



Departamento de Ingeniería de Telecomunicación
Teoría de la Señal y Comunicaciones
Universidad de Jaén

TEMA 4

TRANSMISIÓN DIGITAL EN BANDA BASE (II)

Contenidos

1. Probabilidad de error en receptores óptimos para constelaciones banda base **binarias** con símbolos equiprobables
2. **Codificación de línea**

Objetivos específicos

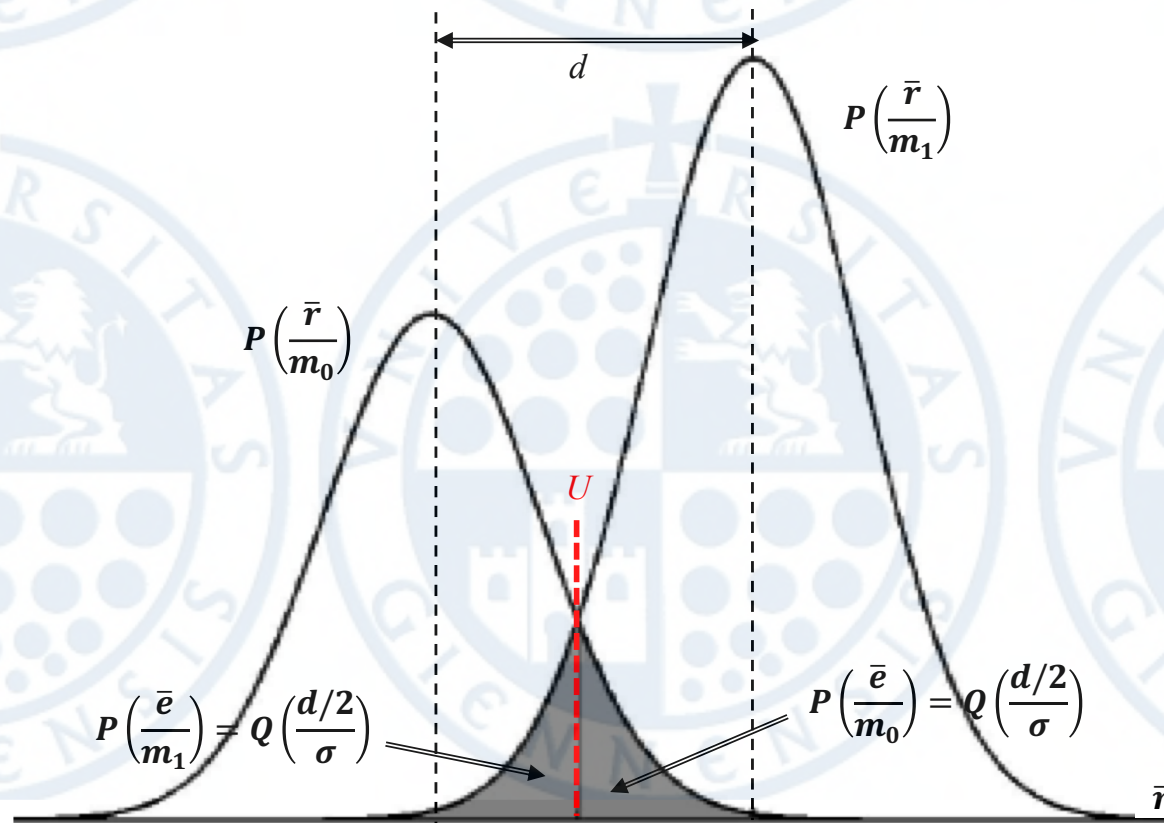
- Probabilidad de error utilizando **receptores óptimos** para constelaciones banda base **binarias** con símbolos **equiprobables**
- Principales técnicas de **codificación de línea**

Probabilidad de error en receptores óptimos para constelaciones binarias banda base con símbolos equiprobables (I)

Debido a que la señal $r(t)$ recibida en el receptor es un proceso gaussiano, el estadístico F será también gaussiano (la integral de un proceso gaussiano es una v.a. gaussiana), con función de densidad de probabilidad gaussiana

- La probabilidad de error P_e para una **constelación binaria** donde los símbolos son **equiprobables** ($p_0 = p_1 = 1/2$),

$$P_e = P_0 P\left(\frac{\bar{e}}{m_0}\right) + P_1 P\left(\frac{\bar{e}}{m_1}\right) = \frac{1}{2} P\left(\frac{\bar{e}}{m_0}\right) + \frac{1}{2} P\left(\frac{\bar{e}}{m_1}\right) = Q\left(\frac{d/2}{\sigma}\right) = Q\left(\frac{d}{\sqrt{2}\eta}\right) = \frac{1}{2} \operatorname{erfc}\left(\frac{d}{2\sqrt{\eta}}\right)$$



Probabilidad de error en receptores óptimos para constelaciones binarias banda base con símbolos equiprobables (II)

A continuación, se introducirán una serie de funciones útiles para el cálculo de la probabilidad de error P_e asociadas a v.a gaussianas de media cero y varianza uno, $N(0,1)$

Función densidad de probabilidad de una v.a. gaussiana $N(0,1)$

$$f_X(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{x^2}{2}}$$

Función de distribución de una v.a

$$F_X(x) = \Pr[X \leq x] = \int_{-\infty}^x f_X(u) du$$

Función $Q(x)$

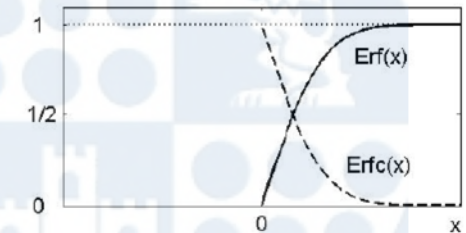
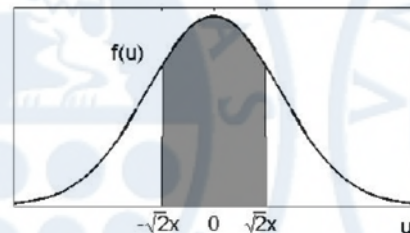
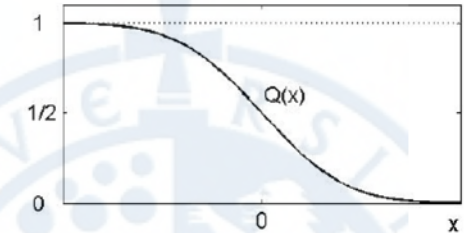
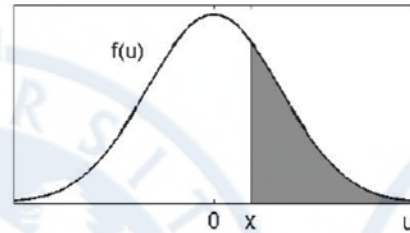
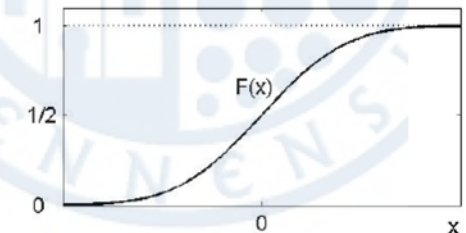
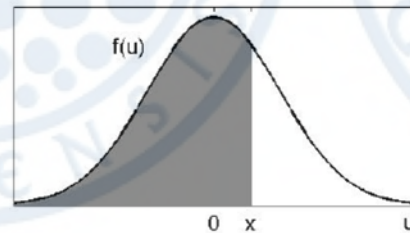
$$Q(x) = 1 - F_X(x) = \Pr[X \geq x] = \int_x^{\infty} f_X(u) du = \int_x^{\infty} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{u^2}{2}} du$$

Función de error $erf(x)$

$$erf\left(\frac{x}{\sqrt{2}}\right) = \int_{-x}^x f_X(u) du$$

Función de error complementario $erfc(x)$

$$erfc\left(\frac{x}{\sqrt{2}}\right) = 1 - erf\left(\frac{x}{\sqrt{2}}\right)$$



$$F(x) = Q(-x)$$

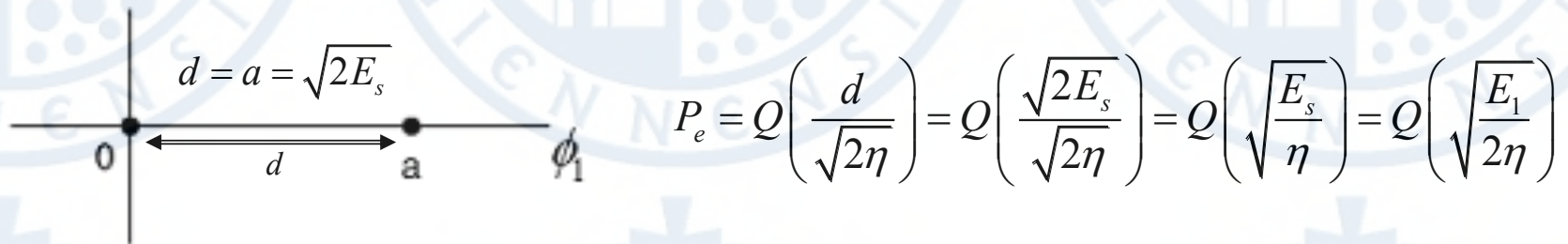
$$Q(x) = \frac{1}{2} erfc\left(\frac{x}{\sqrt{2}}\right)$$

Probabilidad de error en receptores óptimos para constelaciones binarias banda base con símbolos equiprobables (III)

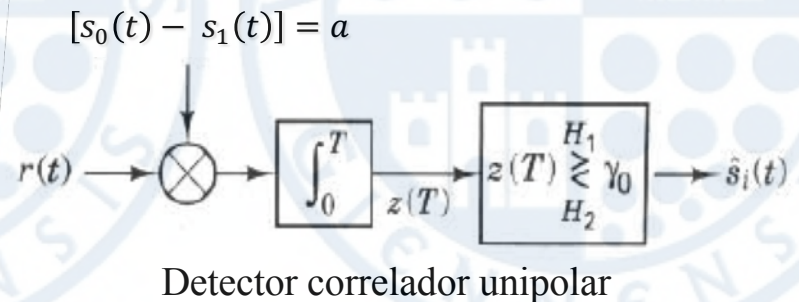
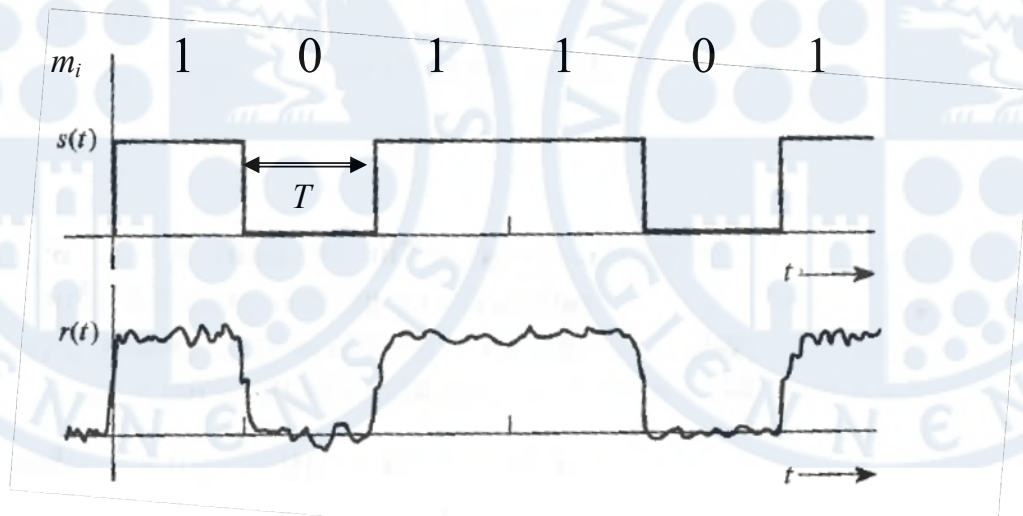
- Señales unipolares

$$s_0(t) = 0 \rightarrow E_0 = 0$$

$$s_1(t) = a \cdot \phi_1(t) \rightarrow E_1 = a^2, \quad E_s = P_0 \cdot E_0 + P_1 \cdot E_1 = \frac{1}{2} E_1 = \frac{1}{2} a^2, \quad a = \sqrt{2E_s} = \sqrt{E_1}$$



$$Q(x) = \frac{1}{2} \operatorname{erfc}\left(\frac{x}{\sqrt{2}}\right), \quad x \geq 0 \Rightarrow P_e = Q\left(\sqrt{\frac{E_s}{\eta}}\right) = \frac{1}{2} \operatorname{erfc}\left(\sqrt{\frac{E_s}{2\eta}}\right)$$



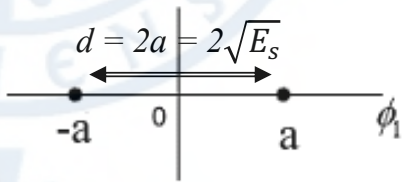
Probabilidad de error en receptores óptimos para constelaciones binarias banda base con símbolos equiprobables (IV)

- **Señales polares**

$$s_0(t) = -a \cdot \phi_1(t) \rightarrow E_0 = a^2$$

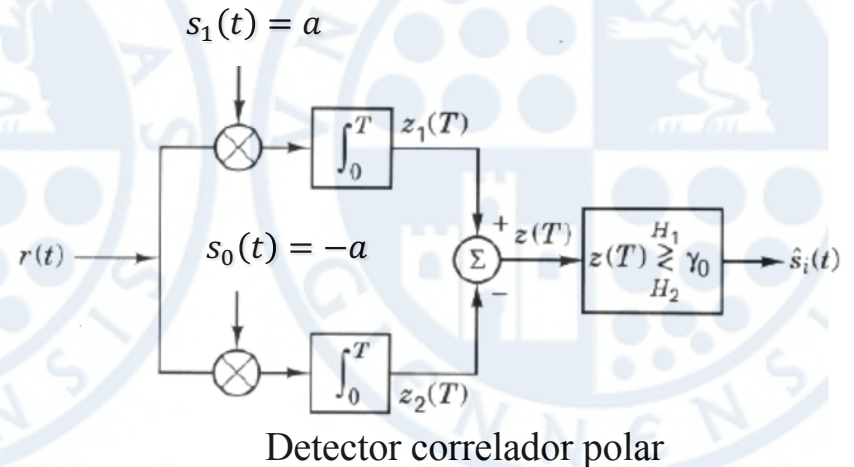
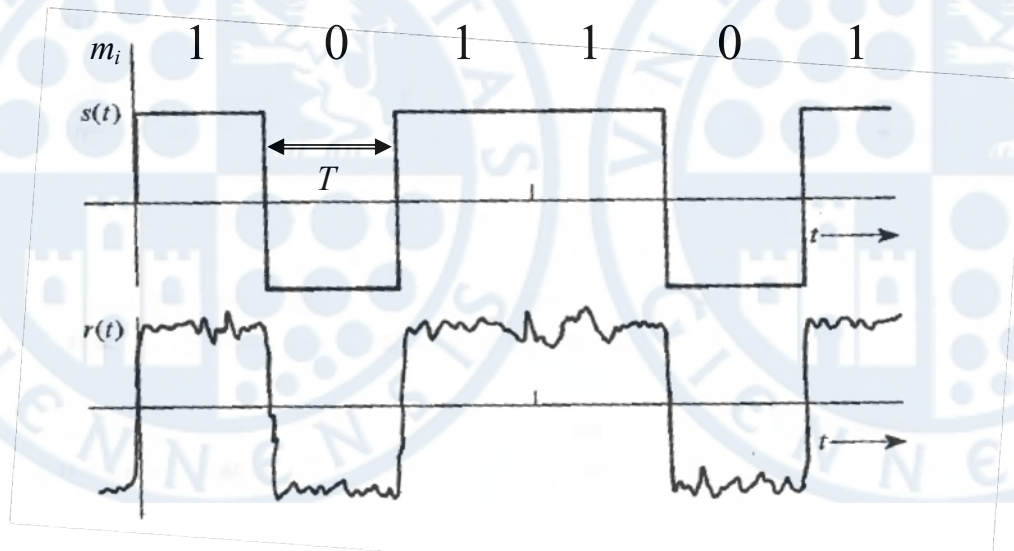
$$s_1(t) = a \cdot \phi_1(t) \rightarrow E_1 = a^2$$

$$E_s = P_0 \cdot E_0 + P_1 \cdot E_1 = \frac{1}{2} E_0 + \frac{1}{2} E_1 = a^2, \quad a = \sqrt{E_s} = \sqrt{E_0} = \sqrt{E_1}$$



$$d = 2 \cdot a = 2\sqrt{E_s} = 2\sqrt{E_1} = 2\sqrt{E_0}$$

$$P_e = Q\left(\frac{d}{\sqrt{2\eta}}\right) = Q\left(\frac{2\sqrt{E_s}}{\sqrt{2\eta}}\right) = Q\left(\sqrt{\frac{2E_s}{\eta}}\right) \Rightarrow P_e = Q\left(\sqrt{\frac{2E_s}{\eta}}\right) = \frac{1}{2} \operatorname{erfc}\left(\sqrt{\frac{E_s}{\eta}}\right)$$



Probabilidad de error en receptores óptimos para constelaciones binarias banda base con símbolos equiprobables (V)

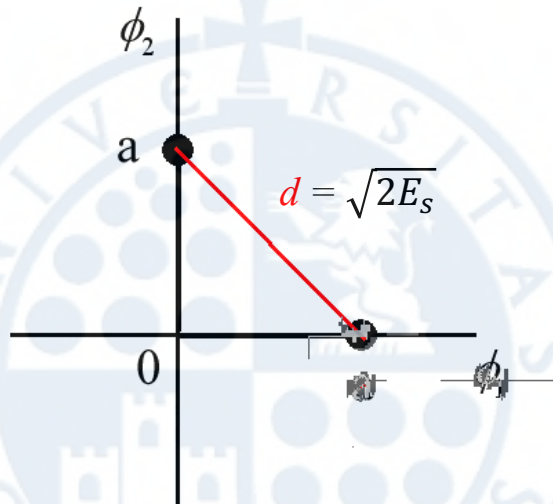
- **Señales ortogonales** $\Rightarrow \rho_{s_0 s_1}(\tau) = 0$

$$s_0(t) = a \cdot \phi_1(t) \rightarrow E_0 = a^2$$

$$s_1(t) = a \cdot \phi_2(t) \rightarrow E_1 = a^2$$

$$E_s = P_0 \cdot E_0 + P_1 \cdot E_1 = \frac{1}{2} E_0 + \frac{1}{2} E_1 = a^2 \rightarrow a = \sqrt{E_s} = \sqrt{E_0} = \sqrt{E_1}$$

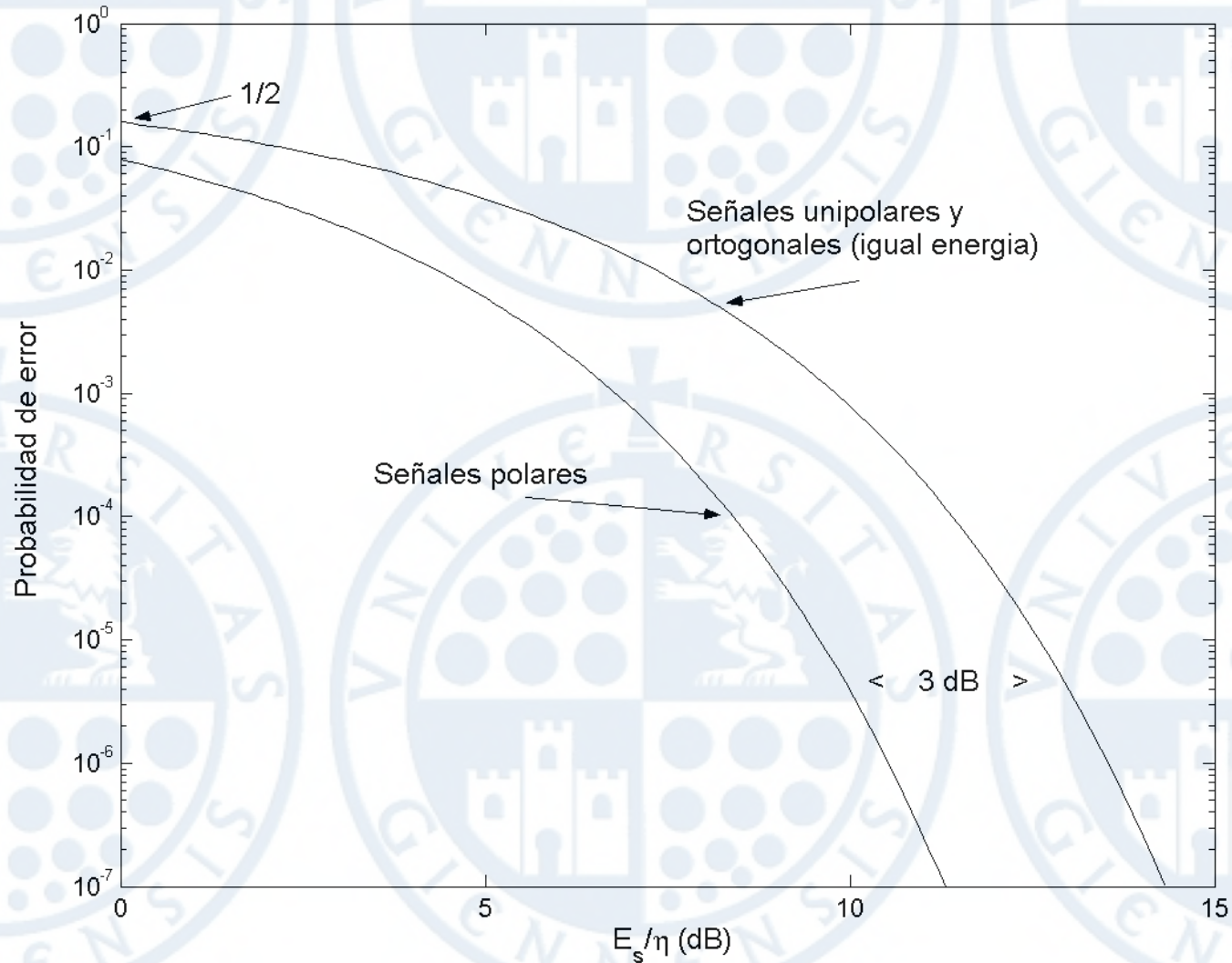
$$d = \sqrt{a^2 + a^2} = \sqrt{2} \cdot a = \sqrt{2} \cdot \sqrt{E_s} = \sqrt{2E_s}$$



$$P_e = Q\left(\frac{d}{\sqrt{2\eta}}\right) = Q\left(\frac{\sqrt{2E_s}}{\sqrt{2\eta}}\right) = Q\left(\sqrt{\frac{E_s}{\eta}}\right) \Rightarrow P_e = Q\left(\sqrt{\frac{E_s}{\eta}}\right) = \frac{1}{2} \operatorname{erfc}\left(\sqrt{\frac{E_s}{2\eta}}\right)$$

Probabilidad de error en receptores óptimos para constelaciones binarias banda base con símbolos equiprobables (VI)

Constelaciones binarias suponiendo símbolos equiprobables ($p_0 = p_1 = \frac{1}{2}$)



Codificación de línea (I)

- El codificador de línea es el encargado de asignar a cada símbolo digital b_n que genera la fuente una determinada forma de onda $s(t)$, es decir, adapta la información digital de la fuente al canal analógico a utilizar en la comunicación



- Bloques del codificador de línea

- **Codificador de símbolos:** conversión digital/analógica de cada símbolo b_n entregado por la fuente en una delta de Dirac con la amplitud del símbolo fuente

$$c(t) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} b_n \cdot \delta(t - nT)$$

- **Filtro conformador $h_i(t)$, $g(t)$:** adapta la señal $c(t)$ procedente del codificador de símbolos al medio de transmisión utilizado mediante un filtro $h(t)$ que conforma el espectro de la señal de salida del codificador con la adaptación deseada.

$$s(t) = h(t) * c(t) = h(t) * \sum_{n=-\infty}^{+\infty} b_n \cdot \delta(t - nT) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} b_n \cdot h(t - nT) \Rightarrow G_s(f) = G_c(f) \cdot |H(f)|^2$$

Codificación de línea (II)

- Si $v_T = \frac{1}{T}$ es la velocidad de transmisión (símbolos por segundo o baudios) en un SCD, M el n° de símbolos del alfabeto, se define el régimen binario R_b (bps),

$$R_b(\text{bps}) = v_T \log_2 M$$

Diseño del **filtro conformador** $h(t)$ para conseguir **adaptabilidad** al canal de transmisión:

- **Autosincronización transmisor-receptor**, para que se pueda recuperar la señal de reloj a partir de la señal recibida $r(t)$ (p.e., Manchester) aún habiendo recibido una larga secuencia de unos o ceros binarios.
- **Inmunidad al ruido**: existen códigos de línea que se comportan mejor que otros códigos frente al ruido (p.e., polares).
- **Espectro adecuado al canal** (p.e., no utilizar continua dc en canales con bloqueo dc)
- **Alta eficiencia espectral**. Algunos códigos permiten un mejor aprovechamiento del ancho de banda disponible.
- **Detección de errores**. Algunos códigos permiten detectar e incluso corregir errores sin añadir bits de redundancia (p.e., AMI).
- **Transparencia respecto de la fuente**. La señal en línea no debe depender de la naturaleza y características de la fuente.
- **Bajo coste**. Existen códigos de línea más complejos que requieren más recursos.

Codificación de línea (III)

Considere que la secuencia de símbolos b_n que entrega la fuente es una señal $c(t)$ aleatoria discreta estacionaria en sentido amplio y ergódica,

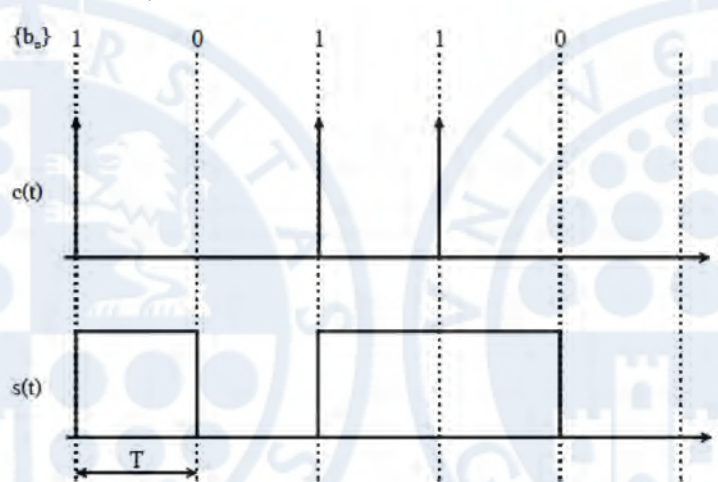
$$G_c(f) = \frac{\sigma_b^2}{T} + \frac{\mu_b^2}{T^2} \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \delta\left(f - \frac{n}{T}\right) \Rightarrow G_s(f) = \frac{\sigma_b^2}{T} |H(f)|^2 + \frac{\mu_b^2}{T^2} \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \left|H\left(\frac{n}{T}\right)\right|^2 \cdot \delta\left(f - \frac{n}{T}\right)$$

$\sigma_b^2 \rightarrow$ Varianza de los símbolos b_n , $\mu_b \rightarrow$ Media de los símbolos b_n

EJEMPLO: espectro de codificación de línea utilizando NRZ-L unipolar

- Secuencia de símbolos $b_n = ("0", "1")$ de la fuente equiprobables: $\begin{cases} b_0 = "0" \rightarrow A_0 = +0V \Rightarrow p_0 = 1/2 \\ b_1 = "1" \rightarrow A_1 = +1V \Rightarrow p_1 = 1/2 \end{cases}$

$$c(t) = \sum_n b_n \cdot \delta(t - n \cdot T)$$



- $\mu_b = E[b_n] = p_0 A_0 + p_1 A_1 = \frac{1}{2}$
- $\sigma_b^2 = E[(b_n - \mu_b)^2] = p_0 (b_0 - \mu_b)^2 + p_1 (b_1 - \mu_b)^2 = \frac{1}{2} \left(0 - \frac{1}{2}\right)^2 + \frac{1}{2} \left(1 - \frac{1}{2}\right)^2 = \frac{1}{4}$

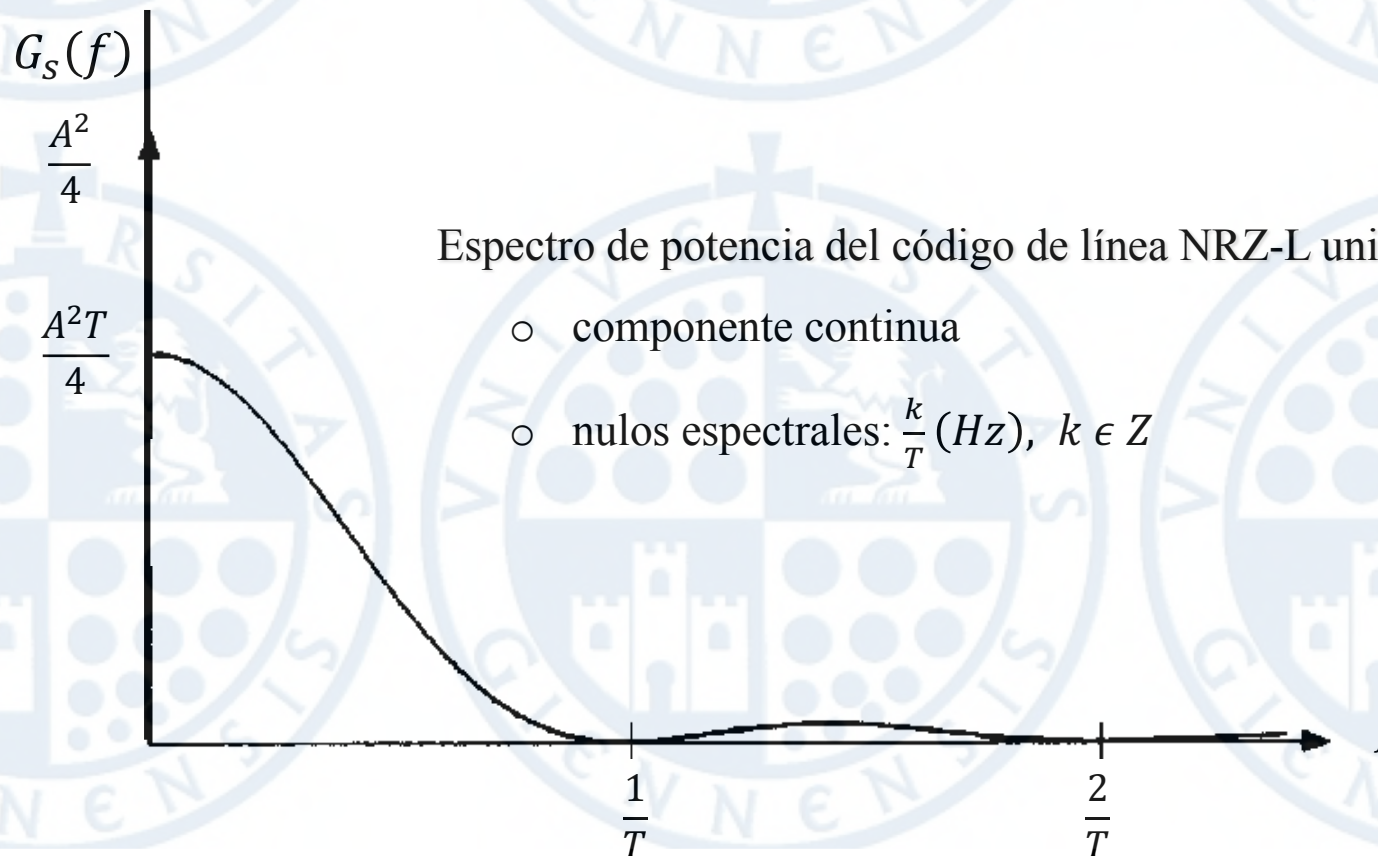
$$h(t) = A \cdot \Pi\left(\frac{t - \frac{T}{2}}{T}\right) \Rightarrow s(t) = A \sum_{n=-\infty}^{+\infty} b_n \cdot \Pi\left(\frac{t - \frac{T}{2} - nT}{T}\right)$$

Codificación de línea (IV)

Por tanto, el filtro conformador NRZ-L unipolar tiene la siguiente respuesta $H(f)$ en frecuencia:

$$H(f) = AT \operatorname{sinc}(Tf) \cdot e^{-j\omega\left(\frac{T}{2}\right)} \Rightarrow |H(f)|^2 = A^2 \cdot T^2 \cdot \operatorname{sinc}^2(Tf)$$

$$G_s(f) = \frac{A^2 T}{4} \operatorname{sinc}^2(Tf) + \frac{A^2}{4} \delta(f)$$



Codificación de línea (V)

- Principales de códigos de línea:

- (Codificación sin retorno a cero, Non Return to Zero - NRZ)

1. **NRZ-L**
2. **NRZ-unipolar**
3. **NRZ-M**
4. **NRZ-S**

- (Codificación con retorno a cero, Return to Zero - RZ): datos en banda base y grabaciones magnéticas

1. **RZ unipolar**
2. **RZ polar**
3. **RZ-AMI (Telemetría)**

- (Phase-encoded, Φ): grabación magnética, com. móvil y telemetría satélite

1. **Bi- Φ -L (de "bi-phase-level") ó Código Manchester**
2. **Bi- Φ -M (de "bi-phase-mark")**
3. **Bi- Φ -S (de "bi-phase-space")**
4. **Modulación por retardo ó código Miller**

- Códigos de línea M-arios:

1. **2B1Q**

Codificación de línea (VI)

CÓDIGOS SIN RETORNO A CERO (NRZ)

- **NRZ-L** (L de "Level", NRZ-polar, NRZ-bipolar). Se usa ampliamente en lógica digital. Un uno binario se representa mediante un nivel alto de tensión y un cero binario mediante un nivel bajo. Hay un cambio de nivel siempre que los datos pasan de uno a cero o de cero a uno. Por ejemplo, RS-232 utiliza NRZ polar, donde un 1 binario es un voltaje negativo entre -3 y -25 V y un 0 binario, es un voltaje entre +3 y +25 V.

- **NRZ-unipolar**. Igual que NRZ-L salvo que el cero binario se representa mediante la ausencia de pulso.

- **NRZ-M** (M de "Mark"). El uno binario o "marca" se representa mediante una conmutación o cambio de nivel mientras que el cero binario no provoca cambio. Este modo de proceder se conoce también como codificación diferencial. El código NRZ-M se usa principalmente en la grabación de cintas magnéticas.

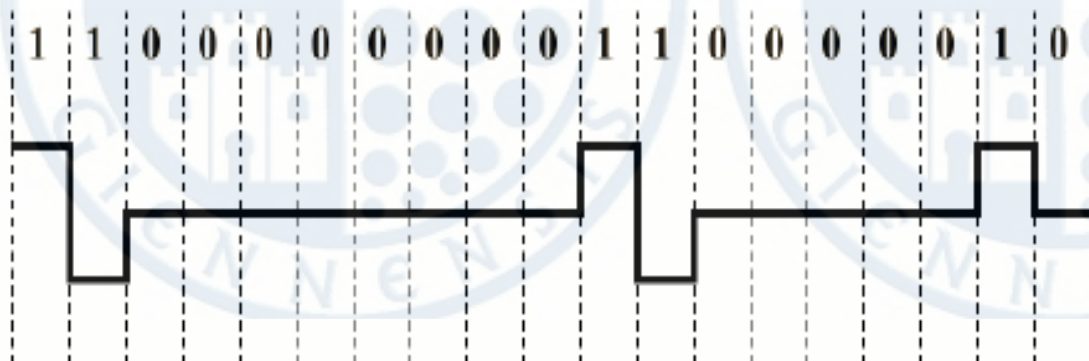
- **NRZ-S** (S de "Space"). Es el código complementario del NRZ-M. Un uno binario no provoca cambio de nivel, mientras que un cero binario si lo provoca.

Codificación de línea (VII)

CÓDIGOS CON RETORNO A CERO (RZ)

- **RZ-unipolar.** Un uno binario se representa por un pulso de medio bit de ancho y un cero se representa por la ausencia de pulso.
- **RZ-polar.** Los unos y los ceros binarios se representan por pulsos de niveles opuestos de medio bit de ancho. Así, siempre existirá un pulso en cada intervalo de bit, lo que facilita mucho la sincronización del receptor.
- **RZ-AMI (RZ-bipolar, alternate mark inversion).** Los unos binarios se representan por pulsos alternados de igual amplitud, mientras que los ceros binarios se representan por la ausencia de pulso. Este esquema se conoce también como **bipolar-AMI**. El código AMI se usa en las troncales T1 (sistema jerárquico americano), y en la transmisión de canales B en la Red Digital de Servicios Integrados (RDSI, Recomendación UIT-T I.430.) y en muchos sistemas de telemetría. Permite **corrección de errores** al romper la alternancia de pulsos.

Bipolar-AMI

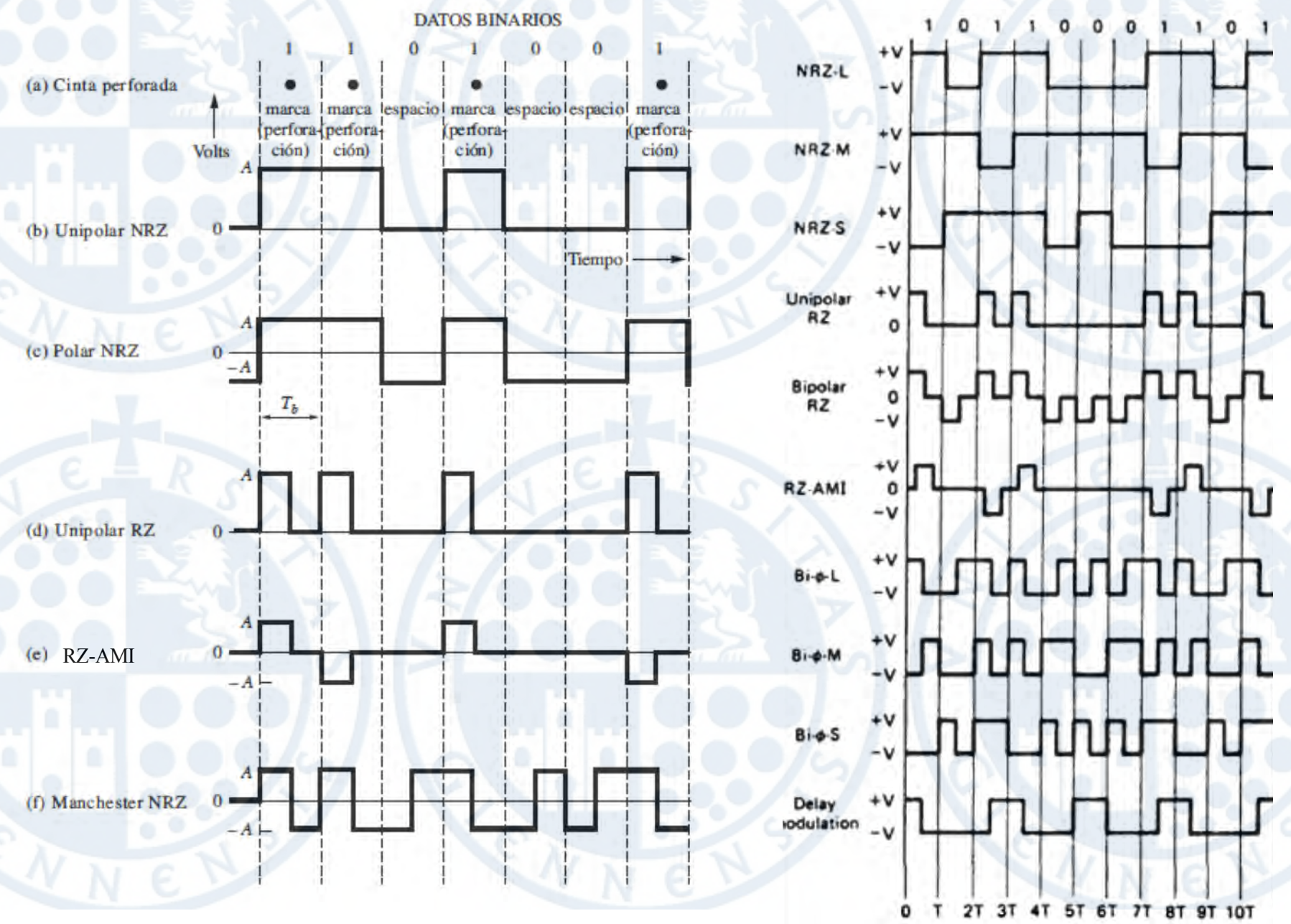


Codificación de línea (VIII)

CODIFICACIÓN EN FASE (Phase-encoded, Φ)

- **Bi- Φ -L (de "bi-phase-level")**. Un uno binario se representa por un pulso positivo posicionado en la primera mitad del intervalo de bit y otro negativo en la segunda mitad del intervalo de bit. Por el contrario, un cero binario se representa por un pulso negativo en la primera mitad del intervalo de bit y otro positivo en la segunda mitad. Este código es conocido como código **Manchester**, utilizado en las LAN tipo Ethernet (IEEE 802.3)
- **Bi- Φ -M (de "bi-phase-mark")**. Al comienzo de cada intervalo de bit siempre ocurre una transición. Un uno se representa por una segunda transición medio intervalo de bit más tarde. Un cero, por el contrario, no provoca transición en mitad del intervalo.
- **Bi- Φ -S (de "bi-phase-space")**. Como en el código anterior, también tiene lugar una transición al principio de cada intervalo de bit, pero en este caso la transición en la mitad del intervalo de bit no la provoca el uno binario sino el cero.
- **Modulación por retardo ó código Miller (Delay modulation)**. Un uno binario se representa por una transición en el punto medio del intervalo de bit, mientras que un cero no produce transición a menos que esté seguido por otro cero, en cuyo caso se produce una transición al final del intervalo de bit del primer cero.

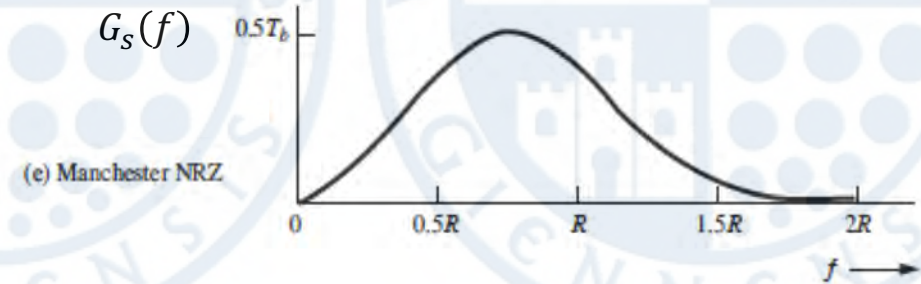
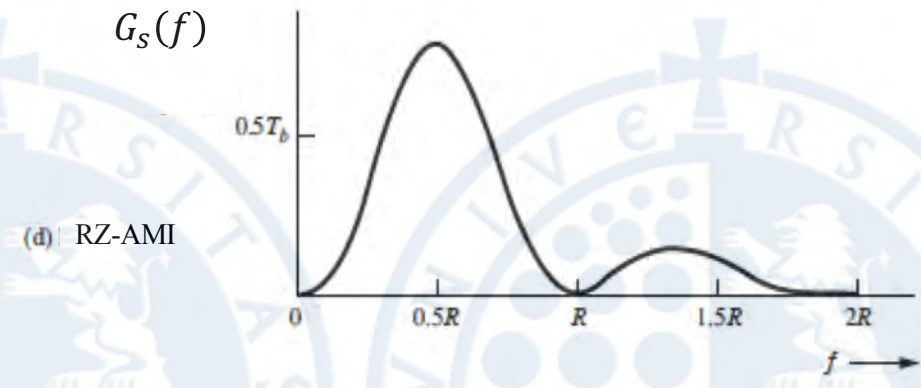
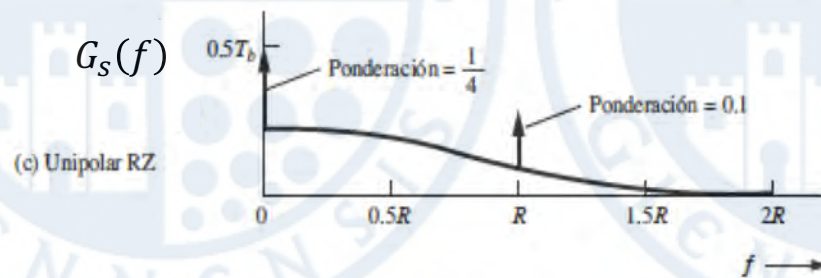
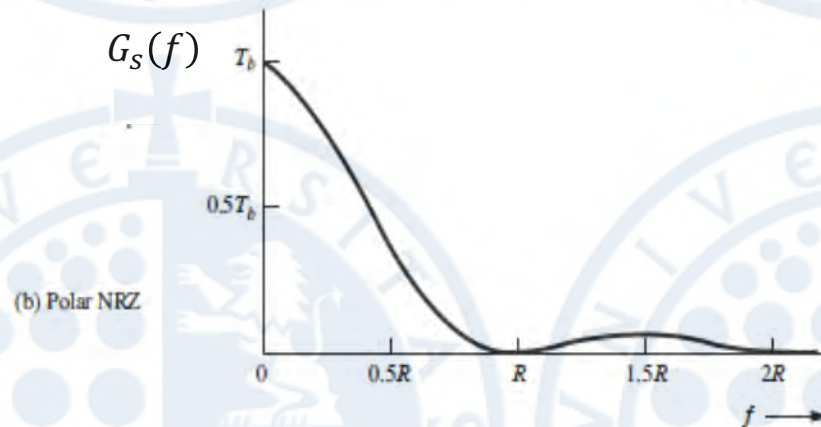
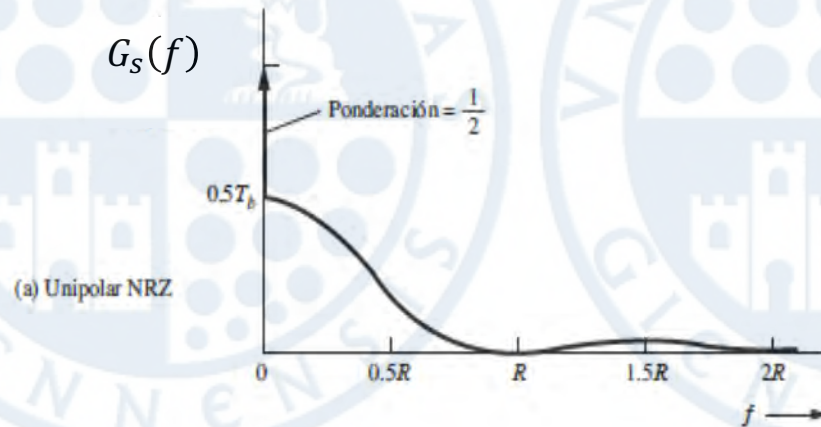
Codificación de línea (IX)



Codificación de línea (X)

Adaptabilidad al canal debido a sus características tiempo-frecuencia:

- Condensadores de bloqueo de continua (dc)
- Distorsión en baja frecuencia
- Sincronización Tx-Rx
- Corrección de errores
- Eficiencia espectral



Codificación de línea (XI)

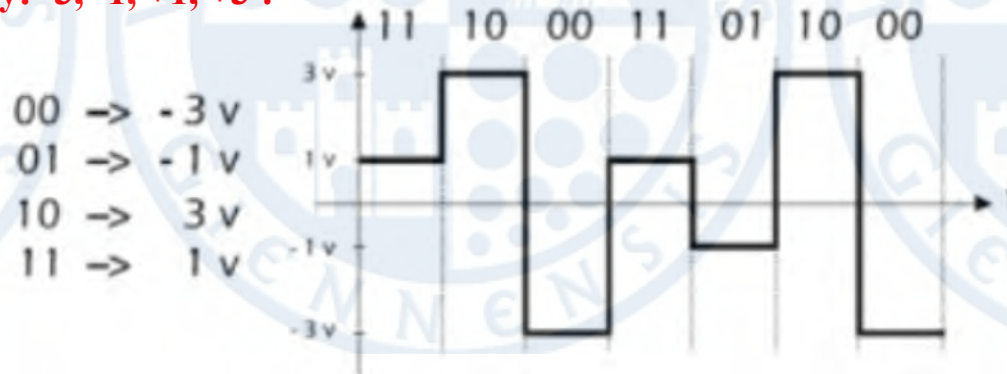
Codificación M-aria: 2B1Q

- Existen $M = 4$ niveles, donde cada símbolo cuaternario está formado por $k = 2$ bits
- Utilización: TR1 (equipo de terminación de red) instalados en el domicilio del usuario para conectar los equipos del usuario al bucle local de transmisión que conecta a éste con la Red Digital de Servicios Integrados (RDSI)

1º bit (Polaridad)	2º bit (Magnitud)	Símbolo cuaternario	Nivel de voltaje
1	0	+3	+2,5 v
1	1	+1	+0,833 v
0	1	-1	-0,833 v
0	0	-3	-2,5 v

Niveles de señalización del código 2B1Q

Código Gray: -3, -1, +1, +3 !



Codificación de línea (XII)

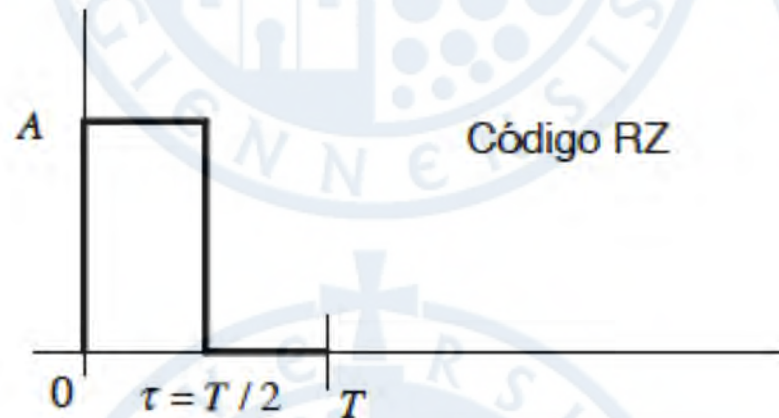
- Debido a que el pulso conformador $h_t(t)$ es pulsado (p.e., $\Pi\left(\frac{t}{\tau}\right)$), la señal $s(t)$ a la salida del codificador de línea se caracteriza por diferentes intervalos de tiempo:
 - **Intervalo de señalización** (τ). Intervalo de tiempo **mínimo** en el que la señal permanece constante. Es el intervalo elemental de tiempo.
 - **Periodo de símbolo codificado** (T). Intervalo de tiempo empleado para la transmisión de cada símbolo generado por la fuente.
 - **Periodo de bit** (T_b). Intervalo de tiempo empleado para la transmisión de cada bit. Coincide con el período de símbolo si la fuente empleada es binaria.
 - **Velocidad de señalización** ($v_s = \frac{1}{\tau}$): Inverso del intervalo de señalización τ . Informa del ancho de banda que ocupa la señal transmitida $s(t)$, ya que generalmente coincide con el ancho de banda de primer nulo.
 - **Velocidad de transmisión** ($v_T = \frac{1}{T}$). Inverso del período de símbolo codificado medido en símbolos por segundo o baudios.
 - **Régimen binario** ($R_b = \frac{1}{T_b}$). Inverso del período de bit. Informa de la cantidad de información que es capaz de transmitir el sistema medido en bits por segundo (bps).

$$\tau = \frac{T}{n} \Rightarrow v_s = \frac{1}{\tau} = \frac{n}{T} = n v_T \Rightarrow R_b = v_T \log_2(M) \Rightarrow v_s = \frac{n R_b}{\log_2 M}$$

Codificación de línea (XIII)

Código RZ: $\tau = \frac{T}{2}$

Código NRZ: $\tau = T$



Ejemplo 1. Código binario RZ: $n=2, M=2$

$$T = T_b \Rightarrow R_b = v_T \log_2(M) \Rightarrow M = 2, n = 2 \Rightarrow R = R_b = v_T \Rightarrow v_s = 2R_b$$

Ejemplo 2. Código a 4 niveles NRZ: $n=1, M=4$

$$T = 2T_b \Rightarrow R_b = v_T \log_2(M) \Rightarrow M = 4, n = 1 \Rightarrow \frac{R_b}{2} = v_T \Rightarrow v_s = \frac{R_b}{2}$$