Examen de Cáculo de Probabilidades (PROBLEMAS, 23-I-2019)

1. Se lanzan dos monedas y, a continuación, se tira un dado tantas veces como caras se hayan obtenido. Se pide:

   (a) Hallar la probabilidad de que la suma sea 6.

   (b) ¿Cual es, en el caso de que la suma sea 6, la probabilidad de los diversos resultados de los lanzamientos de las monedas?.

2. Sea (X, Y) una variable aleatoria bidimensional con función de densidad $f(x, y) = 1/4$ si $x < 4, y > 0$ y $x > 2y$, $f(x, y) = 0$ en el resto.

   (a) Calcular la línea general de regresión de X sobre Y. $E(X|Y=y)$

   (b) Determinar la distribución de la variable aleatoria bidimensional (T, W), donde $T = X$ y $W = X + Y$. inversa jacobiano recinto función

   (c) Determinar la distribución marginal de X y la distribución de $Z = X^2$ si $X \in (0, 2)$, $Z = 2X - 4$ si $X \in [2, 4)$, y $Z = 0$ en el resto.

3. Sea $\{X_n\}_{n \in N}$ una sucesión de variables aleatorias independientes e idénticamente distribuidas con distribución uniforme en el intervalo $(0, \theta)$. Estudiar la convergencia en Ley de las sucesiones de variables aleatorias $\{U_n\}_{n \in N}$ y $\{V_n\}_{n \in N}$ siendo

$$U_n = n\xi_n \text{ y } V_n = n(\theta - \eta_n),$$

con $\xi_n = Min(X_1, ..., X_n)$ y $\eta_n = Max(X_1, ..., X_n)$.

Examen de Cáculo de Probabilidades (CUESTIONES, 23-I-2019)

1. (0.5). Dado el espacio de probabilidad (Ω, A, P), se considera la sucesión de conjuntos $\{A_n\}_{n\in N}$ con $A_n \in A$. Demostrar que

$$\Pr\left(\cap_{n=1}^{\infty} A_n\right) \geq 1 - \sum_{n=1}^{\infty} \Pr(A_n^C).$$

2. (0.5) Sea X una variable aleatoria uniforme en el intervalo $(0,1)$. ¿Son incorreladas las variables X y $\left|\frac{1}{2} - X\right|$?

3. (0.5) Sean $X_1, ..., X_n$ variables aleatorias con $E\left[X_i^2\right] < \infty$, para $1 \leq i \leq n$, y sean $a_1, ..., a_n \in R$. Se considera la variable aleatoria $S = \sum_{i=1}^{n} a_i X_i$. Demostrar que

$$Var(S) = \sum_{i=1}^{n} a_i^2 Var(X_i) + \sum_{i=1}^{n} \sum_{j\neq i}^{n} a_i a_j Cov(X_i, X_j).$$

4. (1.25) Sea X la variable aleatoria que contabiliza el número de repeticiones (independientes) de un experimento de Bernoulli hasta obtener el primer "éxito", siendo $p \in (0,1)$ la probabilidad de éxito. Escribir la función de masa de X, evaluar las probabilidades $\Pr(X > m/X > n)$ y $P(X > m-n)$ para $m > n \geq 1$, e interpretar los resultados obtenidos.

5. (1.25) Enuncia y demuestra la ley débil de los grandes números de Khintchine.