



Departamento Inteligencia Artificial



LÓGICA - 1º Grado en Ingeniería Informática
Facultad de Informática
Universidad Politécnica de Madrid

Lógica de Primer Orden: Sintaxis

Andrei Paun

apaun@fi.upm.es

<http://web3.fi.upm.es/AulaVirtual/>

Despacho 2201

Autor: David Pérez del Rey

Elementos de un Lenguaje de Primer Orden

- ◉ Símbolos de constante $\{a, b, c, a_1, \dots a_n, \dots\}$
- ◉ Símbolos de variable $\{x, y, z, x_1, \dots x_n, \dots\}$
- ◉ Símbolos de función $\{f^1 \dots f^n, g^1 \dots g^n, h^1 \dots h^n \dots\}$
 - Notación alternativa $\{f(_), f(_,_) \dots g(_), g(_,_) \dots\}$
 - Notación infija $7+5$ en lugar de $+75$ ó $+(7,5)$
- ◉ Símbolos de predicado $\{P^0, P^1 \dots P^n, Q^0, \dots Q^n, R^0, \dots R^n\}$
 - Notación alternativa $P, P(_), P(_,_) \dots Q, Q(_), Q(_,_) \dots$
 - Notación infija $x=y$ en lugar de $=xy$ ó $=(x,y)$
- ◉ Cada uno de estos conjuntos es disjunto del resto
 - No existen símbolos comunes entre constantes y variables
 - No existen símbolos comunes entre funciones y predicados



Elementos de un Lenguaje de Primer Orden

- ◉ Conectivas lógicas $\{\neg, \vee, \rightarrow, \wedge, \leftrightarrow\}$
- ◉ Cuantificador $\{\exists, \forall\}$
- ◉ Símbolos de puntuación paréntesis, coma
 - Innecesarios si utilizáramos notación prefija
 - Mejoran la legibilidad $P(a, f(x, g(b)))$ en lugar de $P^2af^2xg^1b$
 - Reducibles a un mínimo en notación infija (predecencia):
 - $\{\forall, \exists, \neg\}$ son de menor alcance que $\{\wedge, \vee\}$, que son de menor alcance que $\{\rightarrow, \leftrightarrow\}$



Expresiones de un Lenguaje L de Primer Orden

- ◉ **Expresión:** Cualquier concatenación de símbolos
- ◉ Subconjuntos de expresiones que nos interesan (definición recursiva)
 - **Términos** de L son las siguientes expresiones:
 - Un símbolo de constante o variable
 - Una expresión del tipo: $f(t_1, \dots, t_n)$ donde f es un símbolo de función n -ádico de L y $t^1 \dots t^n$ son términos de L
 - **Átomos** de L son las expresiones del tipo:
 - $P(t_1, \dots, t_n)$ donde P es un símbolo de predicado n -ádico de L y $t^1 \dots t^n$ son términos de L
 - **Fórmulas Bien Formadas (FBF)** de L son las expresiones del tipo:
 - Átomos de L
 - $\neg A$, $A \vee B$, $A \wedge B$, $A \rightarrow B$ y $A \leftrightarrow B$ son fórmulas de L sii A y B son FBF de L
 - $\exists xA(x)$ y $\forall xA(x)$ es una FBF de L sii $A(x)$ es una FBF de L en la que x es un símbolo de variable libre (ver más adelante)



Formalización en LPO

- Seleccione los predicados, constantes y funciones necesarios para definir un LPO en el que formalizar las siguientes oraciones:

1. *Vicente es mejicano*
2. *Mi casa es roja*
3. *Luisa y María son brasileñas pero Vicente es mejicano*
4. *Jorge adora a Juan*
5. *Jorge adora a su hermano Juan*
6. *Juan ama a Rosa pero ella no le corresponde*
7. *Pedro sujetó a Juan y María le atizó*
8. *Homero escribió la Ilíada y la Odisea*
9. *Nieves se peina a sí misma y también peina a Juan*
10. *Titán es satélite de Saturno pero Europa no lo es*
11. *O Pedro o María (pero no ambos) son hermanos míos*
12. *Si Colón descubrió América, merece un lugar en la Historia*
13. *El asesino de mi padre es Juan o Pedro, pero no Alberto*
14. *María ama a mi padre mientras que Julia me ama a mi*
15. *Cela leía a Borges aunque éste lo detestaba públicamente*



Formalización en LPO

16. *María está enamorada de alguien*
17. *Hay al menos un número primo*
18. *Algunas cantantes de ópera no están gordas*
19. *Cualquier crimen será castigado*
20. *No todos los crímenes merecen la pena capital*
21. *Las novelas de Cela me fascinan*
22. *Hay profesores que no saben explicar*
23. *Sólo los suecos entienden a Bergman*
24. *Todo ciudadano tiene derecho a una vivienda*
25. *Hay genios, pero no todos los poetas lo son*
26. *No todos los satélites de Júpiter tienen atmósfera*
27. *Todos los estudiantes de tercer curso ayudan a al menos uno de primero*
28. *Los caballeros las prefieren rubias pero se casan con las morenas*
29. *Nadie respeta a quien no se respeta a sí mismo*
30. *Hay un pintor a quien todo el mundo admira*



Alcance de los cuantificadores

- Alcance (ámbito) de un cuantificador es la menor subfórmula posible tras el cuantificador

- $\exists \mathbf{x}P(\mathbf{x},y) \vee Q(\mathbf{x},y)$; $\exists \mathbf{x}(P(\mathbf{x},y) \vee Q(\mathbf{x},y))$; $\forall \mathbf{y}\exists \mathbf{x}P(\mathbf{x},y) \vee Q(\mathbf{x},y)$;
 $\forall \mathbf{y}\exists \mathbf{x}(P(\mathbf{x},y) \vee Q(\mathbf{x},y))$

- Variables libres y ligadas

- Ligada** cuando esta bajo el alcance de un cuantificador
- Libre** cuando no se encuentra bajo el alcance de ningún cuantificador
- Una variable puede estar libre y ligada en una misma fórmula



Fórmulas abiertas y cerradas

- Las **fórmulas cerradas** no tienen variables libres:
- Las **fórmulas abiertas** tienen al menos una variable libre:
- **Ejercicio.** Señalar las variables libres y ligadas:
 1. $\exists x(P(x,f(y)) \rightarrow \exists yQ(x,y))$
 2. $\exists xP(x) \rightarrow \forall yQ(x,f(y))$
 3. $\exists x\exists y(P(x,y) \vee Q(x,y)) \wedge R(a,y)$
 4. $\exists x\exists y((P(x,y) \vee Q(x,y)) \wedge R(x,y))$
 5. $\forall x(x=y \rightarrow \exists zP(x,z))$
 6. $\exists x\forall yP(x,f(x,y)) \rightarrow \exists yQ(x,y)$
 7. $x = y + z \rightarrow x \leq y + z$
 8. $\forall x(x + 0 = x)$
 9. $\forall x(N(x) \rightarrow N(s(x)))$
 10. $\forall x\exists y(P(g(x,a),y) \vee \neg Q(x) \vee \neg R(z,b)) \wedge \exists zS(x,y,z)$



Sustituciones - Notación

- La sustitución es una **operación sintáctica** sobre fórmulas y términos que devuelve nuevas fórmulas y términos:

$$A - \text{sustitución} \rightarrow A' \quad t - \text{sustitución} \rightarrow t'$$

- Esta operación se aplica **única y exclusivamente** sobre variables **libres** presentes en A o en t . De no haberlas, la sustitución rinde la expresión inicial.
- Siendo A una fórmula y x una variable de un LPO
 - $A(x)$ indica la aparición de al menos una ocurrencia **libre** de x en A
 - $A\{x/t\}$ representa a la fórmula obtenida a partir de A sustituyendo **todas** las apariciones de la variable libre x por el término t .

Ejemplos:

- $A(x): P(x, f(y)) \rightarrow \exists y Q(x, y);$ $A\{x/a\}: P(a, f(y)) \rightarrow \exists y Q(a, y)$
- $A(y): \exists x((P(x, y) \vee Q(x, y)) \wedge R(x, y));$ $A\{y/f(z)\}: \exists x((P(x, f(z)) \vee Q(x, f(z))) \wedge R(x, f(z)))$



Sustituciones - Condiciones

- Condiciones para la sustitución de una variable **libre** por un término:
 - Reemplazo de **todas y sólo** las ocurrencias de la variable *libre* en la fórmula por el término
 - $(\exists x(P(x,f(y)) \rightarrow \exists yQ(x,y)))\{y/a\} = \exists x(P(x,f(a)) \rightarrow \exists yQ(x,y))$
 - $(\exists xA)\{y/t\} = \exists xA\{y/t\}$ sii t **no** contiene apariciones de **x**
 - $\exists x(\neg(x=y))\{y/z\} = \exists x(\neg(x=z))$
 - $\exists x(\neg(x=y))\{y/x\} =? \exists x(\neg(x=x))$
 - $(\forall xA)\{y/t\} = \forall xA\{y/t\}$ sii t **no** contiene apariciones de **x**
 - $\forall x\text{Padre}(x,y)\{y/\text{primogénito}(x)\} =? \forall x\text{Padre}(x,\text{primogénito}(x))$
 - $(\exists xA)\{y/t\} = \exists z(A\{x/z\})\{y/t\}$ sii t **contiene** apariciones de **x** pero **z no aparece en A**
 - $\exists x(\neg(x=y))\{y/x\} = \exists z(\neg(x=y)\{x/z\})\{y/x\} = \exists z(\neg(z=y))\{y/x\} = \exists z(\neg(z=x))$
 - $(\forall xA)\{y/t\} = \forall z(A\{x/z\})\{y/t\}$ sii t **contiene** apariciones de **x** pero **z no aparece en A**
 - $\forall x\text{Padre}(x,y)\{y/\text{primogénito}(x)\} = \forall z(\text{Padre}(x,y)\{x/z\})\{y/\text{primogénito}(x)\} = \forall z\text{Padre}(z,y)\{y/\text{primogénito}(x)\} = \forall z\text{Padre}(z,\text{primogénito}(x))$



Ejercicios de Sustituciones

1. $(\exists x(P(x, f(y)) \rightarrow \exists y Q(x, y)))\{y/g(z)\}$
2. $(\forall x \forall y(P(x, y) \rightarrow Q(x, y)))\{y/a\}$
3. $(\forall x(\forall y P(x, y) \rightarrow Q(x, y)))\{y/a\}$
4. $(\exists x(\forall y(P(x, y) \vee Q(x, y)) \wedge R(x, y)))\{y/b\}$
5. $(\exists x(\forall y(P(x, y) \vee Q(x, y)) \wedge R(x, y)))\{x/b\}$
6. $(\exists x \forall y(P(x, y) \vee Q(x, y)) \wedge R(x, y))\{x/a, y/b\}$
7. $(\forall x(P(x, y) \rightarrow Q(x, y)))\{y/f(x, a)\}$
8. $(\forall y P(x, y) \rightarrow \forall x Q(x, y)))\{y/f(x, a)\}$
9. $(x = y + z \rightarrow x \leq y + z)\{x/1, y/2\}$
10. $(x = y + z \rightarrow x \leq y + z)\{x/s(x)\}$
11. $(x = y + z \rightarrow x \leq y + z)\{x/s(y)\}$
12. $(\forall x(x + 0 = x))\{x/1\}$

