

CALCULO DIFERENCIAL (MATEMATICAS II)

EXAMEN FINAL FEBRERO DE 2014

PARTE TEORICA

(10 puntos) 1. Sea $(a_n)_n$ una sucesión en \mathbb{R} y sea $S \in \mathbb{R}$.

(a) Escribir las definiciones formales de que: $\bullet \lim_n a_n = 0$, $\bullet \sum_n a_n = S$.

(b) Supongamos que $(a_n)_n$ es estrictamente decreciente y que $\inf\{a_n : n \in \mathbb{N}\} = 0$.

Decir cuales de las siguientes afirmaciones son ciertas.

(b1) $\lim_n a_n = 0$.

(b2) $\{a_n : n \in \mathbb{N}\}$ tiene máximo y es > 0 .

(b3) $\sum_n a_n$ converge.

Responder **solamente a uno** de los siguientes apartados.

(c) Elegir una de las afirmaciones en la que la respuesta es afirmativa y probarla.

(d) Elegir una de las afirmaciones en la que la respuesta es negativa y dar un ejemplo que muestre que dicha afirmación en efecto es falsa.

(10 puntos) 2. Sea F una función de \mathbb{R}^2 en \mathbb{R} y sea (a, b) un punto de \mathbb{R}^2 .

(a) Escribir la definición formal, en términos de sucesiones, de que F es continua en (a, b) .

(b) Supongamos que F puede expresarse como un producto de dos funciones $f, g : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ en la forma $F(x, y) = f(x)g(y)$.

Aplicando la definición dada en (a), probar que si f es continua en a y g es continua en b , entonces F es continua en (a, b) .

(c) Responder **solamente a uno** de los siguientes apartados.

(c1) Probar que si f no es continua en a , y $g(b) \neq 0$, entonces F no puede ser continua en (a, b) .

(c2) ¿Si g es continua en b y $g(b) = 0$, podría ser F continua en (a, b) aunque f no lo sea en a ? Justificar la respuesta.

(10 puntos) 3. (a) Enunciar el Teorema del Valor Medio.

(b) Sea $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ una función derivable en \mathbb{R} . Elegir una de las siguientes implicaciones, y probarla utilizando dicho teorema.

(b1) $f'(x) = 0$ para todo $x \in \mathbb{R} \implies f$ es una función constante en \mathbb{R} .

(b2) $f'(x) < 0$ para todo $x \in \mathbb{R} \implies f$ es una función estrictamente decreciente en \mathbb{R} .

CLASES PARTICULARES, TUTORÍAS TÉCNICAS ONLINE
LLAMA O ENVÍA WHATSAPP: 689 45 44 70

ONLINE PRIVATE LESSONS FOR SCIENCE STUDENTS
CALL OR WHATSAPP:689 45 44 70

Cartagena99

(10 puntos) 4. Sea f una función de \mathbb{R}^3 en \mathbb{R}^2 con funciones componentes $f_1, f_2 : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}$. Sea (a, b, c) un punto de \mathbb{R}^3 .

(a) Escribir las definiciones, en términos de límites, de las derivadas parciales en (a, b, c) de f_i ($i = 1, 2$), respecto a cada una de las variables x, y, z .

(b) Escribir la matriz Jacobiana de f en (a, b, c) .

(c) Escribir la definición de que f es derivable en (a, b, c) .

(d) Escribir una condición suficiente para que f sea derivable en (a, b, c) , es decir, una condición para la que se verifique

f satisface $\implies f$ es derivable en (a, b, c) .

NOTAS.

- En cada una de las cuatro cuestiones, todos los apartados tienen el mismo peso.
- Para los alumnos que hayan superado el examen parcial:
 - Sólo tienen que responder a las cuestiones 3 y 4.
 - Si desean mejorar la calificación del examen parcial, entonces tienen que responder también a las cuestiones 1 y 2.
- La calificación de este examen final será la media aritmética de las calificaciones obtenidas en su parte teórica y en su parte práctica.

The logo for 'Cartagena99' features the text 'Cartagena99' in a stylized, blue, serif font. The '99' is significantly larger and more prominent than the word 'Cartagena'. The text is set against a background of a light blue and white geometric shape, possibly a stylized 'C' or a banner, with a yellow and orange gradient at the bottom.

CLASES PARTICULARES, TUTORÍAS TÉCNICAS ONLINE
LLAMA O ENVÍA WHATSAPP: 689 45 44 70

- - -

ONLINE PRIVATE LESSONS FOR SCIENCE STUDENTS
CALL OR WHATSAPP:689 45 44 70

CALCULO DIFERENCIAL (MATEMATICAS II)

EXAMEN FINAL FEBRERO DE 2014

PARTE PRACTICA

(10 puntos) 1. Calcular razonadamente el supremo e ínfimo del siguiente conjunto, especificando si son máximo y mínimo respectivamente.

$$A = \{x \in \mathbb{Q} : |(x-1)(x+2)| < x+2\}.$$

(10 puntos) 2. Consideremos la sucesión $(a_n)_n$ en \mathbb{R} definida por

$$a_n = \frac{n^2}{n^3+1} + \frac{n^2}{n^3+2} + \cdots + \frac{n^2}{n^3+n} \quad (n \in \mathbb{N}).$$

(a) Calcular $\lim_n a_n$.

(b) Comprobar que la serie $\sum_n \frac{a_n \sin(n)}{n^4}$ es convergente.

(10 puntos) 3. Sea $f : (-5, \infty) \rightarrow \mathbb{R}$ la función definida por

$$f(x) = \begin{cases} \sqrt{5+x} & \text{si } -5 < x \leq 0 \\ \sqrt{5}\left(1 + \frac{1-\cos(\sin(x))}{5x}\right) & \text{si } x > 0. \end{cases}$$

(a) Comprobar que f es derivable en $(-5, \infty)$.

(b) Utilizando el polinomio de Taylor de grado 3 de f en el punto adecuado, calcular un valor aproximado de $\sqrt{3.99}$ con tres cifras decimales.

(c) Hallar una cota del valor absoluto del error cometido en el cálculo aproximado realizado en (b).

(10 puntos) 4. Sea $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ la función definida por

$$f(x) = \begin{cases} \frac{1}{x^2} e^{-1/x^2} & \text{si } x \neq 0 \\ 0 & \text{si } x = 0, \end{cases}$$

v sea $g : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ la función definida por

CLASES PARTICULARES, TUTORÍAS TÉCNICAS ONLINE
LLAMA O ENVÍA WHATSAPP: 689 45 44 70

ONLINE PRIVATE LESSONS FOR SCIENCE STUDENTS
CALL OR WHATSAPP:689 45 44 70

Cartagena99

- (c) Comprobar que g es continua en $(0, 0)$.
(d) Hallar el gradiente de g en $(0, 0)$.

NOTAS.

- En cada uno de los cuatro problemas, todos los apartados tienen el mismo peso.
- La calificación de este examen final será la media aritmética de las calificaciones obtenidas en su parte teórica y en su parte práctica.

The logo for Cartagena99 features the text 'Cartagena99' in a stylized, blue, serif font. The text is set against a light blue, abstract background that resembles a map or a stylized 'C'. Below the text, there is a horizontal orange and yellow gradient bar.

CLASES PARTICULARES, TUTORÍAS TÉCNICAS ONLINE
LLAMA O ENVÍA WHATSAPP: 689 45 44 70

ONLINE PRIVATE LESSONS FOR SCIENCE STUDENTS
CALL OR WHATSAPP:689 45 44 70