TEMA 3: REPRESENTACIÓN EN SERIE DE FOURIER (FS) DE SEÑALES PERIÓDICAS

* INTRODUCCIÓN

- ANÁLISIS FRECUENCIAL EN SISTEMAS LTI
- APROXIMACIÓN:

$x[n]$, $x(t)$ $\xrightarrow{②}$

REPRESENTACIÓN: $x[n] = \sum_{k=-\infty}^{\infty} x[k]\delta[n-k]$
+
LTI: $\delta[n] \longrightarrow h[n]$

$\Rightarrow$ $y[n] = x[n] * h[n]$, $y(t) = x(t) * h(t)$ $\Rightarrow$ SALIDA, RESPUESTA; PROPIEDADES, OPERACIONES, CARACTERÍSTICAS

$x[n]$, $x(t)$ $\xrightarrow{③ \text{ a } ⑥}$

REPRESENTACIÓN EN FUNCIÓN DE EXPONENCIALES COMPLEJAS (e^{st}, z^n)
+
LTI: $e^{st} \longrightarrow ?$, $z^n \longrightarrow ?$

$\xrightarrow{③}$ SEÑALES PERIÓDICAS $\rightarrow$ CONTINUAS (FS); DISCRETAS (DTFS)

$\rightarrow$ SEÑALES NO PERIÓDICAS $\xrightarrow{⑤}$ CONTINUAS (FT); $\xrightarrow{⑤}$ DISCRETAS (DTFT)

CONTINUAS (FT) $\overset{⑥}{\longleftrightarrow}$ DISCRETAS (DTFT): MUESTREO (DFT, FFT)

* RESPUESTA DE SISTEMAS LTI A EXPONENCIALES COMPLEJAS

- $$x(t) = e^{st} \xrightarrow{LTI} y(t) = \int_{-\infty}^{\infty} h(\tau)x(t-\tau)d\tau = \int_{-\infty}^{\infty} h(\tau)e^{s(t-\tau)}d\tau = e^{st}\cdot \underbrace{\int_{-\infty}^{\infty} h(\tau)e^{-s\tau}d\tau}_{H(s)} =$$
$$= e^{st}\cdot H(s)$$

e^{st} ES AUTOFUNCIÓN DE LOS SISTEMAS LTI, $H(s)$ ES SU AUTOVALOR

- $$x[n] = z^n \xrightarrow{LTI} y[n] = \sum_{k=-\infty}^{\infty} h[k]x[n-k] = \sum_{k=-\infty}^{\infty} h[k]\cdot z^{n-k} = z^n \cdot \underbrace{\sum_{k=-\infty}^{\infty} h[k] z^{-k}}_{H(z)} =$$
$$= z^n \cdot H(z)$$

Si puedo expresar una señal como C.L. de exponenciales complejas:

$$x(t) = \sum_k a_k \cdot e^{s_k t} \xrightarrow{LTI} y(t) = \sum_k a_k \cdot \underline{H(s_k)} e^{s_k t}$$

Respuesta del sistema a cada 'frecuencia'

$$x[n] = \sum_k a_k z_k^n \xrightarrow{LTI} y[n] = \sum_k a_k \cdot \overline{H(z_k)} z_k^n$$

* Desarrollo en Serie de Fourier

de señales periódicas continuas (FS)

Sea $\phi_k(t) = e^{jk\frac{2\pi}{T_0}t}$, $k \in \mathbb{Z}$ la familia de exponenciales complejas periódicas armónicamente relacionadas, de periodo T_0 y pulsación $\omega_k = k\omega_0$.

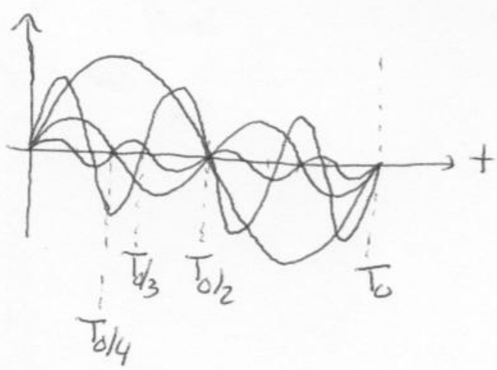
$$\underbrace{x(t) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} a_k e^{jk\omega_0 t}} = \sum_{k=-\infty}^{\infty} a_k e^{jk\frac{2\pi}{T_0}t}$$ es periódica de periodo T_0

- FS de $x(t)$
- a_k coeficientes del FS

$k=0 \Rightarrow$ término constante $\rightarrow$ componente continua

$k=1 \Rightarrow$ primer armónico o fundamental $\rightarrow T_0$

$k=2 \Rightarrow$ segundo armónico $\rightarrow T_0/2$



- Determinación del FS:

① Directamente, descomponiendo en exponenciales e identificando los coeficientes.

↳ Válido para señales que son C.L. de funciones sinusoidales

Ejemplo 3.4 (pág. 192)

Problema 3.3

② CASO GENERAL

$$x(t) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} a_k e^{jk\omega_0 t} \Rightarrow x(t) e^{-jn\omega_0 t} = \sum_{k=-\infty}^{\infty} a_k \cdot e^{j(k-n)\omega_0 t} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \int_0^{T_0} x(t) e^{-jn\omega_0 t} dt = \sum_{k=-\infty}^{\infty} a_k \cdot \underbrace{\int_0^{T_0} e^{j(k-n)\omega_0 t} dt}_{L} = a_n \cdot T_0 \Rightarrow$$

$$L = \begin{cases} 0, & k \neq n \\ T_0, & k = n \end{cases}$$

$$\Rightarrow a_n = \boxed{a_k = \frac{1}{T_0} \int_0^{T_0} x(t) e^{-jk\omega_0 t} dt}$$

- CONVERGENCIA DEL FS:

SIENDO $e(t) = x(t) - \underbrace{\sum_{k=-\infty}^{\infty} a_k \cdot e^{jk\omega_0 t}}_{\text{FS DE } x(t)}$, ES POSIBLE DEMOSTRAR

QUE $\int_{\langle T_0 \rangle} |e(t)|^2 dt = 0$ SI SE CUMPLEN LAS CONDICIONES DE DIRICHLET:

① $x(t)$ ABSOLUTAMENTE INTEGRABLE EN UN PERIODO:

$$\int_{\langle T_0 \rangle} |x(t)| dt < \infty \Rightarrow |a_k| < \infty$$

② $x(t)$ PRESENTA UN NÚMERO FINITO DE MÁXIMOS Y MÍNIMOS EN UN PERIODO

③ $x(t)$ PRESENTA UN NÚMERO FINITO DE DISCONTINUIDADES EN UN PERIODO

EL FENÓMENO DE GIBBS.

- PROPIEDADES DEL FS:

① LINEALIDAD

$$x_1(t) \xrightarrow{FS} a_k \quad , \text{ periódica } T_0$$
$$x_2(t) \xrightarrow{FS} b_k \quad , \text{ periódica } T_0$$

$$y(t) = Ax_1(t) + Bx_2(t) \xrightarrow{FS} c_k = Aa_k + Bb_k \quad , \text{ periódica } T_0$$

② DESPLAZAMIENTOS

- $$x(t) \xrightarrow{FS} a_k \quad , \text{ periódica } T_0$$
$$x(t-t_0) \xrightarrow{FS} b_k = a_k e^{-jk\omega_0 t_0} \quad , \text{ periódica } T_0$$

$$x(t) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} a_k \cdot e^{jk\omega_0 t} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow x(t-t_0) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} a_k e^{jk\omega_0 (t-t_0)} = \sum_{k=-\infty}^{\infty} \underbrace{a_k e^{-jk\omega_0 t_0}}_{b_k} e^{jk\omega_0 t}$$

- $$x(t) \xrightarrow{FS} a_k \quad , \text{ periódica } T_0$$
$$x'(t) \longleftarrow a_{k-M}$$

$$a_k = \frac{1}{T_0}\int_0^{T_0} x(t) e^{-jk\omega_0 t} dt \Rightarrow$$

$$\Rightarrow a_{k-M} = \frac{1}{T_0}\int_0^{T_0} x(t) e^{-j(k-M)\omega_0 t} = \frac{1}{T_0}\int_0^{T_0} \underbrace{x(t) e^{jM\omega_0 t}}_{x'(t)} \cdot e^{-jk\omega_0 t} dt$$

③ SIMETRÍAS

a) INVERSIÓN:

$$x(t) \xrightarrow{FS} a_k \quad , \text{ periódica } T_0$$
$$x(-t) \xrightarrow{FS} a_{-k} \quad , \text{ periódica } T_0$$

$$x(-t) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} a_k e^{-jk\omega_0 t} \underset{k \to -k}{=} \sum_{k=-\infty}^{\infty} \underbrace{a_{-k}}_{b_k} e^{jk\omega_0 t}$$

b) CONJUGACIÓN:

$$x(t) \xrightarrow{FS} a_k \quad , \text{ PERIÓDICA } T_0$$

$$x^*(t) \xrightarrow{FS} a^*_{-k} \quad , \text{ PERIÓDICA } T_0$$

$$x^*(t) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} a^*_k e^{-jk\omega_0 t} \underset{k \to -k}{=} \sum_{k=-\infty}^{\infty} \underbrace{a^*_{-k}}_{b_k} e^{jk\omega_0 t}$$

A PARTIR DE ESTAS DOS PROPIEDADES PUEDE DEDUCIRSE:

- De a): $x(t)$ PAR $\Rightarrow x(t) = x(-t) \Rightarrow a_k = a_{-k} \Rightarrow a_k$ PAR

  $x(t)$ IMPAR $\Rightarrow x(t) = -x(-t) \Rightarrow a_k = -a_{-k} \Rightarrow a_k$ IMPAR

- De b): $x(t)$ REAL $\Rightarrow x(t) = x^*(t) \Rightarrow a_k = a^*_{-k} \Rightarrow$

$$\Rightarrow \begin{cases} |a_k| = |a^*_{-k}| = |a_{-k}| \Rightarrow |a_k| \text{ PAR} \\ \sphericalangle a_k = \sphericalangle a^*_{-k} = -\sphericalangle a_{-k} \Rightarrow \sphericalangle a_k \text{ IMPAR} \\ Re[a_k] = Re[a^*_{-k}] = Re[a_{-k}] \Rightarrow Re[a_k] \text{ PAR} \\ Im[a_k] = Im[a^*_{-k}] = -Im[a_{-k}] \Rightarrow Im[a_k] \text{ IMPAR} \end{cases}$$

$x(t)$ IMAGINARIA $\Rightarrow x(t) = -x^*(t) \Rightarrow a_k = -a^*_{-k} \Rightarrow$

$$\Rightarrow \begin{cases} |a_k| = |-a^*_{-k}| = |a_{-k}| \Rightarrow |a_k| \text{ PAR} \\ \sphericalangle a_k = \sphericalangle -a^*_{-k} = -\sphericalangle -a_{-k} \Rightarrow \cdots \\ Re[a_k] = Re[-a^*_{-k}] = -Re[a_{-k}] \Rightarrow Re[a_k] \text{ IMPAR} \\ Im[a_k] = Im[-a^*_{-k}] = Im[a_{-k}] \Rightarrow Im[a_k] \text{ PAR} \end{cases}$$

• De a) + b) :

$x(t)$ REAL Y PAR $\Rightarrow$ $a_k = a_{-k} = a_{-k}^*$ $\Rightarrow$ a_k REAL Y PAR

$x(t)$ REAL E IMPAR $\Rightarrow$ $a_k = -a_{-k} = a_{-k}^*$ $\Rightarrow$ a_k IMAGINARIA E IMPAR

$$\begin{array}{ccccc} x(t) & = & x_e(t) & + & x_o(t) \quad \text{REAL} \\ \downarrow FS & & \downarrow FS & & \downarrow FS \\ a_k & = & Re[a_k] & + & j\,Im[a_k] \end{array}$$

$x(t)$ IMAGINARIA Y PAR $\Rightarrow$ $a_k = -a_{-k}^* = a_{-k}$ $\Rightarrow$ a_k IMAG. Y PAR

$x(t)$ IMAGINARIA E IMPAR $\Rightarrow$ $a_k = -a_{-k}^* = -a_{-k}$ $\Rightarrow$ a_k REAL E IMPAR

$$\begin{array}{ccccc} x(t) & = & x_e(t) & + & x_o(t) \quad \text{IMAGINARIA} \\ \downarrow FS & & \downarrow FS & & \downarrow FS \\ a_k & = & j\,Im[a_k] & + & Re[a_k] \end{array}$$

④ DERIVACIÓN E INTEGRACIÓN

$$x(t) \xrightarrow{FS} a_k \quad , \text{ PERIÓDICA } T_0$$

$$\frac{dx(t)}{dt} \xrightarrow{FS} b_k = jk\omega_0 a_k \quad , \text{ PERIÓDICA } T_0$$

$$x(t) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} a_k e^{jk\omega_0 t} \Rightarrow \frac{dx(t)}{dt} = \sum_{k=-\infty}^{\infty} \underbrace{jk\omega_0 a_k}_{b_k} e^{jk\omega_0 t}$$

$$\int_{-\infty}^{t} x(\tau)\,d\tau \xrightarrow{FS} b_k = \frac{a_k}{jk\omega_0} \quad , \text{ PERIÓDICA } T_0 \text{ SI } \underline{a_0 = 0}$$

5 ESCALADO

$$x(t) \xrightarrow{FS} a_k \quad , \text{ PERIÓDICA } T_0 \,,\, \omega_0$$

$$x(\alpha t) \xrightarrow{FS} b_k \quad , \text{ PERIÓDICA } T_0' = T_0/\alpha \,,\, \omega_0' = \alpha\omega_0$$

$$x(t) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} a_k e^{jk\omega_0 t} \Rightarrow x(\alpha t) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} a_k \cdot e^{jk\omega_0 \alpha t} =$$

$$= \sum_{k=-\infty}^{\infty} \underbrace{a_k}_{b_k} \cdot e^{jk\omega_0' t} \Rightarrow b_k = a_k$$

6 MULTIPLICACIÓN

$$x(t) \xrightarrow{FS} a_k \Rightarrow x(t) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} a_k e^{jk\omega_0 t} \quad , \text{ PERIÓDICA } T_0$$

$$y(t) \xrightarrow{FS} b_k \Rightarrow y(t) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} b_k e^{jk\omega_0 t} \quad , \text{ PERIÓDICA } T_0$$

$$x(t) \cdot y(t) \xrightarrow{FS} ¿c_k? \quad , \text{ PERIÓDICA } T_0$$

$$x(t) \cdot y(t) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} c_k e^{jk\omega_0 t} = \sum_{k=-\infty}^{\infty} a_k e^{jk\omega_0 t} \cdot \sum_{k=-\infty}^{\infty} b_k e^{jk\omega_0 t} =$$

$$= a_0 \cdot \sum_{k=-\infty}^{\infty} b_k e^{jk\omega_0 t} + a_{-1} e^{-j\omega_0 t} \cdot \sum_{k=-\infty}^{\infty} b_k e^{jk\omega_0 t} + a_1 e^{j\omega_0 t} \cdot \sum_{k=-\infty}^{\infty} b_k e^{jk\omega_0 t} + \cdots =$$

$$= a_0 \cdot \sum_{k=-\infty}^{\infty} b_k e^{jk\omega_0 t} + a_{-1} \cdot \sum_{k=-\infty}^{\infty} b_k e^{j(k-1)\omega_0 t} + a_1 \sum_{k=-\infty}^{\infty} b_k e^{j(k+1)\omega_0 t} + \cdots =$$

$$= \cdots + c_k e^{jk\omega_0 t} + \cdots \quad \Rightarrow$$

$$\Rightarrow c_k = a_0 b_k + a_{-1} b_{k+1} + a_1 b_{k-1} + \cdots \Rightarrow c_k = \sum_{l=-\infty}^{\infty} a_l b_{k-l} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow c_k = a_k * b_k$$

7 RELACIÓN DE PARSEVAL

$$\left.\begin{array}{l} x(t) \xrightarrow{FS} a_k \\ x^*(t) \xrightarrow{FS} b_k = a^*_{-k} \end{array}\right\} \Rightarrow x(t)\cdot x^*(t) \xrightarrow{FS} c_k$$

$$c_k = \sum_{l=-\infty}^{\infty} a_l \cdot b_{k-l} = \sum_{l=-\infty}^{\infty} a_l \cdot a^*_{l-k}$$

POR OTRA PARTE, $c_k = \frac{1}{T_0}\int_{\langle T_0\rangle} [x(t)\cdot x^*(t)]\, e^{-jk\omega_0 t}\, dt =$

$$= \frac{1}{T_0}\int_{\langle T_0\rangle} |x(t)|^2 e^{-jk\omega_0 t}\, dt$$

IGUALANDO AMBAS EXPRESIONES DE c_k PARA $k=0$:

$$\underbrace{\frac{1}{T_0}\int_{\langle T_0\rangle} |x(t)|^2 dt}_{\text{POTENCIA DE } x(t)} = \underbrace{\sum_{l=-\infty}^{\infty} |a_l|^2}_{\text{SUMA DE LA POTENCIA DE LOS ARMÓNICOS DE } x(t)}$$

$$\frac{1}{T_0}\int_{\langle T_0\rangle} |a_l e^{jl\omega_0 t}|^2 dt = |a_l|^2$$

* Desarrollo en Serie de Fourier de señales periódicas discretas (DTFS)

• Exponenciales armónicamente relacionadas

Sea $\phi_k[n] = e^{jk\frac{2\pi}{N_0}n}$, una familia de exponenciales complejas periódicas de periodo N_0 y frecuencia fundamental $2\pi/N_0 = \omega_0$

Dado que $\phi_{k+N_0}[n] = \phi_k[n] \Rightarrow$ sólo hay N_0 funciones distintas en la familia.

$$x[n] = \sum_{k=\langle N_0\rangle} a_k e^{jk\frac{2\pi}{N_0}n} = \sum_{k=\langle N_0\rangle} a_k e^{jk\omega_0 n}, \text{ periódica } N_0$$

$x[n] \xrightarrow{DTFS} a_k$, N_0 distintos que se repiten periódicamente cada N_0: $a_k = a_{k+N_0}$

• Determinación del DTFS

① Directamente, descomponiendo en exponenciales e identificando coeficientes.

Ejemplo 3.10 (ampliado).

② Caso general

$$x[n] = \sum_{k=\langle N_0\rangle} a_k e^{jk\frac{2\pi}{N_0}n} \Rightarrow \cdots \Rightarrow \boxed{a_k = \frac{1}{N_0} \cdot \sum_{n=\langle N_0\rangle} x[n] e^{-j\left(\frac{2\pi}{N_0}\right)kn}}$$

Ejercicio 3.12

• Convergencia del DTFS

Al tratarse de sumatorios finitos, no hay problemas de convergencia para señales reales.

- **PROPIEDADES DEL DTFS**

① LINEALIDAD

② DESPLAZAMIENTOS

③ SIMETRÍAS

④ PRIMERA DIFERENCIA Y SUMA ACUMULADA

$$x[n] \xrightarrow{DTFS} a_k \quad , \text{ PERIÓDICA } N_0$$

$$x[n]-x[n-1] \xrightarrow{DTFS} \left(a_k - e^{-j\frac{2\pi}{N_0}k}\cdot a_k\right) = \left(1-e^{-j\frac{2\pi}{N_0}k}\right)a_k$$

PERIÓDICA N_0

$$\sum_{k=-\infty}^{n} x[k] \xrightarrow{DTFS} \frac{a_k}{1-e^{-jk\frac{2\pi}{N_0}}} \quad , \quad a_0 = 0$$

PERIÓDICA N_0
si $a_0=0$

⑤ ESCALADO

$$x[n] \xrightarrow{DTFS} a_k \quad , \text{ PERIÓDICA } N_0$$

$$\underset{(m>0)}{x_m[n]} = \begin{cases} x[n/m] & , n \text{ MÚLTIPLO DE } m \\ 0 & , \text{ RESTO} \end{cases} \xrightarrow{DTFS} b_k \text{ , PERIÓDICA } mN_0$$

- $$a_k = \frac{1}{N_0}\cdot\sum_{n=\langle N_0\rangle} x[n]\,e^{-jk\frac{2\pi}{N_0}n}$$

- $$x_m[n] \xrightarrow{DTFS} b_k = \frac{1}{mN_0}\cdot\sum_{n=\langle mN_0\rangle} x_m[n]\,e^{-jk\frac{2\pi}{mN_0}n} \underset{n=2m}{=}$$

$$= \frac{1}{mN_0}\cdot\sum_{2=\langle N_0\rangle} x[2]\,e^{-jk\frac{2\pi}{N_0}2} = \underline{\frac{1}{m}a_k}$$

⑥ MULTIPLICACIÓN

$$x[n] \xrightarrow{DTFS} a_k$$
$$y[n] \xrightarrow{DTFS} b_k$$
, PERIÓDICAS N_0

$$x[n]\cdot y[n] \xrightarrow{DTFS} c_k = a_k \circledast b_k = \sum_{l=\langle N_0\rangle} a_l \cdot b_{k-l}$$

↓

CONVOLUCIÓN PERIÓDICA : CONVOLUCIÓN DE UNA SEÑAL CON UN PERIODO DE LA OTRA.

⑦ RELACIÓN DE PARSEVAL

$$\underbrace{\frac{1}{N_0}\cdot\sum_{n=\langle N_0\rangle} |x[n]|^2}_{\text{POTENCIA DE } x[n]} = \sum_{k=\langle N_0\rangle} |a_k|^2$$

→ POTENCIA DEL ARMÓNICO K-ÉSIMO

* SERIES DE FOURIER Y SISTEMAS LTI

$s = j\omega$, $z = e^{j\omega}$

↓

• $e^{st} \xrightarrow{LTI} H(s)e^{st}$, $z^n \xrightarrow{LTI} H(z)z^n$ ⇒

$$H(s) = \int_{-\infty}^{\infty} h(\tau)e^{-s\tau}d\tau \qquad H(z) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} h[k]\cdot z^{-k}$$

⇒ $e^{j\omega t} \xrightarrow{LTI} H(j\omega)e^{j\omega t}$, $e^{j\omega n} \xrightarrow{LTI} H(e^{j\omega})e^{j\omega n}$

$$H(j\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} h(\tau)e^{-j\omega\tau}d\tau \qquad H(e^{j\omega}) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} h[k]e^{-j\omega k}$$

RESPUESTA EN FRECUENCIA

• $x(t) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} a_k e^{jk\omega_0 t}$, $x[n] = \sum_{k=\langle N_0\rangle} a_k e^{jk\omega_0 n}$, PERIÓDICAS T_0, N_0 ⇒

⇒ ↗ $y(t) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} \underbrace{a_k\cdot H(jk\omega_0)}_{b_k}\cdot e^{j\omega_0 t}$, PERIÓDICA T_0

↘ $y[n] = \sum_{k=\langle N_0\rangle} \underbrace{a_k\cdot H(e^{jk\omega_0})}_{b_k} e^{jk\omega_0 n}$, PERIÓDICA N_0

EN CONCLUSIÓN:

- $x(t) \xrightarrow{FS} a_k$, PERIÓDICA T_0

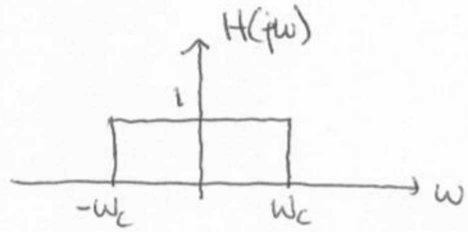
$$x(t) \xrightarrow[H(j\omega)]{LTI} y(t) \xrightarrow{FS} b_k = a_k \cdot \underbrace{H(jk\omega_0)} \; , T_0$$

RESPUESTA DEL SISTEMA LTI A LA PULSACIÓN $k\omega_0$

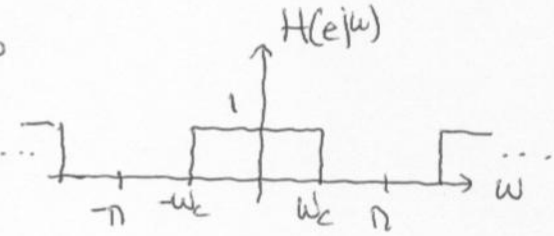
- $x[n] \xrightarrow{DTFS} a_k$, PERIÓDICA N_0

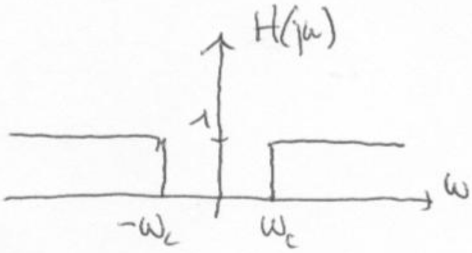
$$x[n] \xrightarrow[H(e^{j\omega})]{LTI} y[n] \xrightarrow{DTFS} b_k = a_k \cdot \underbrace{H(e^{jk\omega_0})}_{\text{IDEM.}} \; , N_0$$

FILTROS BÁSICOS:

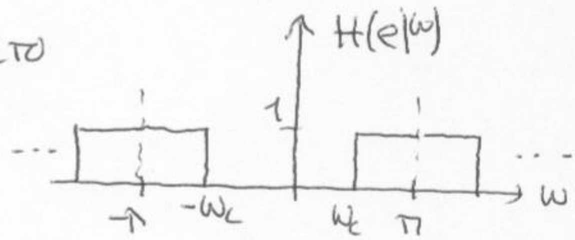


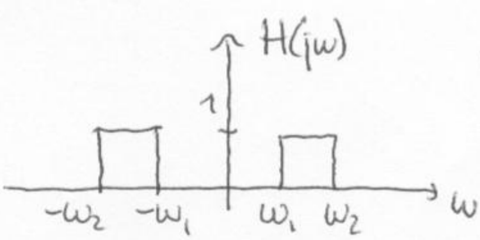
PASO-BAJO



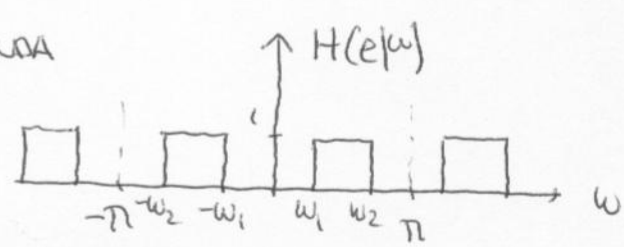


PASO-ALTO





PASO-BANDA



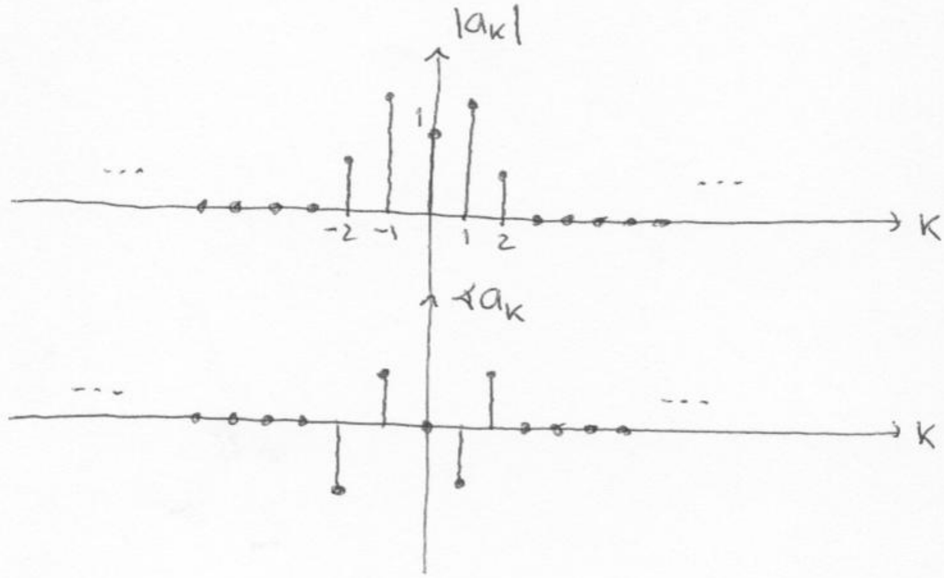
BANDA-ELIMINADA

Ejemplo 3.4

$$x(t) = 1 + \operatorname{sen} \omega_0 t + 2\cos \omega_0 t + \cos\left(2\omega_0 t + \frac{\pi}{4}\right) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} a_k e^{jk\omega_0 t} =$$

$$= 1 + \frac{e^{j\omega_0 t} - e^{-j\omega_0 t}}{2j} + \frac{e^{j\omega_0 t} + e^{-j\omega_0 t}}{2} \cdot 2 + \frac{e^{j\left(2\omega_0 t + \frac{\pi}{4}\right)} + e^{-j\left(2\omega_0 t + \frac{\pi}{4}\right)}}{2} =$$

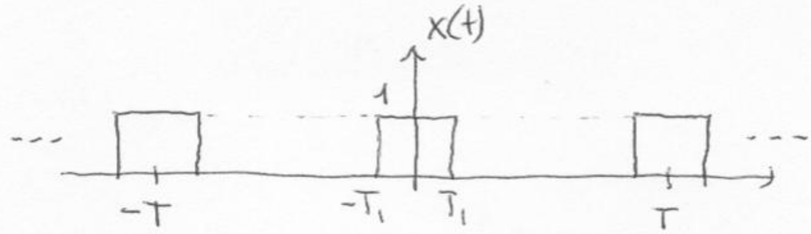
$$= \underbrace{1}_{a_0} + \underbrace{\left(1 + \frac{1}{2j}\right)}_{a_1} e^{j\omega_0 t} + \underbrace{\left(1 - \frac{1}{2j}\right)}_{a_{-1}} e^{-j\omega_0 t} + \underbrace{\frac{1}{2} e^{j\frac{\pi}{4}}}_{a_2} \cdot e^{j2\omega_0 t} + \underbrace{\frac{1}{2} e^{-j\frac{\pi}{4}}}_{a_{-2}} \cdot e^{-j2\omega_0 t}$$



EJEMPLO 3.5

$$x(t) = \begin{cases} 1, & |t| < T_1 \\ 0, & T_1 < |t| < T/2 \end{cases} \quad , \text{ PERIÓDICA DE PERIODO } T$$

$$x(t) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} \left[u(t+T_1-kT) - u(t-T_1-kT) \right]$$



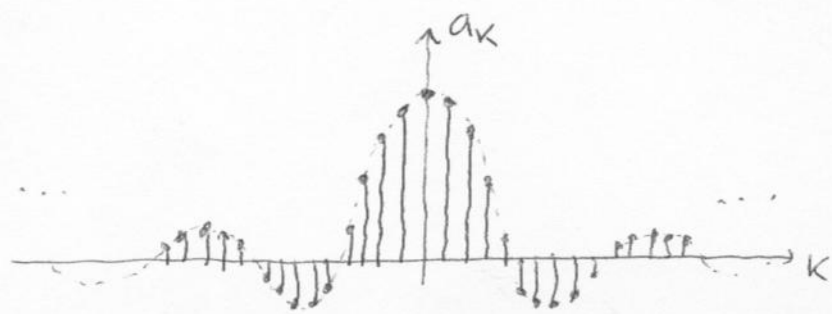
$$a_k = \frac{1}{T_0} \int_{\langle T \rangle} x(t) e^{-jk\omega_0 t} dt$$

$$a_k = \frac{1}{T} \int_{-T_1}^{T_1} e^{-jk\omega_0 t} dt = \frac{1}{T} \cdot \left. \frac{e^{-j\omega_0 k t}}{-jk\omega_0} \right|_{-T_1}^{T_1} = \frac{1}{T} \cdot \frac{e^{-jk\omega_0 T_1} - e^{jk\omega_0 T_1}}{-jk\omega_0} =$$

$$= \frac{e^{jk\omega_0 T_1} - e^{-jk\omega_0 T_1}}{jk\omega_0 T} = \boxed{\frac{2 \operatorname{sen}(k\omega_0 T_1)}{k\omega_0 T_0}} \quad , \; k \neq 0$$

PARA $k=0$: $\quad a_0 = \frac{1}{T_0} \int_{\langle T_0 \rangle} x(t) dt = \boxed{\frac{2T_1}{T}}$

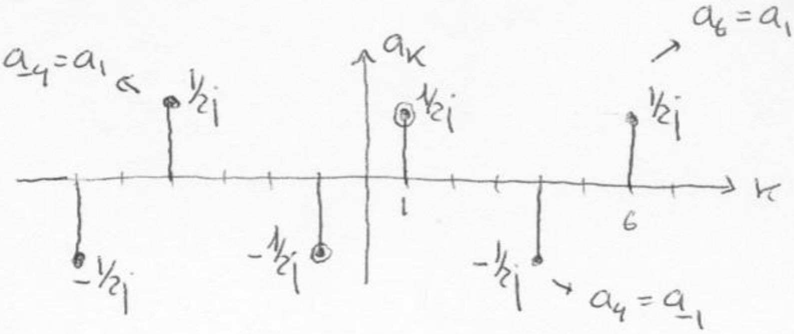
a_k REALES :



EJEMPLO 3.10 (AMPLIADO)

- $x[n] = \text{sen}\left(\frac{2\pi}{5}n\right) = \frac{1}{2j} e^{j\frac{2\pi}{5}n} - \frac{1}{2j} e^{-j\frac{2\pi}{5}n}$

$$N_0 = 5 \Rightarrow \omega_0 = \frac{2\pi}{5} \qquad a_1 \qquad a_{-1}$$

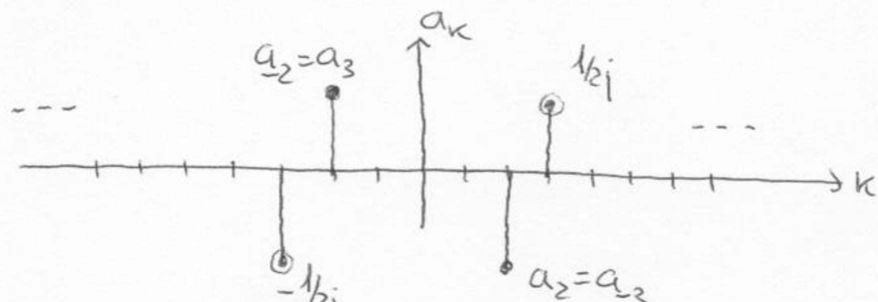


$$x[n] = \frac{-1}{2j} e^{j\frac{8\pi}{5}n} + \frac{1}{2j} e^{j\frac{12\pi}{5}n} =$$

$$= \overbrace{e^{j\frac{10\pi}{5}n}}^{1} \cdot \left(\frac{1}{2j} e^{j\frac{2\pi}{5}n} - \frac{1}{2j} e^{j\frac{2\pi}{5}n}\right) = \text{sen}\left(\frac{2\pi}{5}n\right)$$

- $x[n] = \text{sen}\left(\frac{6\pi}{5}n\right) = \frac{1}{2j} e^{j\frac{6\pi}{5}n} - \frac{1}{2j} e^{-j\frac{6\pi}{5}n}$

$$N_0 = 5 \Rightarrow \omega_0 = \frac{2\pi}{5} \qquad a_3 \qquad a_{-3}$$

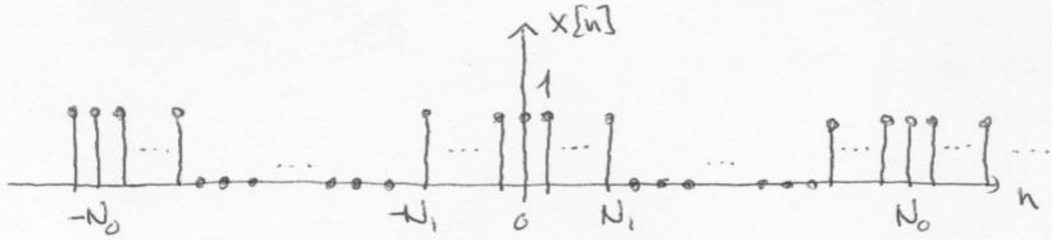


$$x[n] = -\frac{1}{2j} e^{j\frac{4\pi}{5}n} + \frac{1}{2j} e^{j\frac{6\pi}{5}n} =$$

$$= \frac{1}{2j} e^{j\frac{6\pi}{5}n} - \frac{1}{2\pi} \underbrace{\overbrace{e^{j\frac{10\pi}{5}n}}^{1} \cdot e^{-j\frac{6\pi}{5}n}}_{e^{j\frac{4\pi}{5}n}} = \text{sen}\left(\frac{6\pi}{5}n\right)$$

EJEMPLO 3.12

$$x[n] = \begin{cases} 1 \,, & -N_1 \le n \le N_1 \\ 0 \,, & \text{RESTO} \end{cases} \quad , \text{ PERIÓDICA } N_0$$



$$a_k = \frac{1}{N_0} \cdot \sum_{n=-N_1}^{N_1} e^{-jk\frac{2\pi}{N_0}n} =$$

$$= \frac{1}{N_0} \cdot \frac{e^{+jk\frac{2\pi}{N_0}N_1} - e^{-jk\frac{2\pi}{N_0}N_1} \cdot e^{-jk\frac{2\pi}{N_0}}}{1 - e^{-jk\frac{2\pi}{N_0}}} = \frac{1}{N_0} \cdot \frac{e^{+jk\frac{2\pi}{N_0}N_1} - e^{-jk\frac{2\pi}{N_0}(N_1+1)}}{1 - e^{-jk\frac{2\pi}{N_0}}}$$

$$= \frac{1}{N_0} \cdot \frac{e^{-jk\frac{\pi}{N_0}}}{e^{-jk\frac{\pi}{N_0}}} \cdot \frac{e^{jk\frac{2\pi}{N_0}(N_1+\frac{1}{2})} - e^{-jk\frac{2\pi}{N_0}(N_1+\frac{1}{2})}}{e^{jk\frac{\pi}{N_0}} - e^{-jk\frac{\pi}{N_0}}} =$$

$$= \frac{1}{N_0} \cdot \frac{\operatorname{sen}\left(\frac{2k\pi}{N_0}(N_1+\frac{1}{2})\right)}{\operatorname{sen}(k\pi/N_0)} \quad , \quad k \neq 0$$

$$a_0 = \frac{1}{N_0} \cdot \sum_{n=\langle N_0 \rangle} x[n] = \frac{2N_1+1}{N_0}$$

PROBLEMA 3.3

$$x(t) = 2 + \cos\left(\frac{2\pi}{3}t\right) + 4\,\mathrm{sen}\left(\frac{5\pi}{3}t\right) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} a_k e^{jk\omega_0 t}$$

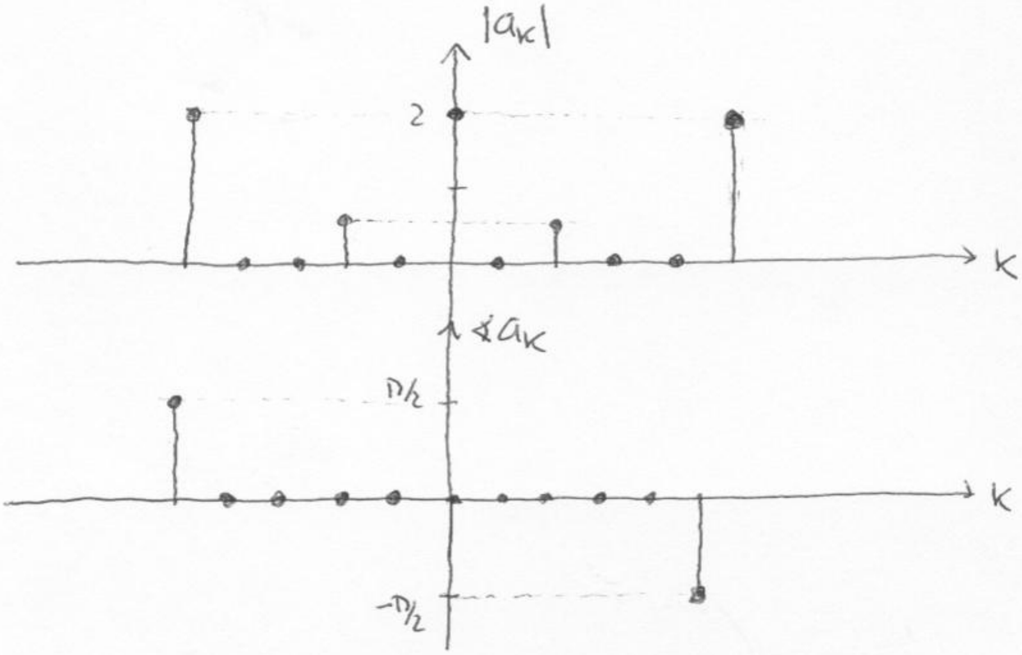
$$T_{01} = 3 \qquad\qquad T_{02} = 6/5 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow T_0 = k_1 \cdot T_{01} = k_2 T_{02} \Rightarrow \frac{k_1}{k_2} = \frac{T_{02}}{T_{01}} = \frac{2}{5} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow T_0 = 2T_{01} = 5T_{02} = 6 \Rightarrow \omega_0 = \pi/3$$

$$x(t) = 2 + \frac{e^{j\frac{2\pi}{3}t} + e^{-j\frac{2\pi}{3}t}}{2} + 4\,\frac{e^{j\frac{5\pi}{3}t} - e^{-j\frac{5\pi}{3}t}}{2j} =$$

$$= \underbrace{2}_{a_0} + \underbrace{\frac{1}{2}}_{a_2} e^{j\frac{2\pi}{3}t} + \underbrace{\frac{1}{2}}_{a_{-2}} e^{-j\frac{2\pi}{3}t} + \underbrace{\frac{2}{j}}_{a_5} e^{j\frac{5\pi}{3}t} - \underbrace{\frac{2}{j}}_{a_{-5}} e^{-j\frac{5\pi}{3}t}$$



PROBLEMA 3.5

$$x_1(t) \xrightarrow{FS} a_k \quad , \text{ PERIÓDICA } \omega_1$$

$$x_2(t) = x_1(1-t) + x_1(t-1)$$

a) ¿ ω_2 ?

$$\left.\begin{array}{l} x_1(1-t) \text{ PERIÓDICA } \omega_1 \\ x_1(t-1) \text{ PERIÓDICA } \omega_1 \end{array}\right\} \Rightarrow x_2(t) \text{ PERIÓDICA } \omega_1 = \omega_2$$

b) $x_2(t) \xrightarrow{FS}$ ¿ b_k ?

$$x_1(t) \xrightarrow{FS} a_k$$

$$x_1(t-1) \xrightarrow{FS} a_k \cdot e^{-jk\omega_1}$$

$$x_1(t+1) \xrightarrow{FS} a_k e^{jk\omega_1}$$

$$x_1(-t+1) \xrightarrow{FS} a_{-k} e^{-jk\omega_1}$$

$$\oplus \Rightarrow$$

$$\Rightarrow x_2(t) \xrightarrow{FS} (a_k + a_{-k}) e^{-jk\omega_1}$$

PROBLEMA 3.6

a) $x_1(t) = \sum_{k=0}^{100} \left(\frac{1}{2}\right)^k \cdot e^{jk\frac{2\pi}{50}t} \Rightarrow$

$\Rightarrow a_k = \left(\frac{1}{2}\right)^k, \quad 0 \leq k \leq 100 \Rightarrow$

$\Rightarrow a_{-k} = 0 \quad \forall k \Rightarrow$
- $a_k \neq a_{-k} \Rightarrow x_1(t)$ NO PAR
- $a_k \neq a_{-k}^* \Rightarrow x_1(t)$ NO REAL

b) $x_2(t) = \sum_{k=-100}^{100} \cos(k\pi) e^{jk\frac{2\pi}{50}t} \Rightarrow$

$\Rightarrow a_k = \cos(k\pi), \quad -100 \leq k \leq 100$

↳ SERIE PAR $\Rightarrow a_k = a_{-k} \Rightarrow x_2(t)$ PAR

+

↳ SERIE REAL $\Rightarrow a_k = a_k^* = a_{-k}^*$

$\Downarrow$

$x_2(t)$ REAL

c) $x_3(t) = \sum_{k=-100}^{100} j\,\mathrm{sen}\left(\frac{k\pi}{2}\right) e^{jk\frac{2\pi}{50}t} \Rightarrow$

$\Rightarrow a_k = j\,\mathrm{sen}\left(\frac{k\pi}{2}\right)$

↳ SERIE IMPAR $\Rightarrow a_k = -a_{-k} \Rightarrow x_3(t)$ IMPAR

+

↳ SERIE IMAGINARIA $\Rightarrow a_k = -a_k^* = +a_{-k}^*$

$\Downarrow$

$x_3(t)$ REAL

PROBLEMA 3.8

BUSCAR DOS SEÑALES QUE VERIFIQUEN:

1- $x(t)$ REAL E IMPAR

2- $x(t)$ PERIÓDICA, $T_0 = 2$, a_k

3- $a_k = 0$, $|k| > 1$

4- $\frac{1}{2}\int_0^2 |x(t)|^2 dt = 1$

$1 \Rightarrow a_k = a_{-k}^* = -a_{-k} \Rightarrow$ $a_0 = 0$, a_k IMPAR; a_k IMAGINARIOS

$2 \Rightarrow \omega_0 = \frac{2\pi}{T_0} = \pi$

$3 \Rightarrow a_{-1}, a_0, a_1 \Rightarrow x(t) = a_1 e^{j\pi t} + a_{-1} e^{-j\pi t}$, SIENDO $a_1 = \pm j|a_1|$, $a_{-1} = \mp j|a_1|$

$4 \Rightarrow \sum_{k=-\infty}^{\infty} |a_k|^2 = 1 \Rightarrow |a_1|^2 + |a_{-1}|^2 = 1 \Rightarrow$

$\Rightarrow 2|a_1|^2 = 1 \Rightarrow |a_1| = 1/\sqrt{2} \Rightarrow$

$\Rightarrow$ $a_1 = -j\frac{1}{\sqrt{2}}$, $a_{-1} = j\frac{1}{\sqrt{2}} \Rightarrow x_1(t) = \frac{j}{\sqrt{2}} e^{-j\pi t} - \frac{j}{\sqrt{2}} e^{j\pi t} = \sqrt{2}\,\text{sen}\,\pi t$

$a_1 = j\frac{1}{\sqrt{2}}$, $a_{-1} = -j\frac{1}{\sqrt{2}} \Rightarrow x_2(t) = \frac{-j}{\sqrt{2}} e^{-j\pi t} + \frac{j}{\sqrt{2}} e^{j\pi t} = -\sqrt{2}\,\text{sen}\,\pi t$

PROBLEMA 3.11

SEA $x[n]$ UNA SEÑAL QUE VERIFICA:

1. $x[n]$ ES REAL Y PAR
2. $x[n] \xrightarrow{DTFS} a_k$, PERIÓDICA $N_0 = 10$
3. $a_{11} = 5$
4. $\frac{1}{10} \cdot \sum_{n=0}^{9} |x[n]|^2 = 50$

SABIENDO QUE $x[n] = A \cos(Bn + C)$, OBTENER A, B, C

---

1. $\Rightarrow$ a_k REALES Y PARES: $\underbrace{a_k = a_{-k}} = a_k^*$

2. $\Rightarrow$ $N_0 = 10$, $\omega_0 = \pi/5$

3. $\Rightarrow$ $a_{11} = a_1 = 5 \Rightarrow a_{-1} = 5$

4. $\Rightarrow$ $\sum_{k=\langle N_0 \rangle} |a_k|^2 = \cancel{}\ 50$

$|a_1|^2 + |a_{-1}|^2 = 50 \Rightarrow$ EL RESTO DE LOS COEFICIENTES SON NULOS

CONCLUSIÓN: $x[n] = a_1 e^{j\omega_0 n} + a_{-1} e^{-j\omega_0 n} =$

$$= 5e^{j\frac{\pi}{5}n} + 5e^{-j\frac{\pi}{5}n} = 10 \cos\left(\frac{\pi}{5}n\right) \Rightarrow \begin{cases} A = 10 \\ B = \pi/5 \\ C = 0 \end{cases}$$

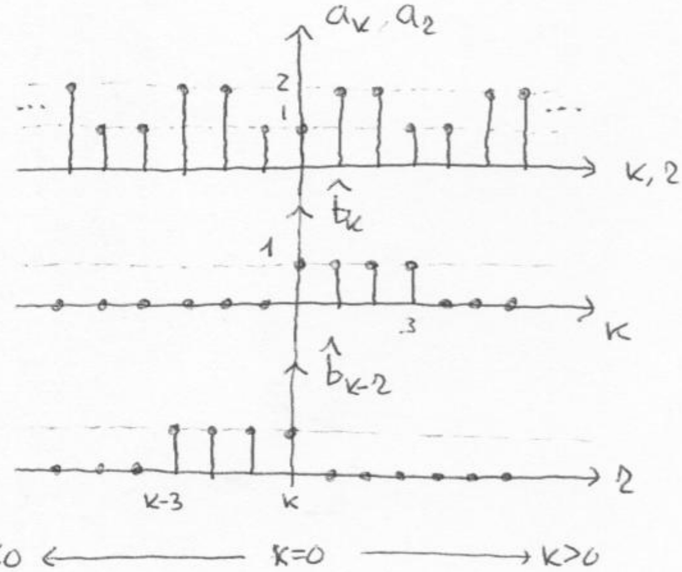
PROBLEMA 3.12

$$x_1[n] \xrightarrow{DTFS} a_k$$
$$x_2[n] \xrightarrow{DTFS} b_k$$
, PERIÓDICAS $N_0 = 4$

$$a_0 = a_3 = \frac{1}{2} a_1 = \frac{1}{2} a_2 = 1 \quad ; \quad b_k = 1 \ , \ \forall k$$

$$g[n] = x_1[n] \cdot x_2[n] \xrightarrow{DTFS} ¿\, c_k \,?$$

$$c_k = \sum_{l = \langle N_0 \rangle} a_l \cdot b_{k-l} = a_k \circledast b_k = a_k * \hat{b}_k$$



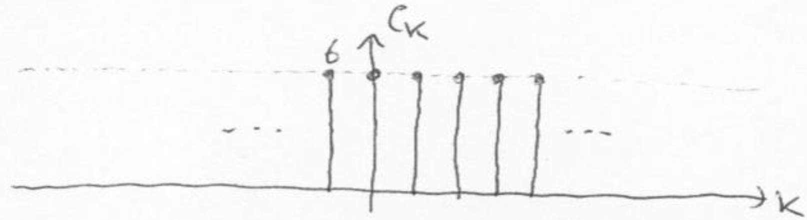
$c_0 = 2+2+1+1 = 6$

$c_1 = 2+1+1+2 = 6$

$c_2 = 1+1+2+2 = 6$

$c_3 = 1+2+2+1 = 6$

$c_4 = c_0$



PROBLEMA 3.14

$$x[n] = \sum_{k=-\infty}^{\infty} \delta[n-4k] \xrightarrow[H(e^{j\omega})]{\text{LTI}} y[n] = \cos\left(\frac{5\pi}{2}n + \frac{\pi}{4}\right)$$

¿ $H(e^{jk\frac{\pi}{2}})$, $k = 0, 1, 2, 3$?

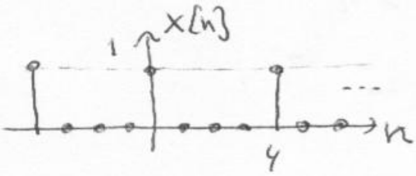
$$x[n] \xrightarrow{\text{DTFS}} a_k \quad , \text{ PERIÓDICA } N_0 = 4 \Rightarrow \omega_0 = \pi/2$$

$$x[n] \xrightarrow[H(e^{j\omega})]{\text{LTI}} y[n] \xrightarrow{\text{DTFS}} b_k = a_k \cdot H(e^{jk\omega_0}) = a_k \cdot H(e^{jk\frac{\pi}{2}})$$

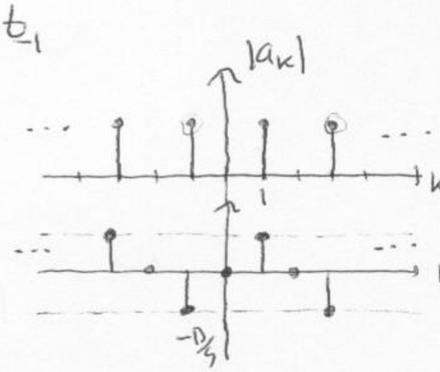
$$\Downarrow$$

SI OBTENGO a_k Y b_k, PUEDO HALLAR $H(e^{jk\frac{\pi}{2}})$ PARA CUALQUIER VALOR DE k :

- $$x[n] \xrightarrow{\text{DTFS}} a_k = \frac{1}{N_0} \cdot \sum_{n=\langle N_0 \rangle} x[n]\, e^{-jk\omega_0 n} = \frac{1}{4} \cdot \sum_{n=-1}^{2} x[n]\, e^{-jk\frac{\pi}{2}n} = \frac{1}{4}, \ \forall k$$



- $$y[n] = \cos\left(\frac{5\pi}{2}n + \frac{\pi}{4}\right) = \underbrace{\frac{1}{2}e^{j\frac{\pi}{4}}}_{b_5 = b_1} \cdot e^{j\frac{5\pi}{2}n} + \underbrace{\frac{1}{2}e^{-j\frac{\pi}{4}}}_{b_5 = b_{-1}} \cdot e^{-j\frac{5\pi}{2}n}$$



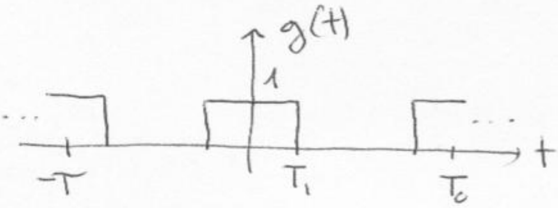
POR LO TANTO:

- $b_0 = 0 = a_0 \cdot H(e^{j0}) \Rightarrow H(e^{j0}) = 0$
- $b_1 = \frac{1}{2}e^{j\frac{\pi}{4}} = a_1 \cdot H(e^{j\frac{\pi}{2}}) \Rightarrow H(e^{j\frac{\pi}{2}}) = 2e^{j\frac{\pi}{4}}$
- $b_2 = 0 = a_2 \cdot H(e^{j\pi}) \Rightarrow H(e^{j\pi}) = 0$
- $b_3 = \frac{1}{2}e^{-j\frac{\pi}{4}} = a_3\, H(e^{j\frac{3\pi}{2}}) \Rightarrow H(e^{j\frac{3\pi}{2}}) = 2e^{-j\frac{\pi}{4}}$

PROBLEMA 3.23

a) $$a_k = \begin{cases} 0 & , k=0 \\ (j)^k \cdot \dfrac{\operatorname{sen} k\pi/4}{k\pi} & , k \neq 0 \end{cases} \longrightarrow \text{¿} x(t)\text{?} \qquad T_0 = 4$$

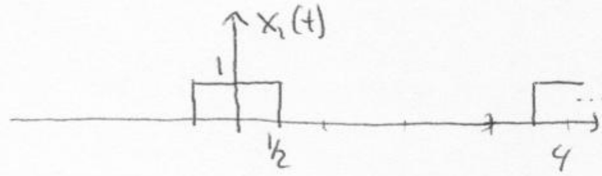
- SABIENDO QUE:



$$\xrightarrow{FS} g_k = \frac{2 \operatorname{sen}(k\omega_0 T_1)}{k\omega_0 T_0} \Rightarrow$$

$\Rightarrow$ Si $T_0 = 4$, $\omega_0 = \pi/2$ $\Rightarrow g_k = \dfrac{\operatorname{sen}\left(k\frac{\pi}{2}T_1\right)}{k\pi} \Rightarrow$ PARA $T_1 = 1/2$

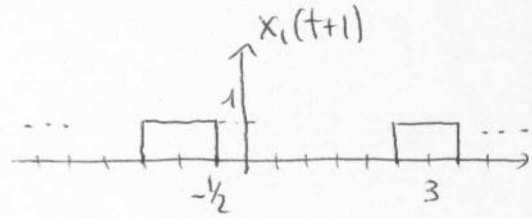
$$\Rightarrow \frac{\operatorname{sen}(k\pi/4)}{k\pi} \xrightarrow{FS^{-1}}$$



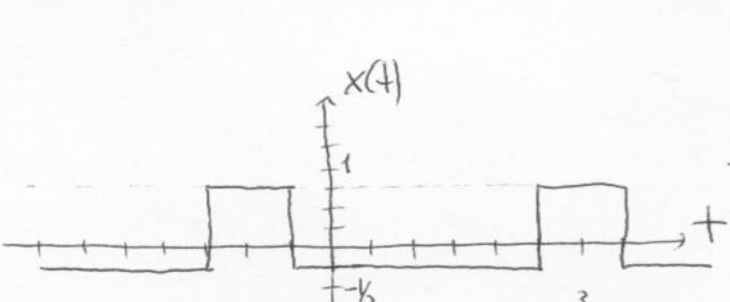
- TENIENDO EN CUENTA QUE $e^{jk\frac{\pi}{2}} = (j)^k = e^{jk\omega_0}$

$$\frac{\operatorname{sen}(k\pi/4)}{k\pi} \xrightarrow{FS^{-1}} x_1(t)$$

$$e^{jk\omega_0} \frac{\operatorname{sen}(k\pi/4)}{k\pi} \xrightarrow{FS^{-1}} x_1(t+1)$$



- EL VALOR MEDIO DE $x_1(t+1)$ ES $1/4 \neq a_0$, QUE VALE $0 \Rightarrow x(t)$ ES UNA SEÑAL COMO $x_1(t+1)$ PERO RESTÁNDOLE SU COMPONENTE CONTINUA:



$$\xrightarrow{FS} a_k$$

PROBLEMA 3.28

c) $x[n] = 1 - \text{sen}\,\underbrace{\frac{\pi n}{4}}$, $0 \leq n \leq 3$, PERIÓDICA $N_0 = 4$ $\xrightarrow{\text{DTFS}}$ ¿a_k?

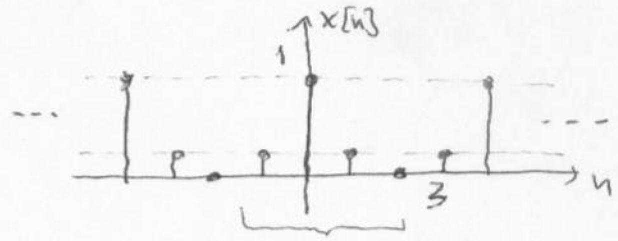
↳ PERIÓDICA $N_0' = 8$ ⇒ NO TOMO TODA LA SEÑAL :

$x[0] = 1$

$x[1] = 1 - \frac{\sqrt{2}}{2} = \frac{2-\sqrt{2}}{2}$

$x[2] = 0$

$x[3] = x[1]$



$N_0 = 4 \Rightarrow \omega_0 = \pi/2$

$$a_k = \frac{1}{4} \cdot \sum_{n=-1}^{2} x[n] e^{-jk\frac{\pi}{2}n} = \frac{1}{4}\left[\frac{2-\sqrt{2}}{2} e^{j\frac{\pi}{2}k} + 1 + \frac{2-\sqrt{2}}{2} e^{-j\frac{\pi}{2}k}\right] =$$

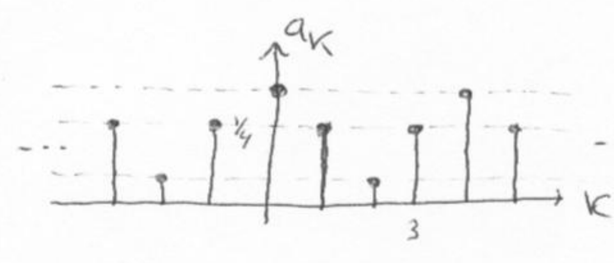
$$= \frac{1}{4} + \frac{2-\sqrt{2}}{4} \cos\left(k\frac{\pi}{2}\right) \Rightarrow \longrightarrow \quad a_0 = \frac{3-\sqrt{2}}{4}$$

$a_1 = 1/4$

$a_2 = \frac{-1+\sqrt{2}}{4}$ ⇒

$a_3 = 1/4$

⇒



, PERIÓDICA $N_0 = 4$