



Tema 0

Revisión de Señales y Sistemas en el dominio del tiempo

4-sept-11

JAG - DTSC, UC3M

1

Contenido

1. Señales

- 1.1 Definición
- 1.2 Operaciones con Señales
- 1.3 Propiedades de las Señales
- 1.4 Caracterización
- 1.5 Señales Elementales

**CLASES PARTICULARES, TUTORÍAS TÉCNICAS ONLINE
LLAMA O ENVÍA WHATSAPP: 689 45 44 70**

**ONLINE PRIVATE LESSONS FOR SCIENCE STUDENTS
CALL OR WHATSAPP:689 45 44 70**

4-sept-11

JAG - DTSC, UC3M

2

Contenido

- 3. Sistemas Lineales e Invariantes (LTIS)
 - 3.1 Caracterización de LTIS discretos
 - 3.2 Caracterización de LTIS continuos
 - 3.3 Convolución de señales. Propiedades
 - 3.4 Propiedades de los LTIS
 - 3.5 LTIS descritos por ec. diferenciales y en diferencias

4-sept-11

JAG - DTSC, UC3M

3

1.1. Señales

Señal:

1. Representación de información en el tiempo/espacio
2. Descriptor de la variación de una magnitud en el tiempo/espacio
 - a) En tiempo continuo: $x(t)$; $t \in \mathfrak{R}$; $x(t) \in \mathcal{C}$
 - b) Secuencias: $x[n]$; $n \in \mathcal{Z}$; $x[n] \in \mathcal{C}$

Ejemplos:

CLASES PARTICULARES, TUTORÍAS TÉCNICAS ONLINE
LLAMA O ENVÍA WHATSAPP: 689 45 44 70

ONLINE PRIVATE LESSONS FOR SCIENCE STUDENTS
CALL OR WHATSAPP:689 45 44 70

4-sept-11

JAG - DTSC, UC3M

4

1.2. Operaciones con Señales

- Suma: $x(t) + y(t) = z(t)$
(Suma para cada valor de t (ó n))
- Producto por escalar: $\alpha x(t)$; En general, $\alpha \in \mathcal{C}$
- Producto de señales: $x(t) \cdot y(t) = z(t)$
(Producto para cada valor de t (ó n))
- Producto escalar de señales

$$\langle x(t), y(t) \rangle = \int_{-\infty}^{\infty} x(t)y^*(t)dt$$

$$\langle x[n], y[n] \rangle = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x[n]y^*[n]$$

⇒ El espacio de señales, dotado de estas 4 operaciones, constituye un espacio de Hilbert

4-sept-11

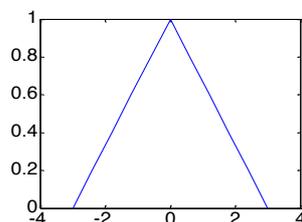
JAG - DTSC, UC3M

5

Transformaciones de la variable independiente

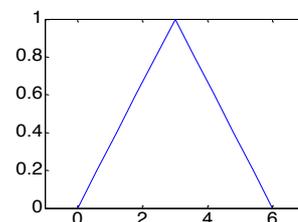
a) Desplazamiento temporal

- $x(t - t_0)$; $t_0 \in \mathbb{R}$
 - $x[n - n_0]$; $n_0 \in \mathbb{Z}$
- | |
|---|
| <ul style="list-style-type: none"> • $t_0, n_0 > 0$; Despl. a derechas (retardo) • $t_0, n_0 < 0$; Despl. a izquierdas (adelanto) |
|---|



$x(t)$

$x(t-3)$



CLASES PARTICULARES, TUTORÍAS TÉCNICAS ONLINE
LLAMA O ENVÍA WHATSAPP: 689 45 44 70

ONLINE PRIVATE LESSONS FOR SCIENCE STUDENTS
CALL OR WHATSAPP:689 45 44 70

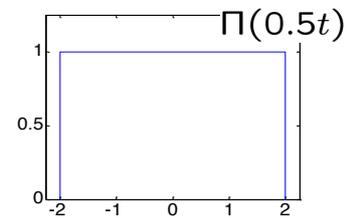
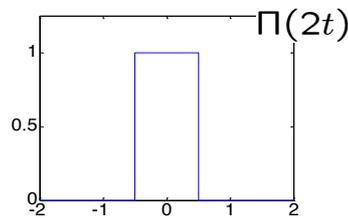
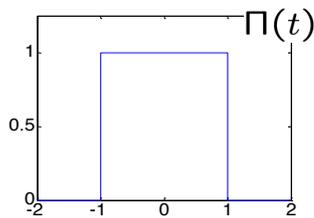
4-sept-11

JAG - DTSC, UC3M

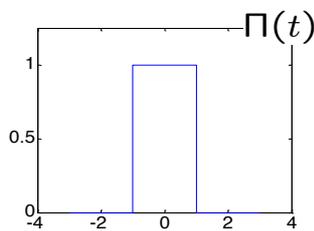
6

Transformaciones de la variable independiente

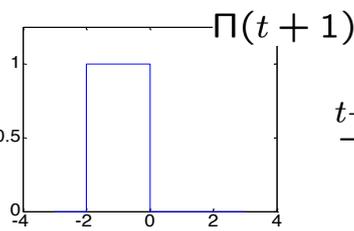
c) Escalado (variable continua): $x(\alpha t)$ $\begin{cases} \alpha = -1; & \text{abatimiento} \\ |\alpha| > 1; & \text{compresión} \\ |\alpha| < 1; & \text{dilatación} \end{cases}$



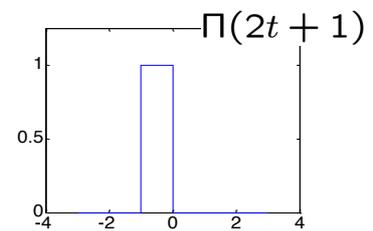
⇒ Varias de las anteriores pueden concatenarse: $\Pi(2t + 1)$



$t \rightarrow t+1$
→



$t \rightarrow 2t$
→



4-sept-11

JAG - DTSC, UC3M

7

1.3. Propiedades de las Señales

a) Periodicidad: $x(t)$ ($x[n]$) es periódica si existe

$$T \in \mathbb{R}^+ \quad (N \in \mathbb{N}) \text{ tal que } x(t) = x(t + T) \quad \forall t$$

$$x[n] = x[n + N] \quad \forall n$$

(En caso contrario se dice aperiódica)

El Período fundamental es el mínimo T (N) que verifica lo anterior

b) Paridad: Propiedad de simetría respecto al eje de ordenadas

CLASES PARTICULARES, TUTORÍAS TÉCNICAS ONLINE
LLAMA O ENVÍA WHATSAPP: 689 45 44 70

ONLINE PRIVATE LESSONS FOR SCIENCE STUDENTS
CALL OR WHATSAPP:689 45 44 70

4-sept-11

JAG - DTSC, UC3M

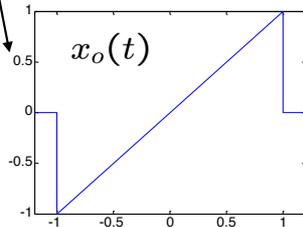
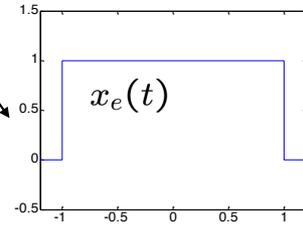
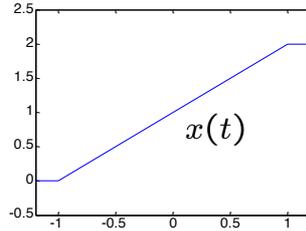
8

Propiedades de las Señales

Toda señal se puede descomponer en suma de una señal par y otra impar

$$x_e(t) = \frac{1}{2} [x(t) + x(-t)]$$

$$x_o[n] = \frac{1}{2} \{x[n] - x[-n]\}$$



c) Hermiticidad:

- Señal hermítica: $x(t) = x^*(-t)$;
 - Señal antihermítica: $x(t) = -x^*(-t)$;
- $$x_h[n] = \frac{1}{2} \{x[n] + x^*[-n]\}$$
- $$x_a[n] = \frac{1}{2} \{x[n] - x^*[-n]\}$$

d) Carácter Real o Imaginario

4-sept-11

JAG - DTSC, UC3M

9

1.4. Caracterización de las señales

a) Valor medio temporal

$$\langle x(t) \rangle = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{2T} \int_{-T}^T x(t) dt; \quad \langle x[n] \rangle = \lim_{N \rightarrow \infty} \frac{1}{2N+1} \sum_{n=-N}^N x[n]$$

b) Valor de pico: $x_p = \max_t |x(t)|$

c) Valor cuadrático o energía

$$E(x) = \langle x(t), x(t) \rangle = \int_{-\infty}^{\infty} |x(t)|^2 dt; \quad E(x) = \langle x[n], x[n] \rangle = \sum_{n=-\infty}^{\infty} |x[n]|^2$$

**CLASES PARTICULARES, TUTORÍAS TÉCNICAS ONLINE
LLAMA O ENVÍA WHATSAPP: 689 45 44 70**

**ONLINE PRIVATE LESSONS FOR SCIENCE STUDENTS
CALL OR WHATSAPP:689 45 44 70**

4-sept-11

JAG - DTSC, UC3M

10

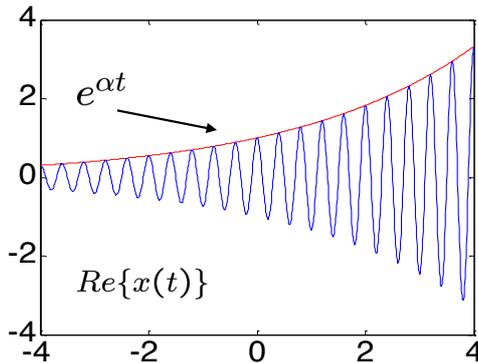
1.5. Señales Elementales

a) Exponenciales complejas continuas

$$x(t) = Ce^{at}; C, a \in \mathbb{C}; a = \alpha + j\omega$$

$$x(t) = \underbrace{Ce^{\alpha t}}_{\text{Exp. Real (Aperiódica)}} \underbrace{e^{j\omega t}}_{\text{Sinusoide Compleja (Periódica)}}$$

- α caracteriza la amplitud
- ω la velocidad de oscilación
- Si $\alpha = 0 \rightarrow$ Señal periódica
Período fundamental: $T_0 = \frac{2\pi}{|\omega|}$



4-sept-11

JAG - DTSC, UC3M

11

Señales Elementales

b) Exponenciales complejas discretas

$$x[n] = Ce^{an} = Ce^{\alpha n} \underbrace{e^{j\omega n}}_{\text{Sinusoide Compleja}}$$

Diferencias respecto a la sinusoide compleja en tiempo continuo:

- Periódica únicamente si $\omega N_0 = 2\pi k$, para $N_0, k \in \mathbb{Z}$
- El período puede corresponder a más de un cambio de signo



CLASES PARTICULARES, TUTORÍAS TÉCNICAS ONLINE
LLAMA O ENVÍA WHATSAPP: 689 45 44 70

ONLINE PRIVATE LESSONS FOR SCIENCE STUDENTS
CALL OR WHATSAPP:689 45 44 70

4-sept-11

JAG - DTSC, UC3M

12

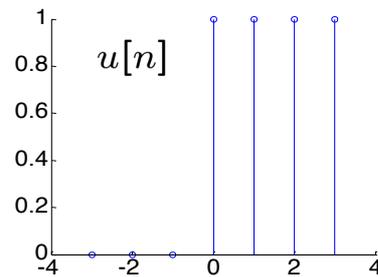
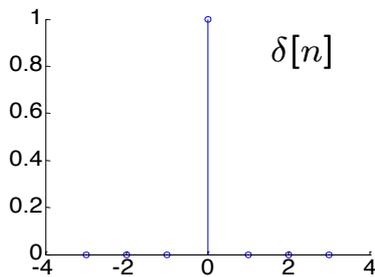
Señales Elementales

c) Secuencias delta y escalón

$$\delta[n] = \begin{cases} 1; & n = 0 \\ 0; & n \neq 0 \end{cases} \quad u[n] = \begin{cases} 0; & n < 0 \\ 1; & n \geq 0 \end{cases}$$

Propiedades:

- $x[n]\delta[n - n_0] = x[n_0]\delta[n - n_0] \rightarrow x[n] = \sum_{k=-\infty}^{\infty} x[k]\delta[n - k]$
- $u[n] = \sum_{k=-\infty}^n \delta[k]$
- $\delta[n] = u[n] - u[n - 1]$



4-sept-11

JAG - DTSC, UC3M

13

Señales Elementales

d) Funciones delta y escalón en tiempo continuo

$$\delta(t) = \begin{cases} 0; & t \neq 0 \\ \text{par} \\ \int_{-\infty}^{\infty} \delta(t) = 1 \end{cases}$$

Propiedades:

- $x(t)\delta(t - t_0) = x(t_0)\delta(t - t_0) \rightarrow x(t) = \int_{-\infty}^{\infty} x(\tau)\delta(t - \tau)d\tau$
- $u(t) = \int_{-\infty}^t \delta(\tau)d\tau$

CLASES PARTICULARES, TUTORÍAS TÉCNICAS ONLINE
LLAMA O ENVÍA WHATSAPP: 689 45 44 70

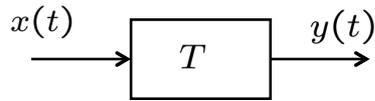
ONLINE PRIVATE LESSONS FOR SCIENCE STUDENTS
CALL OR WHATSAPP:689 45 44 70

4-sept-11

JAG - DTSC, UC3M

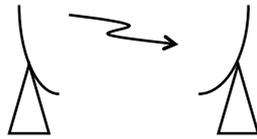
14

2. Sistemas

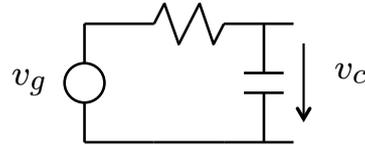


$$y(t) = T\{x(t)\}$$

Def: Es una representación de un ente físico que responde a excitaciones a su entrada

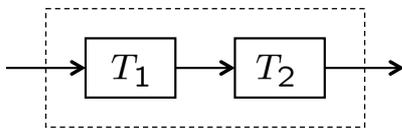


$$r(t) = T\{s(t)\}$$

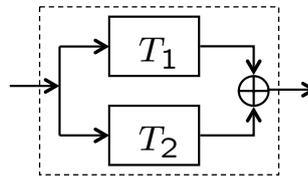


$$v_c(t) = T\{v_g(t)\}$$

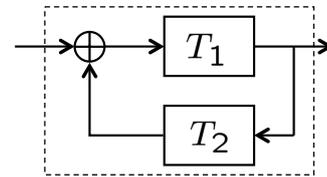
Interconexión:



Serie o Cascada



Paralelo



Con realimentación

4-sept-11

JAG - DTSC, UC3M

15

2.3. Propiedades Fundamentales

- a) Memoria: La salida en cada instante (t, n) depende únicamente del valor de la entrada en ese instante

$$y[n] = x^2[n] + 1; \quad y(t) = 2x(t) + 1 \rightarrow \text{Sin memoria}$$

$$y[n] = \sum_{k=-\infty}^n x[k]; \quad y(t) = x(t - t_0) \rightarrow \text{Con memoria}$$

- b) Invertibilidad: Es posible diseñar un sistema (T^{-1}) que recupere la señal original

CLASES PARTICULARES, TUTORÍAS TÉCNICAS ONLINE
LLAMA O ENVÍA WHATSAPP: 689 45 44 70

ONLINE PRIVATE LESSONS FOR SCIENCE STUDENTS
CALL OR WHATSAPP:689 45 44 70

4-sept-11

JAG - DTSC, UC3M

16

Propiedades Fundamentales

- c) Causalidad: La salida depende únicamente del valor actual y pasados

$$\text{Por ejemplo: } y[n] = x[n] - x[n - 1]$$

- d) Anticausalidad: La salida depende únicamente del valor actual y futuros

$$\text{Sin Memoria} \iff \text{Causal y Anticausal}$$

¿Existen sistemas no causales en la naturaleza?

- e) Estabilidad BIBO: La salida está acotada si la entrada está acotada (i.e., si $|x(t)| < B_1 \forall t \Rightarrow |y(t)| < B_2 \forall t$)

$$y(t) = tx(t) \rightarrow \text{Inestable}$$

$$y[n] = e^{x[n]} \rightarrow \text{Estable}$$

4-sept-11

JAG - DTSC, UC3M

17

Propiedades Fundamentales

- f) Invarianza temporal: Un desplazamiento temporal de la entrada provoca el mismo desplazamiento temporal a la salida ($T\{x[n - n_0]\} = y[n - n_0]$)

$$y(t) = x^2(t + 1) + x(t) \rightarrow \text{Invariante}$$

$$y[n] = nx[n] \rightarrow \text{Variante}$$

- g) Linealidad: $T\{ax_1(\cdot) + bx_2(\cdot)\} = ay_1(\cdot) + by_2(\cdot)$

**CLASES PARTICULARES, TUTORÍAS TÉCNICAS ONLINE
LLAMA O ENVÍA WHATSAPP: 689 45 44 70**

**ONLINE PRIVATE LESSONS FOR SCIENCE STUDENTS
CALL OR WHATSAPP:689 45 44 70**

4-sept-11

JAG - DTSC, UC3M

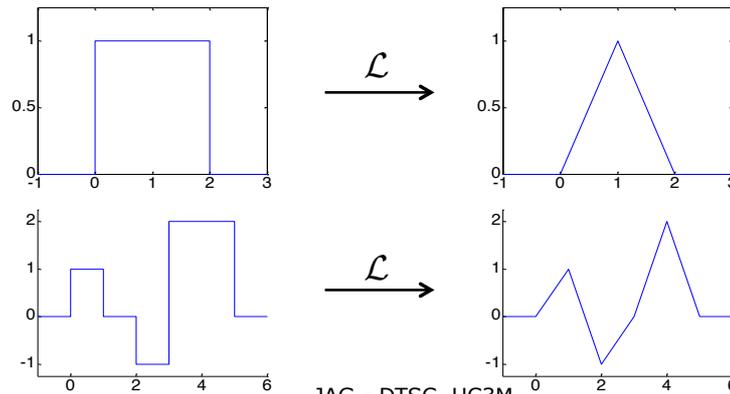
18

3. Sistemas LTI

Según acabamos de ver:

$$\begin{cases} T\{x_i(t)\} = y_i(t) \Rightarrow T\{\sum_{i=1}^N \alpha_i x_i(t)\} = \sum_{i=1}^N \alpha_i y_i(t) \\ T\{x(t)\} = y(t) \Rightarrow T\{x(t - t_0)\} = y(t - t_0) \end{cases}$$

⇒ Si conozco la salida del sistema para una señal $x(t)$, puedo conocer la salida para cualquier señal formada por una combinación lineal de versiones desplazadas de $x(t)$



4-sept-11

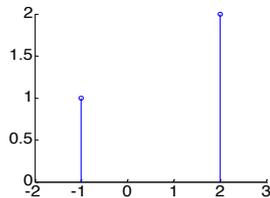
JAG - DTSC, UC3M

19

3.1. Caracterización de LTIS discretos

Objetivo: Encontrar una o varias señales que permitan obtener la salida del sistema para cualquier entrada

Según vimos al introducir la función $\delta[n]$: $x[n] = \sum_{k=-\infty}^{\infty} x[k]\delta[n - k]$



$$\Rightarrow x[-1]\delta[n + 1] + x[2]\delta[n - 2]$$

**CLASES PARTICULARES, TUTORÍAS TÉCNICAS ONLINE
LLAMA O ENVÍA WHATSAPP: 689 45 44 70**

**ONLINE PRIVATE LESSONS FOR SCIENCE STUDENTS
CALL OR WHATSAPP:689 45 44 70**

4-sept-11

JAG - DTSC, UC3M

20

3.2. Caracterización STLI continuos

De forma similar a como hicimos para el sistema discreto:

$$x(t) = \int_{-\infty}^{\infty} x(\tau)\delta(t - \tau)d\tau$$

Llamando $\mathcal{L}\{\delta(t)\} = h(t)$,

- Por invarianza, $\mathcal{L}\{\delta(t - \tau)\} = h(t - \tau)$
- Por linealidad,

$$y(t) = \mathcal{L}\{x(t)\} = \int_{-\infty}^{\infty} x(\tau)h(t - \tau)d\tau$$

$h(t)$ se denomina respuesta al impulso, caracteriza el comportamiento de un STLI continuo

3.3. Convolución de Señales. Propiedades

Definimos la convolución de dos señales como:

$$y(t) = x(t) * h(t) = \int_{-\infty}^{\infty} x(\tau)h(t - \tau)d\tau$$

$$y[n] = x[n] * h[n] = \sum_{k=-\infty}^{\infty} x[k]h[n - k]$$

La salida de un LTIS se obtiene como la convolución de la señal de entrada, $x(\cdot)$, con la respuesta al impulso del sistema, $h(\cdot)$

Propiedades de la convolución:

- 1) Elemento neutro: $\delta(t)$, $\delta[n]$, ya que $x(t) = \int_{-\infty}^{\infty} x(\tau)\delta(t - \tau)d\tau$

**CLASES PARTICULARES, TUTORÍAS TÉCNICAS ONLINE
LLAMA O ENVÍA WHATSAPP: 689 45 44 70**

**ONLINE PRIVATE LESSONS FOR SCIENCE STUDENTS
CALL OR WHATSAPP:689 45 44 70**

3.4. Propiedades de STLI a partir de $h(\cdot)$

- a) Sistema sin memoria $\iff h(\cdot) = K\delta(\cdot)$
- b) Sistema causal $\iff h(\cdot) = 0, \forall n, t < 0$
- c) Sistema anticausal $\iff h(\cdot) = 0, \forall n, t > 0$
- d) Sistema invertible $\iff \exists h^{-1}(\cdot)$
- e) Estable BIBO $\iff \sum_{n=-\infty}^{\infty} |h[n]| < H$
 $\int_{-\infty}^{\infty} |h(\tau)| d\tau < H$

4-sept-11

JAG - DTSC, UC3M

23

3.5. LTIS caracterizados por ec. en diferencias

La entrada y salida del sistema (o filtro) verifican:

$$\sum_{k=0}^N a_k y[n-k] = \sum_{k=0}^M b_k x[n-k]$$

¿Cuáles son las propiedades del sistema?

¿Un filtro así descrito es siempre lineal e invariante?

¿Cómo calcular la salida para una $x[n]$ determinada?

**CLASES PARTICULARES, TUTORÍAS TÉCNICAS ONLINE
LLAMA O ENVÍA WHATSAPP: 689 45 44 70**

- - -

**ONLINE PRIVATE LESSONS FOR SCIENCE STUDENTS
CALL OR WHATSAPP:689 45 44 70**

4-sept-11

JAG - DTSC, UC3M

24

LTIS caracterizados por ec. en diferencias

Sistema con Respuesta al Impulso Finita (FIR): Si $N = 0$:

$$y[n] = \sum_{k=0}^M \frac{b_k}{a_0} x[n-k]$$

- $y[n]$ puede obtenerse directamente a partir de $x[n]$

- Para $x[n] = \delta[n] \Rightarrow y[n] = h[n]$

Luego:

$$h[n] = \begin{cases} b_n/a_0; & 0 \leq n \leq M \\ 0; & \text{otro } n \end{cases}$$

Sistema con Respuesta al Impulso Infinita (IIR): Si $N \geq 1$:

$$y[n] = \frac{1}{a_0} \left\{ \sum_{k=1}^N a_k y[n-k] + \sum_{k=0}^M b_k x[n-k] \right\}$$

- Para obtener $y[n]$ necesitamos $y[n-1], \dots, y[n-N]$.
Y seguimos de manera recursiva.
- Reposo inicial: $x[n] = 0 \forall n < n_0 \Rightarrow y[n] = 0 \forall n < n_0$
Condiciones iniciales: $y[n_0-1] = \dots = y[n_0-N] = 0$
- Con reposo inicial, el filtro es lineal e invariante
- En general, $h[n]$ tiene duración infinita

4-sept-11

JAG - DTSC, UC3M

25

LTIS caracterizados por ec. diferenciales

$$\sum_{k=0}^N a_k \frac{d^k y(t)}{dt^k} = \sum_{k=0}^M b_k \frac{d^k x(t)}{dt^k}$$

Solución general:

$$y(t) = y_p(t) + y_h(t)$$

- Si $N = 0$: $y(t) = \sum_{k=0}^M \frac{b_k}{a_0} \frac{d^k x(t)}{dt^k}$
- Si $N \geq 1$, necesitamos N condiciones iniciales.
- En general, el sistema caracterizado por la ec. diferencial es incrementalmente lineal:

* Condiciones iniciales nulas: Linealidad ($y_0(t) = 0$)

**CLASES PARTICULARES, TUTORÍAS TÉCNICAS ONLINE
LLAMA O ENVÍA WHATSAPP: 689 45 44 70**

**ONLINE PRIVATE LESSONS FOR SCIENCE STUDENTS
CALL OR WHATSAPP:689 45 44 70**

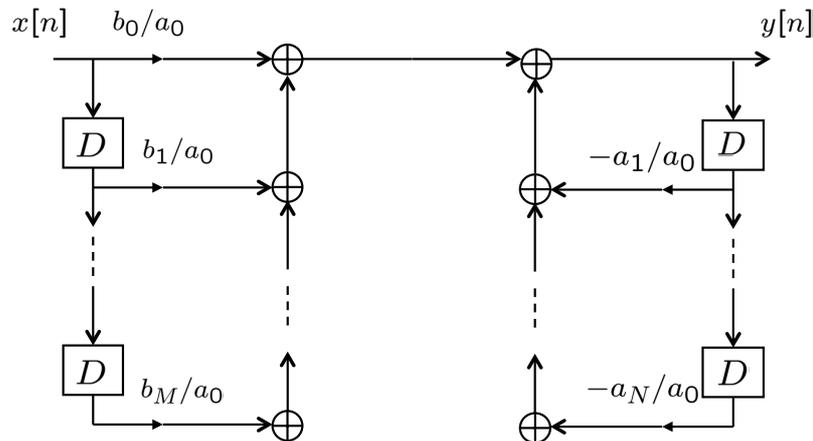
4-sept-11

JAG - DTSC, UC3M

26

Representación gráfica de sistemas regidos por ec. diferenciales o en diferencias

$$y[n] = \frac{1}{a_0} \left\{ \sum_{k=0}^M b_k x[n-k] - \sum_{k=1}^N a_k y[n-k] \right\}; \quad y(t) = \frac{1}{a_0} \left\{ \sum_{k=0}^M b_k \frac{d^k x(t)}{dt^k} - \sum_{k=1}^N a_k \frac{d^k y(t)}{dt^k} \right\}$$



4-sept-11

JAG - DTSC, UC3M

27

Cuestiones y Problemas de repaso

A. V. Oppenheim and A. S. Willsky, "Signals & Systems," 2nd Ed.:

- Capítulo 1: 1.9, 1.21, 1.22, 1.26, 1.27, 1.28, 1.30, 1.31
- Capítulo 2: 2.21, 2.22, 2.28, 2.29, 2.48

**CLASES PARTICULARES, TUTORÍAS TÉCNICAS ONLINE
LLAMA O ENVÍA WHATSAPP: 689 45 44 70**

**ONLINE PRIVATE LESSONS FOR SCIENCE STUDENTS
CALL OR WHATSAPP:689 45 44 70**

9/4/11

JAG - DTSC, UC3M

28