

TEMA 3: DISTRIBUCIONES EN EL MUESTREO PARA POBLACIONES NORMALES

Estimación I

Grado en Estadística Aplicada

Curso 2019-2020

Cartagena99

CLASES PARTICULARES TUTORÍAS
LLAMA O ENVÍA WHATSAPP. 689 45 44 70
ONLINE PRIVATE LESSONS FOR SC
CALL OR WHATSAPP. 689 45 44 70

Como ya hemos visto, la distribución teórica **normal es muy frecuente** en estadística. Además, aunque la distribución teórica de los datos no sea normal, para **muestras grandes**, la distribución de la media muestral también se **aproxima** a una normal (por el Teorema Central del Límite).

Por dicho motivo, en este tema vamos a estudiar algunas **distribuciones relacionadas con la normal**, así como la **distribución en el muestreo** de varios estadísticos cuando se asume que la distribución poblacional es normal.

Sea X_1, \dots, X_n una m.a.s. de $X \sim N(\mu, \sigma)$.

- $\bar{X} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n X_i$ es el estimador máximo verosimil, así como el EIMV, para μ .
- Además, $\bar{X} \sim N(\mu, \sigma/\sqrt{n})$.
- Si $\mu = \mu_0$ es conocido, $\frac{1}{n} \sum_{i=1}^n (X_i - \mu_0)^2$ es el estimador máximo verosimil, así como el EIMV, para σ^2 .

Cartagena99

CLASES PARTICULARES TUTORÍAS
LLAMA O ENVÍA WHATSAPP. 689 45 44 70
ONLINE PRIVATE LESSONS FOR SC
CALL OR WHATSAPP. 689 45 44 70

DEFINICIÓN: DISTRIBUCIÓN χ^2

Sea $X \sim N(0, 1)$ y sea $Y = X^2$. Por definición, diremos que Y sigue una distribución **chi-cuadrado** con un grado de libertad χ_1^2 .

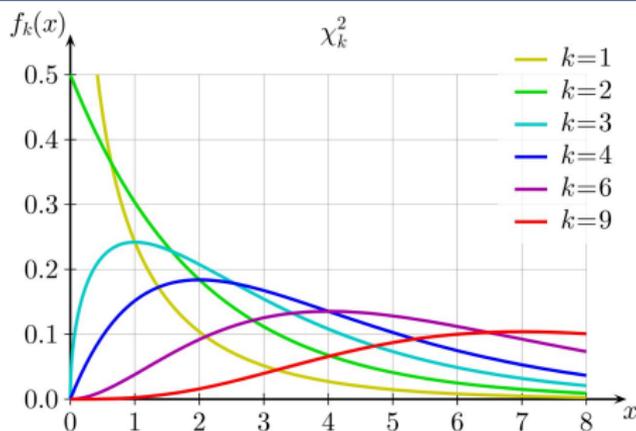
$$\text{Si } Y \sim \chi_1^2, \text{ entonces } Y \sim \Gamma\left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right).$$

Sea X_1, \dots, X_n una m.a.s. de $X \sim N(0, 1)$ y sea $Y = \sum_{i=1}^n X_i^2$. Por definición, diremos que Y sigue una distribución **chi-cuadrado** con n grados de libertad χ_n^2 .

$$\text{Si } Y \sim \chi_n^2, \text{ entonces } Y \sim \Gamma\left(\frac{n}{2}, \frac{1}{2}\right).$$

Cartagena99

CLASES PARTICULARES TUTORÍAS
 LLAMA O ENVIA WHATSAPP. 689 45
 ONLINE PRIVATE LESSONS FOR SC
 CALL OR WHATSAPP. 689 45 44 70

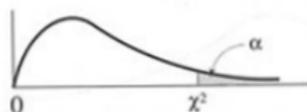


PROPIEDADES DE LA DISTRIBUCIÓN χ^2

- La distribución χ^2 es **reproductiva**.
- $E[\chi_n^2] = n$.
- $Var[\chi_n^2] = 2n$.

Cartagena99

CLASES PARTICULARES TUTORÍAS
LLAMA O ENVÍA WHATSAPP. 689 45 44 70
ONLINE PRIVATE LESSONS FOR SC
CALL OR WHATSAPP. 689 45 44 70



dl	.995	.990	.975	.950	.900	.750	.500	.250	.100	.050	.025	.010	.005
1	0.00	0.00	0.00	0.00	0.02	0.10	0.45	1.32	2.71	3.84	5.02	6.63	7.88
2	0.01	0.02	0.05	0.10	0.21	0.58	1.39	2.77	4.61	5.99	7.38	9.21	10.59
3	0.07	0.11	0.22	0.35	0.58	1.21	2.37	4.11	6.25	7.82	9.35	11.35	12.84
4	0.21	0.30	0.48	0.71	1.06	1.92	3.36	5.39	7.78	9.49	11.14	13.28	14.86
5	0.41	0.55	0.83	1.15	1.61	2.67	4.35	6.63	9.24	11.07	12.83	15.09	16.75
6	0.68	0.87	1.24	1.64	2.20	3.45	5.35	7.84	10.64	12.59	14.45	16.81	18.55
7	0.99	1.24	1.69	2.17	2.83	4.25	6.35	9.04	12.02	14.07	16.01	18.48	20.28
8	1.34	1.65	2.18	2.73	3.49	5.07	7.34	10.22	13.36	15.51	17.54	20.09	21.99
9	1.73	2.09	2.70	3.33	4.17	5.90	8.34	11.39	14.68	16.92	19.02	21.66	23.58
10	2.15	2.56	3.25	3.94	4.87	6.74	9.34	12.55	15.99	18.31	20.48	23.21	25.19
11	2.60	3.05	3.82	4.57	5.58	7.58	10.34	13.70	17.28	19.68	21.92	24.72	26.75
12	3.07	3.57	4.40	5.23	6.30	8.44	11.34	14.85	18.55	21.03	23.34	26.21	28.30
13	3.56	4.11	5.01	5.89	7.04	9.30	12.34	15.98	19.81	22.36	24.74	27.69	29.81
14	4.07	4.66	5.63	6.57	7.79	10.17	13.34	17.12	21.06	23.69	26.12	29.14	31.30
15	4.60	5.23	6.26	7.26	8.55	11.04	14.34	18.25	22.31	25.00	27.49	30.58	32.80
16	5.14	5.81	6.91	7.96	9.31	11.91	15.34	19.37	23.54	26.30	28.85	32.00	34.27

Cartagena99

CLASES PARTICULARES TUTORÍAS
 LLAMA O ENVÍA WHATSAPP. 689 45 44 70
 ONLINE PRIVATE LESSONS FOR SC
 CALL OR WHATSAPP. 689 45 44 70

Sea X_1, \dots, X_n una m.a.s. de $X \sim N(0, \sqrt{\theta})$. Calcula la cota de Cramer-Rao para θ y demuestra que $\frac{1}{n} \sum_{i=1}^n X_i^2$ es insesgado y su varianza alcanza la cota.

Cartagena99

CLASES PARTICULARES TUTORÍAS
 LLAMA O ENVIA WHATSAPP. 689 45
 ONLINE PRIVATE LESSONS FOR SC
 CALL OR WHATSAPP. 689 45 44 70

EJERCICIO 1

La cantidad de vitamina C (en gr.) contenida en una naranja se distribuye según χ_1^2 . Si la cantidad de vitamina C recomendada son 3 gr., ¿con que probabilidad no se alcanza esa cantidad al consumir una naranja? Suponiendo que la cantidad de vitamina C que contienen las naranjas es independiente, ¿cuántas naranjas ha de consumir para asegurar que se han ingerido 3 gr. con una probabilidad del 95 %?


 The logo for Cartagena99 features the text 'Cartagena99' in a stylized, teal-colored font. The '99' is significantly larger and more prominent than the 'Cartagena' part. The text is set against a light blue and white background with a subtle wave-like pattern.

CLASES PARTICULARES TUTORÍAS
 LLAMA O ENVIA WHATSAPP. 689 45 44 70
 ONLINE PRIVATE LESSONS FOR SCIENCE
 CALL OR WHATSAPP. 689 45 44 70

DEFINICIÓN: DISTRIBUCIÓN t DE STUDENT

Sea $X \sim N(0, 1)$ e $Y \sim \chi_n^2$ **independientes**. Por definición, diremos que

$$T = \frac{X}{\sqrt{Y/n}}$$

sigue una distribución **t de Student** con n grados de libertad t_n .

Así, si dividimos una normal tipificada entre la raíz de una χ^2 corregida por sus grados de libertad, siendo ambas independientes, la distribución resultante es t .

PROPIEDADES DE LA DISTRIBUCIÓN t DE STUDENT

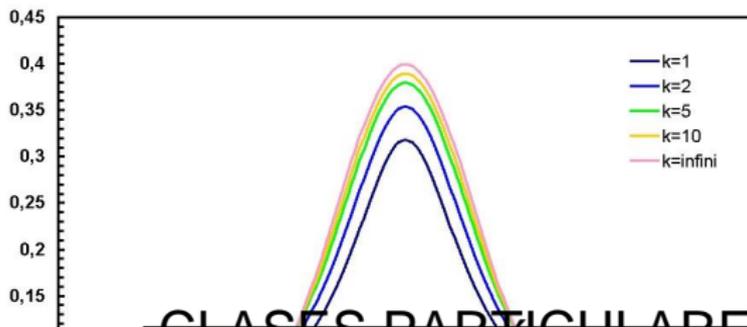
- $E[t_n] = 0$, si $n > 1$.
- $Var[t_n] = \frac{n}{n-2}$, si $n > 2$.

Cartagena99

CLASES PARTICULARES, TUTORÍAS
LLAMA O ENVÍA WHATSAPP. 689 45 44 70
ONLINE PRIVATE LESSONS FOR SC
CALL OR WHATSAPP. 689 45 44 70

PROPIEDADES DE LA DISTRIBUCIÓN t DE STUDENT

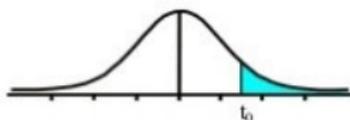
- Se trata de una distribución **simétrica**, similar a la de la normal, pero con colas **más pesadas**.
- No hay una expresión sencilla para su función de distribución, por lo que se hace necesario el uso de **tablas**.
- Para valores de n **grandes**, $t_n \approx N(0, 1)$.



Cartagena99

CLASES PARTICULARES TUTORÍAS
LLAMA O ENVIA WHATSAPP. 689 45 44 70
ONLINE PRIVATE LESSONS FOR SCIENCE
CALL OR WHATSAPP. 689 45 44 70

Tabla t-Student



Grados de libertad	0.25	0.1	0.05	0.025	0.01	0.005
1	1.0000	3.0777	6.3137	12.7062	31.8210	63.6559
2	0.8165	1.8856	2.9200	4.3027	6.9645	9.9250
3	0.7649	1.6377	2.3534	3.1824	4.5407	5.8408
4	0.7407	1.5332	2.1318	2.7765	3.7469	4.6041
5	0.7267	1.4759	2.0150	2.5706	3.3649	4.0321
6	0.7176	1.4398	1.9432	2.4469	3.1427	3.7074
7	0.7111	1.4149	1.8946	2.3646	2.9979	3.4995
8	0.7064	1.3968	1.8595	2.3060	2.8965	3.3554
9	0.7027	1.3830	1.8331	2.2622	2.8214	3.2498
10	0.6998	1.3722	1.8125	2.2281	2.7638	3.1693
11	0.6974	1.3634	1.7959	2.2010	2.7181	3.1058
12	0.6955	1.3562	1.7823	2.1788	2.6810	3.0545
13	0.6938	1.3502	1.7709	2.1604	2.6503	3.0123
14	0.6924	1.3450	1.7613	2.1448	2.6245	2.9768
15	0.6912	1.3406	1.7531	2.1315	2.6025	2.9467

Cartagena99

CLASES PARTICULARES TUTORÍAS
 LLAMA O ENVIA WHATSAPP. 689 45 44 70
 ONLINE PRIVATE LESSONS FOR SC
 CALL OR WHATSAPP. 689 45 44 70

EJERCICIO 2

Sea X_1, \dots, X_5 una m.a.s. de una $N(0, 1)$. Determina el valor de c para que la siguiente v.a. tenga distribución t de Student:

$$c \frac{X_1 + X_2}{\sqrt{X_3^2 + X_4^2 + X_5^2}}$$



Cartagena99

CLASES PARTICULARES TUTORÍAS
 LLAMA O ENVIA WHATSAPP. 689 45 44 70
 ONLINE PRIVATE LESSONS FOR SC
 CALL OR WHATSAPP. 689 45 44 70

DEFINICIÓN: DISTRIBUCIÓN F DE SNEDECOR

Sea $X \sim \chi_n^2$ e $Y \sim \chi_m^2$ **independientes**. Por definición, diremos que

$$F = \frac{X/n}{Y/m}$$

sigue una distribución **F de Snedecor** con n y m grados de libertad $F_{n,m}$.

Así, si dividimos dos chi-cuadrados independientes corregidos por sus grados de libertad, la distribución resultante es F .

PROPIEDADES DE LA DISTRIBUCIÓN F DE SNEDECOR

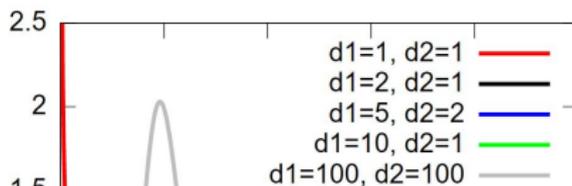
- $E[F_{n,m}] = \frac{m}{m-2}$, si $m > 2$.
- Si $T \sim t_n$, entonces $T^2 \sim F_{1,n}$.

Cartagena99

CLASES PARTICULARES TUTORÍAS
LLAMA O ENVIA WHATSAPP. 689 45 44 70
ONLINE PRIVATE LESSONS FOR SCIENCE
CALL OR WHATSAPP. 689 45 44 70

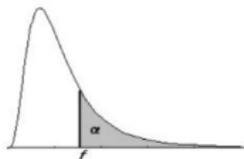
PROPIEDADES DE LA DISTRIBUCIÓN F DE SNEDECOR

- Si $F \sim F_{n,m}$, entonces $\frac{1}{F} \sim F_{m,n}$.
- No hay una expresión sencilla para su función de distribución, por lo que se hace necesario el uso de **tablas**. En este caso, además, existe una tabla para cada valor de probabilidad (pues las filas y las columnas se emplean para los grados de libertad).



Cartagena99

CLASES PARTICULARES TUTORÍAS
LLAMA O ENVIA WHATSAPP. 689 45
ONLINE PRIVATE LESSONS FOR SC
CALL OR WHATSAPP. 689 45 44 70



$\alpha = 0,05$		1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	15
$m \setminus n$														
1		161,45	199,50	215,71	224,58	230,16	233,99	236,77	238,88	240,54	241,88	242,98	243,90	245,95
2		18,51	19,00	19,16	19,25	19,30	19,33	19,35	19,37	19,38	19,40	19,40	19,41	19,43
3		10,13	9,55	9,28	9,12	9,01	8,94	8,89	8,85	8,81	8,79	8,76	8,74	8,70
4		7,71	6,94	6,59	6,39	6,26	6,16	6,09	6,04	6,00	5,96	5,94	5,91	5,86
5		6,61	5,79	5,41	5,19	5,05	4,95	4,88	4,82	4,77	4,74	4,70	4,68	4,62
6		5,99	5,14	4,76	4,53	4,39	4,28	4,21	4,15	4,10	4,06	4,03	4,00	3,94
7		5,59	4,74	4,35	4,12	3,97	3,87	3,79	3,73	3,68	3,64	3,60	3,57	3,51
8		5,32	4,46	4,07	3,84	3,69	3,58	3,50	3,44	3,39	3,35	3,31	3,28	3,22
9		5,12	4,26	3,86	3,63	3,48	3,37	3,29	3,23	3,18	3,14	3,10	3,07	3,01
10		4,96	4,10	3,71	3,48	3,33	3,22	3,14	3,07	3,02	2,98	2,94	2,91	2,85

Las tablas sólo existen para valores de α pequeños, para α grandes, usamos:

$$\alpha = P\{F_{n,m} > F_{n,m,\alpha}\} = P\left\{\frac{1}{F_{n,m}} < \frac{1}{F_{n,m,\alpha}}\right\}$$

Cartagena99

CLASES PARTICULARES TUTORÍAS
 LLAMA O ENVIA WHATSAPP. 689 45
 ONLINE PRIVATE LESSONS FOR SC
 CALL OR WHATSAPP. 689 45 44 70

EJERCICIO 3

El gasto mensual en alimentación y los ingresos totales de una familia (en cientos de euros) tienen distribución χ^2 con medias 5 y 12, respectivamente. ¿Qué proporción de las familias destina más del 13 % de sus ingresos en alimentación?

Cartagena99

CLASES PARTICULARES TUTORÍAS
LLAMA O ENVÍA WHATSAPP. 689 45 44 70
ONLINE PRIVATE LESSONS FOR SCIENCE
CALL OR WHATSAPP. 689 45 44 70

Una vez estudiadas las distribuciones más importantes asociadas con la distribución normal, vamos a estudiar la **distribución en el muestreo** de algunos estadísticos cuando la distribución poblacional es normal.

TEOREMA DE FISHER

Sea X_1, \dots, X_n una m.a.s. de $X \sim N(\mu, \sigma)$.

- Ⓘ $\bar{X} \sim N(\mu, \sigma/\sqrt{n}) \Leftrightarrow \frac{\bar{X}-\mu}{\sigma} \sqrt{n} \sim N(0, 1)$
- Ⓜ $\frac{nS^2}{\sigma^2} = \frac{(n-1)S_c^2}{\sigma^2} = \frac{\sum_{i=1}^n (X_i - \bar{X})^2}{\sigma^2} \sim \chi_{n-1}^2$
- Ⓜ \bar{X} y S^2 son v.a. **independientes**.

Nótese que I y II especifican la distribución de la media y la varianza muestral, lo que nos será de utilidad para obtener **intervalos de confianza** en el siguiente capítulo.

Cartagena99

CLASES ONLINE PARTICULARES PARA CÁLCULO
 LLAMA O ENVÍA WHATSAPP. 689 45 44 70
 ONLINE PRIVATE LESSONS FOR CALCULUS
 CALL OR WHATSAPP. 689 45 44 70

EJERCICIO 4

Consideremos X_1, \dots, X_{20} m.a.s. de $X \sim N(\mu, \sqrt{3})$. Calcula $P\{S_c^2 > 1'5\}$.

Cartagena99

CLASES PARTICULARES TUTORÍAS
LLAMA O ENVIA WHATSAPP. 689 45 44 70
ONLINE PRIVATE LESSONS FOR SC
CALL OR WHATSAPP. 689 45 44 70

EJERCICIO 5

Consideremos X_1, \dots, X_{100} m.a.s. de $X \sim N(2'5, 6)$. Calcula $P \{ 1'5 < \bar{X} < 3'5, 30 < S^2 < 44 \}$.


 The logo for Cartagena99 features the text 'Cartagena99' in a stylized, teal-colored font. The '99' is slightly larger and more prominent. The text is set against a light blue and white background with a subtle wave-like pattern.

CLASES PARTICULARES TUTORÍAS
 LLAMA O ENVIA WHATSAPP. 689 45 44 70
 ONLINE PRIVATE LESSONS FOR SC
 CALL OR WHATSAPP. 689 45 44 70

DISTRIBUCIÓN DE LA MEDIA MUESTRAL CON σ DESCONOCIDA

Sea X_1, \dots, X_n una m.a.s. de $X \sim N(\mu, \sigma)$, con σ **desconocido**. Entonces,

$$T = \frac{\bar{X} - \mu}{S} \sqrt{n-1} = \frac{\bar{X} - \mu}{S_c} \sqrt{n} \sim t_{n-1}$$



Cartagena99

CLASES PARTICULARES TUTORÍAS
 LLAMA O ENVÍA WHATSAPP. 689 45 44 70
 ONLINE PRIVATE LESSONS FOR SC
 CALL OR WHATSAPP. 689 45 44 70

DIFERENCIA DE MEDIAS EN DOS POBLACIONES INDEPENDIENTES NORMALES

Sea X_1, \dots, X_n una m.a.s. de $X \sim N(\mu_X, \sigma_X)$ y Y_1, \dots, Y_m una m.a.s. de $Y \sim N(\mu_Y, \sigma_Y)$, **independientes** entre sí. Entonces,

- si σ_X y σ_Y son **conocidas**,

$$\frac{\bar{X} - \bar{Y} - (\mu_X - \mu_Y)}{\sqrt{\sigma_X^2/n + \sigma_Y^2/m}} \sim N(0, 1)$$

- si σ_X y σ_Y son **desconocidas**, pero iguales, $\sigma_X = \sigma_Y = \sigma$,

$$\frac{\bar{X} - \bar{Y} - (\mu_X - \mu_Y)}{\sqrt{\frac{nS_X^2 + mS_Y^2}{n+m-2}} \sqrt{\frac{1}{n} + \frac{1}{m}}} \sim t_{n+m-2}$$

EJERCICIO 6

Demuestra los puntos anteriores.

Cartagena99

CLASES PARTICULARES TUTORÍAS
 LLAMA O ENVÍA WHATSAPP. 689 45 44 70
 ONLINE PRIVATE LESSONS FOR SC
 CALL OR WHATSAPP. 689 45 44 70

COCIENTE DE VARIANZAS EN DOS POBLACIONES INDEPENDIENTES NORMALES

Sea X_1, \dots, X_n una m.a.s. de $X \sim N(\mu_X, \sigma_X)$ y Y_1, \dots, Y_m una m.a.s. de $Y \sim N(\mu_Y, \sigma_Y)$, **independientes** entre sí, con μ_X y μ_Y desconocidos.

Entonces,

$$\frac{S_{c,X}^2 / \sigma_X^2}{S_{c,Y}^2 / \sigma_Y^2} \sim F_{n-1, m-1}$$

Cartagena99

CLASES PARTICULARES TUTORÍAS
 LLAMA O ENVIA WHATSAPP. 689 45 44 70
 ONLINE PRIVATE LESSONS FOR SC
 CALL OR WHATSAPP. 689 45 44 70

EJERCICIO 7

Consideremos dos m.a.s. de tamaños $n = 5$ y $m = 4$ de dos poblaciones normales independientes, con $\sigma_X = \sigma_Y$. Calcula:

$$\text{a) } P \left\{ \frac{S_{c,X}^2}{S_{c,Y}^2} > 6'25 \right\}$$

$$\text{b) } P \left\{ \frac{S_{c,X}^2}{S_{c,Y}^2} < 0'192 \right\} .$$

Cartagena99

CLASES PARTICULARES TUTORÍAS
 LLAMA O ENVIA WHATSAPP. 689 45 44 70
 ONLINE PRIVATE LESSONS FOR SC
 CALL OR WHATSAPP. 689 45 44 70

DIFERENCIA DE MEDIAS EN UNA POBLACIÓN BIDIMENSIONAL NORMAL

Sea $(X_1, Y_1), \dots, (X_n, Y_n)$ una m.a.s. de $(X, Y) \sim N(\boldsymbol{\mu}, \boldsymbol{\Sigma})$, con

$$\boldsymbol{\mu} = (\mu_X, \mu_Y) \quad \text{y} \quad \boldsymbol{\Sigma} = \begin{bmatrix} \sigma_X^2 & \sigma_{XY} \\ \sigma_{XY} & \sigma_Y^2 \end{bmatrix}$$

Entonces,

- si $\boldsymbol{\Sigma}$ es **conocida**,

$$\frac{\bar{X} - \bar{Y} - (\mu_X - \mu_Y)}{\sqrt{\sigma_X^2 + \sigma_Y^2 - 2\sigma_{XY}}} \sqrt{n} \sim N(0, 1)$$

- si algún elemento de $\boldsymbol{\Sigma}$ es **desconocido**, definimos $Z = X - Y$, con lo que $(Z_1, \dots, Z_n) = (X_1 - Y_1, \dots, X_n - Y_n)$ es una m.a.s. de

$Z \sim N(\mu_Z, \sigma_Z) \equiv N(\mu_X - \mu_Y, \sqrt{\sigma_X^2 + \sigma_Y^2 - 2\sigma_{XY}})$ y, por tanto,

$$\frac{\bar{Z} - \mu_Z}{S_Z} \sqrt{n-1} = \frac{\bar{X} - \bar{Y} - (\mu_X - \mu_Y)}{\sqrt{\frac{1}{n} \sum_{i=1}^n (X_i - Y_i - (\bar{X} - \bar{Y}))^2}} \sqrt{n-1} \sim t_{n-1}$$

Cartagena99

CLASES PARTICULARES TUTORÍAS
 LLAMA O ENVÍA WHATSAPP. 689 45 44 70
 ONLINE PRIVATE LESSONS FOR SC
 CALL OR WHATSAPP. 689 45 44 70

EJERCICIO 8

Sean $(X_1, Y_1), \dots, (X_6, Y_6)$ m.a.s. de $X \sim N(\boldsymbol{\mu}, \boldsymbol{\Sigma})$, con

$$\boldsymbol{\mu} = (7, 8) \quad \text{y} \quad \boldsymbol{\Sigma} = \begin{bmatrix} 4 & -2 \\ -2 & 3 \end{bmatrix}.$$

Calcula: $P\{\bar{X} - \bar{Y} > 0'41\}$.

Cartagena99

CLASES PARTICULARES TUTORÍAS
 LLAMA O ENVIA WHATSAPP. 689 45 44 70
 ONLINE PRIVATE LESSONS FOR SC
 CALL OR WHATSAPP. 689 45 44 70