Mecánica Clásica
Tema 3
Composición de movimientos

EIAE

25 de septiembre de 2011

Composición de Movimientos **2**
- Definiciones y notación . . . 2
- Teorema de Coriolis . . . 3
- Composición de velocidades angulares . . . 5
- Composición de velocidades . . . 8
- Tres aspectos de la velocidad . . . 10
- Composición de aceleraciones . . . 12
- Contacto entre sólidos . . . 19
- Juntas y enlaces . . . 26
- Ángulos de Euler . . . 30
- Tangencia de las axoides . . . 33
- Coordenadas esféricas . . . 37

Movimiento plano **43**
- Movimiento Plano . . . 43
- Simplificaciones. . . . 44
- Base y Ruleta . . . 45
- Base y Ruleta ruedan sin deslizar . . . 46
- Propiedades de 3 planos . . . 47
- Propiedades de 3 y 4 planos . . . 48
- Aplicaciones: Mecanismos . . . 49
- Traslación circular y rotación . . . 52
- Campo de aceleraciones plano . . . 53
- Estructura del campo de aceleraciones . . . 54
- Centro de aceleraciones . . . 56

CLASES PARTICULARES, TUTORÍAS TÉCNICAS ONLINE
LLAMA O ENVÍA WHATSAPP: 689 45 44 70

- - -

ONLINE PRIVATE LESSONS FOR SCIENCE STUDENTS
CALL OR WHATSAPP:689 45 44 70

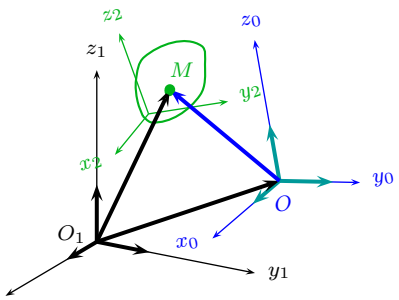
www.cartagena99.com no se hace responsable de la información contenida en el presente documento en virtud al Artículo 17.1 de la Ley de Servicios de la Sociedad de la Información y de Comercio Electrónico, de 11 de julio de 2002.
Si la información contenida en el documento es ilícita o lesiona bienes o derechos de un tercero háganoslo saber y será retirada.

Definiciones y notación

Movimiento absoluto: El de un sólido S_2 respecto a unos ejes fijos S_1

Movimiento relativo: El del sólido S_2 respecto a unos ejes móviles S_0

Movimiento de arrastre: El de los ejes móviles S_0 respecto a los fijos S_1



Propiedades de Solidos:

$\boldsymbol{\omega}_{ij}$ **ó** $\boldsymbol{\alpha}_{ij}$ **:** Velocidad o aceleración angular del sólido S_i en su movimiento respecto a S_j

Propiedades de Puntos de Sólidos:

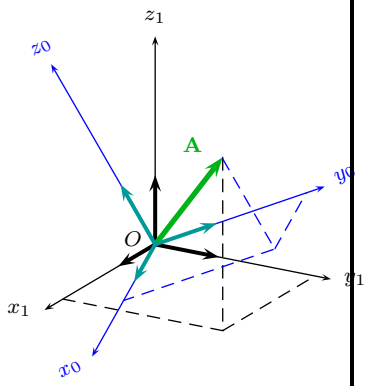
$\mathbf{v}_{ij}^M$ **ó** $\mathbf{a}_{ij}^M$ **:** Velocidad o aceleración del punto M del sólido S_i en su movimiento respecto a S_j

Derivar en ejes móviles: Teorema de Coriolis

Vector $\mathbf{A}$ del espacio, proyectado en ejes S_1 $Ox_1y_1z_1$ y en ejes S_0 $Ox_0y_0z_0$

$$\mathbf{A} = x_1\,\mathbf{i}_1 + y_1\,\mathbf{j}_1 + z_1\,\mathbf{k}_1 = x_0\,\mathbf{i}_0 + y_0\,\mathbf{j}_0 + z_0\,\mathbf{k}_0$$

Derivada del Vector $\mathbf{A}$ considerando los ejes S_1 como fijos; los ejes S_0 pueden moverse:



$$\dot{\mathbf{A}}\big|_1 = \dot{x}_1\,\mathbf{i}_1 + \dot{y}_1\,\mathbf{j}_1 + \dot{z}_1\,\mathbf{k}_1 + \overbrace{x_1\,\cancel{\dot{\mathbf{i}}_1} + y_1\,\cancel{\dot{\mathbf{j}}_1} + z_1\,\cancel{\dot{\mathbf{k}}_1}}^{\text{Fijos}} =$$

$$= \underbrace{\dot{x}_0\,\mathbf{i}_0 + \dot{y}_0\,\mathbf{j}_0 + \dot{z}_0\,\mathbf{k}_0} + \underbrace{x_0\,\dot{\mathbf{i}}_0 + y_0\,\dot{\mathbf{j}}_0 + z_0\,\dot{\mathbf{k}}_0}_{\text{Sólido}} =$$

$$= \overbrace{\dot{\mathbf{A}}\big|_0} + \overbrace{x_0\,\boldsymbol{\omega}_{01} \wedge \mathbf{i}_0 + y_0\,\boldsymbol{\omega}_{01} \wedge \mathbf{j}_0 + z_0\,\boldsymbol{\omega}_{01} \wedge \mathbf{k}_0} =$$

CLASES PARTICULARES, TUTORÍAS TÉCNICAS ONLINE
LLAMA O ENVÍA WHATSAPP: 689 45 44 70

- - -

ONLINE PRIVATE LESSONS FOR SCIENCE STUDENTS
CALL OR WHATSAPP:689 45 44 70

www.cartagena99.com no se hace responsable de la información contenida en el presente documento en virtud al Artículo 17.1 de la Ley de Servicios de la Sociedad de la Información y de Comercio Electrónico, de 11 de julio de 2002.
Si la información contenida en el documento es ilícita o lesiona bienes o derechos de un tercero háganoslo saber y será retirada.

Derivar en ejes móviles: Teorema de Coriolis

Matricialmente:

$$\mathbf{A} = \lfloor \mathbf{i}_1, \mathbf{j}_1, \mathbf{k}_1 \rfloor \cdot \begin{Bmatrix} x_1 \\ y_1 \\ z_1 \end{Bmatrix} = \lfloor \mathbf{i}_0, \mathbf{j}_0, \mathbf{k}_0 \rfloor \cdot \begin{Bmatrix} x_0 \\ y_0 \\ z_0 \end{Bmatrix} = \underline{\mathcal{R}_1} \cdot V_1 \big| = \underline{\mathcal{R}_0} \cdot V_0 \big|$$

$$\dot{\mathbf{A}}\big|_1 = \overset{\text{Fijo}}{\cancel{\dot{\mathcal{R}}_1}} \cdot V_1 \big| + \underline{\mathcal{R}_1} \cdot \dot{V}_1 \big| = \overbrace{\underline{\dot{\mathcal{R}}_0} \cdot V_0 \big|}^{a)} + \overbrace{\underline{\mathcal{R}_0} \cdot \dot{V}_0 \big|}^{b)}$$

$$a) \quad \underline{\mathcal{R}_0} = \underline{\mathcal{R}_1} \cdot \mathbf{Q}_{10} \;\rightarrow\; \underline{\dot{\mathcal{R}}_0} = \underline{\mathcal{R}_1} \cdot \dot{\mathbf{Q}}_{10} = \underline{\mathcal{R}_0} \cdot \mathbf{Q}_{10}^{\mathsf{T}} \cdot \dot{\mathbf{Q}}_{10} = \underline{\mathcal{R}_0} \cdot \boldsymbol{\Omega}_{01}$$

$$b) \quad \underline{\mathcal{R}_0} \cdot \dot{V}_0 \big| = \dot{\mathbf{A}}\big|_0$$

$$\boxed{\dot{\mathbf{A}}\big|_1 = \dot{\mathbf{A}}\big|_0 + \underline{\mathcal{R}_0} \cdot \boldsymbol{\Omega}_{01} \cdot V_0 \big|} \quad \Leftrightarrow \quad \boxed{\dot{\mathbf{A}}\big|_1 = \dot{\mathbf{A}}\big|_0 + \boldsymbol{\omega}_{01} \wedge \mathbf{A}}$$

Nota: la velocidad angular de un sólido $\boldsymbol{\omega}_{01}$ se deriva igual en ejes fijos S_1 y en ejes ligados al propio sólido S_0, pero no en ejes ligados a **otro** sólido.

Composición de velocidades angulares

Aplicaremos el teorema de Coriolis a un vector arbitrario $\mathbf{A}$ en los movimientos absoluto (2/1), relativo (2/0) y de arrastre (0/1):

$$\begin{array}{rcrcl}
- \dot{\mathbf{A}}\big|_1 & = & \dot{\mathbf{A}}\big|_0 & + & \boldsymbol{\omega}_{01} \wedge \mathbf{A} \\
+ \dot{\mathbf{A}}\big|_1 & = & \dot{\mathbf{A}}\big|_2 & + & \boldsymbol{\omega}_{21} \wedge \mathbf{A} \\
- \dot{\mathbf{A}}\big|_0 & = & \dot{\mathbf{A}}\big|_2 & + & \boldsymbol{\omega}_{20} \wedge \mathbf{A} \\
\hline
- \cancel{\dot{\mathbf{A}}\big|_0} & = & -\cancel{\dot{\mathbf{A}}\big|_0} & + & (\boldsymbol{\omega}_{21} - \boldsymbol{\omega}_{20} - \boldsymbol{\omega}_{01}) \wedge \mathbf{A}
\end{array}$$

$$(\boldsymbol{\omega}_{21} - \boldsymbol{\omega}_{20} - \boldsymbol{\omega}_{01}) \quad \wedge \quad \mathbf{A} \quad = \quad \mathbf{0} \quad \forall \mathbf{A} \qquad \Rightarrow \qquad \boxed{\boldsymbol{\omega}_{21} = \boldsymbol{\omega}_{20} + \boldsymbol{\omega}_{01}}$$

La velocidad angular absoluta (2/1) es la suma de la de la relativa (2/0) y la de arrastre (0/1).

CLASES PARTICULARES, TUTORÍAS TÉCNICAS ONLINE
LLAMA O ENVÍA WHATSAPP: 689 45 44 70

- - -

ONLINE PRIVATE LESSONS FOR SCIENCE STUDENTS
CALL OR WHATSAPP:689 45 44 70

www.cartagena99.com no se hace responsable de la información contenida en el presente documento en virtud al Artículo 17.1 de la Ley de Servicios de la Sociedad de la Información y de Comercio Electrónico, de 11 de julio de 2002.
Si la información contenida en el documento es ilícita o lesiona bienes o derechos de un tercero háganoslo saber y será retirada.

Composición de velocidades angulares

La composición de giros es producto de matrices:

$$\underline{\mathcal{R}_0} = \underline{\mathcal{R}_1} \cdot \mathbf{Q}_{10} \qquad \underline{\mathcal{R}_2} = \underline{\mathcal{R}_0} \cdot \mathbf{Q}_{02} = \underline{\mathcal{R}_1} \cdot \mathbf{Q}_{10} \cdot \mathbf{Q}_{02} = \underline{\mathcal{R}_1} \cdot \mathbf{Q}_{12}$$

Por definición, la velocidad angular absoluta será

$$\dot{\underline{\mathcal{R}_2}} = \underline{\mathcal{R}_1} \cdot \dot{\mathbf{Q}}_{12} = \underline{\mathcal{R}_2} \cdot \mathbf{Q}_{12}^{\mathsf{T}} \cdot \dot{\mathbf{Q}}_{12} = \underline{\mathcal{R}_2} \cdot \boldsymbol{\Omega}_{21}$$

$$\begin{aligned}
\boldsymbol{\Omega}_{21}\big|_2 = \mathbf{Q}_{12}^{\mathsf{T}} \cdot \dot{\mathbf{Q}}_{12} = (\mathbf{Q}_{10} \cdot \mathbf{Q}_{02})^{\mathsf{T}} \cdot \dot{(\mathbf{Q}_{10} \cdot \mathbf{Q}_{02})} = \\
= \mathbf{Q}_{02}^{\mathsf{T}} \cdot \mathbf{Q}_{10}^{\mathsf{T}} \cdot \left(\dot{\mathbf{Q}}_{10} \cdot \mathbf{Q}_{02} + \mathbf{Q}_{10} \cdot \dot{\mathbf{Q}}_{02}\right) = \\
= \mathbf{Q}_{02}^{\mathsf{T}} \cdot \underbrace{\mathbf{Q}_{10}^{\mathsf{T}} \cdot \dot{\mathbf{Q}}_{10}}_{\boldsymbol{\Omega}_{01}|_0} \cdot \mathbf{Q}_{02} + \mathbf{Q}_{02}^{\mathsf{T}} \cdot \cancel{\mathbf{Q}_{10}^{\mathsf{T}} \cdot \mathbf{Q}_{10}} \cdot \dot{\mathbf{Q}}_{02} = \\
= \mathbf{Q}_{02}^{\mathsf{T}} \cdot \boldsymbol{\Omega}_{01}\big|_0 \cdot \mathbf{Q}_{02} + \boldsymbol{\Omega}_{20}\big|_2 = \boldsymbol{\Omega}_{01}\big|_2 + \boldsymbol{\Omega}_{20}\big|_2 \quad \Rightarrow \\
\Rightarrow \quad \boxed{\boldsymbol{\Omega}_{21} = \boldsymbol{\Omega}_{01} + \boldsymbol{\Omega}_{20}}
\end{aligned}$$

Composición de aceleraciones angulares

Derivando la expresión de composición de velocidades angulares,

$$\boldsymbol{\omega}_{21} = \boldsymbol{\omega}_{20} + \boldsymbol{\omega}_{01}$$

$$\dot{\boldsymbol{\omega}}_{21}\big|_1 = \overbrace{\dot{\boldsymbol{\omega}}_{20}\big|_1}^{\text{nada (*)}} + \dot{\boldsymbol{\omega}}_{01}\big|_1 =$$

$$= \boldsymbol{\alpha}_{21} = \overbrace{\dot{\boldsymbol{\omega}}_{20}\big|_0 + \boldsymbol{\omega}_{01} \wedge \boldsymbol{\omega}_{20}}^{\text{Tª Coriolis}} + \boldsymbol{\alpha}_{01}$$

$$\boxed{\boldsymbol{\alpha}_{21} = \boldsymbol{\alpha}_{20} + \boldsymbol{\alpha}_{01} + \boldsymbol{\omega}_{01} \wedge \boldsymbol{\omega}_{20}}$$

La aceleración angular absoluta es la relativa, más la de arrastre, más un término complementario.

(*) Por definición, la aceleración angular es la **derivada** de la velocidad angular de un sólido respecto a otro, considerando este último como fijo.

CLASES PARTICULARES, TUTORÍAS TÉCNICAS ONLINE
LLAMA O ENVÍA WHATSAPP: 689 45 44 70

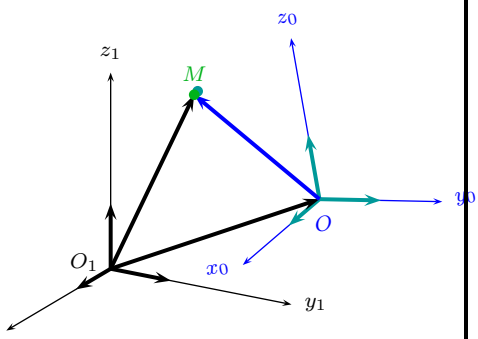
- - -

ONLINE PRIVATE LESSONS FOR SCIENCE STUDENTS
CALL OR WHATSAPP:689 45 44 70

www.cartagena99.com no se hace responsable de la información contenida en el presente documento en virtud al Artículo 17.1 de la Ley de Servicios de la Sociedad de la Información y de Comercio Electrónico, de 11 de julio de 2002.
Si la información contenida en el documento es ilícita o lesiona bienes o derechos de un tercero háganoslo saber y será retirada.

Composición de velocidades

Se descompone el vector posición del punto M del sólido S_2, y se deriva:



$$\mathbf{O_1M} = \mathbf{OM} + \mathbf{O_1O}$$
$$\dot{\mathbf{O_1M}}\big|_1 = \dot{\mathbf{OM}}\big|_1 + \dot{\mathbf{O_1O}}\big|_1$$
$$\dot{\mathbf{O_1M}}\big|_1 = \dot{\mathbf{OM}}\big|_0 + \boldsymbol{\omega}_{01} \wedge \mathbf{OM} + \dot{\mathbf{O_1O}}\big|_1$$

Por definición, el Vector velocidad de un punto relativa a unos ejes es la derivada de su vector posición en esos ejes, considerados como fijos al derivar:

$$\dot{\mathbf{O_1M}}\big|_1 = \mathbf{v}_{21}^M \qquad \dot{\mathbf{OM}}\big|_1 = ?? \qquad \dot{\mathbf{OM}}\big|_0 = \mathbf{v}_{20}^M \qquad \dot{\mathbf{O_1O}}\big|_1 = \mathbf{v}_{01}^O$$

Por tanto,

$$\boxed{\mathbf{v}_{21}^M = \mathbf{v}_{20}^M + \boldsymbol{\omega}_{01} \wedge \mathbf{OM} + \mathbf{v}_{01}^O}$$

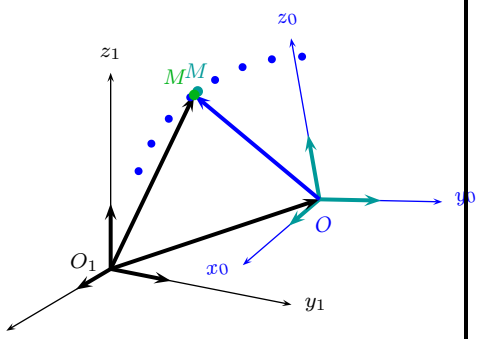
Los dos últimos términos forman el campo de velocidades de S_0: cada término varía al cambiar el origen O, pero la suma es siempre la misma.

Velocidad de puntos sucesivos

En la expresión de la composición de velocidades,

$$\mathbf{v}_{21}^M = \mathbf{v}_{20}^M + \mathbf{v}_{01}^O + \boldsymbol{\omega}_{01} \wedge \mathbf{OM}$$

si se aplica el campo de velocidades del sólido S_0, se llega a una forma más compacta:



$$\boxed{\mathbf{v}_{21}^M = \mathbf{v}_{20}^M + \mathbf{v}_{01}^M}$$

Absoluta = Relativa + Arrastre

- Forma simple e intuitiva: si uno se mueve sobre un vehículo en movimiento (p.e., una escalera mecánica), su velocidad es la suma de la relativa al vehículo más la del punto del vehículo que está pisando en cada momento.
- Pero engañosa: M no es siempre el mismo punto de S_0, sino el que en cada momento coincide con M (p.e., el escalón que se está pisando).

CLASES PARTICULARES, TUTORÍAS TÉCNICAS ONLINE
LLAMA O ENVÍA WHATSAPP: 689 45 44 70

- - -

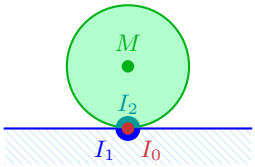
ONLINE PRIVATE LESSONS FOR SCIENCE STUDENTS
CALL OR WHATSAPP:689 45 44 70

www.cartagena99.com no se hace responsable de la información contenida en el presente documento en virtud al Artículo 17.1 de la Ley de Servicios de la Sociedad de la Información y de Comercio Electrónico, de 11 de julio de 2002.
Si la información contenida en el documento es ilícita o lesiona bienes o derechos de un tercero háganoslo saber y será retirada.

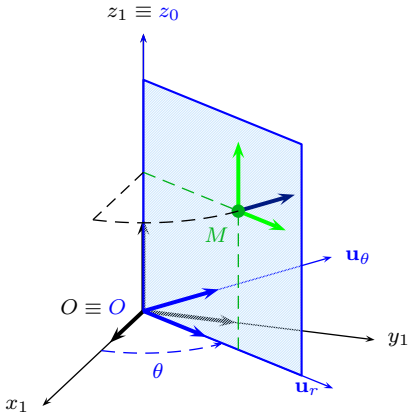
Tres aspectos de la velocidad

En los problemas de mecánica, hay que distinguir tres tipos de velocidad:

- Velocidad de un punto que es siempre el mismo: un punto material de un sólido, que podemos "marcar": la velocidad absoluta $\mathbf{v}_{21}^{M}$ y la relativa $\mathbf{v}_{20}^{M}$.
  Se puede obtener derivando el vector posición, y se puede derivar para obtener la correspondiente aceleración.
- Velocidad de un punto de un sólido que en cada momento es distinto: la velocidad de arrastre $\mathbf{v}_{01}^{M}$, o el punto de contacto entre dos sólidos.
  No se puede obtener derivando, ni se deriva. Se obtiene por campo de velocidades o por composición.
- Velocidad de sucesión: en el contacto entre sólidos, velocidad de un punto independiente (se considera parte de un tercer sólido), que ocupa siempre una posición relativa de interés, p.e., el punto de contacto o el CIR.
  Se puede obtener derivando, con cuidado de distinguir los sólidos. Se usa para composiciones de movimiento entre los tres puntos presentes: el del sólido S_2, el del sólido S_1, y el independiente $I_0 \in S_0$. Con frecuencia, el punto independiente I_0 es el único que es siempre el mismo.



Composición de velocidades - Ej: cilíndricas



Cilíndricas: ejes móviles $S_0 \equiv O\mathbf{u}_r\mathbf{u}_\theta\mathbf{u}_z$

$0/1$: Giro θ alrededor de Oz_1

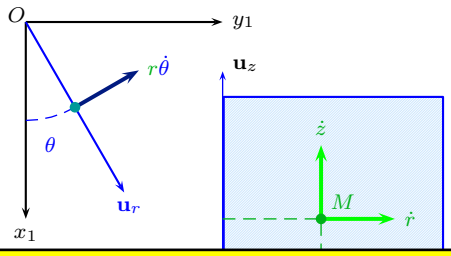
$$\mathbf{v}_{01}^{M} = \mathbf{v}_{01}^{O} + \boldsymbol{\omega}_{01} \wedge \mathbf{OM} =$$

$$= \mathbf{0} + \begin{vmatrix} \mathbf{u}_r & \mathbf{u}_\theta & \mathbf{u}_z \\ 0 & 0 & \dot{\theta} \\ r & 0 & z \end{vmatrix} = r\dot{\theta}\,\mathbf{u}_\theta$$

$2/0$: Cartesianas en $O\mathbf{u}_r\mathbf{u}_z$

$$\mathbf{OM} = r\,\mathbf{u}_r + z\,\mathbf{u}_z$$

$$\mathbf{v}_{20}^{M} = \dot{r}\,\mathbf{u}_r + \dot{z}\,\mathbf{u}_z$$



$2/1$: Velocidad en cilíndricas

$$\mathbf{v}_{21}^{M} = \dot{r}\,\mathbf{u}_r + r\dot{\theta}\,\mathbf{u}_\theta + \dot{z}\,\mathbf{u}_z$$

CLASES PARTICULARES, TUTORÍAS TÉCNICAS ONLINE
LLAMA O ENVÍA WHATSAPP: 689 45 44 70

- - -

ONLINE PRIVATE LESSONS FOR SCIENCE STUDENTS
CALL OR WHATSAPP:689 45 44 70

www.cartagena99.com no se hace responsable de la información contenida en el presente documento en virtud al Artículo 17.1 de la Ley de Servicios de la Sociedad de la Información y de Comercio Electrónico, de 11 de julio de 2002.
Si la información contenida en el documento es ilícita o lesiona bienes o derechos de un tercero háganoslo saber y será retirada.

Composición de aceleraciones

Derivamos la expresión $\mathbf{v}_{21}^M = \overbrace{\mathbf{v}_{20}^M}^{(a)} + \overbrace{\boldsymbol{\omega}_{01} \wedge \mathbf{OM}}^{(b)} + \overbrace{\mathbf{v}_{01}^O}^{(c)}$

$$a) \quad \left.\frac{d\mathbf{v}_{20}^M}{dt}\right|_1 = \left.\frac{d\mathbf{v}_{20}^M}{dt}\right|_0 + \boldsymbol{\omega}_{01} \wedge \mathbf{v}_{20}^M = \mathbf{a}_{20}^M + \boldsymbol{\omega}_{01} \wedge \mathbf{v}_{20}^M$$

$$b) \quad \left.\frac{d\boldsymbol{\omega}_{01}}{dt}\right|_1 \wedge \mathbf{OM} + \boldsymbol{\omega}_{01} \wedge \left(\left.\frac{d\mathbf{OM}}{dt}\right|_0 + \boldsymbol{\omega}_{01} \wedge \mathbf{OM} \right) =$$

$$= \boldsymbol{\alpha}_{01} \wedge \mathbf{OM} + \boldsymbol{\omega}_{01} \wedge \mathbf{v}_{20}^M + \boldsymbol{\omega}_{01} \wedge (\boldsymbol{\omega}_{01} \wedge \mathbf{OM})$$

$$c) \quad \left.\frac{d\mathbf{v}_{01}^O}{dt}\right|_1 = \mathbf{a}_{01}^O$$

($\mathbf{v}_{20}^M + \mathbf{v}_{01}^M$ no se puede derivar porque M no es siempre el mismo punto)

Composición de aceleraciones

Agrupando los términos,

$$\mathbf{a}_{21}^M = \mathbf{a}_{20}^M + \\ + \mathbf{a}_{01}^O + \boldsymbol{\alpha}_{01} \wedge \mathbf{OM} + \boldsymbol{\omega}_{01} \wedge (\boldsymbol{\omega}_{01} \wedge \mathbf{OM}) + \\ + 2\boldsymbol{\omega}_{01} \wedge \mathbf{v}_{20}^M$$

Aceleración absoluta = Relativa + Arrastre + Coriolis

Si se aplica el campo de aceleraciones de S_0, se llega a

$$\boxed{\mathbf{a}_{21}^M = \mathbf{a}_{20}^M + \mathbf{a}_{01}^M + 2\boldsymbol{\omega}_{01} \wedge \mathbf{v}_{20}^M}$$

más simple, pero hay que tener cuidado al calcular $\mathbf{a}_{01}^M$ porque M (siempre el mismo) coincide en cada momento con un punto M de S_0 distinto.

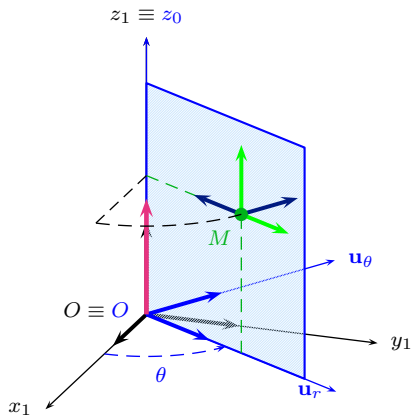
CLASES PARTICULARES, TUTORÍAS TÉCNICAS ONLINE
LLAMA O ENVÍA WHATSAPP: 689 45 44 70

- - -

ONLINE PRIVATE LESSONS FOR SCIENCE STUDENTS
CALL OR WHATSAPP:689 45 44 70

www.cartagena99.com no se hace responsable de la información contenida en el presente documento en virtud al Artículo 17.1 de la Ley de Servicios de la Sociedad de la Información y de Comercio Electrónico, de 11 de julio de 2002.
Si la información contenida en el documento es ilícita o lesiona bienes o derechos de un tercero háganoslo saber y será retirada.

Composición de aceleraciones - Ej: cilíndricas



Aceleración en cilíndricas:

ejes móviles $S_0 \equiv O\mathbf{u}_r\mathbf{u}_\theta\mathbf{u}_z$

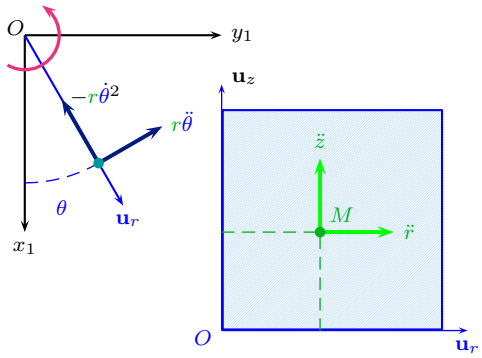
$0/1$: Giro θ alrededor de Oz_1

$$\mathbf{a}_{01}^M = \mathbf{a}_{01}^O + \boldsymbol{\alpha}_{01} \wedge \mathbf{OM} + \\ + \boldsymbol{\omega}_{01} \wedge (\boldsymbol{\omega}_{01} \wedge \mathbf{OM}) = \\ = \mathbf{0} + r\ddot{\theta}\,\mathbf{u}_\theta - r\dot{\theta}^2\,\mathbf{u}_r$$

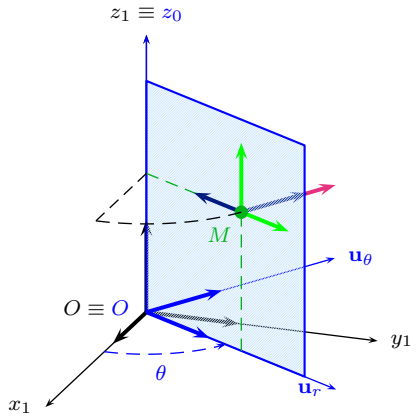
$2/0$: Cartesianas en $O\mathbf{u}_r\mathbf{u}_z$

$$\mathbf{v}_{20}^M = \dot{r}\,\mathbf{u}_r + \dot{z}\,\mathbf{u}_z$$

$$\mathbf{a}_{20}^M = \ddot{r}\,\mathbf{u}_r + \ddot{z}\,\mathbf{u}_z$$



Composición de aceleraciones - Ej: cilíndricas



Aceleración de Coriolis :

$$\mathbf{a}_{Cor}^M = 2\,\boldsymbol{\omega}_{01} \wedge \mathbf{v}_{20}^M = \\ = 2 \begin{vmatrix} \mathbf{u}_r & \mathbf{u}_\theta & \mathbf{u}_z \\ 0 & 0 & \dot{\theta} \\ \dot{r} & 0 & \dot{z} \end{vmatrix} = 2\,\dot{r}\dot{\theta}\,\mathbf{u}_\theta$$

$2/1$: Aceleración absoluta en cilíndricas

CLASES PARTICULARES, TUTORÍAS TÉCNICAS ONLINE
LLAMA O ENVÍA WHATSAPP: 689 45 44 70

- - -

ONLINE PRIVATE LESSONS FOR SCIENCE STUDENTS
CALL OR WHATSAPP:689 45 44 70

www.cartagena99.com no se hace responsable de la información contenida en el presente documento en virtud al Artículo 17.1 de la Ley de Servicios de la Sociedad de la Información y de Comercio Electrónico, de 11 de julio de 2002.
Si la información contenida en el documento es ilícita o lesiona bienes o derechos de un tercero háganoslo saber y será retirada.

Composición de aceleraciones - Ej: cilíndricas

Dos términos idénticos en la Aceleración de Coriolis, debidos a:

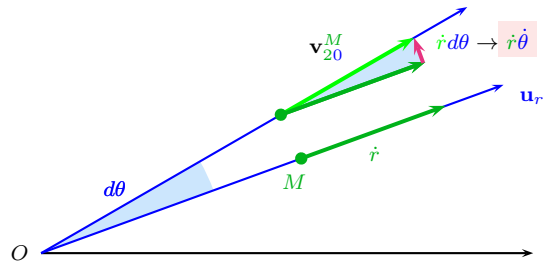
- Varía $\mathbf{v}_{20}^M$ al girar S_0

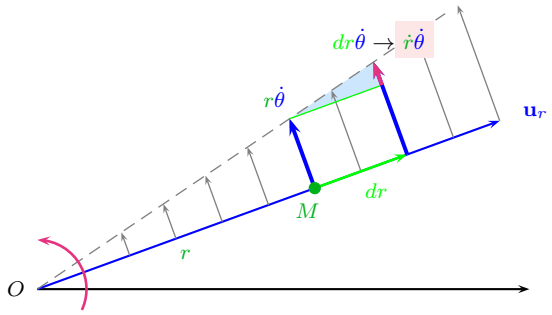
$$\left.\frac{d\mathbf{v}_{20}^M}{dt}\right|_1 = \left.\frac{d\mathbf{v}_{20}^M}{dt}\right|_0 + \boldsymbol{\omega}_{01} \wedge \mathbf{v}_{20}^M$$

- Varía $\mathbf{v}_{01}^M$ debido a $\mathbf{v}_{20}^M$

$$\left.\frac{d}{dt}\left(\boldsymbol{\omega}_{01} \wedge \mathbf{OM}\right)\right|_1 = \\ = \cdots + \boldsymbol{\omega}_{01} \wedge \mathbf{v}_{20}^M + \ldots$$

En cilíndricas, $\boxed{\mathbf{a}_{Cor}^M = 2\,\dot{r}\dot{\theta}\,\mathbf{u}_\theta}$





Movimientos inversos

- Movimientos inversos: $\begin{cases} 1/0: & S_1 \text{ visto desde } S_0 \\ 0/1: & S_0 \text{ visto desde } S_1 \end{cases}$
- Cálculo: Composición de movimientos con $S_1 \equiv S_2$

$$1/1 = 1/0 + 0/1 \equiv \text{ Reposo}$$

$$\boldsymbol{\omega}_{11} = \mathbf{0} = \boldsymbol{\omega}_{10} + \boldsymbol{\omega}_{01} \quad \to \quad \boxed{\boldsymbol{\omega}_{01} = -\boldsymbol{\omega}_{10}}$$

$$\boldsymbol{\alpha}_{11} = \mathbf{0} = \boldsymbol{\alpha}_{10} + \boldsymbol{\alpha}_{01} + \cancel{\boldsymbol{\omega}_{01} \wedge \boldsymbol{\omega}_{10}} \quad \to \quad \boxed{\boldsymbol{\alpha}_{01} = -\boldsymbol{\alpha}_{10}}$$

$$\mathbf{v}_{11}^M = \mathbf{0} = \mathbf{v}_{10}^M + \mathbf{v}_{01}^M \quad \to \quad \boxed{\mathbf{v}_{01}^M = -\mathbf{v}_{10}^M}$$

$$\mathbf{a}_{11}^M = \mathbf{0} = \mathbf{a}_{10}^M + \mathbf{a}_{01}^M + 2\,\boldsymbol{\omega}_{01} \wedge \mathbf{v}_{10}^M \quad \to \quad \boxed{\mathbf{a}_{01}^M = -\mathbf{a}_{10}^M + 2\,\boldsymbol{\omega}_{10} \wedge \mathbf{v}_{10}^M}$$

Si M es un punto fijo de S_0, en cada momento coincide con un punto M distinto de S_1

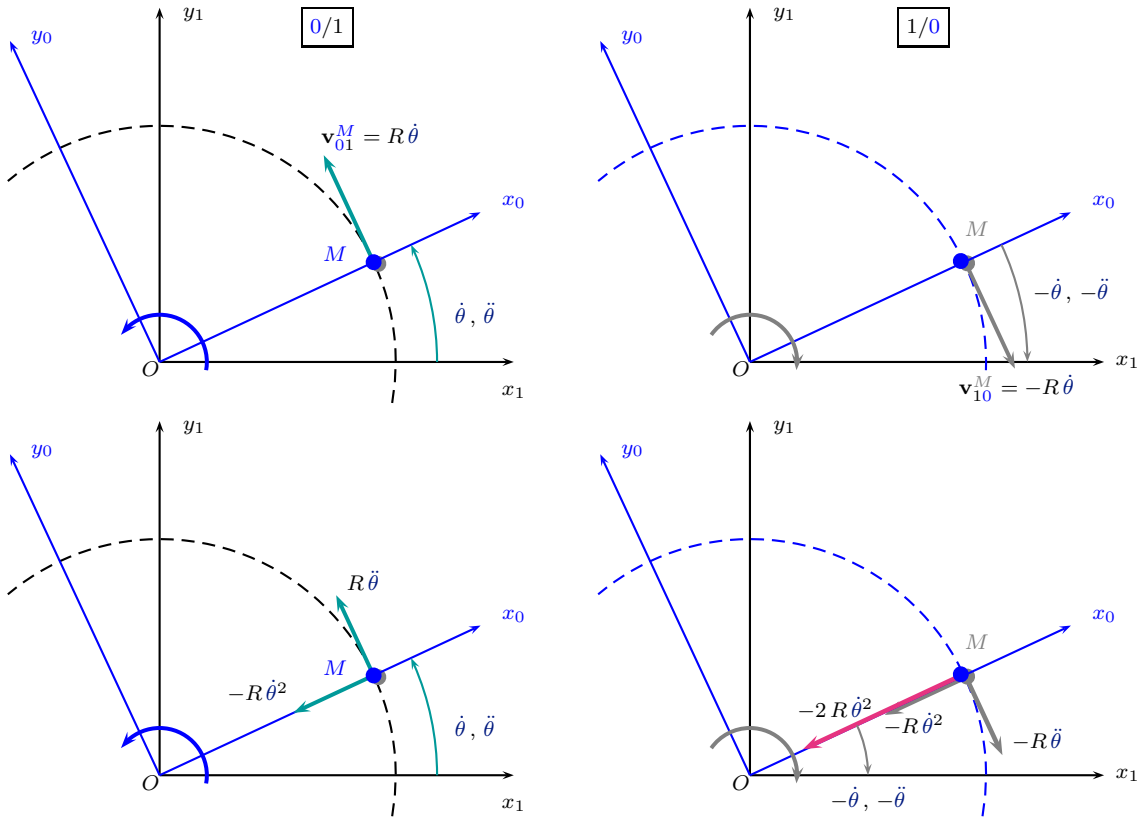
CLASES PARTICULARES, TUTORÍAS TÉCNICAS ONLINE
LLAMA O ENVÍA WHATSAPP: 689 45 44 70

- - -

ONLINE PRIVATE LESSONS FOR SCIENCE STUDENTS
CALL OR WHATSAPP:689 45 44 70

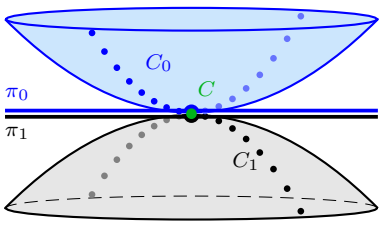
www.cartagena99.com no se hace responsable de la información contenida en el presente documento en virtud al Artículo 17.1 de la Ley de Servicios de la Sociedad de la Información y de Comercio Electrónico, de 11 de julio de 2002.
Si la información contenida en el documento es ilícita o lesiona bienes o derechos de un tercero háganoslo saber y será retirada.

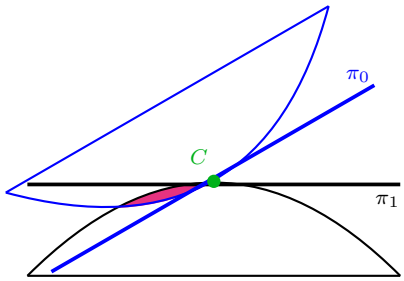
Movimientos inversos: ejemplo



Contacto entre sólidos: condición geométrica

- Sólidos rígidos S_1 y S_0 limitados por superficies regulares en el punto de contacto C ($\in$ sólido independiente S_2)
- Condición geométrica de contacto:
  Planos tangentes π_1 y π_0 comunes en el punto de contacto C





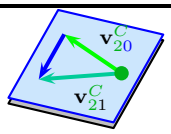
CLASES PARTICULARES, TUTORÍAS TÉCNICAS ONLINE
LLAMA O ENVÍA WHATSAPP: 689 45 44 70

- - -

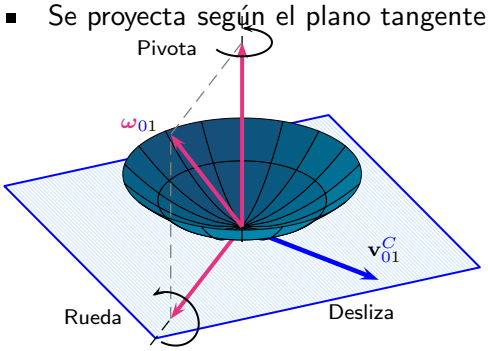
ONLINE PRIVATE LESSONS FOR SCIENCE STUDENTS
CALL OR WHATSAPP:689 45 44 70

www.cartagena99.com no se hace responsable de la información contenida en el presente documento en virtud al Artículo 17.1 de la Ley de Servicios de la Sociedad de la Información y de Comercio Electrónico, de 11 de julio de 2002.
Si la información contenida en el documento es ilícita o lesiona bienes o derechos de un tercero háganoslo saber y será retirada.

Cinemática de sólidos en contacto



- Movimiento relativo $0/1$, apoyándose en el punto de contacto C
- Se proyecta según el plano tangente común y la normal



- Velocidad de deslizamiento:

$$\left.\begin{array}{l} C \text{ sobre } C_1 \;\rightarrow\; \mathbf{v}_{21}^C \in \pi_1 \\ C \text{ sobre } C_0 \;\rightarrow\; \mathbf{v}_{20}^C \in \pi_0 \end{array}\right\} \mathbf{v}_{01}^C \in \pi_{01}$$

- Velocidad angular de:
  - Pivotamiento: $\boldsymbol{\omega}_{01}^p \perp \pi_{01}$
  - Rodadura: $\boldsymbol{\omega}_{01}^r \in \pi_{01}$

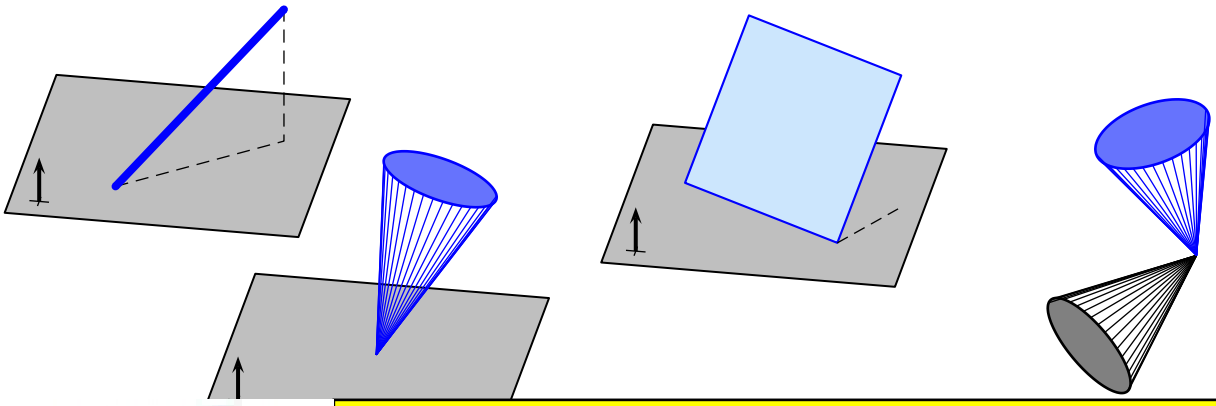
$$\boldsymbol{\omega}_{01} = \boldsymbol{\omega}_{01}^p\big|_{\perp} + \boldsymbol{\omega}_{01}^r\big|_{\parallel} = (\boldsymbol{\omega}_{01}\cdot\mathbf{n}_{01})\,\mathbf{n}_{01} + \mathbf{n}_{01}\wedge(\boldsymbol{\omega}_{01}\wedge\mathbf{n}_{01})$$

- 5 Grados de Libertad: $\boldsymbol{\omega}_{01}^p$ (1), $\boldsymbol{\omega}_{01}^r$ (2), $\mathbf{v}_{01}^C$ (2)
- Ojo: velocidad de deslizamiento de dos sólidos en contacto $(\mathbf{v}_{01}^C \in \pi_{01}) \neq$
  $\neq$ velocidad de mínimo deslizamiento del campo de velocidades de un sólido $(\mathbf{v}^D \parallel \boldsymbol{\omega}_{01})$

Sólidos con singularidades

Si la superficie que limita a uno de los sólidos tiene una singularidad en el punto de contacto:

- Su plano tangente no está definido en ese punto
- Si el otro sólido tiene plano tangente, se aplica todo lo anterior
- Si los dos tienen singularidad, ya no es un contacto simple entre sólidos, sino otro tipo de ligadura (e.g., una articulación)



CLASES PARTICULARES, TUTORÍAS TÉCNICAS ONLINE
LLAMA O ENVÍA WHATSAPP: 689 45 44 70

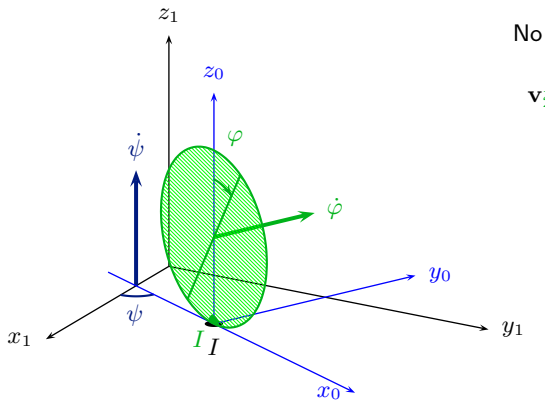
- - -

ONLINE PRIVATE LESSONS FOR SCIENCE STUDENTS
CALL OR WHATSAPP:689 45 44 70

www.cartagena99.com no se hace responsable de la información contenida en el presente documento en virtud al Artículo 17.1 de la Ley de Servicios de la Sociedad de la Información y de Comercio Electrónico, de 11 de julio de 2002.
Si la información contenida en el documento es ilícita o lesiona bienes o derechos de un tercero háganoslo saber y será retirada.

Rodadura, Pivotamiento, Deslizamiento

Rueda y pivota sin deslizar manteniéndose vertical

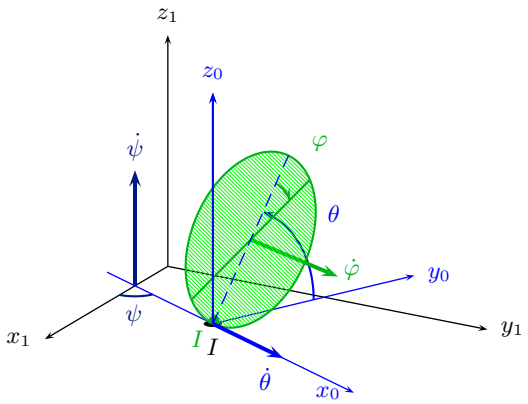


$$\boldsymbol{\omega}_{21} = \dot\psi\,\mathbf{k}_1 + \dot\varphi\,\mathbf{j}_0$$
$$\boldsymbol{\omega}^p_{21} = \dot\psi\,\mathbf{k}_1$$
$$\boldsymbol{\omega}^r_{21} = \dot\varphi\,\mathbf{j}_0$$

No desliza:

$$\mathbf{v}^I_{21} = \mathbf{0}$$

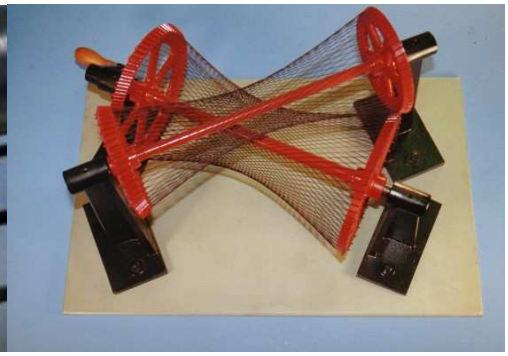
Rueda y pivota sin deslizar



$$\boldsymbol{\omega}_{21} = \dot\psi\,\mathbf{k}_1 + \dot\theta\,\mathbf{i}_0 + \dot\varphi\,\mathbf{j}_2$$
$$\boldsymbol{\omega}^p_{21} = \left(\dot\psi - \dot\varphi\,\cos\theta\right)\,\mathbf{k}_1$$
$$\boldsymbol{\omega}^r_{21} = \dot\theta\,\mathbf{i}_0 + \dot\varphi\,\sin\theta\,\mathbf{j}_0$$

Contacto sobre una curva

- Las sucesivas posiciones de la superficie Σ_0 del sólido móvil S_0 forman una familia de superficies en ejes fijos S_1
- La envolvente de esa familia es una superficie Σ_1 fija al sólido S_1
- En cada momento Σ_0 y Σ_1 son tangentes en una curva



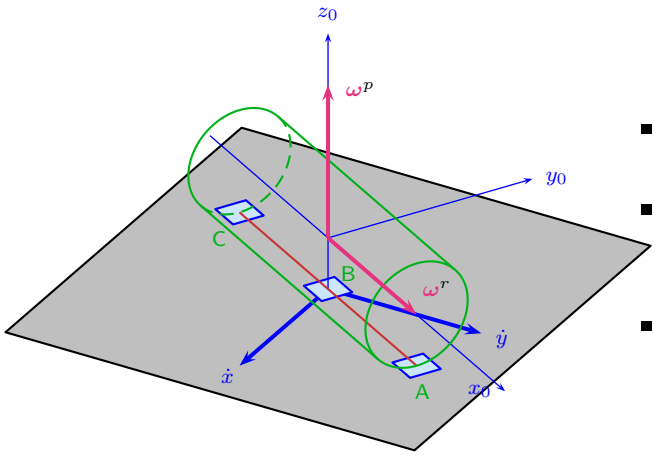
CLASES PARTICULARES, TUTORÍAS TÉCNICAS ONLINE
LLAMA O ENVÍA WHATSAPP: 689 45 44 70

- - -

ONLINE PRIVATE LESSONS FOR SCIENCE STUDENTS
CALL OR WHATSAPP:689 45 44 70

www.cartagena99.com no se hace responsable de la información contenida en el presente documento en virtud al Artículo 17.1 de la Ley de Servicios de la Sociedad de la Información y de Comercio Electrónico, de 11 de julio de 2002.
Si la información contenida en el documento es ilícita o lesiona bienes o derechos de un tercero háganoslo saber y será retirada.

Contacto sobre una recta



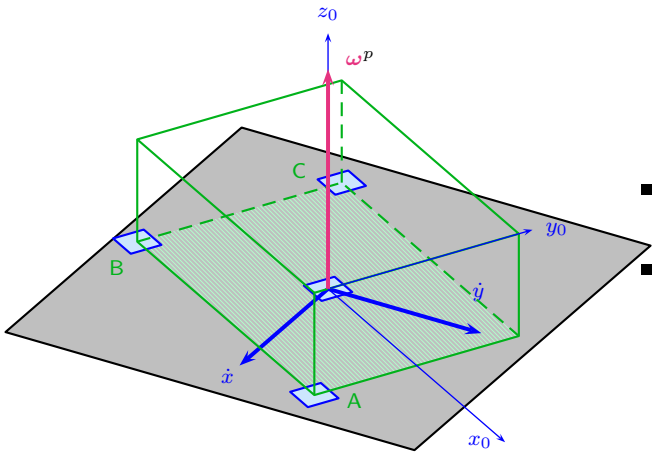
- Entre superficies regladas: planos, cilindos, conos, hiperboloide de revolución, helicoide ...
- Cumplir la condición de contacto $\mathbf{v}_{01}^{C} \in \pi_{01}$ en todos los puntos de la recta quita grados de libertad.
- Para superficies desarrollables, si $\mathbf{v}^{B}{}_{21} \perp \mathbf{k}_1$:

$$\mathbf{v}^{A}{}_{21},\ \mathbf{v}^{C}{}_{21} \perp \mathbf{k}_1 \quad \Rightarrow \quad \boldsymbol{\omega}_{21} \perp \mathbf{j}_0$$

- Quedan 4 GDL: $\dot{x}$ (1), $\dot{y}$ (1), ω^p (1), ω^r (1)
- La ligadura quita 2 GDL: $\dot{z}$ (-1), $\omega^r\big|_{y_0}$ (-1)

Contacto sobre una superficie

Cuando dos sólidos tienen una superficie de contacto



- La condición de contacto $\mathbf{v}_{01}^{C} \in \pi_{01}$ se tiene que cumplir en todos los puntos de la superficie
- Esto reduce los grados de libertad

Apoyo sobre un plano

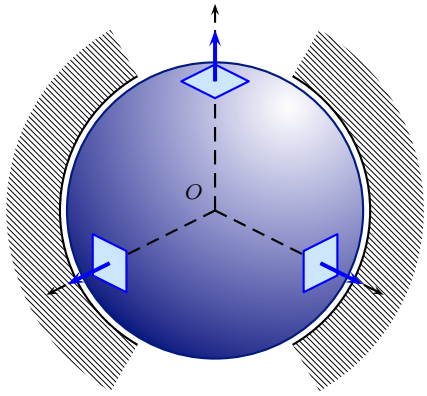
CLASES PARTICULARES, TUTORÍAS TÉCNICAS ONLINE
LLAMA O ENVÍA WHATSAPP: 689 45 44 70

- - -

ONLINE PRIVATE LESSONS FOR SCIENCE STUDENTS
CALL OR WHATSAPP:689 45 44 70

www.cartagena99.com no se hace responsable de la información contenida en el presente documento en virtud al Artículo 17.1 de la Ley de Servicios de la Sociedad de la Información y de Comercio Electrónico, de 11 de julio de 2002.
Si la información contenida en el documento es ilícita o lesiona bienes o derechos de un tercero háganoslo saber y será retirada.

Junta esférica



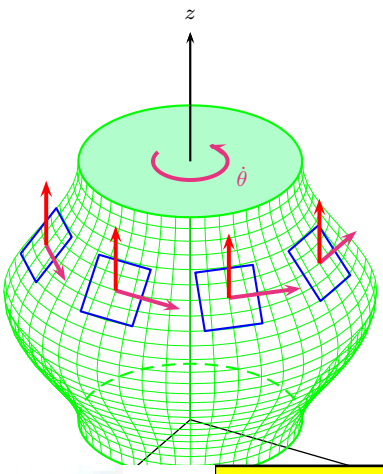
- En todos los puntos de la esfera, la normal común tiene dirección radial:
$$\mathbf{n}_{01} = \mathbf{u}_r$$
- Ningún punto de la esfera puede tener velocidad radial: centro fijo.
- El movimiento se reduce a un giro arbitrario alrededor del centro:
$$\boldsymbol{\omega}_{01} \wedge R\,\mathbf{u}_r \perp \mathbf{u}_r \;\forall\, \boldsymbol{\omega}_{01}$$

- 3 GDL: ω_x, ω_y, ω_z
- 3 ligaduras: $\dot{x}^O = 0$, $\dot{z}^O = 0$, $\dot{z}^O = 0$
- Es equivalente a fijar el centro de la esfera: sólido con punto fijo.

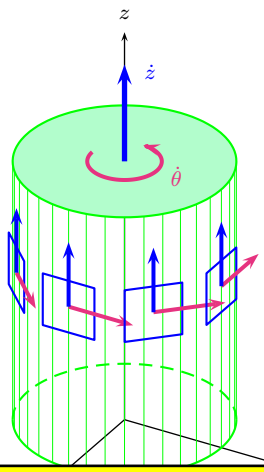
Superficie de revolución

- Sólidos en contacto sobre una superficie de revolución: sólo un grado de libertad, la rotación $\dot{\theta}$ alrededor del eje de revolución.
- Si la superficie es un cilindro de sección circular, hay otro grado de libertad: desplazamiento $\dot{z}$ según el eje del cilindro

1 GDL



2 GDL



CLASES PARTICULARES, TUTORÍAS TÉCNICAS ONLINE
LLAMA O ENVÍA WHATSAPP: 689 45 44 70

- - -

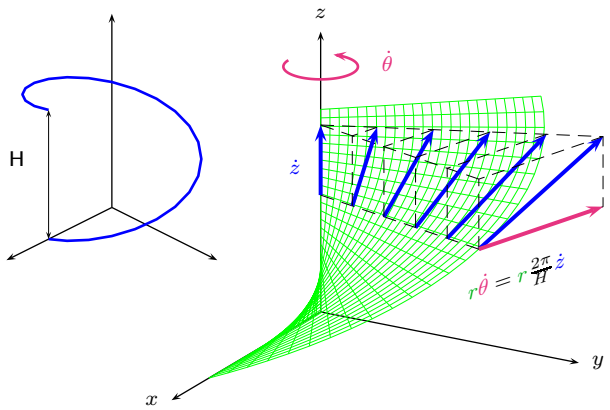
ONLINE PRIVATE LESSONS FOR SCIENCE STUDENTS
CALL OR WHATSAPP:689 45 44 70

www.cartagena99.com no se hace responsable de la información contenida en el presente documento en virtud al Artículo 17.1 de la Ley de Servicios de la Sociedad de la Información y de Comercio Electrónico, de 11 de julio de 2002.
Si la información contenida en el documento es ilícita o lesiona bienes o derechos de un tercero háganoslo saber y será retirada.

Roscas y tornillos

Contacto sobre un helicoide generalizado de paso H:

$$\boxed{1\ \text{GDL}} \left\{ \begin{array}{l} \text{rotación alrededor del eje} \\ \text{desplazamiento paralelo al eje} \end{array} \right\} \quad \frac{\dot{\theta}}{\dot{z}} = \frac{2\pi}{H}$$



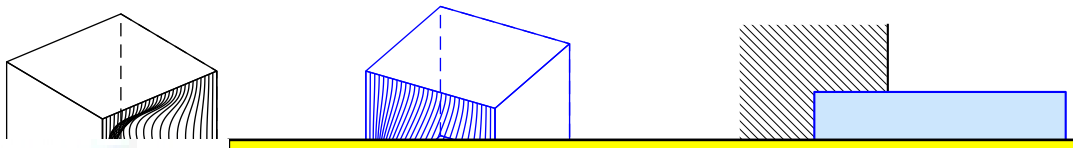
Empotramiento

Si dos sólidos están en contacto sobre una superficie arbitraria Σ,

- En general, no es posible conciliar en todos los puntos de la superficie las dos condiciones:
  - Campo de velocidades del sólido
  - Velocidad relativa contenida en el plano tangente común
- No hay movimiento relativo: empotramiento

$$\boldsymbol{\omega}_{01} = \mathbf{0} \qquad \mathbf{v}_{01}^{M} = \mathbf{0} \qquad \boxed{0\ \text{GDL}}$$

- Se mueven como un único sólido



CLASES PARTICULARES, TUTORÍAS TÉCNICAS ONLINE
LLAMA O ENVÍA WHATSAPP: 689 45 44 70

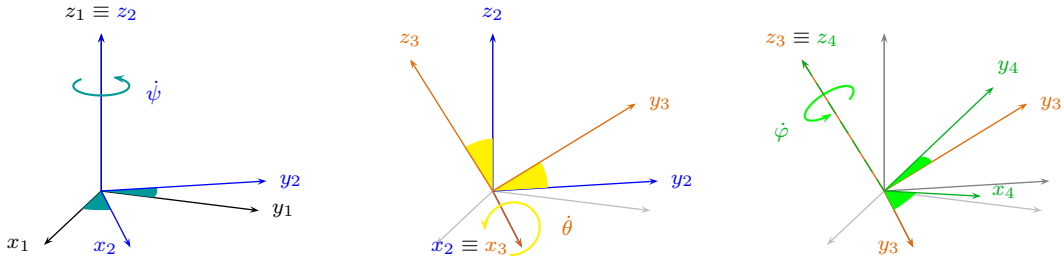
- - -

ONLINE PRIVATE LESSONS FOR SCIENCE STUDENTS
CALL OR WHATSAPP:689 45 44 70

www.cartagena99.com no se hace responsable de la información contenida en el presente documento en virtud al Artículo 17.1 de la Ley de Servicios de la Sociedad de la Información y de Comercio Electrónico, de 11 de julio de 2002.
Si la información contenida en el documento es ilícita o lesiona bienes o derechos de un tercero háganoslo saber y será retirada.

Ángulos de Euler

- Ángulos de Euler: tres giros sucesivos en secuencia z-x-z



Precesión Nutación Rotación propia

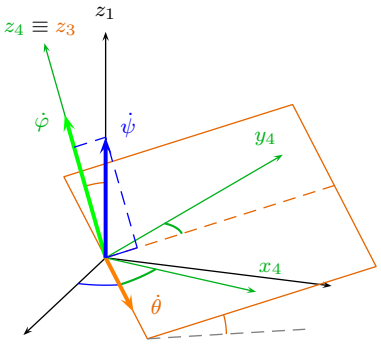
- Dos composiciones de movimientos sucesivas:

$$4/1 = 4/3 + 3/1 = 4/3 + 3/2 + 2/1$$

$$\boldsymbol{\omega}_{41} = \boldsymbol{\omega}_{43} + \boldsymbol{\omega}_{32} + \boldsymbol{\omega}_{21} = \dot\varphi\,\mathbf{k}_3 + \dot\theta\,\mathbf{i}_3 + \dot\psi\,\mathbf{k}_1$$

Velocidad angular con los ángulos de Euler

Ejes cuerpo: proyectamos primero en ejes intermedios 3 (precesión + nutación):

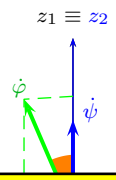


$$\boldsymbol{\omega}_{41} = \dot\varphi\,\mathbf{k}_3 + \dot\theta\,\mathbf{i}_3 + \dot\psi\,\mathbf{k}_1 = \begin{Bmatrix} \dot\theta \\ \dot\psi\,\sin\theta \\ \dot\psi\,\cos\theta + \dot\varphi \end{Bmatrix}_3 =$$

$$= \begin{Bmatrix} \dot\psi\,\sin\theta\,\sin\varphi + \dot\theta\,\cos\varphi \\ \dot\psi\,\sin\theta\,\cos\varphi - \dot\theta\,\sin\varphi \\ \dot\psi\,\cos\theta + \dot\varphi \end{Bmatrix}_4$$

Ejes fijos: proyectamos primero en ejes 2 (precesión)

$$\boldsymbol{\omega}_{41} = \begin{Bmatrix} \dot\theta \\ -\dot\phi\,\sin\theta \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \dot\theta\,\cos\psi + \dot\varphi\,\sin\theta\,\sin\psi \\ \dot\theta\,\sin\psi - \dot\phi\,\sin\theta\,\cos\psi \end{Bmatrix}$$



CLASES PARTICULARES, TUTORÍAS TÉCNICAS ONLINE
LLAMA O ENVÍA WHATSAPP: 689 45 44 70

- - -

ONLINE PRIVATE LESSONS FOR SCIENCE STUDENTS
CALL OR WHATSAPP:689 45 44 70

www.cartagena99.com no se hace responsable de la información contenida en el presente documento en virtud al Artículo 17.1 de la Ley de Servicios de la Sociedad de la Información y de Comercio Electrónico, de 11 de julio de 2002.
Si la información contenida en el documento es ilícita o lesiona bienes o derechos de un tercero háganoslo saber y será retirada.

Aceleración angular con ángulos de Euler

- Por definición, para un sólido

$$\boldsymbol{\alpha}_{41} = \left.\frac{d\,\boldsymbol{\omega}_{41}}{dt}\right|_1 = \left.\frac{d\,\boldsymbol{\omega}_{41}}{dt}\right|_4 + \cancel{\boldsymbol{\omega}_{41} \wedge \boldsymbol{\omega}_{41}}$$

- Se obtiene derivando las componentes de $\boldsymbol{\omega}_{41}$ en ejes fijos 1
- Y también derivando las componentes en ejes sólido 4
- La composición de aceleraciones no compensa, pues hay que hacerla en dos fases

$$\boldsymbol{\alpha}_{41} = \boldsymbol{\alpha}_{43} + \boldsymbol{\alpha}_{31} + \boldsymbol{\omega}_{31} \wedge \boldsymbol{\omega}_{43} =$$
$$= \boldsymbol{\alpha}_{43} + (\boldsymbol{\alpha}_{32} + \boldsymbol{\alpha}_{21} + \boldsymbol{\omega}_{21} \wedge \boldsymbol{\omega}_{32}) + (\boldsymbol{\omega}_{32} + \boldsymbol{\omega}_{21}) \wedge \boldsymbol{\omega}_{43}$$

y los términos correctores la hacen mucho más complicada que la de velocidades.

Tangencia de las axoides: definición

- Axoide $\begin{cases} \text{Fija} & \text{Lugar geométrico del E.I.R. en ejes fijos} \\ \text{Móvil} & \text{Lugar geométrico del E.I.R. en ejes sólido} \end{cases}$
- En todo momento el E.I.R. es común a las dos superficies
- En todos los puntos de contacto (E.I.R.), las dos axoides tienen el plano tangente común π_{01} (hay que demostrarlo)
- Por tanto, cuando el sólido se mueve la axoide móvil y la fija son dos sólidos en contacto:
  - Rueda: $\boldsymbol{\omega}^r = \boldsymbol{\omega}_{01} \parallel$ E.I.R. $\in \pi_{01}$
  - No pivota: $\boldsymbol{\omega}^p = \mathbf{0}$
  - Desliza: $\mathbf{v}_{01}^M = \mathbf{v}^D \parallel$ E.I.R.
- En todos los puntos de contacto (E.I.R.), la velocidad de deslizamiento (contacto entre sólidos) coincide con la velocidad de mínimo deslizamiento (campo de velocidades del sólido)

CLASES PARTICULARES, TUTORÍAS TÉCNICAS ONLINE
LLAMA O ENVÍA WHATSAPP: 689 45 44 70

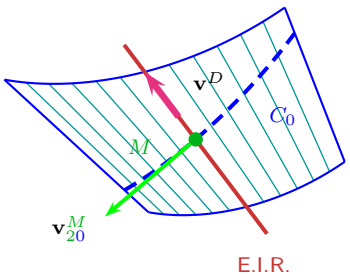
- - -

ONLINE PRIVATE LESSONS FOR SCIENCE STUDENTS
CALL OR WHATSAPP:689 45 44 70

www.cartagena99.com no se hace responsable de la información contenida en el presente documento en virtud al Artículo 17.1 de la Ley de Servicios de la Sociedad de la Información y de Comercio Electrónico, de 11 de julio de 2002.
Si la información contenida en el documento es ilícita o lesiona bienes o derechos de un tercero háganoslo saber y será retirada.

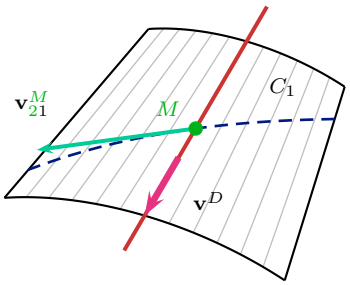
Tangencia de las axoides: demostración

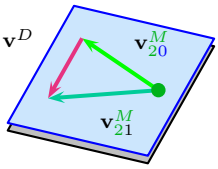
Punto independiente $M \in S_2$ siempre sobre el E.I.R.



- M recorre la curva C_0 sobre la AM
- $\mathbf{v}_{20}^M \parallel \text{tg}(C_0) \quad \Rightarrow \quad \mathbf{v}_{20}^M \in \pi_0$

- M recorre la curva C_1 sobre la AF
- $\mathbf{v}_{21}^M \parallel \text{tg}(C_1) \quad \Rightarrow \quad \mathbf{v}_{21}^M \in \pi_1$





Composición de movimientos:

$$\mathbf{v}_{21}^M = \mathbf{v}_{20}^M + \mathbf{v}_{01}^M = \mathbf{v}_{20}^M + \mathbf{v}^D$$

$$\left.\begin{array}{l} \mathbf{v}_{21}^M,\ \mathbf{v}^D \in \pi_1 \\ \mathbf{v}_{20}^M,\ \mathbf{v}^D \in \pi_0 \end{array}\right\} \Rightarrow \begin{array}{c} \boxed{\pi_1 \equiv \pi_0} \\ \forall M \in \text{E.I.R.} \end{array}$$

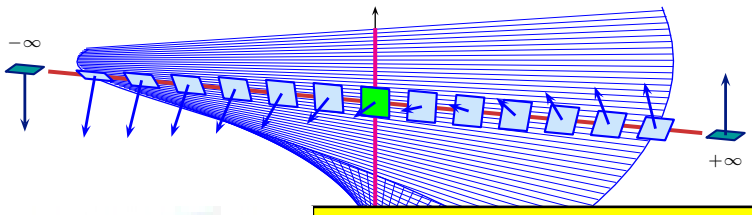
Q.E.D.

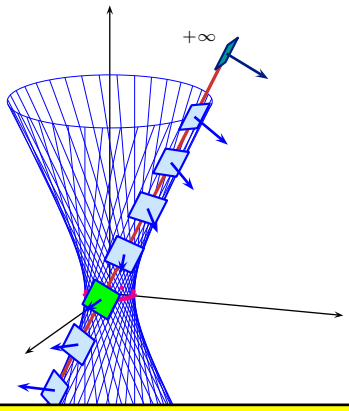
Tangencia de las axoides: consecuencias

Si una axoide es superficie reglada alabeada, $\Rightarrow$

$\Rightarrow$ La otra es también alabeada, y tiene los mismos:

- Planos asintóticos
- Plano central
- Parámetro de distribución $\left\{\begin{array}{l} \mathbf{r} = \mathbf{y}(u) + v\,\mathbf{i}(u) \\ p(u) = [\mathbf{y}', \mathbf{i}, \mathbf{i}'] \end{array}\right.$
- Líneas de estricción siempre en contacto





CLASES PARTICULARES, TUTORÍAS TÉCNICAS ONLINE
LLAMA O ENVÍA WHATSAPP: 689 45 44 70

- - -

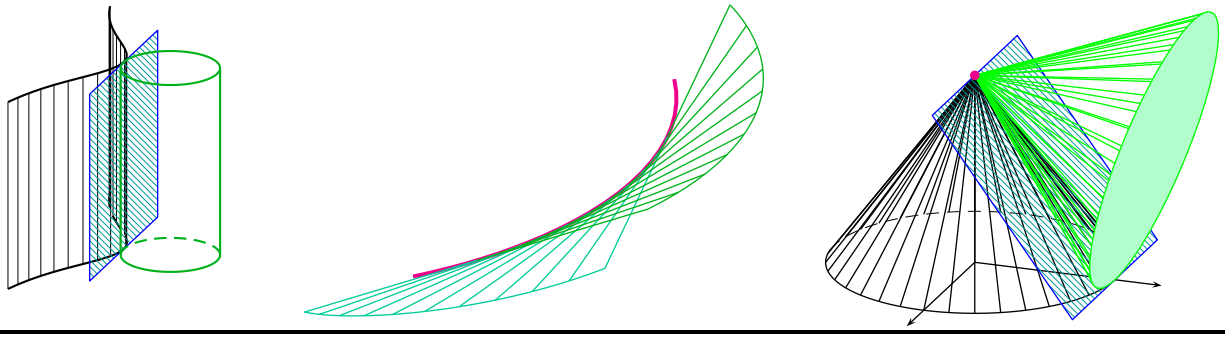
ONLINE PRIVATE LESSONS FOR SCIENCE STUDENTS
CALL OR WHATSAPP:689 45 44 70

www.cartagena99.com no se hace responsable de la información contenida en el presente documento en virtud al Artículo 17.1 de la Ley de Servicios de la Sociedad de la Información y de Comercio Electrónico, de 11 de julio de 2002.
Si la información contenida en el documento es ilícita o lesiona bienes o derechos de un tercero háganoslo saber y será retirada.

Tangencia de las axoides: consecuencias

Si una axoide es superficie reglada desarrollable, $\Rightarrow$
$\Rightarrow$ La otra es también desarrollable, y tiene:

- El mismo plano tangente en toda la generatriz
- Aristas de retroceso siempre en contacto
  - Si una es cilindro (A.R.$\rightarrow \infty$), la otra también (o plano)
  - Si una es desarrollable tangencial, la otra axoide (cono, des. tang.) se mueve deslizando una A.R. sobre la otra
  - Si una es cono (A.R.$\rightarrow$ vértice) y no hay deslizamiento, la otra es también un cono con el mismo vértice (o un plano)



Coordenadas esféricas

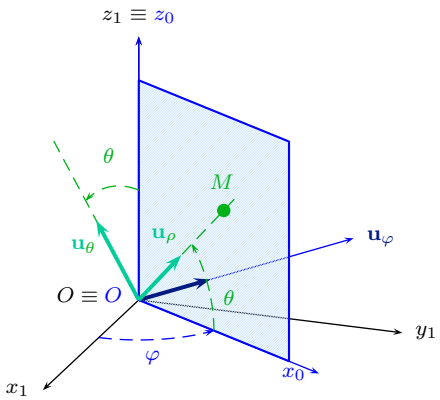
Ejes móviles $\mathbf{u}_\rho$, $\mathbf{u}_\varphi$, $\mathbf{u}_\theta$ siguen a M:

ρ: Distancia del origen O al punto M

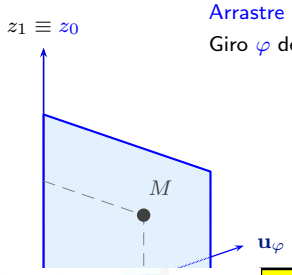
φ: Ángulo del plano OMz con el Oxz

θ: Ángulo de OM con Oxy

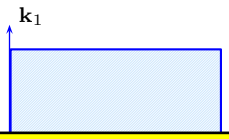
Descomponemos el movimiento de M en:



Arrastre 0/1 :
Giro φ del plano OMz (S_0)



Relativo 2/0 :
Movimiento en polares de M (S_2) dentro del plano OMz



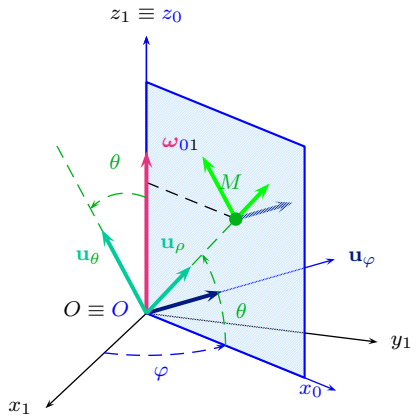
CLASES PARTICULARES, TUTORÍAS TÉCNICAS ONLINE
LLAMA O ENVÍA WHATSAPP: 689 45 44 70

- - -

ONLINE PRIVATE LESSONS FOR SCIENCE STUDENTS
CALL OR WHATSAPP:689 45 44 70

www.cartagena99.com no se hace responsable de la información contenida en el presente documento en virtud al Artículo 17.1 de la Ley de Servicios de la Sociedad de la Información y de Comercio Electrónico, de 11 de julio de 2002.
Si la información contenida en el documento es ilícita o lesiona bienes o derechos de un tercero háganoslo saber y será retirada.

Velocidad en esféricas



$0/1$: Giro φ alrededor de Oz_1

$$\mathbf{v}_{01}^M = \mathbf{v}_{01}^O + \boldsymbol{\omega}_{01} \wedge \mathbf{OM} = \mathbf{0} + \\ + \begin{vmatrix} \mathbf{u}_\rho & \mathbf{u}_\varphi & \mathbf{u}_\theta \\ \dot{\varphi}\sin\theta & 0 & \dot{\varphi}\cos\theta \\ \rho & 0 & 0 \end{vmatrix} = \rho\cos\theta\,\dot{\varphi}\,\mathbf{u}_\varphi$$

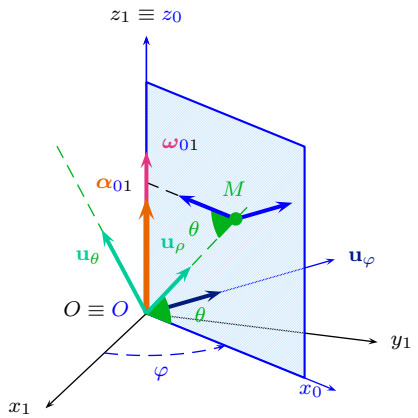
$2/0$: Polares en Ox_0z_1

$$\mathbf{OM} = \rho\,\mathbf{u}_\rho \quad \Rightarrow \quad \mathbf{v}_{20}^M = \dot{\rho}\,\mathbf{u}_\rho + \rho\,\dot{\theta}\,\mathbf{u}_\theta$$

$2/1$: Velocidad en esféricas

$$\mathbf{v}_{20}^M + \mathbf{v}_{01}^M = \boxed{\mathbf{v}_{21}^M = \dot{\rho}\,\mathbf{u}_\rho + \rho\cos\theta\,\dot{\varphi}\,\mathbf{u}_\varphi + \rho\,\dot{\theta}\,\mathbf{u}_\theta}$$

Aceleración en esféricas



Aceleración de arrastre $0/1$:

Giro φ alrededor de Oz_1

$$\mathbf{a}_{01}^M = \mathbf{a}_{01}^O + \boldsymbol{\alpha}_{01} \wedge \mathbf{OM} + \\ + \boldsymbol{\omega}_{01} \wedge (\boldsymbol{\omega}_{01} \wedge \mathbf{OM}) = \\ = \mathbf{0} + \begin{vmatrix} \mathbf{u}_\rho & \mathbf{u}_\varphi & \mathbf{u}_\theta \\ \ddot{\varphi}\sin\theta & 0 & \ddot{\varphi}\cos\theta \\ \rho & 0 & 0 \end{vmatrix} + \\ + \begin{vmatrix} \mathbf{u}_\rho & \mathbf{u}_\varphi & \mathbf{u}_\theta \\ \dot{\varphi}\sin\theta & 0 & \dot{\varphi}\cos\theta \\ 0 & \rho\cos\theta\,\dot{\varphi} & 0 \end{vmatrix} = \begin{Bmatrix} -\rho\cos^2\theta\,\dot{\varphi}^2 \\ \rho\cos\theta\,\ddot{\varphi} \\ \rho\cos\theta\sin\theta\,\dot{\varphi}^2 \end{Bmatrix}$$

CLASES PARTICULARES, TUTORÍAS TÉCNICAS ONLINE
LLAMA O ENVÍA WHATSAPP: 689 45 44 70

- - -

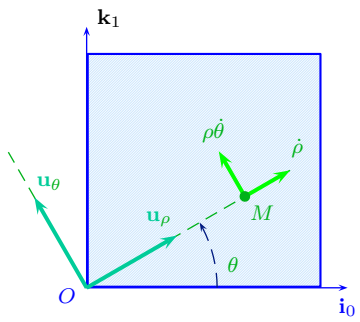
ONLINE PRIVATE LESSONS FOR SCIENCE STUDENTS
CALL OR WHATSAPP:689 45 44 70

www.cartagena99.com no se hace responsable de la información contenida en el presente documento en virtud al Artículo 17.1 de la Ley de Servicios de la Sociedad de la Información y de Comercio Electrónico, de 11 de julio de 2002.
Si la información contenida en el documento es ilícita o lesiona bienes o derechos de un tercero háganoslo saber y será retirada.

Aceleración en esféricas

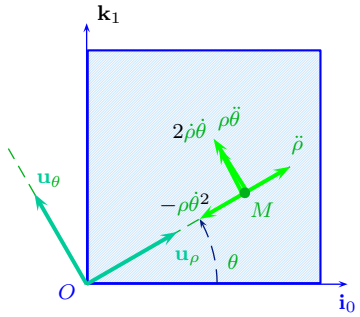
Aceleración relativa $2/0$:

Polares en Ox_0z_1



$$\mathbf{v}_{20}^M = \dot{\rho}\,\mathbf{u}_\rho + \rho\,\dot{\theta}\,\mathbf{u}_\theta$$

$$\mathbf{a}_{20}^M = \ddot{\rho}\,\mathbf{u}_\rho + \dot{\rho}\,\dot{\mathbf{u}}_\rho +$$
$$+ \dot{\rho}\,\dot{\theta}\,\mathbf{u}_\theta + \rho\,\ddot{\theta}\,\mathbf{u}_\theta + \rho\,\dot{\theta}\,\dot{\mathbf{u}}_\theta =$$
$$= \left(\ddot{\rho} - \rho\,\dot{\theta}^2\right)\,\mathbf{u}_\rho + \left(2\dot{\rho}\,\dot{\theta} + \rho\,\ddot{\theta}\right)\,\mathbf{u}_\theta$$

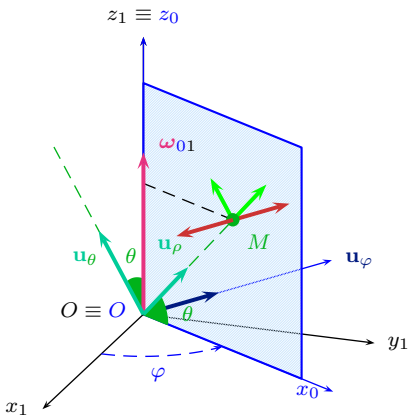


Donde $\dot{\mathbf{u}}_\rho\big|_0 = \dot{\theta}\,\mathbf{u}_\theta$ y $\dot{\mathbf{u}}_\theta\big|_0 = -\dot{\theta}\,\mathbf{u}_\rho$,
de las coordenadas polares.

En el movimiento absoluto, $\dot{\mathbf{u}}_\rho\big|_1$ y $\dot{\mathbf{u}}_\theta\big|_1$ tendrían que incluir la variación con $\dot{\varphi}$.

Aceleración en esféricas

Aceleración de Coriolis :



$$\mathbf{a}_{Cor}^M = 2\,\boldsymbol{\omega}_{01} \wedge \mathbf{v}_{20}^M =$$

$$= 2\begin{vmatrix} \mathbf{u}_\rho & \mathbf{u}_\varphi & \mathbf{u}_\theta \\ \dot{\varphi}\sin\theta & 0 & \dot{\varphi}\cos\theta \\ \dot{\rho} & 0 & \rho\dot{\theta} \end{vmatrix} =$$

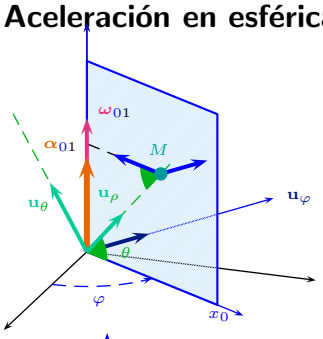
CLASES PARTICULARES, TUTORÍAS TÉCNICAS ONLINE
LLAMA O ENVÍA WHATSAPP: 689 45 44 70

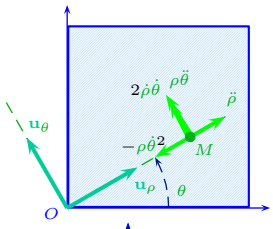
- - -

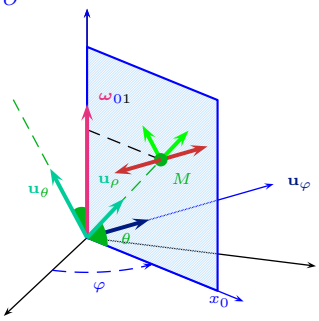
ONLINE PRIVATE LESSONS FOR SCIENCE STUDENTS
CALL OR WHATSAPP:689 45 44 70

www.cartagena99.com no se hace responsable de la información contenida en el presente documento en virtud al Artículo 17.1 de la Ley de Servicios de la Sociedad de la Información y de Comercio Electrónico, de 11 de julio de 2002.
Si la información contenida en el documento es ilícita o lesiona bienes o derechos de un tercero háganoslo saber y será retirada.

Aceleración en esféricas







Aceleración absoluta $2/1$:

$$\mathbf{a}_{21}^M = \mathbf{a}_{20}^M + \mathbf{a}_{01}^M + \mathbf{a}_{Cor}^M =$$

$$= \left\{ \begin{array}{c} \ddot\rho - \rho\,\dot\theta^2 - \rho\cos^2\theta\,\dot\varphi^2 \\ \rho\cos\theta\,\ddot\varphi + 2\dot\rho\,\dot\varphi\cos\theta - 2\rho\dot\theta\,\dot\varphi\sin\theta \\ 2\dot\rho\,\dot\theta + \rho\,\ddot\theta + \rho\cos\theta\sin\theta\,\dot\varphi^2 \end{array} \right\}$$

Triedro a derechas:

$$\overset{1}{\mathbf{u}}_\rho \wedge \overset{2}{\mathbf{u}}_\varphi = \overset{3}{\mathbf{u}}_\theta$$

CLASES PARTICULARES, TUTORÍAS TÉCNICAS ONLINE
LLAMA O ENVÍA WHATSAPP: 689 45 44 70

- - -

ONLINE PRIVATE LESSONS FOR SCIENCE STUDENTS
CALL OR WHATSAPP:689 45 44 70

www.cartagena99.com no se hace responsable de la información contenida en el presente documento en virtud al Artículo 17.1 de la Ley de Servicios de la Sociedad de la Información y de Comercio Electrónico, de 11 de julio de 2002.
Si la información contenida en el documento es ilícita o lesiona bienes o derechos de un tercero háganoslo saber y será retirada.

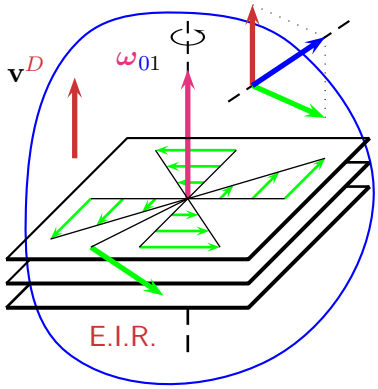
Movimiento Plano

Definición: Todos los puntos del sólido móvil S_0 tienen velocidades paralelas a un plano fijo π_1.

Si $\mathbf{u} \perp \pi_1 \Rightarrow \boxed{\mathbf{u} \cdot \mathbf{v}_{01}^{M} = 0 \; \forall \; M \in S_0}$

C.V.: $\mathbf{v}_{01}^{M} = \mathbf{v}^{D} + \boldsymbol{\omega}_{01} \wedge \overline{HM}$

donde: $\left\{ \begin{array}{l} H \in \text{E.I.R.} \\ \mathbf{v}^{D} : \text{Vel. min. desl.} \end{array} \right.$



Hay dos posibilidades:

$\boldsymbol{\omega}_{01} = \mathbf{0} : \mathbf{v}_{01}^{M} = \mathbf{v}_{01}^{O} \perp \mathbf{u}$ Traslación (trivial)

$\boldsymbol{\omega}_{01} \neq \mathbf{0} : \left\{ \begin{array}{c} \mathbf{v}^{D} = \mathbf{0} \\ \boldsymbol{\omega}_{01} \parallel \mathbf{u} \end{array} \right\}$ Giro alrededor de un eje fijo $\parallel \mathbf{u}$

CLASES PARTICULARES, TUTORÍAS TÉCNICAS ONLINE
LLAMA O ENVÍA WHATSAPP: 689 45 44 70

- - -

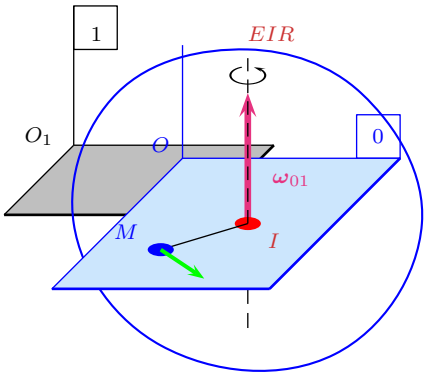
ONLINE PRIVATE LESSONS FOR SCIENCE STUDENTS
CALL OR WHATSAPP:689 45 44 70

www.cartagena99.com no se hace responsable de la información contenida en el presente documento en virtud al Artículo 17.1 de la Ley de Servicios de la Sociedad de la Información y de Comercio Electrónico, de 11 de julio de 2002.
Si la información contenida en el documento es ilícita o lesiona bienes o derechos de un tercero háganoslo saber y será retirada.

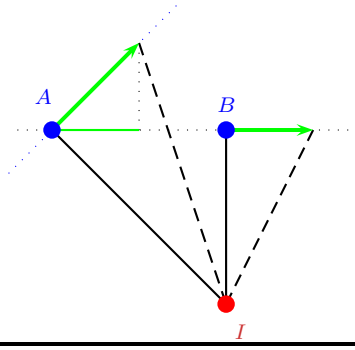
Simplificaciones

Campo bidimensional de velocidades y de aceleraciones:

- Plano móvil π_0 y fijo π_1, en vez de sólidos
- Corte del E.I.R. con los planos: I, Centro Instantáneo de Rotación, o C.I.R.
- $\mathbf{v}^D = 0$ No hay deslizamiento
- $\mathbf{v}_{01}^M = \boldsymbol{\omega}_{01} \wedge \overline{IM}$



- Con las direcciones de las velocidades de dos puntos se determina directamente el C.I.R.
- Los módulos no son independientes por la equiproyectividad



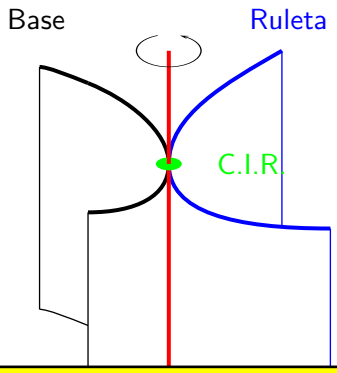
Base y Ruleta

- Si $\boldsymbol{\omega}_{01} \parallel \mathbf{u}$, las axoides son cilindros normales a π_1.
- Si trabajamos en el plano, solo necesitamos los cortes de las axoides con sus respectivos planos: polares fija (Base) y móvil (Ruleta)

Base: Lugar geométrico de las sucesivas posiciones del C.I.R. sobre el plano fijo

Ruleta: Lugar geométrico de las sucesivas posiciones del C.I.R. sobre el plano móvil

Construcción: hojas de papel y alfiler sobre el C.I.R.



CLASES PARTICULARES, TUTORÍAS TÉCNICAS ONLINE
LLAMA O ENVÍA WHATSAPP: 689 45 44 70

- - -

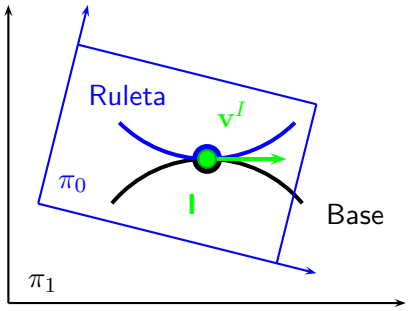
ONLINE PRIVATE LESSONS FOR SCIENCE STUDENTS
CALL OR WHATSAPP:689 45 44 70

www.cartagena99.com no se hace responsable de la información contenida en el presente documento en virtud al Artículo 17.1 de la Ley de Servicios de la Sociedad de la Información y de Comercio Electrónico, de 11 de julio de 2002.
Si la información contenida en el documento es ilícita o lesiona bienes o derechos de un tercero háganoslo saber y será retirada.

Base y Ruleta ruedan sin deslizar

El C.I.R. I, como punto independiente (seguidor del C.I.R. o sólido S_2), recorre la Base sobre π_1 y la Ruleta sobre π_0

$$\left.\begin{array}{ccccc} \mathbf{v}_{21}^{I} & = & \mathbf{v}_{20}^{I} & + & \cancel{\mathbf{v}_{01}^{I}} \\ tg(C_1) & & tg(C_0) & & \text{CIR} \\ \underbrace{tg(C_1) \equiv tg(C_0)} & & & & \end{array}\right\}$$



Velocidad de sucesión del C.I.R.:

$$\boxed{\mathbf{v}_{21}^{I} = \mathbf{v}_{20}^{I} = \mathbf{v}^{I}}$$

$$\frac{ds_1}{dt}\mathbf{t}_1 = \frac{ds_0}{dt}\mathbf{t}_0 \quad \Rightarrow \left\{\begin{array}{lll} \mathbf{t}_1 \equiv \mathbf{t}_0 & \rightarrow & \text{Son tangentes en } I \\ s_1 = s_0 + \text{Cte.} & \rightarrow & \text{No desliza} \end{array}\right.$$

$\Rightarrow$ La Ruleta rueda sin deslizar sobre la Base

Propiedades de 3 planos

- Tres planos paralelos π_1, π_0 y π_2 se mueven—Hay 6 movimientos distintos: $2/1$, $2/0$, $0/1$ y sus inversos.
- $\boxed{I_{ij} = I_{ji}}$

  Por movimientos inversos, $\mathbf{v}_{ij}^{M} = -\mathbf{v}_{ji}^{M}$;
  cuando M es el C.I.R. de uno: $\mathbf{v}_{ij}^{I} = \mathbf{0} = -\mathbf{v}_{ji}^{I}$.
- $\boxed{I_{21},\ I_{20} \text{ e } I_{01} \text{ están alineados}}$

  Teorema de Kennedy

  - M arbitrario: $\mathbf{v}_{20}^{M} + \mathbf{v}_{01}^{M} = \mathbf{v}_{21}^{M}$;
  - Si $M \in \overline{I_{20}I_{01}}$,

$$\mathbf{v}_{20}^{M},\ \mathbf{v}_{01}^{M} \perp \overline{I_{20}I_{01}} \quad \Rightarrow \quad \mathbf{v}_{21}^{M} \perp \overline{I_{20}I_{01}} \quad \Rightarrow \quad I_{21} \in \overline{I_{20}I_{01}}$$

CLASES PARTICULARES, TUTORÍAS TÉCNICAS ONLINE
LLAMA O ENVÍA WHATSAPP: 689 45 44 70

- - -

ONLINE PRIVATE LESSONS FOR SCIENCE STUDENTS
CALL OR WHATSAPP:689 45 44 70

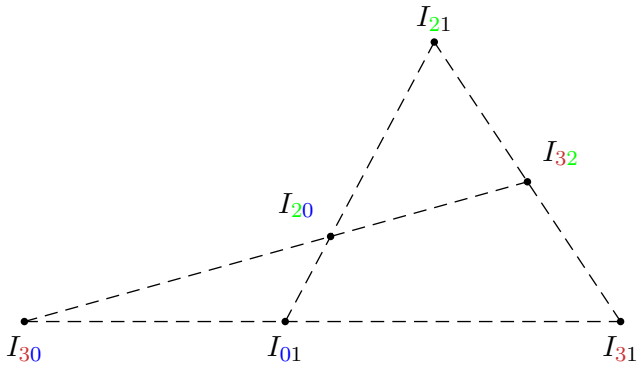
www.cartagena99.com no se hace responsable de la información contenida en el presente documento en virtud al Artículo 17.1 de la Ley de Servicios de la Sociedad de la Información y de Comercio Electrónico, de 11 de julio de 2002.
Si la información contenida en el documento es ilícita o lesiona bienes o derechos de un tercero háganoslo saber y será retirada.

Propiedades de 3 y 4 planos

- Los CIR de cuatro planos están en los vértices de un cuadrilátero completo

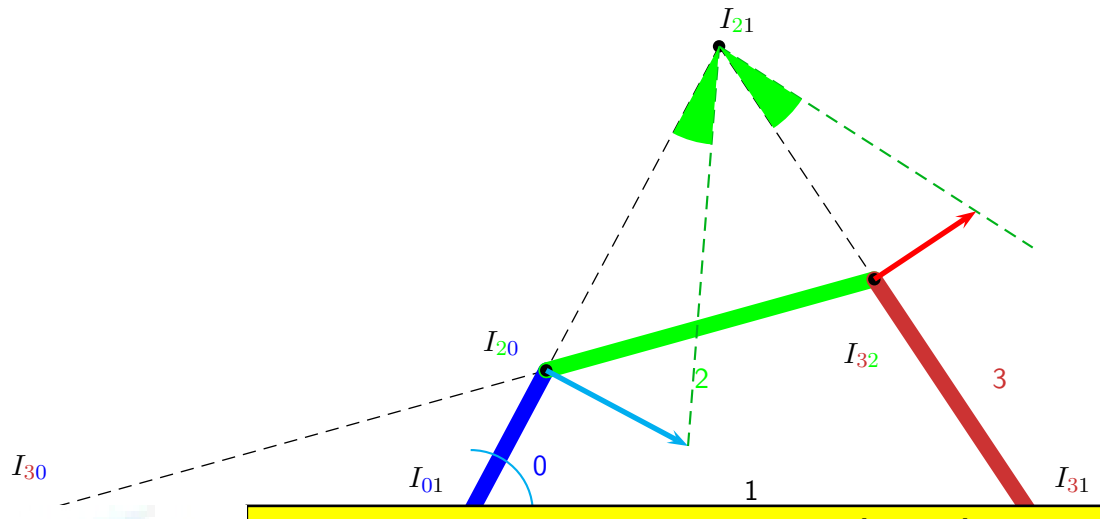
Con un cuarto plano π_3, hay 12 movimientos distintos: I_{01}, I_{02}, I_{03}, I_{12}, I_{13} e I_{23} más los seis inversos. Se pueden formar cuatro composiciones de movimientos cuyos C.I.R. están alineados de 3 en 3 (cuadrilátero completo):

$$2/0 + 0/1 = 2/1 \quad I_{20}, I_{01}, I_{21}$$
$$3/0 + 0/1 = 3/1 \quad I_{30}, I_{01}, I_{31}$$
$$3/2 + 2/1 = 3/1 \quad I_{32}, I_{21}, I_{31}$$
$$3/2 + 2/0 = 3/0 \quad I_{32}, I_{20}, I_{30}$$



Aplicaciones: Mecanismos

Mecanismo de 4 barras



CLASES PARTICULARES, TUTORÍAS TÉCNICAS ONLINE
LLAMA O ENVÍA WHATSAPP: 689 45 44 70

- - -

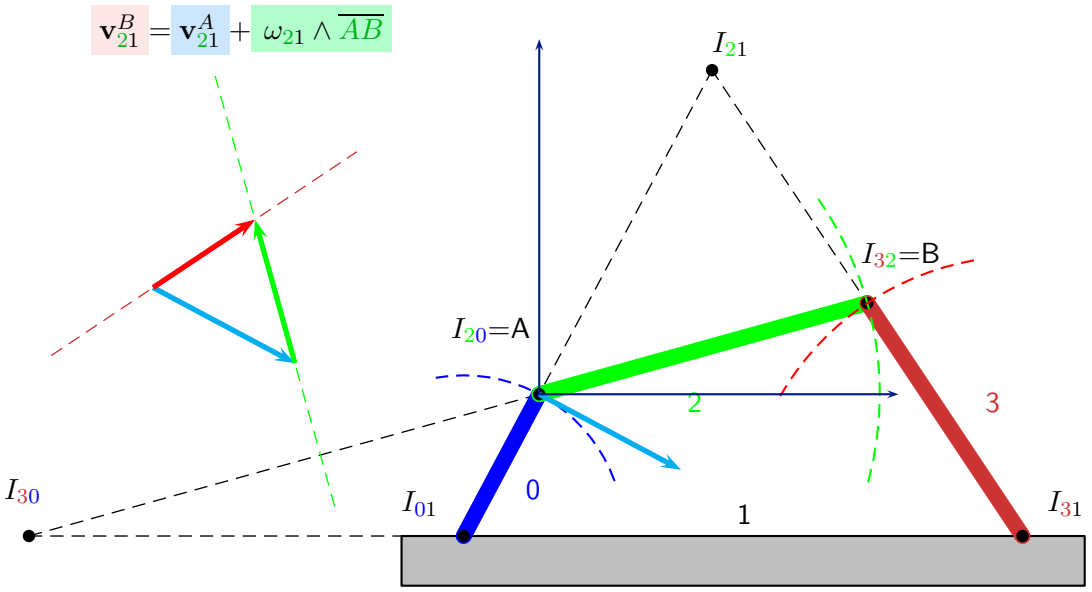
ONLINE PRIVATE LESSONS FOR SCIENCE STUDENTS
CALL OR WHATSAPP:689 45 44 70

www.cartagena99.com no se hace responsable de la información contenida en el presente documento en virtud al Artículo 17.1 de la Ley de Servicios de la Sociedad de la Información y de Comercio Electrónico, de 11 de julio de 2002.
Si la información contenida en el documento es ilícita o lesiona bienes o derechos de un tercero háganoslo saber y será retirada.

Aplicaciones: Mecanismos

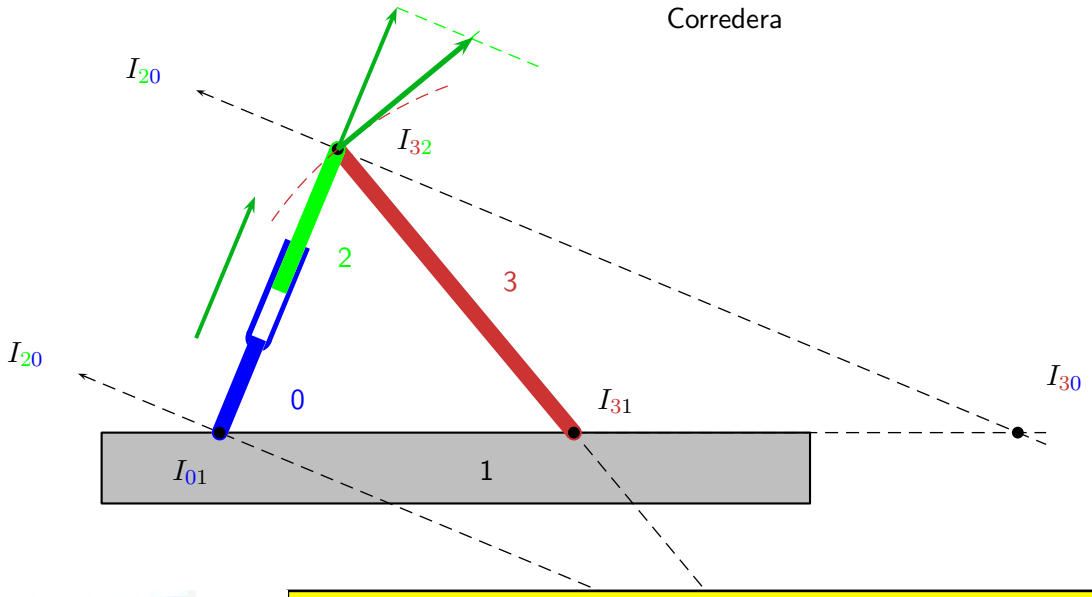
Mecanismo de 4 barras

$$\mathbf{v}_{21}^{B} = \mathbf{v}_{21}^{A} + \omega_{21} \wedge \overline{AB}$$



Aplicaciones: Mecanismos

Corredera



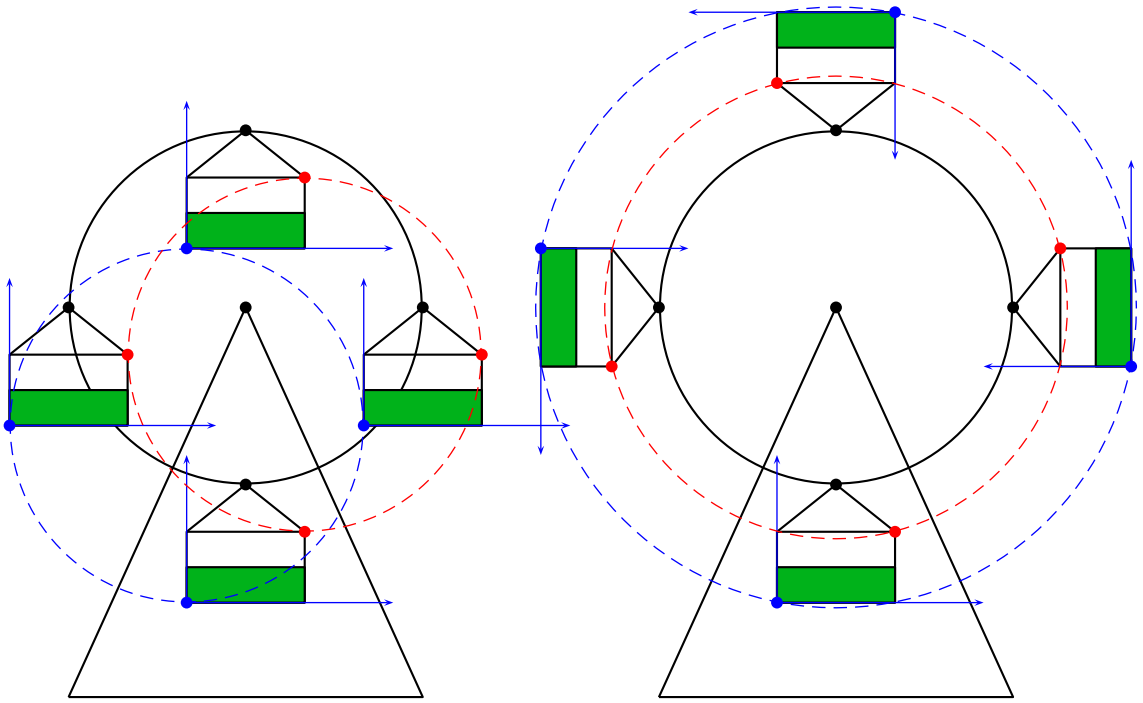
CLASES PARTICULARES, TUTORÍAS TÉCNICAS ONLINE
LLAMA O ENVÍA WHATSAPP: 689 45 44 70

- - -

ONLINE PRIVATE LESSONS FOR SCIENCE STUDENTS
CALL OR WHATSAPP:689 45 44 70

www.cartagena99.com no se hace responsable de la información contenida en el presente documento en virtud al Artículo 17.1 de la Ley de Servicios de la Sociedad de la Información y de Comercio Electrónico, de 11 de julio de 2002.
Si la información contenida en el documento es ilícita o lesiona bienes o derechos de un tercero háganoslo saber y será retirada.

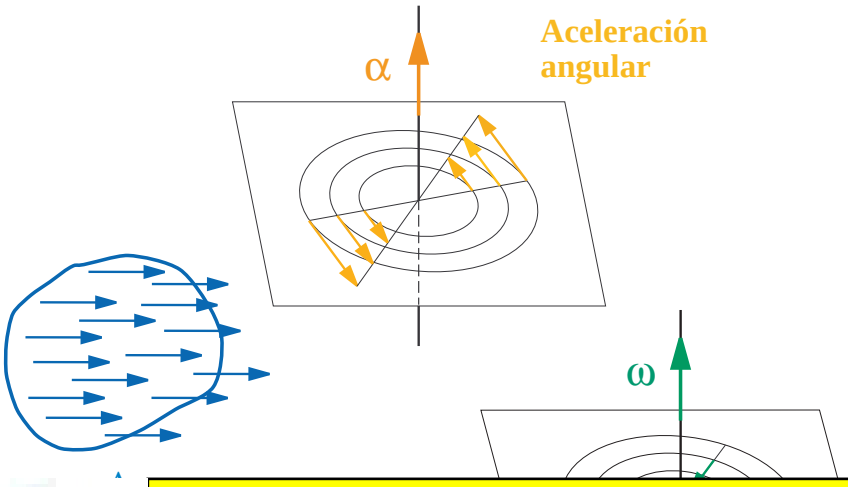
Traslación circular y rotación



Campo de aceleraciones plano

Los tres campos vectoriales son ahora planos: $\dot{\omega}_{01} \parallel \omega_{01}$

$$\mathbf{a}_{01}^{M} = \mathbf{a}_{01}^{A} + \dot{\omega}_{01} \wedge \overline{AM} + \omega_{01} \wedge \left(\omega_{01} \wedge \overline{AM}\right)$$



CLASES PARTICULARES, TUTORÍAS TÉCNICAS ONLINE
LLAMA O ENVÍA WHATSAPP: 689 45 44 70

- - -

ONLINE PRIVATE LESSONS FOR SCIENCE STUDENTS
CALL OR WHATSAPP:689 45 44 70

www.cartagena99.com no se hace responsable de la información contenida en el presente documento en virtud al Artículo 17.1 de la Ley de Servicios de la Sociedad de la Información y de Comercio Electrónico, de 11 de julio de 2002.
Si la información contenida en el documento es ilícita o lesiona bienes o derechos de un tercero háganoslo saber y será retirada.

Estructura del campo de aceleraciones

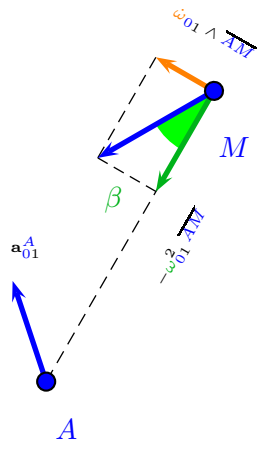
$$\mathbf{a}_{01}^{M} = \mathbf{a}_{01}^{A} + \dot{\omega}_{01} \wedge \overline{AM} + \omega_{01} \wedge \left(\omega_{01} \wedge \overline{AM}\right) =$$

$$= \mathbf{a}_{01}^{A} + \underbrace{\dot{\omega}_{01} \wedge \overline{AM} - \omega_{01}^{2}\,\overline{AM}}$$

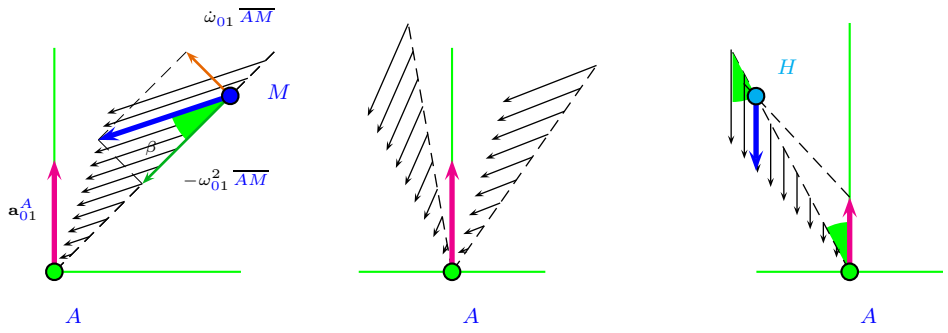
Términos en $\dot{\omega}$ y ω^2 proporcionales a la distancia $\overline{AM}$:

$$\tan\beta = \frac{\dot{\omega}_{01}}{\omega_{01}^{2}}$$

β Constante para todo el campo de aceleraciones en cada instante, pero varía con el tiempo.



Estructura del campo de aceleraciones



$$\mathbf{a}_{01}^{H} = \mathbf{0} \quad \Rightarrow \quad \text{H} \quad \text{Centro de aceleraciones}$$

Por ser paralelos ω_{01} y $\dot{\omega}_{01}$, hay una estructura similar a la del campo de velocidades. En el movimiento general no existe.

CLASES PARTICULARES, TUTORÍAS TÉCNICAS ONLINE
LLAMA O ENVÍA WHATSAPP: 689 45 44 70

- - -

ONLINE PRIVATE LESSONS FOR SCIENCE STUDENTS
CALL OR WHATSAPP:689 45 44 70

www.cartagena99.com no se hace responsable de la información contenida en el presente documento en virtud al Artículo 17.1 de la Ley de Servicios de la Sociedad de la Información y de Comercio Electrónico, de 11 de julio de 2002.
Si la información contenida en el documento es ilícita o lesiona bienes o derechos de un tercero háganoslo saber y será retirada.

Centro de aceleraciones

- El centro de aceleraciones H se puede determinar analíticamente:

$$\mathbf{a}_{01}^{H} = \mathbf{a}_{01}^{A} + \dot{\omega}_{01} \wedge \overline{AH} - \omega_{01}^{2}\,\overline{AH} = 0$$

- Multiplicando vectorialmente por $\dot{\omega}$:

$$\dot{\omega}_{01} \wedge \mathbf{a}_{01}^{A} - \dot{\omega}_{01}^{2}\overline{AH} - \omega_{01}^{2}\left(\dot{\omega}_{01} \wedge \overline{AH}\right) = 0$$

- y sustituyendo $\dot{\omega}_{01} \wedge \overline{AH}$ de la primera expresión,

$$\dot{\omega}_{01} \wedge \mathbf{a}_{01}^{A} - \dot{\omega}_{01}^{2}\overline{AH} - \omega_{01}^{2}\left(\omega_{01}^{2}\,\overline{AH} - \gamma_{01}^{A}\right) = 0$$

- Por tanto,

$$\overline{AH} = \frac{\dot{\omega}_{01} \wedge \mathbf{a}_{01}^{A} + \omega_{01}^{2}\,\mathbf{a}_{01}^{A}}{\dot{\omega}_{01}^{2} + \omega_{01}^{4}}$$

CLASES PARTICULARES, TUTORÍAS TÉCNICAS ONLINE
LLAMA O ENVÍA WHATSAPP: 689 45 44 70

- - -

ONLINE PRIVATE LESSONS FOR SCIENCE STUDENTS
CALL OR WHATSAPP:689 45 44 70

www.cartagena99.com no se hace responsable de la información contenida en el presente documento en virtud al Artículo 17.1 de la Ley de Servicios de la Sociedad de la Información y de Comercio Electrónico, de 11 de julio de 2002.
Si la información contenida en el documento es ilícita o lesiona bienes o derechos de un tercero háganoslo saber y será retirada.