TEMA 5

COMUNICACIONES DIGITALES

Espacio de señales

- Convertir las complicadas relaciones y operaciones entre señales, en sencillas operaciones geométricas.
- Nos centraremos exclusivamente en el conjunto de señales reales de energía finita y duración T segundos.
- Este conjunto tiene estructura algebraica de e**spacio vectorial** sobre el cuerpo de los números reales.
- Por tanto, una señal se puede denotar indistintamente por s(t) o s ≡ $\vec{s}(t)$ para enfatizar su carácter de vector.

Base de un subespacio de señal

- Sea un conjunto de D señales, todas ellas de energía finita, y de duración T:

$$B = \left\{ \overrightarrow{\psi_1}, \overrightarrow{\psi_2}, \ldots, \overrightarrow{\psi_D} \right\}$$

- El conjunto de señales que puede obtenerse como combinación lineal de las anteriores, forma a su vez un espacio vectorial S que será un subconjunto del espacio total (un subespacio).
- Si dichas señales son linealmente independientes (es decir, no es posible expresar ninguna de ellas como combinación lineal de las demás), entonces se dice que B es una base de dicho subespacio y D la dimensión del mismo.
- Cualquier señal que esté contenida en dicho subespacio puede expresarse de manera única, como combinación lineal de los elementos de la base:

$$\vec{s} \in S \Leftrightarrow \vec{s} = c_1 \cdot \overrightarrow{\psi_1} + c_2 \cdot \overrightarrow{\psi_2} + \ldots + c_D \cdot \overrightarrow{\psi_D}$$

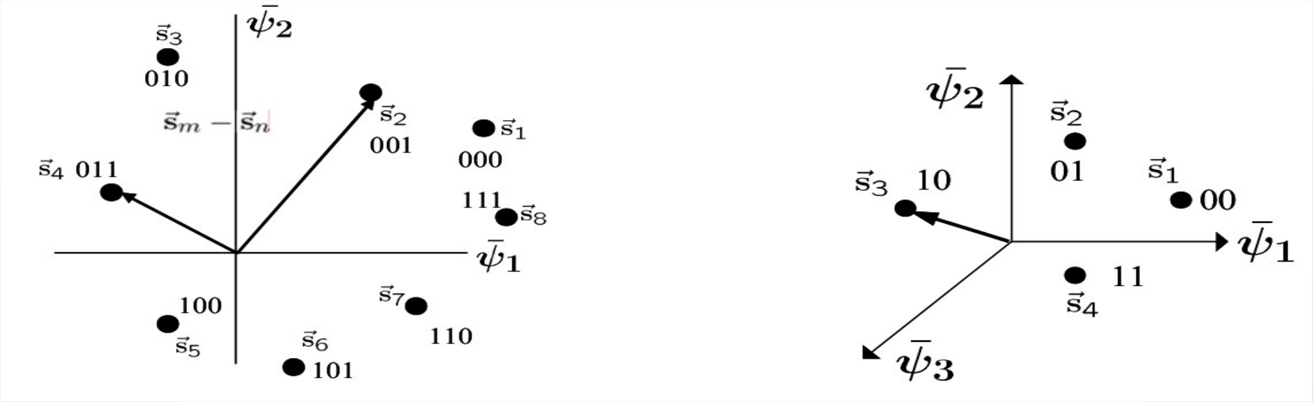
Base de un subespacio de señal

- Las cantidades c_i se denominan coordenadas del vector respecto a dicha base y se utilizan habitualmente para designar de manera unívoca al vector:

$$\vec{s} = (c_1, c_2, \ldots, c_D)$$

Constelación de una modulación digital

- Utilizando las coordenadas, cada señal queda representada por un vector del espacio R^D . Dicho vector admite una representación geométrica → cada señal del subespacio queda representada por un punto en el espacio de señal.
- En una transmisión digital se usa un conjunto C, formado por M señales diferentes, para designar los M símbolos del alfabeto. En consecuencia, un sistema determinado tendrá asociado un conjunto de M puntos en el espacio de señal. Ese conjunto de puntos se denomina la constelación de ese esquema de modulación.



Espacio euclídeo de señales

- Para que un espacio vectorial se convierta en euclídeo hay que definir una operación de producto escalar. Definido éste es inmediato determinar la *norma* (relacionada con el módulo) de los vectores, y a partir de ahí calcular distancias entre señales.
- Se define el producto escalar entre dos vectores (dos señales) como:

$$< \vec{r}, \vec{s} > = \int_0^T r(t) \cdot s(t) \cdot dt$$

- En la definición se ha supuesto que las señales están definidas exclusivamente entre 0 y T segundos. Coincide con la definición de correlación entre dos señales de energía finita.
- La energía de una señal puede escribirse como:

$$E_s = < \vec{s}, \vec{s} >$$

- La norma del vector se define de la siguiente forma:

$$\left\| \vec{s} \right\| = \sqrt{E_s} = \sqrt{< \vec{s}, \vec{s} >}$$

Espacio euclídeo de señales

- Se define la *distancia* entre dos vectores como la norma del vector diferencia:

$$d_{rs} = \left\| \vec{r} - \vec{s} \right\|$$

- El decisor del receptor tiene una probabilidad de error que depende de la distancia euclídea entre señales en el espacio

Vectores ortogonales y ortonormales. Método de Gram-Schmidt

- Dos vectores son ortogonales si su producto escalar es cero.
- Un conjunto de vectores es ortonormal si cualquier par de vectores del conjunto es ortogonal y además todos los vectores tienen norma igual a uno. En espacio de señal se suele trabajar con bases ortonormales.
- En ocasiones se dispone del conjunto de señales C $=\{s_1(t), s_2(t),...,s_M(t)\}$ con las que trabaja un sistema de comunicaciones, pero no se conoce una base ortonormal para el espacio vectorial al que pertenecen.
- El método de Gram Schmidt es un procedimiento sencillo para obtener dicha base.

Vectores ortogonales y ortonormales. Método de Gram-Schmidt

1. Se escoge un vector (señal) cualquiera del conjunto *C*. Se normaliza (dividiendo por su módulo) y será el primer vector u_1 de la base B.

2. Tomar otro vector del conjunto *C* : $s_i(t)$

3. Sustraer del vector $s_i(t)$ sus proyecciones sobre los vectores ya incluidos en la base B, obteniendo:

$$\vec{v}_i = \vec{s}_i - \sum_{e_j \in B} < \vec{s}_i, \vec{e}_j > \cdot \vec{e}_j$$

4. Si $v_i(t)$ es nulo pasar al punto siguiente. Si no lo es, normalizarlo e incluirlo en la base B.

5. Volver al punto 2 y repetir el procedimiento hasta que el conjunto esté vacío.

Angulo entre dos vectores: coeficiente de correlación

- A partir del producto escalar se puede definir el ángulo que forman entre sí dos vectores

$$< \vec{r}, \vec{s} > \hat{=} \|\vec{r}\| \cdot \|\vec{s}\| \cdot cos\, \varphi$$

- Al factor cos φ se le denomina habitualmente coeficiente de correlación entre las señales r(t) y s(t), denotándose también con la letra ρ .

$$\rho_{r,s} = cos\, \varphi = \frac{1}{\sqrt{E_r E_s}} \cdot \int_0^T r(t) \cdot s(t) \cdot dt$$

- Si alguna de las energías E_r ó E_s fuese cero, se toma por convenio ρ =0

Angulo entre dos vectores: coeficiente de correlación

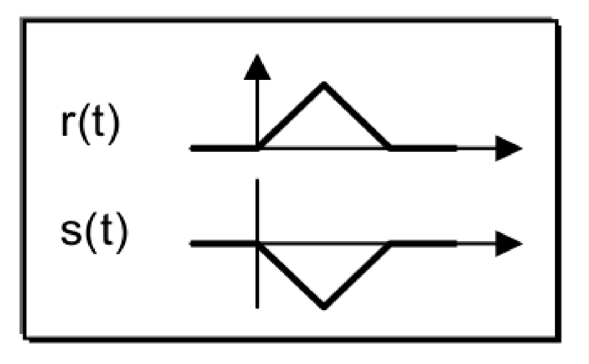
- El coeficiente de correlación facilita mucho el cálculo de distancias entre señales.
- Que dos señales sean muy diferentes es equivalente a decir que la distancia entre ellas es grande.

$$d_{r,s}^2 = \left\| \vec{r} - \vec{s} \right\|^2 = \int_0^T \left[r(t)^2 + s(t)^2 - 2r(t) \cdot s(t) \right] \cdot dt = E_r + E_s - 2\rho_{r,s} \sqrt{E_r \cdot E_s}$$

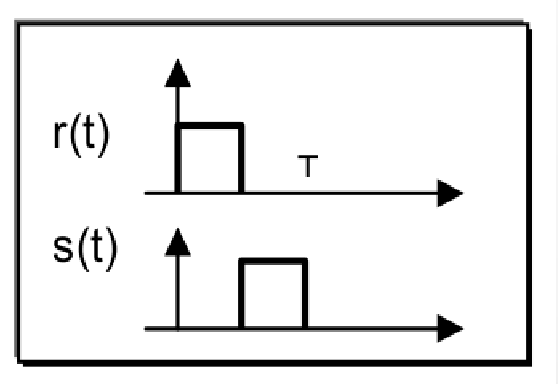
- Para conocer la distancia entre dos señales, no es necesario conocer la forma de las mismas!
- Cuanto mayor sea el coeficiente de correlación entre dos señales, mayor será su distancia.
- Por definición ρ varía en el intervalo [-1, 1].

Angulo entre dos vectores: coeficiente de correlación

- ρ = -1. Se denominan señales antipodales.



- ρ = 0. Se denominan señales ortogonales.



Angulo entre dos vectores: coeficiente de correlación

Lo óptimo para realizar codificaciones de línea en comunicaciones digitales, es utilizar codificación antipodal. Sin embargo tiene el inconveniente de que limita el número de señales posibles a sólo dos (no es posible tener un conjunto de más de dos señales y que cualquiera dos de ellas sean antipodales). La codificación ortogonal es de peores prestaciones, pero es posible diseñar conjuntos de muchas señales todas ellas ortogonales entre sí.

Tratamiento del ruido

- n(t) no pertenece en general al subespacio de trabajo, y por tanto, no se puede representar geométricamente.
- Suponemos señales pertenecientes al subespacio vectorial expandido por la base ortonormal B = {ψ_1, ψ_2,..., ψ_D}.
- El ruido recibido n(t) podrá escribirse como

$$n(t) = n_1 \cdot \overrightarrow{\psi_1} + n_2 \cdot \overrightarrow{\psi_2} + \ldots + n_D \cdot \overrightarrow{\psi_D} + n'(t) = \vec{n} + n'(t)$$

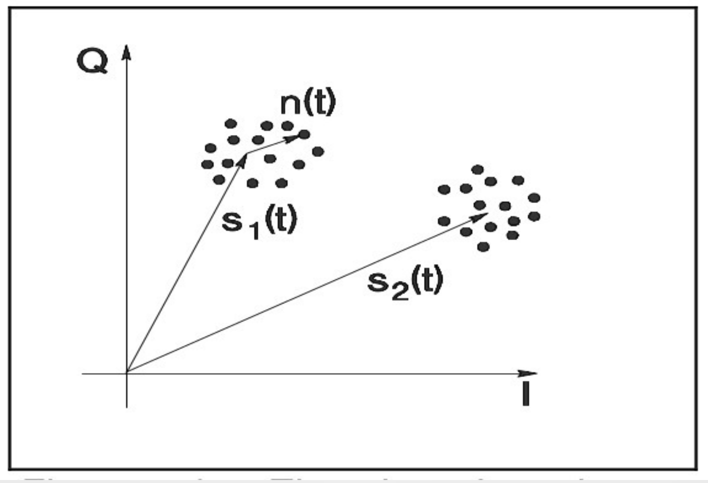
- Siendo las componentes n i las proyecciones de n(t) sobre cada uno de los vectores base

$$n_i = < n(t), \psi_i(t) >$$

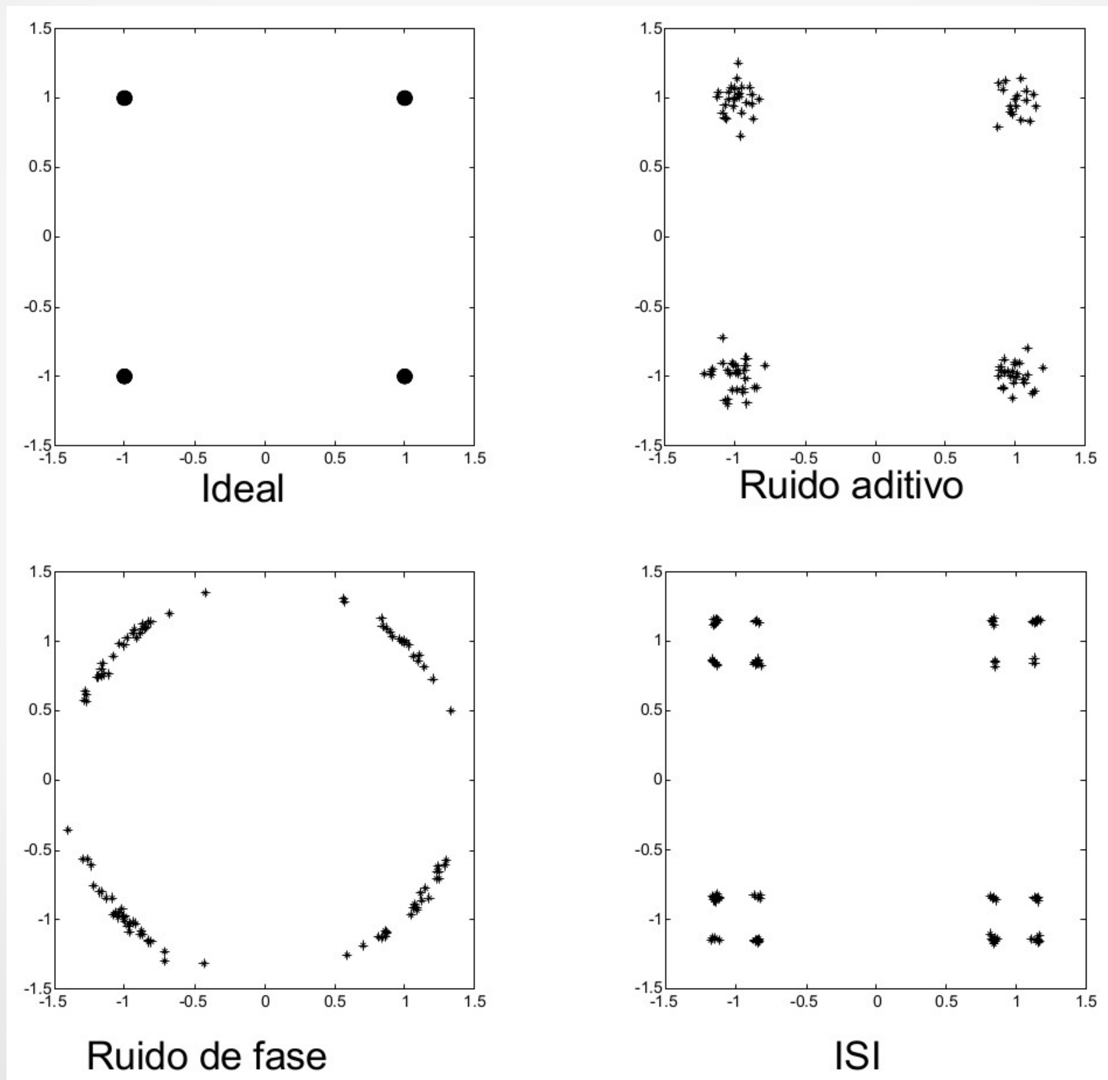
- n’(t) es ortogonal a todos los vectores de la base B y por tanto a todo el subespacio. Este hecho hace que para la mayoría de esquemas de detección, n’(t) no tenga ningún efecto

Tratamiento del ruido

- Habitualmente se ignora y se representa el ruido exclusivamente como el vector $(n_1, n_2, \ldots, n_D)$, es decir, como la proyección de n(t) sobre el espacio de señal.
- En el caso de que n(t) sea gaussiano, las componentes n_i son variables aleatorias gaussianas, independientes entre sí.
- Cada vez que se envía una señal $\vec{s}_k$ de la constelación $(\vec{s}_k \in C)$, se recibirá la señal más un vector de ruido aleatorio: $\vec{z} = \vec{s}_k + \vec{n}$



Calidad de una constelación

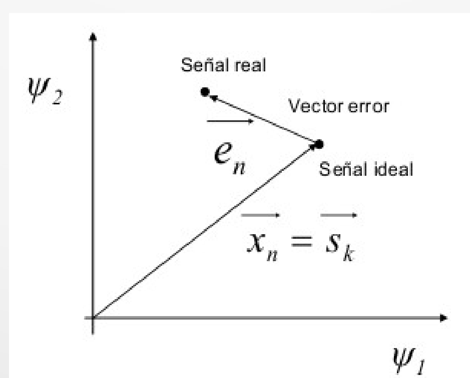


MER

- Modulation Error Ratio.

$$MER(dB) = 10 \cdot \log \frac{< \left\| \vec{x}_n \right\|^2 >}{< \left\| \vec{e}_n \right\|^2 >} \hat{=} 10 \cdot \log \frac{\sum_{n=1}^{N} \left\| \vec{x}_n \right\|^2}{\sum_{n=1}^{N} \left\| \vec{e}_n \right\|^2}$$

- Cociente entre la energía promedio de los símbolos idealmente recibidos y la energía promedio del error en los símbolos realmente recibidos.
- Si el único efecto de degradación que existe en la constelación es ruido aditivo, la MER coincide con la SNR.



EVM

- Error Vector Magnitude

$$EVM(\%) = \frac{\sqrt{\frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N}\left\|\overrightarrow{e_n}\right\|^2}}{v_{MAX}}$$

- Se da relativo a la máxima amplitud (v_{MAX} es la mayor de las normas de los símbolos nominales)