

Mecánica Clásica
Tema 2
Campo de velocidades del sólido rígido

EIAE

25 de septiembre de 2011

Velocidad de un punto del sólido. Deducción matricial.	2
Tensor velocidad angular.	3
Propiedades del tensor velocidad angular.	4
Velocidad de un punto del sólido. Deducción vectorial.	5
Ejemplo conocido: rotación con eje fijo	9
Campo de velocidades del sólido	12
Propiedades del campo de velocidades del sólido	13
Propiedades del campo de velocidades: Axoides	20
Axoides: ejemplos	21
Determinación de la velocidad angular	23
Aceleración de un punto de un sólido	24
Aceleración angular de un sólido	26
Estructura instantánea del campo de aceleraciones	27
Resumen de propiedades cinemáticas	28



CLASES PARTICULARES, TUTORÍAS TÉCNICAS ONLINE
LLAMA O ENVÍA WHATSAPP: 689 45 44 70

ONLINE PRIVATE LESSONS FOR SCIENCE STUDENTS
CALL OR WHATSAPP:689 45 44 70

Velocidad de un punto del sólido - matricial

Vector velocidad del punto M del sólido S_2 respecto al sistema S_1 : la misma definición que para un punto, pero ahora el vector posición es:

$$\mathbf{O}_1\mathbf{O} + \mathbf{OM} = \mathcal{R}_1 \cdot (\mathbf{X}_1^O + \mathbf{Q}_{12} \cdot \mathbf{X}_2^M)$$

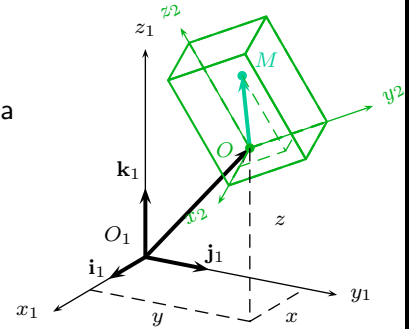
y su derivada (con \mathcal{R}_1 constante) es:

$$\mathbf{v}_{21}^M = \mathcal{R}_1 \cdot (\dot{\mathbf{X}}_1^O + \dot{\mathbf{Q}}_{12} \cdot \mathbf{X}_2^M) = \mathbf{v}_{21}^M|_{tras} + \mathbf{v}_{21}^M|_{rot}$$

La de traslación es igual para todos los puntos; la segunda varía con M .

Para entender la relación entre \mathbf{OM} y su derivada debido a la rotación, hay que proyectarlos en los mismos ejes, fijos o sólido:

$$\dot{\mathbf{O}}\mathbf{M} = \mathcal{R}_1 \cdot \dot{\mathbf{Q}}_{12} \cdot \mathbf{X}_2^M = \mathcal{R}_1 \cdot \dot{\mathbf{Q}}_{12} \cdot \underbrace{\mathbf{Q}_{12}^T \cdot \mathbf{X}_1^{OM}}_{\mathbf{X}_2^M} = \underbrace{\mathcal{R}_2 \cdot \mathbf{Q}_{12}^T}_{\mathcal{R}_1} \cdot \dot{\mathbf{Q}}_{12} \cdot \mathbf{X}_2^M$$



Tensor velocidad angular

- En ejes sólido, la velocidad de M debida a la rotación es

$$\mathbf{v}_{21}^M|_{rot} = \mathcal{R}_2 \cdot \mathbf{Q}_{12}^T \cdot \dot{\mathbf{Q}}_{12} \cdot \mathbf{X}_2^M = \mathcal{R}_2 \cdot \boldsymbol{\Omega}_{21}|_2 \cdot \mathbf{X}_2^M$$

donde $\boldsymbol{\Omega}_{21}$ es el tensor velocidad angular de S_2 respecto a S_1 , expresado por su matriz de componentes en S_2 .

- En ejes fijos, el tensor se expresa

$$\mathbf{v}_{21}^M|_{rot} = \mathcal{R}_1 \cdot \dot{\mathbf{X}}_1^{OM} = \mathcal{R}_1 \cdot \dot{\mathbf{Q}}_{12} \mathbf{Q}_{12}^T \cdot \mathbf{X}_1^{OM} = \mathcal{R}_1 \cdot \boldsymbol{\Omega}_{21}|_1 \cdot \mathbf{X}_1^{OM}$$

- Los dos están relacionados por las ecuaciones de cambio de ejes,

$$\boldsymbol{\Omega}_{21}|_1 = \mathbf{U} \cdot \dot{\mathbf{Q}}_{12} \cdot \mathbf{Q}_{12}^T = \mathbf{Q}_{12} \cdot \mathbf{Q}_{12}^T \cdot \dot{\mathbf{Q}}_{12} \cdot \mathbf{Q}_{12}^T = \mathbf{Q}_{12} \cdot \boldsymbol{\Omega}_{21}|_2 \cdot \mathbf{Q}_{12}^T$$

que es el 1^{er} criterio de tensorialidad $\Rightarrow \boldsymbol{\Omega}_{21}$ es un tensor.

CLASES PARTICULARES, TUTORÍAS TÉCNICAS ONLINE
LLAMA O ENVÍA WHATSAPP: 689 45 44 70

ONLINE PRIVATE LESSONS FOR SCIENCE STUDENTS
CALL OR WHATSAPP:689 45 44 70

Propiedades del tensor velocidad angular

- El **tensor velocidad angular** es antisimétrico:

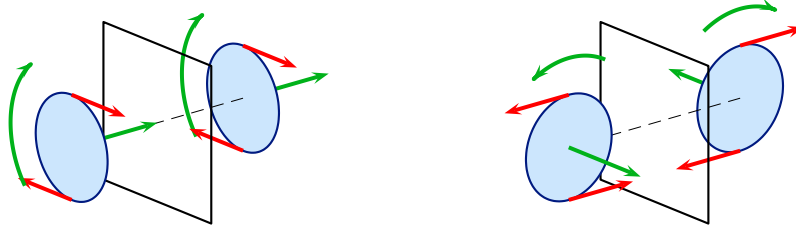
$$\mathbf{Q}_{12}^T \dot{\mathbf{Q}}_{12} = \mathbf{U} \quad \rightarrow \quad \dot{\mathbf{Q}}_{12}^T \mathbf{Q}_{12} + \mathbf{Q}_{12}^T \dot{\mathbf{Q}}_{12} = \boldsymbol{\Omega}_{21}^T + \boldsymbol{\Omega}_{21} = \mathbf{0}$$

- Un tensor antisimétrico tiene un **Vector axial** asociado $\boldsymbol{\omega}_{21}$ (pseudovector):

$$\boldsymbol{\Omega}_{21} = \begin{bmatrix} 0 & -\omega_z & \omega_y \\ \omega_z & 0 & -\omega_x \\ -\omega_y & \omega_x & 0 \end{bmatrix} \Leftrightarrow \boldsymbol{\omega}_{21} = \begin{Bmatrix} \omega_x \\ \omega_y \\ \omega_z \end{Bmatrix}$$

$$\mathcal{R}_i \cdot \boldsymbol{\Omega}_{21} \Big|_i \cdot X_i^M \Leftrightarrow \boldsymbol{\omega}_{21} \wedge \mathbf{OM}$$

- Vector **Polar** / **Axial**: el comportamiento ante simetrías cambia con la orientación de los ejes (a derechas/a izquierdas)



Velocidad de un punto del sólido - vectorial

Deducción vectorial

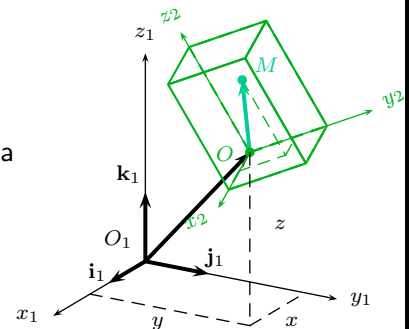
Vector velocidad del punto M del sólido S_2 respecto al sistema S_1 : la misma definición que para un punto, pero ahora el vector posición es:

$$\mathbf{O}_1 \mathbf{O} + \mathbf{OM} = \mathcal{R}_1 \cdot X_1^O + \mathcal{R}_2 \cdot X_2^M$$

y su **velocidad** es:

$$\mathbf{v}_{21}^M = \mathcal{R}_1 \cdot \dot{X}_1^O + \dot{\mathcal{R}}_2 \cdot X_2^M = \mathbf{v}_{21}^M|_{trans} + \mathbf{v}_{21}^M|_{rot}$$

Al derivar se mantienen constantes \mathcal{R}_1 (por definición de velocidad respecto a S_1) y X_2^M (por ser distancias entre puntos de un sólido).



CLASES PARTICULARES, TUTORÍAS TÉCNICAS ONLINE
LLAMA O ENVÍA WHATSAPP: 689 45 44 70

ONLINE PRIVATE LESSONS FOR SCIENCE STUDENTS
CALL OR WHATSAPP:689 45 44 70

Velocidad de un punto del sólido - vectorial

- Derivamos el vector \mathbf{OM} , considerando \mathcal{R}_1 como fijo:

$$\mathbf{OM} = x_2^M \mathbf{i}_2 + y_2^M \mathbf{j}_2 + z_2^M \mathbf{k}_2$$

$$\dot{\mathbf{OM}} = x_2^M \dot{\mathbf{i}}_2 + y_2^M \dot{\mathbf{j}}_2 + z_2^M \dot{\mathbf{k}}_2$$

- El cálculo de las derivadas es trivial en ejes fijos,

$$\begin{cases} \mathbf{i}_2 = q_1^1 \mathbf{i}_1 + q_1^2 \mathbf{j}_1 + q_1^3 \mathbf{k}_1 \\ \mathbf{j}_2 = q_2^1 \mathbf{i}_1 + q_2^2 \mathbf{j}_1 + q_2^3 \mathbf{k}_1 \\ \mathbf{k}_2 = q_3^1 \mathbf{i}_1 + q_3^2 \mathbf{j}_1 + q_3^3 \mathbf{k}_1 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} \dot{\mathbf{i}}_2 = \dot{q}_1^1 \mathbf{i}_1 + \dot{q}_1^2 \mathbf{j}_1 + \dot{q}_1^3 \mathbf{k}_1 \\ \dot{\mathbf{j}}_2 = \dot{q}_2^1 \mathbf{i}_1 + \dot{q}_2^2 \mathbf{j}_1 + \dot{q}_2^3 \mathbf{k}_1 \\ \dot{\mathbf{k}}_2 = \dot{q}_3^1 \mathbf{i}_1 + \dot{q}_3^2 \mathbf{j}_1 + \dot{q}_3^3 \mathbf{k}_1 \end{cases}$$

- Los nueve \dot{q}_j^i y sus derivadas no son independientes, pues son vectores unitarios y ortogonales, pero las condiciones se ven mejor en ejes sólido.

Velocidad de un punto del sólido - vectorial

- Expresamos las derivadas de los versores en ejes sólido:

$$\begin{cases} \dot{\mathbf{i}}_2 = a_1^1 \mathbf{i}_2 + a_1^2 \mathbf{j}_2 + a_1^3 \mathbf{k}_2 \\ \dot{\mathbf{j}}_2 = a_2^1 \mathbf{i}_2 + a_2^2 \mathbf{j}_2 + a_2^3 \mathbf{k}_2 \\ \dot{\mathbf{k}}_2 = a_3^1 \mathbf{i}_2 + a_3^2 \mathbf{j}_2 + a_3^3 \mathbf{k}_2 \end{cases}$$

- Por ser unitarios,

$$\mathbf{i}_2 \cdot \mathbf{i}_2 = 1 \rightarrow \dot{\mathbf{i}}_2 \cdot \mathbf{i}_2 + \mathbf{i}_2 \cdot \dot{\mathbf{i}}_2 = 2 \dot{\mathbf{i}}_2 \cdot \mathbf{i}_2 = 0 \Rightarrow a_i^i = 0$$

- Por ser ortogonales,

$$\mathbf{i}_2 \cdot \mathbf{j}_2 = 0 \rightarrow \dot{\mathbf{i}}_2 \cdot \mathbf{j}_2 + \mathbf{i}_2 \cdot \dot{\mathbf{j}}_2 = 0 \Rightarrow a_j^i = -a_i^j$$

- La matriz de coeficientes es antisimétrica $\begin{bmatrix} 0 & -c & b \\ c & 0 & -a \\ -b & a & 0 \end{bmatrix}$ (3 parámetros)

CLASES PARTICULARES, TUTORÍAS TÉCNICAS ONLINE
LLAMA O ENVÍA WHATSAPP: 689 45 44 70

ONLINE PRIVATE LESSONS FOR SCIENCE STUDENTS
CALL OR WHATSAPP:689 45 44 70

Velocidad de un punto del sólido - vectorial

- Conocidas las derivadas de los versores, la velocidad debida al giro vale:

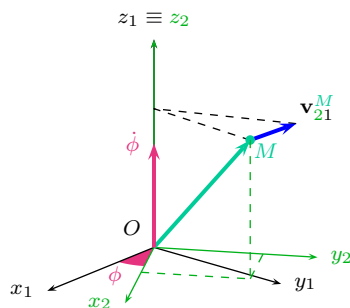
$$\begin{aligned} \dot{\mathbf{O}}\mathbf{M} &= x_2^M \dot{\mathbf{i}}_2 + y_2^M \dot{\mathbf{j}}_2 + z_2^M \dot{\mathbf{k}}_2 = [\mathbf{i}_2, \mathbf{j}_2, \mathbf{k}_2] \cdot \begin{Bmatrix} x_2^M \\ y_2^M \\ z_2^M \end{Bmatrix} = \\ &= [\mathbf{i}_2, \mathbf{j}_2, \mathbf{k}_2] \cdot \begin{bmatrix} 0 & -c & b \\ c & 0 & -a \\ -b & a & 0 \end{bmatrix} \cdot \begin{Bmatrix} x_2^M \\ y_2^M \\ z_2^M \end{Bmatrix} = [\mathbf{i}_2, \mathbf{j}_2, \mathbf{k}_2] \cdot \begin{Bmatrix} -c y_2^M + b z_2^M \\ +c x_2^M - a z_2^M \\ -b x_2^M + a y_2^M \end{Bmatrix} \end{aligned}$$

- Si se consideran los elementos $[a, b, c]$ como coordenadas de un vector $\boldsymbol{\omega}_{21}$ en ejes sólido, se llega al mismo resultado mediante un producto vectorial:

$$\dot{\mathbf{O}}\mathbf{M} = \begin{vmatrix} \mathbf{i}_2 & \mathbf{j}_2 & \mathbf{k}_2 \\ a & b & c \\ x_2^M & y_2^M & z_2^M \end{vmatrix} = \boldsymbol{\omega}_{21} \wedge \mathbf{O}\mathbf{M}$$

- $\boldsymbol{\omega}_{21}$ es el vector **velocidad angular** del sólido S_2 respecto al sistema S_1 .

Ejemplo conocido: rotación con eje fijo



Se sabe que si un sólido S_2 gira un ángulo ϕ alrededor de un eje fijo $Oz_1 \equiv Oz_2$, su velocidad angular es $\boldsymbol{\omega}_{21} = \dot{\phi} \mathbf{k}_1$, y la velocidad de un punto arbitrario M del sólido vale $\mathbf{v}_{21}^M = \dot{\phi} \mathbf{y}_{21} + \boldsymbol{\omega}_{21} \wedge \mathbf{O}\mathbf{M}$.

Calculamos la matriz de giro y la posición del punto M :

$$\mathbf{Q}_{12} = \begin{bmatrix} \cos \phi & -\sin \phi & 0 \\ \sin \phi & \cos \phi & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad \mathbf{O}\mathbf{M} = \mathcal{R}_1 X_1^M = \mathcal{R}_1 \mathbf{Q}_{12} X_2^M$$

Derivamos para obtener la velocidad:

$$\mathbf{v}_{21}^M = \mathcal{R}_1 \dot{\mathbf{Q}}_{12} X_2^M = \mathcal{R}_1 \dot{\phi} \begin{bmatrix} -\sin \phi & -\cos \phi & 0 \\ \cos \phi & -\sin \phi & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} X_2^M$$

CLASES PARTICULARES, TUTORÍAS TÉCNICAS ONLINE
LLAMA O ENVÍA WHATSAPP: 689 45 44 70

ONLINE PRIVATE LESSONS FOR SCIENCE STUDENTS
CALL OR WHATSAPP:689 45 44 70

Ejemplo conocido: rotación con eje fijo

En ejes fijos:

$$\begin{aligned} \mathbf{v}_{21}^M &= \mathcal{R}_1 \dot{\mathbf{Q}}_{12} X_2^M = \mathcal{R}_1 \dot{\mathbf{Q}}_{12} \mathbf{Q}_{12}^\top X_1^M = \\ &= \mathcal{R}_1 \dot{\phi} \begin{bmatrix} -\sin \phi & -\cos \phi & 0 \\ \cos \phi & -\sin \phi & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \cos \phi & \sin \phi & 0 \\ -\sin \phi & \cos \phi & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} X_1^M = \\ &= \mathcal{R}_1 \begin{bmatrix} 0 & -\dot{\phi} & 0 \\ \dot{\phi} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} X_1^M = \mathcal{R}_1 \Omega_{21}|_1 X_1^M \end{aligned}$$

Si definimos el vector $\omega_{21} = [0, 0, \dot{\phi}]_1$, se obtiene el mismo resultado mediante el producto vectorial

$$\mathbf{v}_{21}^M = \begin{vmatrix} \mathbf{i}_1 & \mathbf{j}_1 & \mathbf{k}_1 \\ 0 & 0 & \dot{\phi} \\ x_1^M & y_1^M & z_1^M \end{vmatrix} = \omega_{21} \wedge \mathbf{OM}$$

Ejemplo conocido: rotación con eje fijo

En ejes sólido:

$$\begin{aligned} \mathbf{v}_{21}^M &= \mathcal{R}_1 \dot{\mathbf{Q}}_{12} X_2^M = \mathcal{R}_2 \mathbf{Q}_{12}^\top \dot{\mathbf{Q}}_{12} X_2^M = \\ &= \mathcal{R}_2 \begin{bmatrix} \cos \phi & \sin \phi & 0 \\ -\sin \phi & \cos \phi & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \dot{\phi} \begin{bmatrix} -\sin \phi & -\cos \phi & 0 \\ \cos \phi & -\sin \phi & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} X_2^M = \mathcal{R}_2 \overbrace{\begin{bmatrix} 0 & -\dot{\phi} & 0 \\ \dot{\phi} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}}^{\Omega_{21}|_2} X_2^M \end{aligned}$$

Si definimos el vector $\omega_{21} = [0, 0, \dot{\phi}]_2$, se obtiene el mismo resultado mediante el producto vectorial

$$\mathbf{v}_{21}^M = \begin{vmatrix} \mathbf{i}_2 & \mathbf{j}_2 & \mathbf{k}_2 \\ 0 & 0 & \dot{\phi} \\ x_2^M & y_2^M & z_2^M \end{vmatrix} = \omega_{21} \wedge \mathbf{OM}$$

En este caso, el vector velocidad angular tiene las mismas componentes en ejes fijos y sólido porque el eje de giro está fijo. v todos los vectores en esa dirección son invariantes.

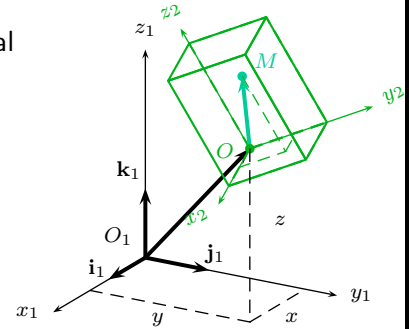
**CLASES PARTICULARES, TUTORÍAS TÉCNICAS ONLINE
LLAMA O ENVÍA WHATSAPP: 689 45 44 70**

**ONLINE PRIVATE LESSONS FOR SCIENCE STUDENTS
CALL OR WHATSAPP:689 45 44 70**

Campo de velocidades del sólido

- Vector velocidad del punto (arbitrario) M del sólido S_2 respecto al sistema S_1 :

$$\begin{aligned} \mathbf{v}_{21}^M &= \mathcal{R}_1 \cdot \left(\dot{X}_1^O + \Omega_{21}|_1 \cdot X_1^M \right) = \\ &= \mathcal{R}_2 \cdot \left(\mathbf{Q}_{12}^T \cdot \dot{X}_1^O + \Omega_{21}|_2 \cdot X_2^M \right) = \\ &= \mathbf{v}_{21}^O + \boldsymbol{\omega}_{21} \wedge \mathbf{OM} \end{aligned}$$



- Vale para cualquier par de puntos: O y M son arbitrarios,

$$\mathbf{v}_{21}^B = \mathbf{v}_{21}^O + \boldsymbol{\omega}_{21} \wedge \mathbf{OB} = \mathbf{v}_{21}^O + \boldsymbol{\omega}_{21} \wedge (\mathbf{OA} + \mathbf{AB}) = \rightarrow$$

Campo de velocidades: \rightarrow

$$\mathbf{v}_{21}^B = \mathbf{v}_{21}^A + \boldsymbol{\omega}_{21} \wedge \mathbf{AB}$$

- 6 GDL \rightarrow 6 parámetros determinan el estado cinemático de todos los puntos del sólido: \dot{X}_1^O (3) y $\Omega_{21} / \boldsymbol{\omega}_{21}$ (3)

Propiedades del campo de velocidades del sólido

- Es **lineal** en las coordenadas: $\boldsymbol{\omega}_{21} \wedge \mathbf{OM} / \Omega_{21}|_2 \cdot X_2^M$
- Si $\boldsymbol{\omega}_{21} = \mathbf{0}$, todos los puntos del sólido tienen la misma velocidad (**traslación pura** o traslación paralela)

- Equiproyectividad:** $\mathbf{v}_{21}^B \cdot \mathbf{AB} = \mathbf{v}_{21}^A \cdot \mathbf{AB}$

- Por la definición de sólido, la distancia entre puntos es constante:

$$(\mathbf{r}^B - \mathbf{r}^A) \cdot (\mathbf{r}^B - \mathbf{r}^A) = \text{Cte.} \rightarrow (\dot{\mathbf{r}}^B - \dot{\mathbf{r}}^A) \cdot (\mathbf{r}^B - \mathbf{r}^A) = 0$$

- Implícito en la expresión del campo de velocidades,

$$\mathbf{v}_{21}^B \cdot \mathbf{AB} = (\mathbf{v}_{21}^A + \boldsymbol{\omega}_{21} \wedge \mathbf{AB}) \cdot \mathbf{AB} = \mathbf{v}_{21}^A \cdot \mathbf{AB}$$

porque se obtiene girando un sistema de referencia, que cumple la condición de sólido. Los puntos no pueden alejarse ni acercarse, solo girar (si no, se deformaría).

CLASES PARTICULARES, TUTORÍAS TÉCNICAS ONLINE
LLAMA O ENVÍA WHATSAPP: 689 45 44 70

ONLINE PRIVATE LESSONS FOR SCIENCE STUDENTS
CALL OR WHATSAPP:689 45 44 70

Propiedades del campo de velocidades

- **Bidimensional:** Igual velocidad en rectas $\parallel \omega$

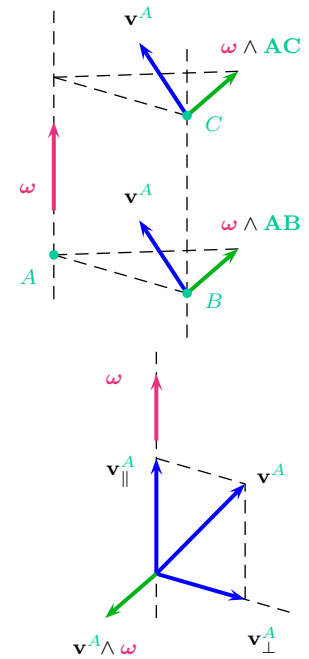
$$\begin{aligned} \mathbf{AC} &= \mathbf{AB} + \lambda \omega_{21} \\ \mathbf{v}_{21}^C &= \mathbf{v}_{21}^A + \omega_{21} \wedge \mathbf{AC} = \\ &= \mathbf{v}_{21}^A + \omega_{21} \wedge (\mathbf{AB} + \lambda \omega_{21}) \parallel \mathbf{v}_{21}^B \end{aligned}$$

- Descomposición en velocidades \parallel y \perp a ω

$$\mathbf{v}^A = \underbrace{\frac{\mathbf{v}^A \cdot \omega}{\omega^2} \omega}_{\parallel} + \underbrace{\frac{\omega \wedge (\mathbf{v}^A \wedge \omega)}{\omega^2}}_{\perp}$$

Se obtiene del desarrollo del producto triple:

$$\omega \wedge (\mathbf{v}^A \wedge \omega) = \omega^2 \mathbf{v}^A - (\mathbf{v}^A \cdot \omega) \omega$$



Propiedades del campo de velocidades

- **Velocidad de mínimo deslizamiento:** la componente paralela a ω es la misma para todos los puntos (**equiproyectividad** según ω):

$$\mathbf{v}^D = \mathbf{v}_{\parallel}^A = \mathbf{v}_{\parallel}^B \quad \forall A, B \in S_2$$

- Es la misma en cada instante para todo el sólido

$$\mathbf{v}_{21}^B \cdot \omega_{21} = (\mathbf{v}_{21}^A + \omega_{21} \wedge \mathbf{AB}) \cdot \omega_{21} = \mathbf{v}^D \cdot \omega_{21} \quad \forall A, B \in S_2$$

- Si es nula, el movimiento es una **rotación pura**
- Basta dar el escalar v^D , porque su dirección es conocida
- Es la velocidad mínima en módulo de todo el campo de velocidades

$$|\mathbf{v}^A|^2 = |\mathbf{v}_{\parallel}^A|^2 + |\mathbf{v}_{\perp}^A|^2$$

**CLASES PARTICULARES, TUTORÍAS TÉCNICAS ONLINE
LLAMA O ENVÍA WHATSAPP: 689 45 44 70**

**ONLINE PRIVATE LESSONS FOR SCIENCE STUDENTS
CALL OR WHATSAPP:689 45 44 70**

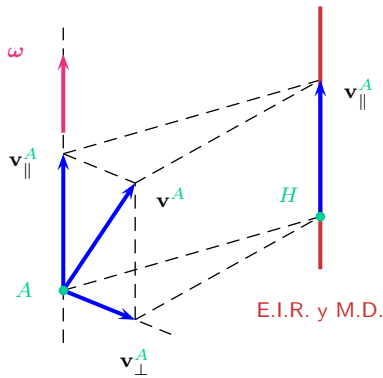
Propiedades del campo de velocidades

- **Eje instantáneo de rotación y mínimo deslizamiento:** Hay una recta del sólido en que \mathbf{v}_\perp se anula, $\mathbf{v}^H = \mathbf{v}_\parallel^H = \mathbf{v}^D \Rightarrow H \in \text{E.I.R.}$

- A partir de A , buscamos un punto H del E.I.R. tal que $\mathbf{AH} \perp \boldsymbol{\omega}, \mathbf{v}^A$

$$\mathbf{v}^H = \mathbf{v}^A + \boldsymbol{\omega} \wedge \mathbf{AH} = \lambda \boldsymbol{\omega} \rightarrow \boldsymbol{\omega} \wedge (\mathbf{v}^A + \boldsymbol{\omega} \wedge \mathbf{AH}) = \mathbf{0} =$$

$$= \boldsymbol{\omega} \wedge \mathbf{v}^A + (\boldsymbol{\omega} \wedge \mathbf{AH}) \boldsymbol{\omega} - \omega^2 \mathbf{AH} \rightarrow \mathbf{AH} = \frac{\boldsymbol{\omega} \wedge \mathbf{v}^A}{\omega^2}$$



$$\mathbf{r}^{\text{E.I.R.}} = \mathbf{r}^A + \frac{\boldsymbol{\omega} \wedge \mathbf{v}^A}{\omega^2} + \lambda \boldsymbol{\omega}$$

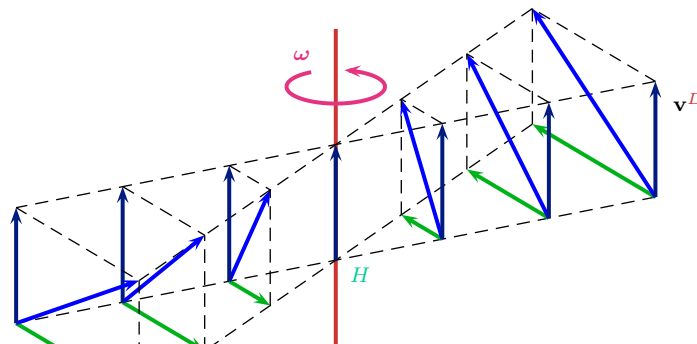
- Todos los puntos del E.I.R. y Mínimo Deslizamiento tienen la misma velocidad, \mathbf{v}^D , que es la velocidad mínima del campo de velocidades.
- En general, los puntos del E.I.R. no están fijos al sólido: en cada momento coinciden con puntos distintos de este.

Propiedades del campo de velocidades

- **Movimiento helicoidal equivalente:** se toma un punto H del E.I.R. para describir el campo de velocidades.

$$\mathbf{v}^A = \underbrace{\mathbf{v}_\parallel^H}_{\text{Deslizamiento}} + \underbrace{\boldsymbol{\omega} \wedge \mathbf{HA}}_{\text{Rotación pura}}$$

- **Teorema de Chasles:** el movimiento más general de un sólido en cada instante es una **rotación pura** alrededor de un eje más un **deslizamiento** (traslación) paralelo a ese eje (que puede variar con el tiempo).

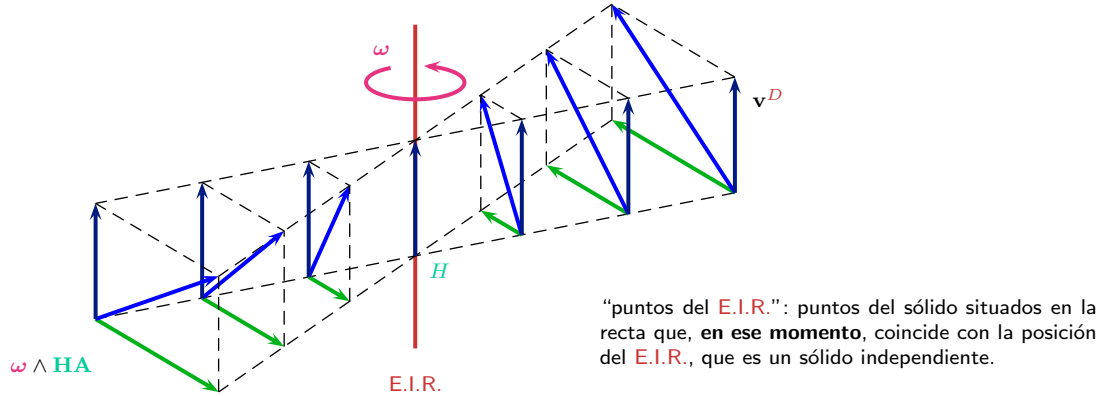


CLASES PARTICULARES, TUTORÍAS TÉCNICAS ONLINE
LLAMA O ENVÍA WHATSAPP: 689 45 44 70

ONLINE PRIVATE LESSONS FOR SCIENCE STUDENTS
CALL OR WHATSAPP:689 45 44 70

Propiedades del campo de velocidades

- Todos los puntos del E.I.R. tienen la misma velocidad, \mathbf{v}^D , que es la velocidad mínima del campo de velocidades
- Un punto de velocidad nula pertenece al E.I.R. ($\mathbf{v}^D = 0$)
- Si varios puntos tienen la misma velocidad en una dirección dada, esa es la dirección del E.I.R. (siempre que no estén en una recta paralela a $\boldsymbol{\omega}$, en la que todos los puntos tienen la misma velocidad)



Propiedades del campo de velocidades

- Campo vectorial análogo al campo de momentos de un sistema de fuerzas:

$$\mathbf{M}_B = \mathbf{M}_A + \mathbf{BA} \wedge \mathbf{R} \quad \Leftrightarrow \quad \mathbf{v}_B = \mathbf{v}_A + \boldsymbol{\omega} \wedge \mathbf{AB}$$

- Los dos campos tienen la misma estructura y propiedades:

Estructura helicoidal	
Bidimensional	
Imagen instantánea: todas las magnitudes varían con t	
Momento en un punto	Velocidad de un punto
Resultante	Velocidad angular
Eje principal	E.I.R.



CLASES PARTICULARES, TUTORÍAS TÉCNICAS ONLINE
 LLAMA O ENVÍA WHATSAPP: 689 45 44 70

ONLINE PRIVATE LESSONS FOR SCIENCE STUDENTS
 CALL OR WHATSAPP:689 45 44 70

Propiedades del campo de velocidades: Axoides

La posición del E.I.R. varía con el tiempo, en ejes fijos y respecto al sólido:

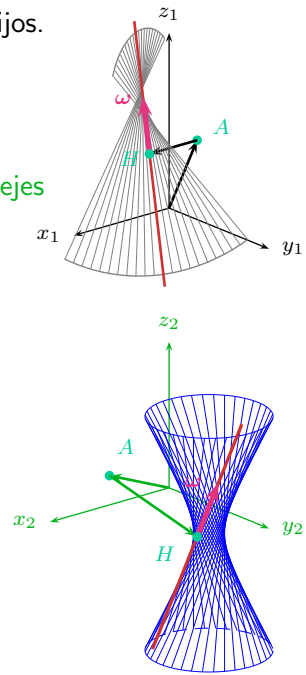
- **Axoide Fija:** Lugar geométrico de las posiciones sucesivas del E.I.R. en ejes fijos.

$$\mathbf{r}_{AF}(t, \lambda) = \mathbf{O}_1 \mathbf{A} \Big|_1 + \frac{\boldsymbol{\omega}(t) \wedge \mathbf{v}^A(t)}{\omega(t)^2} \Big|_1 + \lambda \boldsymbol{\omega}(t) \Big|_1$$

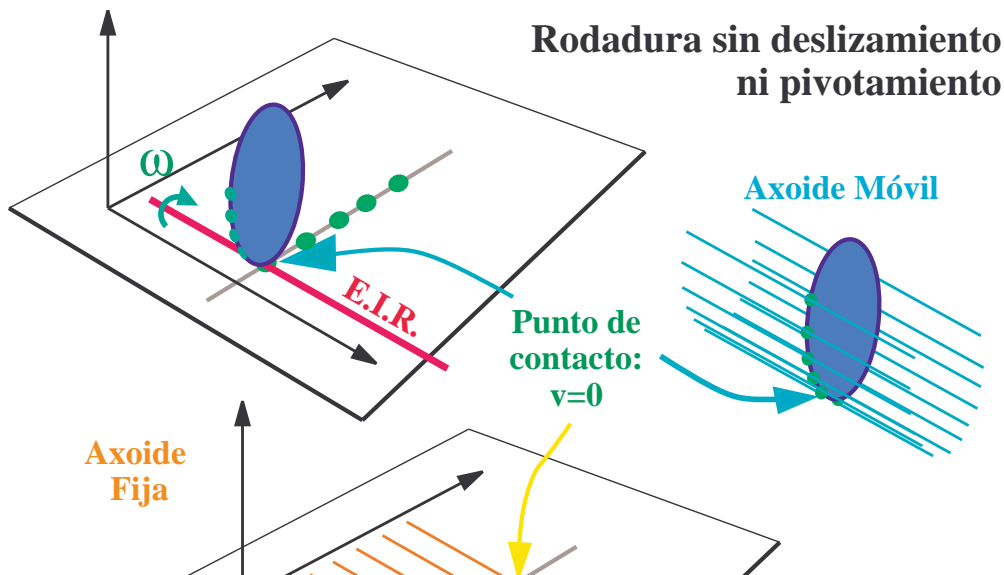
- **Axoide Móvil:** Lugar geométrico de las posiciones sucesivas del E.I.R. en ejes sólido.

$$\mathbf{r}_{AM}(t, \lambda) = \mathbf{O} \mathbf{A} \Big|_2 + \frac{\boldsymbol{\omega}(t) \wedge \mathbf{v}^A(t)}{\omega(t)^2} \Big|_2 + \lambda \boldsymbol{\omega}(t) \Big|_2$$

- Son superficies regladas con dos parámetros: λ (generatriz) y t (directriz)



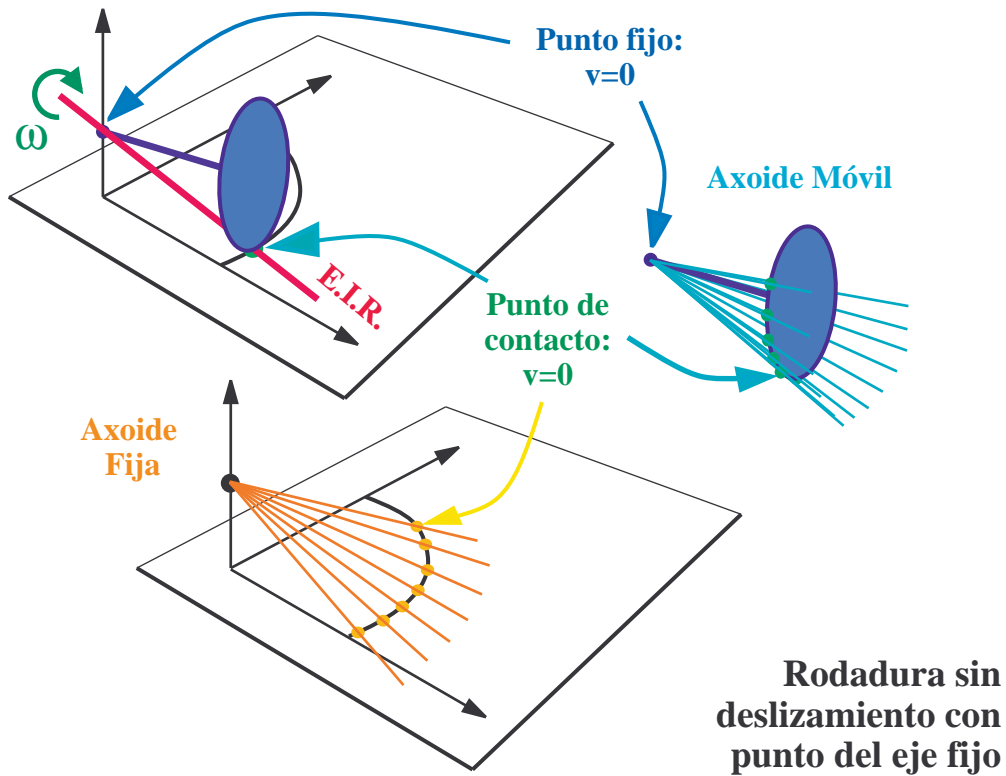
Axoides: ejemplos



CLASES PARTICULARES, TUTORÍAS TÉCNICAS ONLINE
LLAMA O ENVÍA WHATSAPP: 689 45 44 70

ONLINE PRIVATE LESSONS FOR SCIENCE STUDENTS
CALL OR WHATSAPP:689 45 44 70

Axoides: ejemplos



Determinación de la velocidad angular

- Derivando la matriz de giro,
- Derivando los versores

$$\begin{aligned} \mathbf{Q}(t) &\rightarrow \mathbf{Q}^T \cdot \dot{\mathbf{Q}} = \boldsymbol{\Omega} \\ \mathbf{i}_2, \mathbf{j}_2, \mathbf{k}_2 &\rightarrow \dot{\mathbf{i}}_2, \dot{\mathbf{j}}_2, \dot{\mathbf{k}}_2 \end{aligned}$$

$$\text{Campo de velocidades: } \dot{\mathbf{i}}_2 = \boldsymbol{\omega} \wedge \mathbf{i}_2 \quad \dot{\mathbf{j}}_2 = \boldsymbol{\omega} \wedge \mathbf{j}_2 \quad \dot{\mathbf{k}}_2 = \boldsymbol{\omega} \wedge \mathbf{k}_2$$

$$\mathbf{i}_2 \wedge \dot{\mathbf{i}}_2 = \mathbf{i}_2 \wedge (\boldsymbol{\omega} \wedge \mathbf{i}_2) = 1 \cdot \boldsymbol{\omega} - (\boldsymbol{\omega} \cdot \mathbf{i}_2) \mathbf{i}_2$$

$$\mathbf{j}_2 \wedge \dot{\mathbf{j}}_2 = \mathbf{j}_2 \wedge (\boldsymbol{\omega} \wedge \mathbf{j}_2) = 1 \cdot \boldsymbol{\omega} - (\boldsymbol{\omega} \cdot \mathbf{j}_2) \mathbf{j}_2$$

$$\mathbf{k}_2 \wedge \dot{\mathbf{k}}_2 = \mathbf{k}_2 \wedge (\boldsymbol{\omega} \wedge \mathbf{k}_2) = 1 \cdot \boldsymbol{\omega} - (\boldsymbol{\omega} \cdot \mathbf{k}_2) \mathbf{k}_2$$

$$\mathbf{i}_2 \wedge \dot{\mathbf{i}}_2 + \mathbf{j}_2 \wedge \dot{\mathbf{j}}_2 + \mathbf{k}_2 \wedge \dot{\mathbf{k}}_2 = 3 \cdot \boldsymbol{\omega} - \boldsymbol{\omega} = 2 \cdot \boldsymbol{\omega}$$

$$\boldsymbol{\omega} = \frac{1}{2} (\mathbf{i}_2 \wedge \dot{\mathbf{i}}_2 + \mathbf{j}_2 \wedge \dot{\mathbf{j}}_2 + \mathbf{k}_2 \wedge \dot{\mathbf{k}}_2)$$

[\mathbf{i}_2]

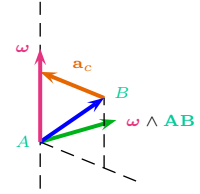
CLASES PARTICULARES, TUTORÍAS TÉCNICAS ONLINE
LLAMA O ENVÍA WHATSAPP: 689 45 44 70

ONLINE PRIVATE LESSONS FOR SCIENCE STUDENTS
CALL OR WHATSAPP: 689 45 44 70

Aceleración de un punto de un sólido

Se deriva el campo de velocidades considerando \mathcal{R}_1 como fijo,

$$\begin{aligned}\mathbf{v}_{21}^B &= \mathbf{v}_{21}^A + \boldsymbol{\omega}_{21} \wedge \mathbf{AB} \\ \dot{\mathbf{v}}_{21}^B &= \dot{\mathbf{v}}_{21}^A + \dot{\boldsymbol{\omega}}_{21} \wedge \mathbf{AB} + \boldsymbol{\omega}_{21} \wedge \dot{\mathbf{AB}}\end{aligned}$$



Se llega al campo de aceleraciones del sólido:

$$\mathbf{a}_{21}^B = \mathbf{a}_{21}^A + \boldsymbol{\alpha}_{21} \wedge \mathbf{AB} + \boldsymbol{\omega}_{21} \wedge (\boldsymbol{\omega}_{21} \wedge \mathbf{AB})$$

- $\boldsymbol{\alpha}_{21} = \dot{\boldsymbol{\omega}}_{21}$ es el **vector aceleración angular** del sólido S_2 respecto a S_1 .
- El término $\boldsymbol{\omega}_{21} \wedge (\boldsymbol{\omega}_{21} \wedge \mathbf{AB})$ está dirigido hacia el eje paralelo a $\boldsymbol{\omega}_{21}$ que pasa por A ; es una **aceleración centrípeta**.
- Los dos primeros términos dan una estructura similar a la del campo de velocidades (eje $\parallel \boldsymbol{\alpha}$); el tercero (eje $\parallel \boldsymbol{\omega}$) rompe la estructura porque no es rotacional sino centrípeta, y los vectores $\boldsymbol{\omega}$ y $\boldsymbol{\alpha}$ tienen en general direcciones distintas (y variables con el tiempo).

Aceleración de un punto de un sólido

- También se puede obtener matricialmente,

$$\begin{aligned}\mathbf{v}_{21}^M &= \mathcal{R}_1 \left(\dot{X}_1^O + \boldsymbol{\Omega}_{21}|_1 X_1^M \right) = \mathcal{R}_1 \left(\dot{X}_1^O + \boldsymbol{\Omega}_{21}|_1 \mathbf{Q}_{12} \overset{cte.}{X_2^M} \right) \\ \mathbf{a}_{21}^M &= \mathcal{R}_1 \left(\ddot{X}_1^O + \dot{\boldsymbol{\Omega}}_{21}|_1 \mathbf{Q}_{12} X_2^M + \boldsymbol{\Omega}_{21}|_1 \dot{\mathbf{Q}}_{12} X_2^M \right) = \\ &= \mathcal{R}_1 \left(\ddot{X}_1^O + \dot{\boldsymbol{\Omega}}_{21}|_1 X_1^M + \boldsymbol{\Omega}_{21}|_1 \boldsymbol{\Omega}_{21}|_1 X_1^M \right)\end{aligned}$$

- En ejes sólido, sabiendo que $\dot{\boldsymbol{\Omega}}_{21}|_1 = \mathbf{Q}_{12} \dot{\boldsymbol{\Omega}}_{21}|_2 \mathbf{Q}_{12}^T$,

$$\mathbf{a}_{21}^M = \mathcal{R}_2 \left(\mathbf{Q}_{12}^T \ddot{X}_1^O + \dot{\boldsymbol{\Omega}}_{21}|_2 X_2^M + \boldsymbol{\Omega}_{21}|_2 \boldsymbol{\Omega}_{21}|_2 X_2^M \right)$$

- $\dot{\boldsymbol{\Omega}}_{21}$ es el **tensor aceleración angular** del sólido S_2 respecto a S_1 .
- Análogo a la forma vectorial,

$$\mathbf{a}_{21}^M = \mathbf{a}_{21}^O + \dot{\boldsymbol{\omega}}_{21} \wedge \mathbf{OM} + \boldsymbol{\omega}_{21} \wedge (\boldsymbol{\omega}_{21} \wedge \mathbf{OM})$$

CLASES PARTICULARES, TUTORÍAS TÉCNICAS ONLINE
LLAMA O ENVÍA WHATSAPP: 689 45 44 70

ONLINE PRIVATE LESSONS FOR SCIENCE STUDENTS
CALL OR WHATSAPP:689 45 44 70

Aceleración angular de un sólido

- La **Aceleración angular** es la derivada de la **velocidad angular**:

$$\dot{\Omega}|_1 = \left(\dot{Q}_{12} \dot{Q}_{12}^T \right) = \ddot{Q}_{12} Q_{12}^T + \dot{Q}_{12} \dot{Q}_{12}^T$$

$$\dot{\Omega}|_2 = \left(\dot{Q}_{12}^T \dot{Q}_{12} \right) = \dot{Q}_{12}^T \dot{Q}_{12} + Q_{12}^T \ddot{Q}_{12}$$

- Es antisimétrica:

$$\Omega + \Omega^T = \mathbf{0} \quad \Rightarrow \quad \dot{\Omega} + \dot{\Omega}^T = \mathbf{0},$$

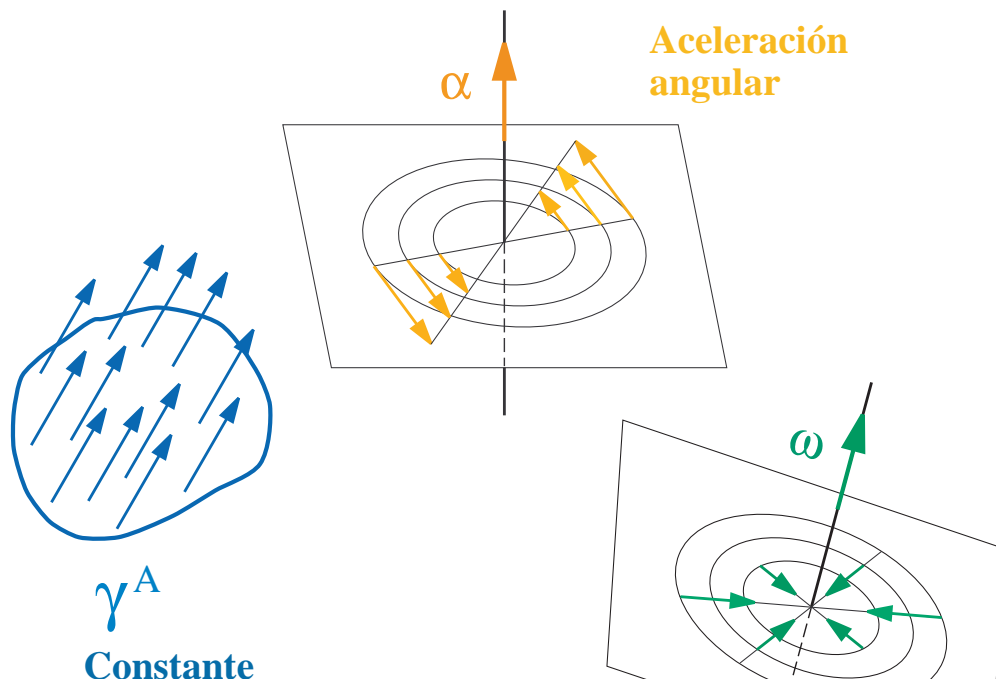
- tiene un vector axial asociado:

$$\mathcal{R}_i \cdot \dot{\Omega}_{21}|_i \cdot X_i^M \quad \Leftrightarrow \quad \dot{\omega}_{21} \wedge \mathbf{OM},$$

- y es también un tensor:

$$\dot{\Omega}|_1 = Q_{12} \dot{\Omega}|_2 Q_{12}^T$$

Estructura instantánea del campo de aceleraciones



CLASES PARTICULARES, TUTORÍAS TÉCNICAS ONLINE
LLAMA O ENVÍA WHATSAPP: 689 45 44 70

ONLINE PRIVATE LESSONS FOR SCIENCE STUDENTS
CALL OR WHATSAPP:689 45 44 70

Resumen de propiedades cinemáticas

Punto	Sólido
Vector posición (3 GDL)	Vector posición de O (3 GDL)
n.a.	Matriz de giro (3 GDL)
Vector velocidad (3 GDL)	Campo de velocidades (6 GDL)
n.a.	Velocidad angular (3 GDL)
Vector aceleración (3 GDL)	Campo de aceleraciones (6 GDL)
n.a.	Aceleración angular (3 GDL)

The logo for Cartagena99 features the text 'Cartagena99' in a stylized, blue, serif font. The '99' is significantly larger and more prominent than the rest of the text. The logo is set against a light blue background with a white starburst shape behind the text.

CLASES PARTICULARES, TUTORÍAS TÉCNICAS ONLINE
LLAMA O ENVÍA WHATSAPP: 689 45 44 70

ONLINE PRIVATE LESSONS FOR SCIENCE STUDENTS
CALL OR WHATSAPP:689 45 44 70