

3. Ecuaciones de Maxwell en la materia

Se trata de estudiar la propagación de las ondas en la materia.



Hay que resolver las ecuaciones de Maxwell acopladas a la materia



describir el movimiento de $\sim 10^{28}$ átomos/m³.

Dos grandes tipos de aproximaciones:

- **Medios ópticamente poco densos** (o diluidos). La distancia entre las partículas es mayor que λ . Ejemplo: el medio interestelar.

Cartagena99

CLASES PARTICULARES, TUTORÍAS TÉCNICAS ONLINE
LLAMA O ENVÍA WHATSAPP: 689 45 44 70

ONLINE PRIVATE LESSONS FOR SCIENCE STUDENTS
CALL OR WHATSAPP:689 45 44 70

3. Ecuaciones de Maxwell en la materia

1. Medios ópticamente poco densos.

- Aproximación de partículas independiente. Sólo interaccionarán con el campo incidente.
- Se determina la evolución de cada carga, independientemente, con respecto al campo incidente.
- Hay que buscar la ecuación del movimiento de las cargas y de ahí deducir los campos reemitidos: *esparcimiento* de la onda incidente.

Cartagena99

CLASES PARTICULARES, TUTORÍAS TÉCNICAS ONLINE
LLAMA O ENVÍA WHATSAPP: 689 45 44 70

ONLINE PRIVATE LESSONS FOR SCIENCE STUDENTS
CALL OR WHATSAPP: 689 45 44 70

3. Ecuaciones de Maxwell en la materia

2. Medios ópticamente densos.

A estos medios los vamos a caracterizar por medio de un parámetro: el *índice de refracción*.

Hay que llegar a las llamadas ecuaciones de Maxwell macroscópicas o en la materia (ecMm).

- Vamos a considerar un volumen $\Delta V \ll \lambda^3$. Campo en ese volumen es prácticamente constante.
- Se prescinde del carácter discreto de la materia: se introducen promedios de las magnitudes implicadas, **E**, **B**, ρ y **j**.

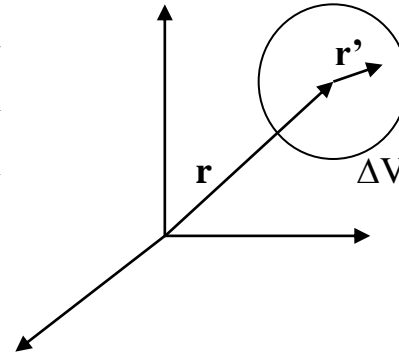
Cartagena99

CLASES PARTICULARES, TUTORÍAS TÉCNICAS ONLINE
LLAMA O ENVÍA WHATSAPP: 689 45 44 70

ONLINE PRIVATE LESSONS FOR SCIENCE STUDENTS
CALL OR WHATSAPP: 689 45 44 70

3. Ecuaciones de Maxwell en la materia

Volumen esférico ΔV con coordenadas de centro dadas por el vector \mathbf{r} , y con $(\mathbf{r} + \mathbf{r}')$ dentro del volumen.



Llamamos campo macroscópico al promedio del campo microscópico en este volumen:

$$\vec{E}_{mac}(\vec{r}, t) = \frac{1}{\Delta V} \int_{\Delta V} \vec{E}_{mic}(\vec{r} + \vec{r}', t) d^3 r'$$

$$\vec{E} = \langle \vec{E} \rangle$$

Cartagena99

CLASES PARTICULARES, TUTORÍAS TÉCNICAS ONLINE
LLAMA O ENVÍA WHATSAPP: 689 45 44 70

ONLINE PRIVATE LESSONS FOR SCIENCE STUDENTS
CALL OR WHATSAPP:689 45 44 70

3. Ecuaciones de Maxwell en la materia

$$\left. \begin{aligned} \left\langle \frac{\partial \vec{E}_{mic}}{\partial x} \right\rangle &= \frac{1}{\partial x} \langle \vec{E}_{mic} \rangle = \frac{\partial \vec{E}_{mac}}{\partial x} \\ \left\langle \frac{\partial \vec{E}_{mic}}{\partial t} \right\rangle &= \frac{1}{\partial t} \langle \vec{E}_{mic} \rangle = \frac{\partial \vec{E}_{mac}}{\partial t} \end{aligned} \right\}$$



Si promediamos a ambos lados de las ec. Maxwell:

$$\langle \epsilon_0 \nabla \vec{E}_{mic} \rangle = \langle \rho \rangle$$

$$\langle \nabla \vec{B}_{mic} \rangle = 0$$

$$\left\langle \nabla \wedge \vec{E}_{mic} + \frac{\partial \vec{B}_{mic}}{\partial t} \right\rangle = 0$$

$$\left\langle \frac{1}{\mu_0} \nabla \wedge \vec{B}_{mic} - \epsilon_0 \frac{\partial \vec{E}_{mic}}{\partial t} \right\rangle = \langle \vec{j} \rangle$$

$$\epsilon_0 \nabla \vec{E}_{mac} = \langle \rho \rangle$$

$$\nabla \vec{B}_{mac} = 0$$

$$\nabla \wedge \vec{E}_{mac} + \frac{\partial \vec{B}_{mac}}{\partial t} = 0$$

$$\frac{1}{\mu_0} \nabla \wedge \vec{B}_{mac} - \epsilon_0 \frac{\partial \vec{E}_{mac}}{\partial t} = \langle \vec{j} \rangle$$



Cartagena99

CLASES PARTICULARES, TUTORÍAS TÉCNICAS ONLINE
LLAMA O ENVÍA WHATSAPP: 689 45 44 70

ONLINE PRIVATE LESSONS FOR SCIENCE STUDENTS
CALL OR WHATSAPP: 689 45 44 70

3. Ecuaciones de Maxwell en la materia

Hay dos tipos de cargas ligadas y libres:

1) El promedio de la densidad de carga:

$$\langle \rho \rangle = \langle \rho_{lib} \rangle + \langle \rho_{lig} \rangle$$

$$\langle \rho_{lig} \rangle = -\nabla \cdot \vec{P}$$

$$\vec{P} = \frac{1}{\Delta V} \sum_{j \in \Delta V} q_j \vec{r}_j$$

donde se relaciona a $\langle \rho_{lig} \rangle$ con una magnitud medible, \mathbf{P} el vector polarización (momento dipolar por unidad de volumen).

2) El promedio de la densidad de corriente:

Cartagena99

CLASES PARTICULARES, TUTORÍAS TÉCNICAS ONLINE
LLAMA O ENVÍA WHATSAPP: 689 45 44 70

ONLINE PRIVATE LESSONS FOR SCIENCE STUDENTS
CALL OR WHATSAPP: 689 45 44 70

Or

3. Ecuaciones de Maxwell en la materia

$$\vec{M} = \frac{1}{\Delta V} \sum_{j \in \Delta V} \frac{1}{2} q_j \dot{\vec{r}}_j \wedge \vec{r}_j$$

donde se relaciona a $\langle \vec{j}_{lib} \rangle$ con la magnitud medible \mathbf{M} , el vector *magnetización* (magnetización por unidad de volumen).



$$\varepsilon_0 \nabla \vec{E}_{mac} = \langle \rho_{lib} \rangle - \nabla \vec{P}$$

$$\frac{1}{\mu_0} \nabla \wedge \vec{B}_{mac} - \varepsilon_0 \frac{\partial \vec{E}_{mac}}{\partial t} = \langle \vec{j}_{lib} \rangle + \frac{\partial \vec{P}}{\partial t} + \nabla \wedge \vec{M}$$

Cartagena99

CLASES PARTICULARES, TUTORÍAS TÉCNICAS ONLINE
LLAMA O ENVÍA WHATSAPP: 689 45 44 70

ONLINE PRIVATE LESSONS FOR SCIENCE STUDENTS
CALL OR WHATSAPP: 689 45 44 70

3. Ecuaciones de Maxwell en la materia

Se definen los vectores \mathbf{D} , *desplazamiento eléctrico*, y \mathbf{H} , *campo magnético*:

$$\vec{D} = \epsilon_0 \vec{E} + \vec{P}$$

$$\vec{H} = \frac{1}{\mu_0} \vec{B} - \vec{M}$$

Las ecuaciones de Maxwell quedan :

$$\nabla \cdot \vec{D} = \langle \rho_{lib} \rangle$$

$$\nabla \cdot \vec{B} = 0$$

$$\nabla \wedge \vec{E} + \frac{\partial \vec{B}}{\partial t} = 0$$

Cartagena99

CLASES PARTICULARES, TUTORÍAS TÉCNICAS ONLINE
LLAMA O ENVÍA WHATSAPP: 689 45 44 70

ONLINE PRIVATE LESSONS FOR SCIENCE STUDENTS
CALL OR WHATSAPP:689 45 44 70

3. Ecuaciones de Maxwell en la materia

La ecuación de continuidad se cumple tanto para la parte ligada como para la libre:

$$\frac{\partial \langle \rho_{lig} \rangle}{\partial t} + \nabla \langle \vec{j}_{lig} \rangle = 0$$

$$\frac{\partial \langle \rho_{lib} \rangle}{\partial t} + \nabla \langle \vec{j}_{lib} \rangle = 0$$

Cartagena99

CLASES PARTICULARES, TUTORÍAS TÉCNICAS ONLINE
LLAMA O ENVÍA WHATSAPP: 689 45 44 70

- - -

ONLINE PRIVATE LESSONS FOR SCIENCE STUDENTS
CALL OR WHATSAPP:689 45 44 70

3. Ecuaciones de Maxwell en la materia

Ecuaciones para ondas armónicas

Los campos que inducen la perturbación en las cargas son ondas armónicas: inducen unos vectores polarización, \mathbf{P} , y magnetización, \mathbf{M} .

$$\vec{E}(\vec{r}, t) = \vec{E}_0(\vec{r})e^{-i\omega t}$$

$$\vec{B}(\vec{r}, t) = \vec{B}_0(\vec{r})e^{-i\omega t}$$

$$\vec{P}(\vec{r}, t) = \chi_e(\vec{r}, \omega)\epsilon_0\vec{E}_0(\vec{r}, t)$$

$$\vec{M}(\vec{r}, t) = \chi_m(\vec{r}, \omega)H_0(\vec{r}, t)$$

con χ_e y χ_m las *susceptibilidades eléctrica y magnética*.

La densidad de corriente libre es:

Cartagena99

CLASES PARTICULARES, TUTORÍAS TÉCNICAS ONLINE
LLAMA O ENVÍA WHATSAPP: 689 45 44 70

ONLINE PRIVATE LESSONS FOR SCIENCE STUDENTS
CALL OR WHATSAPP: 689 45 44 70

3. Ecuaciones de Maxwell en la materia

Y como \mathbf{r} es proporcional a \mathbf{E} , la velocidad es proporcional a $\omega\mathbf{E}$:

$$\langle \vec{j}_{lib} \rangle = \sigma(\vec{r}, \omega) \vec{E}(\vec{r}, t)$$

donde σ es la *conductividad*.

Aplicando la ecuación de continuidad:

$$\frac{\partial \langle \rho_{lib} \rangle}{\partial t} = -\nabla \cdot (\sigma \vec{E}_0(\vec{r}) e^{-i\omega t}) \quad \longrightarrow \quad \langle \rho_{lib} \rangle = \nabla \cdot \left(\frac{-i}{\omega} \sigma \vec{E} \right)$$

Cartagena99

CLASES PARTICULARES, TUTORÍAS TÉCNICAS ONLINE
LLAMA O ENVÍA WHATSAPP: 689 45 44 70

ONLINE PRIVATE LESSONS FOR SCIENCE STUDENTS
CALL OR WHATSAPP: 689 45 44 70

3. Ecuaciones de Maxwell en la materia

$$\left. \begin{aligned} \vec{D} &= \varepsilon_0 \vec{E} + \chi_e \varepsilon_0 \vec{E} \\ \vec{H} &= \frac{1}{\mu_0} \vec{B} - \chi_m \vec{H} \end{aligned} \right\} \begin{aligned} \vec{D} &= \varepsilon_0 (1 + \chi_e) \vec{E} \\ \vec{B} &= \mu_0 (1 + \chi_m) \vec{H} \end{aligned}$$

Se definen ε , la *permitividad dieléctrica* del material y μ , la *permeabilidad magnética* de forma que:

$$\begin{aligned} \vec{D} &= \varepsilon \vec{E} \\ \vec{B} &= \mu \vec{H} \end{aligned}$$

En general χ_e , χ_m , σ , ε y μ serán funciones con valores complejos,

Cartagena99

CLASES PARTICULARES, TUTORÍAS TÉCNICAS ONLINE
LLAMA O ENVÍA WHATSAPP: 689 45 44 70

ONLINE PRIVATE LESSONS FOR SCIENCE STUDENTS
CALL OR WHATSAPP:689 45 44 70

3. Ecuaciones de Maxwell en la materia

Con todo esto las ecuaciones de Maxwell macroscópicas quedan:

$$\left. \begin{aligned} \nabla(\varepsilon_{gen}\vec{E}(\vec{r})) &= 0 \\ \nabla(\mu\vec{H}(\vec{r})) &= 0 \\ \nabla \wedge \vec{E}(\vec{r}) - i\omega\mu\vec{H}(\vec{r}) &= 0 \\ \nabla \wedge \vec{H}(\vec{r}) + i\omega\varepsilon_{gen}\vec{E}(\vec{r}) &= 0 \end{aligned} \right\} \varepsilon_{gen} = \varepsilon + \frac{i}{\omega}\sigma$$

El problema se reduce a especificar dos funciones, ε_{gen} y μ .

Cartagena99

CLASES PARTICULARES, TUTORÍAS TÉCNICAS ONLINE
LLAMA O ENVÍA WHATSAPP: 689 45 44 70

ONLINE PRIVATE LESSONS FOR SCIENCE STUDENTS
CALL OR WHATSAPP:689 45 44 70

3. Ecuaciones de Maxwell en la materia

La energía transportada por la onda es:
$$W = \frac{1}{2} \int_V (\epsilon \vec{E}^2 + \mu \vec{H}^2) dV$$

Variación de la energía:
$$\frac{\partial W}{\partial t} = - \int_V \vec{j}_{lib} \vec{E} dV - \oint_S (\vec{E} \wedge \vec{H}) dS$$

Vector de Poynting
$$\vec{S} \equiv \vec{E} \wedge \vec{H}$$

Promedio Temporal
$$\langle \vec{S} \rangle = \frac{1}{2} \Re(\vec{E} \wedge \vec{H}^*)$$

Cartagena99

CLASES PARTICULARES, TUTORÍAS TÉCNICAS ONLINE
LLAMA O ENVÍA WHATSAPP: 689 45 44 70

ONLINE PRIVATE LESSONS FOR SCIENCE STUDENTS
CALL OR WHATSAPP: 689 45 44 70

3. Ecuaciones de Maxwell en la materia

Clasificación de los medios

Se clasifican los medios en función de cómo sean ϵ_{gen} y μ .

1. *Conductor* ($\sigma \neq 0$) y *dieléctrico* ($\sigma = 0$, sin cargas libres).
2. *Isótropo* (ϵ_{gen} es un escalar) y *anisótropo* (ϵ_{gen} es un tensor).
3. *Inhomogéneo* (ϵ_{gen} es función de la posición en el medio) y *homogéneo* (ϵ_{gen} no depende de la posición).
4. *Dispersivo* (ϵ_{gen} es función de la frecuencia) y *no dispersivo* (ϵ_{gen} no depende de la frecuencia).
5. *Transparente* (ϵ_{gen} es real) y *absorbente* (ϵ_{gen} es complejo)
6. *No magnético* ($\mu \approx \mu_0$) y *magnético* ($\mu \neq \mu_0$).

Cartagena99

CLASES PARTICULARES, TUTORÍAS TÉCNICAS ONLINE
LLAMA O ENVÍA WHATSAPP: 689 45 44 70

ONLINE PRIVATE LESSONS FOR SCIENCE STUDENTS
CALL OR WHATSAPP:689 45 44 70