\begin{vmatrix} 2-3 & 3+4 \\ 4 & 5 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} -1 & 7 \\ 4 & 5 \end{vmatrix} = -33 = \begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 4 & 5 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} -3 & 4 \\ 4 & 5 \end{vmatrix} = -2 - 31$$

4) (análogamente para filas)

$$\begin{vmatrix} a_{11} & \dots & a_{1i-1} & \mathbf{\lambda a_{1i}} & a_{1i+1} & \dots & a_{1n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & \dots & a_{ni-1} & \mathbf{\lambda a_{ni}} & a_{ni+1} & \dots & a_{nn} \end{vmatrix} = \lambda \begin{vmatrix} a_{11} & \dots & a_{1i-1} & \mathbf{a_{1i}} & a_{1i+1} & \dots & a_{1n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & \dots & a_{ni-1} & \mathbf{a_{ni}} & a_{ni+1} & \dots & a_{nn} \end{vmatrix}$$

Ejemplo: 
$$\begin{vmatrix} 2 \times 3 & 3 \\ 4 \times 3 & 5 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 6 & 3 \\ 12 & 5 \end{vmatrix} = -6 = 3 \times \begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 4 & 5 \end{vmatrix} = 3 \times (10 - 12)$$

Ejemplo: 
$$\begin{vmatrix} 2 \times 4 & 3 \times 4 \\ 4 & 5 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 8 & 12 \\ 4 & 5 \end{vmatrix} = -8 = 4 \times \begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 4 & 5 \end{vmatrix} = 4 \times (-2)$$

CLASES PARTICULARES, TUTORÍAS TÉCNICAS ONLINE  
LLAMA O ENVÍA WHATSAPP: 689 45 44 70

---

ONLINE PRIVATE LESSONS FOR SCIENCE STUDENTS  
CALL OR WHATSAPP:689 45 44 70

Cartagena99

5)  $\det A = 0 \Leftrightarrow$  sus filas (ó columnas) constituyen un sistema de vectores l.d.

$$\text{Por tanto : } \begin{vmatrix} 0 & \dots & 0 & \dots & 0 \\ a_{21} & \dots & a_{2i} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & \dots & a_{ni} & \dots & a_{nn} \end{vmatrix} = 0; \quad \begin{vmatrix} a_{11} & \dots & a_{i1} & \dots & a_{1n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{11} & \dots & a_{i1} & \dots & a_{1n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & \dots & a_{i1} & \dots & a_{nn} \end{vmatrix} = 0;$$

$$\begin{vmatrix} a_{11} & \dots & a_{1i} & \dots & a_{1n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n-11} & \dots & a_{n-1i} & \dots & a_{n-1n} \\ \lambda_1 a_{11} + \dots + \lambda_{n-1} a_{n-11} & \dots & \lambda_1 a_{1i} + \dots + \lambda_{n-1} a_{n-1i} & \dots & \lambda_1 a_{1n} + \dots + \lambda_{n-1} a_{n-1n} \end{vmatrix} = 0$$

EJEMPLOS :  $\begin{vmatrix} 0 & 0 \\ 4 & 5 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 2 & 0 \\ 4 & 0 \end{vmatrix} = 0, \quad \begin{vmatrix} 4 & 5 \\ 4 & 5 \end{vmatrix} = 0,$

$$= -2 = \begin{vmatrix} 2+4 & 3+5 \\ 4 & 5 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 4 & 5 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} 4 & 5 \\ 4 & 5 \end{vmatrix} = -2 + 0$$

6) Si  $A'$  se obtiene a partir  $A$  sumando a una linea una combinación lineal del resto se tiene:  $\det A' = \det A$

EJEMPLO:  $\begin{vmatrix} 2 & 3 & 4 \\ 4 & 5 & 6 \\ 1 & 1 & 3 \end{vmatrix} = -4$

$$\begin{vmatrix} 2+2 \times 3 - 4 & 3 & 4 \\ 4+2 \times 5 - 6 & 5 & 6 \\ 1+2 \times 1 - 3 & 1 & 3 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 2 & 3 & 4 \\ 4 & 5 & 6 \\ 1 & 1 & 3 \end{vmatrix} + 2 \times \begin{vmatrix} 3 & 3 & 4 \\ 5 & 5 & 6 \\ 1 & 1 & 3 \end{vmatrix} + (-1) \times \begin{vmatrix} 4 & 3 & 4 \\ 6 & 5 & 6 \\ 3 & 1 & 3 \end{vmatrix}$$

$$= -4 + 2 \times 0 + (-1) \times 0 = -4$$



CLASES PARTICULARES, TUTORÍAS TÉCNICAS ONLINE  
LLAMA O ENVÍA WHATSAPP: 689 45 44 70

---

ONLINE PRIVATE LESSONS FOR SCIENCE STUDENTS  
CALL OR WHATSAPP:689 45 44 70

**CONSECUENCIA:**  $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$

1)  $\det(\lambda A) = \lambda^n \det(A)$

EJEMPLO:  $\begin{pmatrix} 2 \times 3 & 3 \times 3 \\ 4 \times 3 & 5 \times 3 \end{pmatrix} = 3 \times \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 4 & 5 \end{pmatrix}$

$$\begin{vmatrix} 2 \times 3 & 3 \times 3 \\ 4 \times 3 & 5 \times 3 \end{vmatrix} = -18 = 3^2 \times \begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 4 & 5 \end{vmatrix}$$

$$\begin{vmatrix} 2 \times 3 & 3 \times 3 \\ 4 \times 3 & 5 \times 3 \end{vmatrix} = 3 \times \begin{vmatrix} 2 & 3 \times 3 \\ 4 & 5 \times 3 \end{vmatrix} = 3 \times 3 \times \begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 4 & 5 \end{vmatrix} = 3^2 \times \begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 4 & 5 \end{vmatrix}$$

2)  $\det(-A) = (-1)^n \det(A)$

EJEMPLO:  $\begin{pmatrix} -2 & -3 \\ -4 & -5 \end{pmatrix} = (-1) \times \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 4 & 5 \end{pmatrix}$

$$\begin{vmatrix} -2 & -3 \\ -4 & -5 \end{vmatrix} = (-1)^2 \times \begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 4 & 5 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 4 & 5 \end{vmatrix}$$

$\begin{pmatrix} -2 & -3 & -4 \\ -4 & -5 & -6 \\ -1 & -1 & -3 \end{pmatrix} = (-1) \times \begin{pmatrix} 2 & 3 & 4 \\ 4 & 5 & 6 \\ 1 & 1 & 3 \end{pmatrix}$

$$\begin{vmatrix} -2 & -3 & -4 \\ -4 & -5 & -6 \\ -1 & -1 & -3 \end{vmatrix} = (-1) \times \begin{vmatrix} 2 & 3 & 4 \\ -4 & -5 & -6 \\ -1 & -1 & -3 \end{vmatrix} = (-1) \times (-1) \times \begin{vmatrix} 2 & 3 & 4 \\ 4 & 5 & 6 \\ -1 & -1 & -3 \end{vmatrix}$$

$$= (-1)^3 \times \begin{vmatrix} 2 & 3 & 4 \\ 4 & 5 & 6 \\ 1 & 1 & 3 \end{vmatrix} = (-1) \begin{vmatrix} 2 & 3 & 4 \\ 4 & 5 & 6 \\ 1 & 1 & 3 \end{vmatrix}$$

3)  $\det(AB) = \det(A) \det(B)$

EJEMPLO:

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 4 & 5 \end{pmatrix}; B = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 3 & -2 \end{pmatrix}; A \times B = \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 4 & 5 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 3 & -2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 11 & 0 \\ 19 & 2 \end{pmatrix}$$

**CLASES PARTICULARES, TUTORÍAS TÉCNICAS ONLINE  
LLAMA O ENVÍA WHATSAPP: 689 45 44 70**

---

**ONLINE PRIVATE LESSONS FOR SCIENCE STUDENTS  
CALL OR WHATSAPP:689 45 44 70**

Cartagena99

4)  $\det(A) \neq 0 \Leftrightarrow$  sus filas (columnas) constituyen un sistema de vectores l.i.  $\Leftrightarrow$   
 $\Leftrightarrow \text{rang}A = n \Leftrightarrow A$  es regular

EJEMPLO :

$$\begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 6 & 9 \end{vmatrix} = 0, \text{ observemos que en las filas } F_2 = 3F_1$$

En el e.v. el conjunto de vectores  $\{(2,3), (6,9)\}$  es l.d.

EJEMPLO :

$$\begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 6 & 4 \end{vmatrix} = -10 \neq 0,$$

observemos que las filas  $F_1$  y  $F_2$  una no es c.l. una de otra

En el e.v. el conjunto de vectores  $\{(2,3), (6,4)\}$  es l.i.

EJEMPLO :

$$\begin{vmatrix} 2 & 8 \\ 3 & 12 \end{vmatrix} = 0, \text{ observemos que en las columnas } C_2 = 4C_1$$

En el e.v. el conjunto de vectores  $\{(2,3), (8,12)\}$  es l.d.

EJEMPLO :

$$\begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 3 & 12 \end{vmatrix} = 21 \neq 0,$$

observemos que las columnas  $C_1$  y  $C_2$  una no es c.l. una de otra

En el e.v. el conjunto de vectores  $\{(2,3), (1,12)\}$  es l.i.

**EJEMPLO 2:** Calcular

$$\begin{aligned} 2) \quad & \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ 0 & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & a_{nn} \end{vmatrix} = a_{11} \begin{vmatrix} 1 & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ 0 & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & a_{nn} \end{vmatrix} = a_{11} \begin{vmatrix} a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots \\ 0 & \dots & a_{nn} \end{vmatrix} \\ & = a_{11} a_{22} \begin{vmatrix} 1 & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots \\ 0 & \dots & a_{nn} \end{vmatrix} = \dots = a_{11} a_{22} \dots a_{(n-2)(n-2)} \begin{vmatrix} a_{(n-1)n} & a_{(n-1)n} \\ 0 & a_{nn} \end{vmatrix} \\ & = a_{11} a_{22} \dots a_{(n-2)(n-2)} a_{(n-1)n} a_{nn} \end{aligned}$$

CLASES PARTICULARES, TUTORÍAS TÉCNICAS ONLINE  
 LLAMA O ENVÍA WHATSAPP: 689 45 44 70

---

ONLINE PRIVATE LESSONS FOR SCIENCE STUDENTS  
 CALL OR WHATSAPP: 689 45 44 70





**4.2****APLICACIONES****4.2.1 MATRIZ INVERSA DE UNA MATRIZ REGULAR**

**PROPOSICIÓN:** Sea  $A \in \mathcal{M}_n(\mathbf{K})$

$A$  regular  $\Leftrightarrow \det A \neq 0$

En ese caso :

$$A^{-1} = \frac{1}{\det A} \begin{pmatrix} A_{11} & A_{12} & A_{13} \\ A_{21} & A_{22} & A_{23} \\ A_{31} & A_{32} & A_{33} \end{pmatrix}^T = \frac{1}{\det A} \begin{pmatrix} A_{11} & A_{21} & \dots & A_{n1} \\ A_{12} & A_{22} & \dots & A_{n2} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ A_{1n} & A_{2n} & \dots & A_{nn} \end{pmatrix}$$

**EJEMPLO:** Obtener  $A^{-1}$ .

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & -1 \end{pmatrix}$$

Obtención del determinante de la matriz  $A$  por el desarrollo de los elementos de la 1ª columna

$$\det A = |A| = \begin{vmatrix} \boxed{1} & -1 & 0 \\ \boxed{-1} & 0 & 1 \\ \boxed{0} & -1 & -1 \end{vmatrix} = (-1)^{1+1} \begin{vmatrix} 0 & 1 \\ -1 & -1 \end{vmatrix} + (-1)^{2+1}(-1) \begin{vmatrix} -1 & 0 \\ -1 & -1 \end{vmatrix} + ((-1)^{2+2} \times 0) = 1 + 1 = 2$$

$$A^{-1} = \frac{1}{\det A} \begin{pmatrix} A_{11} & A_{21} & A_{31} \\ A_{12} & A_{22} & A_{32} \\ A_{13} & A_{23} & A_{33} \end{pmatrix} = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} \begin{vmatrix} 0 & 1 \\ -1 & -1 \end{vmatrix} & - \begin{vmatrix} -1 & 0 \\ -1 & -1 \end{vmatrix} & \begin{vmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} \\ - \begin{vmatrix} -1 & 1 \\ 0 & -1 \end{vmatrix} & \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{vmatrix} & - \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ -1 & 1 \end{vmatrix} \\ \begin{vmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{vmatrix} & - \begin{vmatrix} 1 & -1 \\ 0 & -1 \end{vmatrix} & \begin{vmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 0 \end{vmatrix} \end{pmatrix}$$

$$A^{-1} = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1 & -1 & -1 \\ -1 & -1 & -1 \\ 1 & 1 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \\ -\frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \end{pmatrix}$$

12

**CLASES PARTICULARES, TUTORÍAS TÉCNICAS ONLINE  
LLAMA O ENVÍA WHATSAPP: 689 45 44 70**

---

**ONLINE PRIVATE LESSONS FOR SCIENCE STUDENTS  
CALL OR WHATSAPP:689 45 44 70**

**Cartagena99**

Puede resultar más comodo obtener

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & -1 \end{pmatrix}$$

$$\det A = |A| = \begin{vmatrix} \boxed{1} & -1 & 0 \\ \boxed{-1} & 0 & 1 \\ \boxed{0} & -1 & -1 \end{vmatrix} = (-1)^{1+1} \begin{vmatrix} 0 & 1 \\ -1 & -1 \end{vmatrix} + (-1)^{2+1}(-1) \begin{vmatrix} -1 & 0 \\ -1 & -1 \end{vmatrix} + ((-1)^{2+2} \times 0) = 1 + 1 = 2$$

$$A^{-1} = \frac{1}{\det A} \begin{pmatrix} A_{11} & A_{12} & A_{13} \\ A_{21} & A_{22} & A_{23} \\ A_{31} & A_{32} & A_{33} \end{pmatrix}^T = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} \begin{vmatrix} 0 & 1 \\ -1 & -1 \end{vmatrix} & - \begin{vmatrix} -1 & 1 \\ 0 & -1 \end{vmatrix} & \begin{vmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{vmatrix} \\ - \begin{vmatrix} -1 & 0 \\ -1 & -1 \end{vmatrix} & \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{vmatrix} & - \begin{vmatrix} 1 & -1 \\ 0 & -1 \end{vmatrix} \\ \begin{vmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} & - \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ -1 & 1 \end{vmatrix} & \begin{vmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 0 \end{vmatrix} \end{pmatrix}^T$$

$$= \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ -1 & -1 & 1 \\ -1 & -1 & -1 \end{pmatrix}^T = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \\ -\frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \end{pmatrix}$$

13



CLASES PARTICULARES, TUTORÍAS TÉCNICAS ONLINE  
LLAMA O ENVÍA WHATSAPP: 689 45 44 70

---

ONLINE PRIVATE LESSONS FOR SCIENCE STUDENTS  
CALL OR WHATSAPP:689 45 44 70

#### 4.2.2| RANGO DE UNA MATRIZ

**DEFINICIÓN: Menor de una matriz**  $A \in \mathcal{M}_{m \times n}$

son los determinantes de sus submatrices cuadradas.

EJEMPLO  $A_1 = \begin{pmatrix} \boxed{3} & 2 & 1 \\ 6 & 4 & 2 \end{pmatrix}$ ;  $A_1 = \begin{pmatrix} \boxed{3} & \boxed{2} & 1 \\ \boxed{6} & \boxed{4} & 2 \end{pmatrix}$ ;  $A_1 = \begin{pmatrix} \boxed{3} & 2 & \boxed{1} \\ \boxed{6} & 4 & \boxed{2} \end{pmatrix}$

Son menores de  $A_1$   $\begin{vmatrix} 3 & 2 \\ 6 & 4 \end{vmatrix}$ ;  $\begin{vmatrix} 3 & 1 \\ 6 & 2 \end{vmatrix}$

**EJEMPLOS** Son menores de  $A = \begin{pmatrix} -2 & 1 & 3 & 6 & -2 \\ 1 & -1 & 2 & 4 & -3 \\ -1 & 0 & 5 & 10 & -5 \\ 2 & 1 & 1 & 2 & 0 \end{pmatrix}$

$\begin{vmatrix} -2 & 3 \\ 1 & 2 \end{vmatrix}$ ;  $\begin{vmatrix} -2 & 1 & 6 \\ 1 & -1 & 4 \\ 2 & 1 & 2 \end{vmatrix}$ ;  $\begin{vmatrix} -1 & 2 & -3 \\ 0 & 5 & -5 \\ 1 & 1 & 0 \end{vmatrix}$ ;  $\begin{vmatrix} -2 & 1 & 6 & -2 \\ 1 & -1 & 4 & -3 \\ -1 & 0 & 10 & -5 \\ 2 & 1 & 2 & 0 \end{vmatrix}$

**DEFINICIÓN: Rango de una matriz**  $A \in \mathcal{M}_{m \times n}$

es el mayor de los órdenes de sus menores no nulos.

**EJEMPLOS:** Obtener el rango de las matrices

$A_1 = \begin{pmatrix} \boxed{3} & 2 & 1 \\ 6 & 4 & 2 \end{pmatrix}$ ;  $A_1 = \begin{pmatrix} \boxed{3} & \boxed{2} & 1 \\ \boxed{6} & \boxed{4} & 2 \end{pmatrix}$ ;  $A_1 = \begin{pmatrix} \boxed{3} & 2 & \boxed{1} \\ \boxed{6} & 4 & \boxed{2} \end{pmatrix}$

$M_{11} = 3$ ;  $\begin{vmatrix} 3 & 2 \\ 6 & 4 \end{vmatrix} = 0$ ;  $\begin{vmatrix} 3 & 1 \\ 6 & 2 \end{vmatrix} = 0$  Por tanto  $rgA_1 = 1$

$rgA_1 = rg \begin{pmatrix} 3 & 2 & 1 \\ 6 & 4 & 2 \end{pmatrix} = rg \begin{pmatrix} 3 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = 1$

$A_2 = \begin{pmatrix} \boxed{3} & 2 & 1 \\ 6 & 4 & 1 \end{pmatrix}$ ;  $A_2 = \begin{pmatrix} \boxed{3} & \boxed{2} & 1 \\ \boxed{6} & \boxed{4} & 1 \end{pmatrix}$ ;  $A_2 = \begin{pmatrix} \boxed{3} & 2 & \boxed{1} \\ \boxed{6} & 4 & \boxed{1} \end{pmatrix}$

$M_{11} = 3$ ;  $\begin{vmatrix} 3 & 2 \\ 6 & 4 \end{vmatrix} = 0$ ;  $\begin{vmatrix} 3 & 1 \\ 6 & 1 \end{vmatrix} = -3 \neq 0$  Por tanto  $rgA_2 = 2$

CLASES PARTICULARES, TUTORÍAS TÉCNICAS ONLINE  
LLAMA O ENVÍA WHATSAPP: 689 45 44 70

---

ONLINE PRIVATE LESSONS FOR SCIENCE STUDENTS  
CALL OR WHATSAPP:689 45 44 70

Cartagena99

### Obtención del rango de una matriz :

Se verifica:

- 1) Si todos los menores de orden  $h$  de una matriz son nulos ,  
lo son también los de orden  $h+1$
- 2) Si en una matriz se suprime una línea combinación lineal de otras  
paralelas se obtiene una matriz del mismo rango que la inicial.

$$\text{EJEMPLO } rgA = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 3 & 6 & -2 \\ 1 & -1 & 2 & 4 & -3 \\ 1 & 3 & 4 & 8 & -1 \\ 1 & -3 & 1 & 2 & -4 \end{pmatrix} \begin{matrix} F_1 \\ F_2 \\ F_3 \\ F_4 \end{matrix}$$

$$a_{11} = 1 \neq 0; \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{vmatrix} = -2 \Rightarrow rgA \geq 2$$

Tode los menoes de orden 3 son nulos

$$\begin{matrix} F_1 \\ F_2 \\ F_3 \end{matrix} \begin{vmatrix} 1 & 1 & 3 \\ 1 & -1 & 2 \\ 1 & 3 & 4 \end{vmatrix} = 0; \begin{vmatrix} 1 & 1 & 6 \\ 1 & -1 & 4 \\ 1 & 3 & 8 \end{vmatrix} = 0; \begin{vmatrix} 1 & 1 & -2 \\ 1 & -1 & -3 \\ 1 & 3 & -1 \end{vmatrix} = 0$$

$$\begin{matrix} F_1 \\ F_2 \\ F_4 \end{matrix} \begin{vmatrix} 1 & 1 & 3 \\ 1 & -1 & 2 \\ 1 & -3 & 1 \end{vmatrix} = 0; \begin{vmatrix} 1 & 1 & 6 \\ 1 & -1 & 4 \\ 1 & -3 & 2 \end{vmatrix} = 0; \begin{vmatrix} 1 & 1 & -2 \\ 1 & -1 & -3 \\ 1 & -3 & -4 \end{vmatrix} = 0$$

Por tanto cualquier menor de orden superior también lo es.

Por tanto  $rgA = 2$

Comprobamos que efectivamente es así

$$\begin{vmatrix} -2 & 1 & 3 & 6 \\ 1 & -1 & 2 & 4 \\ -1 & 0 & 5 & 10 \\ 2 & 1 & 1 & 2 \end{vmatrix} = 0; \begin{vmatrix} 1 & 1 & 3 & -2 \\ 1 & -1 & 2 & -3 \\ 1 & 3 & 4 & -1 \\ 1 & -3 & 1 & -4 \end{vmatrix} = 0$$

$$\text{EJ } rgA = \begin{pmatrix} -2 & 1 & 3 & 6 & -2 \\ 1 & -1 & 2 & 4 & -3 \\ -1 & 0 & 5 & 10 & -5 \\ 2 & 1 & 1 & 2 & 0 \end{pmatrix}; rgA = \dots = rg \begin{pmatrix} -2 & 1 & 3 & 6 & -2 \\ 0 & 2 & 4 & 8 & -2 \\ 0 & 0 & \frac{9}{2} & 9 & -\frac{9}{2} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = 3$$

**CLASES PARTICULARES, TUTORÍAS TÉCNICAS ONLINE  
LLAMA O ENVÍA WHATSAPP: 689 45 44 70**

---

**ONLINE PRIVATE LESSONS FOR SCIENCE STUDENTS  
CALL OR WHATSAPP:689 45 44 70**

**Cartagena99**

### 4.2.3 RESOLUCIÓN DE SISTEMAS DE ECUACIONES LINEALES

#### ( Regla de Cramer )

Un sistema de ecuaciones lineales  $S : \mathbf{AX} = \mathbf{B}$  es de Cramer si:

$\mathbf{A}$  es cuadrada y regular ( $\det(\mathbf{A}) \neq 0$ )

**Regla de Cramer:** Consideremos el siguiente sistema de Cramer:

$$S : \begin{cases} a_{11}x_1 + \dots + a_{1n}x_n = b_1 \\ \dots \dots \dots \dots \dots \dots \dots \\ a_{n1}x_1 + \dots + a_{nn}x_n = b_n \end{cases}$$

Todo sistema de Cramer tiene una única solución

$$x_i = \frac{\begin{vmatrix} a_{11} & \dots & \boxed{b_1} & \dots & a_{1n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & \dots & \boxed{b_n} & \dots & a_{nn} \end{vmatrix}}{\det A}, \quad i = 1, \dots, n$$

**EJEMPLO :** Resolver el sistema:

$$\left. \begin{aligned} 2x + y - 3z &= 1 \\ -x + 5y + z &= 4 \\ 3x - 2y - 4z &= -1 \end{aligned} \right\}$$

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 2 & -3 \\ -1 & 5 & 1 \\ 3 & -2 & -4 \end{pmatrix}; \quad B = \begin{pmatrix} 1 \\ 4 \\ -1 \end{pmatrix}; \quad |A| = \begin{vmatrix} 2 & 2 & -3 \\ -1 & 5 & 1 \\ 3 & -2 & -4 \end{vmatrix} = 1 \neq 0$$

$$x_1 = \frac{\begin{vmatrix} \boxed{1} & 2 & -3 \\ \boxed{4} & 5 & 1 \\ \boxed{-1} & -2 & -4 \end{vmatrix}}{\det A} = 21; \quad x_2 = \frac{\begin{vmatrix} 2 & \boxed{1} & -3 \\ -1 & \boxed{4} & 1 \\ 3 & \boxed{-1} & -4 \end{vmatrix}}{\det A} = 2; \quad x_3 = \frac{\begin{vmatrix} 2 & 2 & \boxed{1} \\ -1 & 5 & \boxed{4} \\ 3 & -2 & \boxed{-1} \end{vmatrix}}{\det A} = 15$$

16



CLASES PARTICULARES, TUTORÍAS TÉCNICAS ONLINE  
LLAMA O ENVÍA WHATSAPP: 689 45 44 70

---

ONLINE PRIVATE LESSONS FOR SCIENCE STUDENTS  
CALL OR WHATSAPP:689 45 44 70

#### 4.2.4 DEPENDENCIA E INDEPENDENCIA LINEAL DE VECTORES

Sea  $\bar{a}_i = (a_{i1}, \dots, a_{in}) \in \mathbb{R}^n$

$$\{\bar{a}_1, \dots, \bar{a}_n\} \text{ son l.d.} \Leftrightarrow \begin{vmatrix} a_{11} & \dots & a_{1n} \\ \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & \dots & a_{nn} \end{vmatrix} = 0$$

**EJEMPLO:** Estudiar la dependencia e independencia lineal de los siguientes sistemas de vectores de  $\mathbb{R}^3$ .

**1)**  $\{(2, 1, 3), (1, 1, 1), (4, 3, 5)\}$  son l.d. **2)**  $\{(2, 1, 3), (1, 1, 1), (4, 2, 5)\}$  son l.i.

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & 1 & 3 \\ 4 & 3 & 5 \end{vmatrix} = 0$$

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & 1 & 3 \\ 4 & 2 & 5 \end{vmatrix} = 1 \neq 0$$

$$F_4 = 2F_1 + F_2$$

#### 4.2.5 OBTENCIÓN DE ECUACIONES IMPLÍCITAS

$\mathcal{U} = \mathcal{L}(\bar{a}, \bar{b})$  ;  $\{\bar{a}, \bar{b}\}$  l.i.  $\mathcal{U} \subset \mathbb{R}^n$

$$\text{Ec. paramétricas de } \mathcal{U} : \begin{cases} x_1 = \lambda a_1 + \mu b_1 \\ \dots \\ x_n = \lambda a_n + \mu b_n \end{cases}$$

$$\bar{x} \in \mathcal{U} \Leftrightarrow \{\bar{x}, \bar{a}, \bar{b}\} \text{ l.d.} \Leftrightarrow \text{rang} \begin{pmatrix} x_1 & a_1 & b_1 \\ x_2 & a_2 & b_2 \\ x_3 & a_3 & b_3 \\ \dots & \dots & \dots \\ x_n & a_n & b_n \end{pmatrix} = 2$$

$\Leftrightarrow$  Todos los menores de orden 3 deben ser nulos, es decir,

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \begin{vmatrix} x_1 & a_1 & b_1 \\ x_2 & a_2 & b_2 \\ x_3 & a_3 & b_3 \end{vmatrix} = 0 \\ \begin{vmatrix} x_1 & a_1 & b_1 \\ x_2 & a_2 & b_2 \\ x_4 & a_4 & b_4 \end{vmatrix} = 0 \\ \dots \end{cases} \quad \text{suponemos } \begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix} \neq 0$$

**CLASES PARTICULARES, TUTORÍAS TÉCNICAS ONLINE  
LLAMA O ENVÍA WHATSAPP: 689 45 44 70**

---

**ONLINE PRIVATE LESSONS FOR SCIENCE STUDENTS  
CALL OR WHATSAPP:689 45 44 70**

**Cartagena99**

**EJEMPLOS:** Obtener unas ecuaciones implícitas de los siguientes s.v. de  $\mathbb{R}^4$

$$1) \mathcal{U} = \mathcal{L} \left( \left\{ \left( \begin{array}{c} 1 \\ -1 \\ 1 \\ 1 \end{array} \right), \left( \begin{array}{c} 1 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{array} \right) \right\} \right), \text{rg} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \\ 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} = 2$$

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 0 \end{vmatrix} = 1 \neq 0 \Rightarrow \text{rg} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 0 \\ 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} = 2$$

$$\text{rg} \begin{pmatrix} x_1 & 1 & 1 \\ x_2 & -1 & 0 \\ x_3 & 1 & 1 \\ x_4 & 1 & 0 \end{pmatrix} = 2 \Rightarrow \begin{cases} \begin{vmatrix} x_1 & 1 & 1 \\ x_2 & -1 & 0 \\ x_3 & 1 & 1 \end{vmatrix} = 0 \\ \begin{vmatrix} x_1 & 1 & 1 \\ x_2 & -1 & 0 \\ x_4 & 1 & 0 \end{vmatrix} = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \begin{vmatrix} x_1 & 1 & 1 \\ x_2 & -1 & 0 \\ x_3 - x_1 & 0 & 0 \end{vmatrix} = 0 \\ \begin{vmatrix} x_1 & 1 & 1 \\ x_2 & -1 & 0 \\ x_4 + x_2 & 0 & 0 \end{vmatrix} = 0 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x_3 - x_1 = 0 \\ x_4 + x_2 = 0 \end{cases} \text{ son unas ecuaciones implícitas de } \mathcal{U}$$



CLASES PARTICULARES, TUTORÍAS TÉCNICAS ONLINE  
LLAMA O ENVÍA WHATSAPP: 689 45 44 70

---

ONLINE PRIVATE LESSONS FOR SCIENCE STUDENTS  
CALL OR WHATSAPP: 689 45 44 70

$$2) \mathcal{V} = \mathcal{L} \left( \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 5 \\ -3 \\ 5 \\ 3 \end{pmatrix} \right\} \right)$$

.....

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 0 \end{vmatrix} = 1 \neq 0 \Rightarrow \text{rg} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 5 \\ -1 & 0 & -3 \\ 1 & 1 & 5 \\ 1 & 0 & 3 \end{pmatrix} \geq 2$$

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 5 \\ -1 & 0 & -3 \\ 1 & 1 & 5 \end{vmatrix} = 0; \text{ y } \begin{vmatrix} 1 & 1 & 5 \\ -1 & 0 & -3 \\ 1 & 0 & 3 \end{vmatrix} = 0$$

De donde se deduce que  $\{\bar{a}_1, \bar{a}_2, \bar{a}_3\}$  l.d.

y  $\bar{a}_3$  es una combinación lineal de  $\{\bar{a}_1, \bar{a}_2\}$  sistema l.i.

Por tanto

$$\mathcal{V} = \mathcal{L} \left( \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 5 \\ -3 \\ 5 \\ 3 \end{pmatrix} \right\} \right) = \mathcal{L} \left( \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \right\} \right)$$

Observamos que  $\{\bar{a}_1, \bar{a}_2\}$  es el mismo sistema de vectores del ejemplo anterior donde se ha obtenido que unas ecuaciones implícitas de  $\mathcal{V}$  son

$$\begin{cases} x_3 - x_1 = 0 \\ x_4 + x_2 = 0 \end{cases}$$

19



**CLASES PARTICULARES, TUTORÍAS TÉCNICAS ONLINE  
LLAMA O ENVÍA WHATSAPP: 689 45 44 70**

---

**ONLINE PRIVATE LESSONS FOR SCIENCE STUDENTS  
CALL OR WHATSAPP:689 45 44 70**

$$3) \mathcal{U} = \mathcal{L} \left\{ \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \right\} \right\}$$

$$\left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \right\} \text{ es l.i.. Observemos que ya est\u00e1n escalonados.}$$

$$\text{Adem\u00e1s } \text{rg} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ -1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} = 3 \text{ y } \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ -1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \end{vmatrix} = -1 \neq 0$$

$$\text{Debe cumplirse } \text{rg} \begin{pmatrix} x_1 & 1 & 1 & 1 \\ x_2 & -1 & 0 & 0 \\ x_3 & 1 & 1 & 0 \\ x_4 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} = 3 \text{ y para ello debe cumplirse}$$

$$\begin{vmatrix} x_1 & 1 & 1 & 1 \\ x_2 & -1 & 0 & 0 \\ x_3 & 1 & 1 & 0 \\ x_4 & 1 & 0 & 0 \end{vmatrix} = 0 \Leftrightarrow \begin{vmatrix} x_1 & 1 & 1 & 1 \\ x_2 & -1 & 0 & 0 \\ x_3 & 1 & 1 & 0 \\ \boxed{x_4+x_2} & 0 & 0 & 0 \end{vmatrix} = 0 \Leftrightarrow (x_4 + x_2) \times \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ -1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \end{vmatrix} = 0$$

$$\Leftrightarrow 3 \times (x_4 + x_2) = 0 \Leftrightarrow x_4 + x_2 = 0 \text{ es la ecuaci\u00f3n buscada}$$

20



**CLASES PARTICULARES, TUTOR\u00cdAS T\u00c9CNICAS ONLINE  
LLAMA O ENV\u00cdA WHATSAPP: 689 45 44 70**

---

**ONLINE PRIVATE LESSONS FOR SCIENCE STUDENTS  
CALL OR WHATSAPP:689 45 44 70**