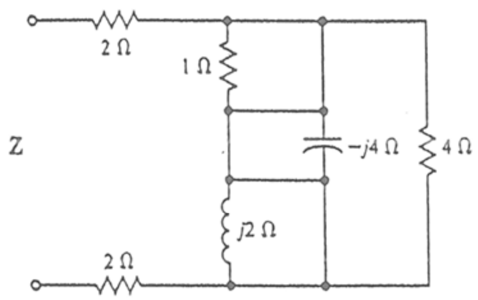
TEMA III: REGIMEN SENOIDAL PERMANENTE

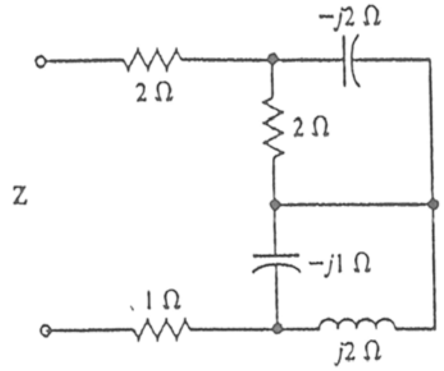
III. PROBLEMA 1. Calcular la impedancia compleja equivalente $Z(\omega)$ entre los dos terminales indicados.

Solución: (a) 4 Ω (b) (4-3j) Ω (c) $\frac{46+14j}{17}$ Ω (d) $\frac{10-25j}{29}$ Ω

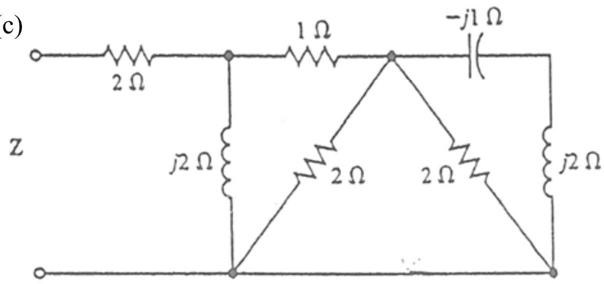
(a)



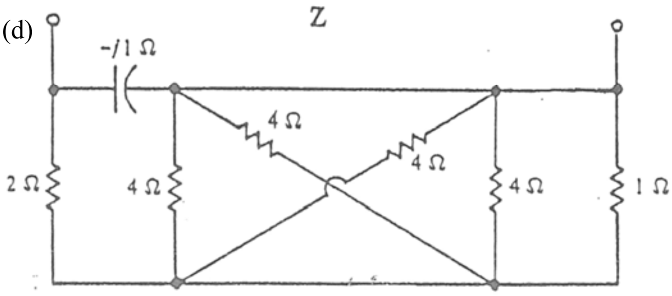
(b)



(c)



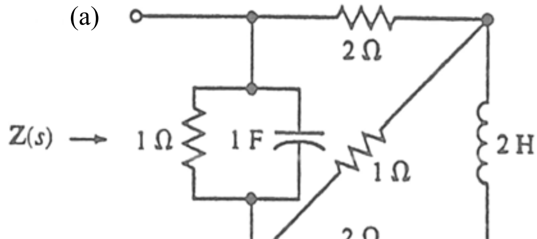
(d)



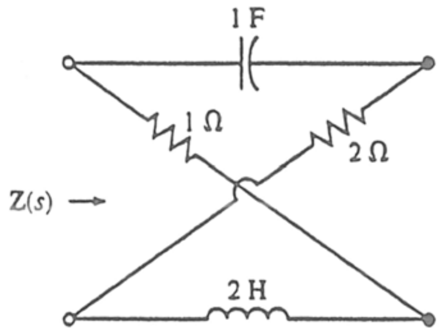
III. PROBLEMA 2. Calcular la impedancia $Z(s)$ entre los dos terminales indicados y a continuación imponer régimen senoidal permanente con ω = 1 rad/s.

Solución: (a) $\frac{136-98j}{281}$ Ω (b) $\frac{3+j}{2}$ Ω (c) $\frac{3+j}{2}$ Ω

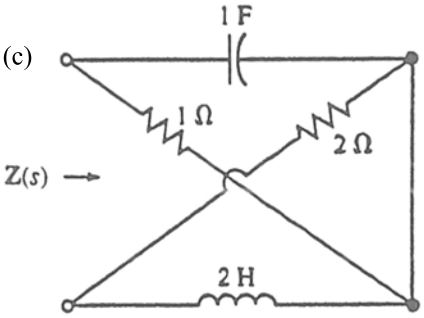
(a)



(b)



(c)

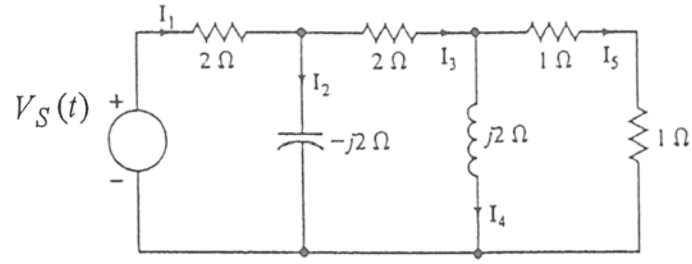


III. PROBLEMA 3. La excitación de estos circuitos es senoidal de la forma $V_S(t) = 12\cos t$ y las impedancias han sido calculadas para $\omega = 1$ rad/s. Calcular en régimen estacionario las expresiones de las corrientes por las distintas ramas.

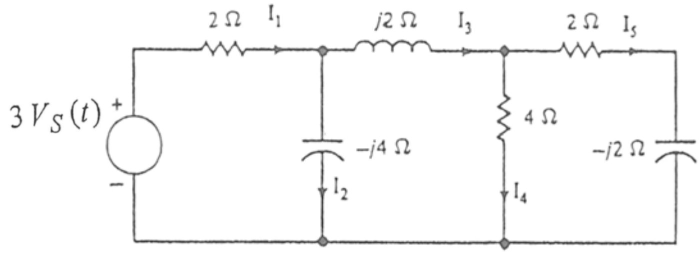
Solución:

(a) $I_1 = 3{,}35\cos(t+26{,}56º)$; $I_2 = 3{,}35\cos(t+63{,}43º)$; $I_3 = 2{,}12\cos(t-45º)$; $I_4 = 1{,}50\cos(t-90º)$; $I_5 = 1{,}50\cos t$

(b) $I_1 = 8{,}05\cos(t-3{,}94º)$; $I_2 = 4{,}99\cos(t+93{,}18º)$; $I_3 = 9{,}98\cos(t-33{,}69º)$;
$I_4 = 4{,}46\cos(t-60{,}25º)$; $I_5 = 6{,}31\cos(t-15{,}26º)$



(a)

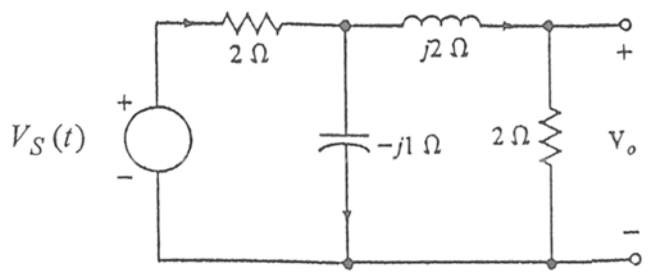


(b)

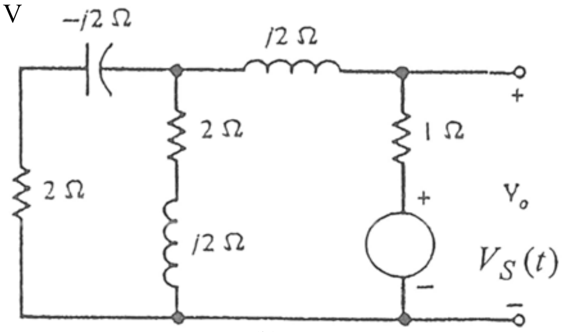
III. PROBLEMA 4. La excitación de estos circuitos es senoidal de la forma $V_S(t) = 12\sin t$ y las impedancias han sido calculadas para $\omega = 1$ rad/s.

Calcular en régimen permanente la señal de salida $V_o(t)$.

Solución: (a) $-4\cos t$ V (b) $9{,}41\sin(t+11{,}31º)$ V



(a)



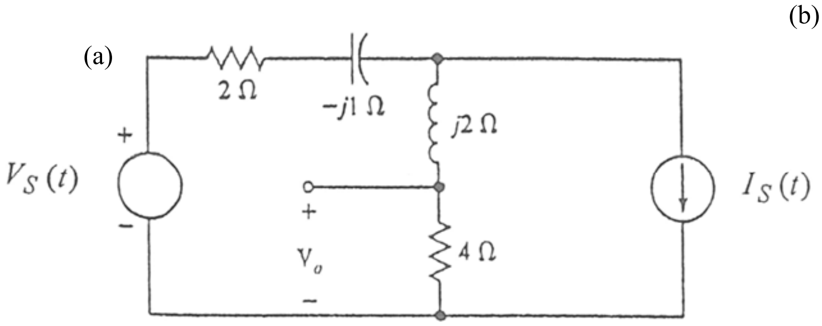
(b)

III. PROBLEMA 5. Aplicando el principio de superposición, calcular la señal de tensión $V_o(t)$ en régimen senoidal permanente si en ambos circuitos el generador de tensión proporciona $V_S(t) = 12\cos 5t$ V y el de corriente $I_S(t) = 2\sin 5t$ A. Las impedancias han sido calculadas para $\omega = 5$ rad/s

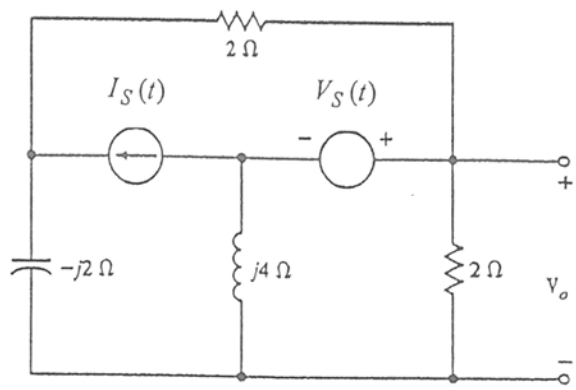
Solución: (a) $V_o(t) = \dfrac{8}{\sqrt{37}}\left[6\cos(5t-9{,}46º) - \sqrt{5}\sin(5t-36{,}02º)\right]$

(b) $V_o(t) = 4\left[\sin 5t - \dfrac{\sqrt{2}}{3}\sin(5t+45º)\right]$

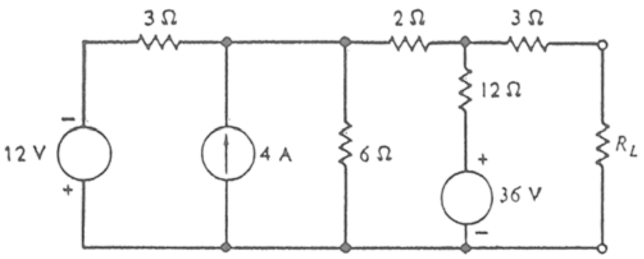
(a)



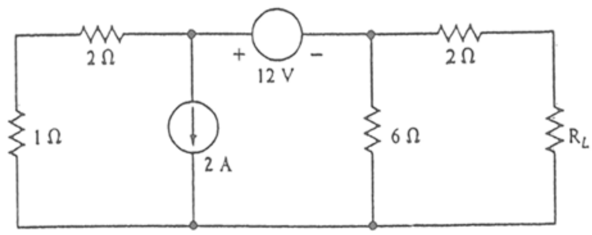
(b)



III. PROBLEMA 6. Calcular el valor de R_L para obtener máxima transferencia de potencia. Calcular también el correspondiente valor de la potencia transferida a la carga R_L.
Solución: (a) 6 Ω, 27/8 W (b) 4 Ω, 9 W



(a)

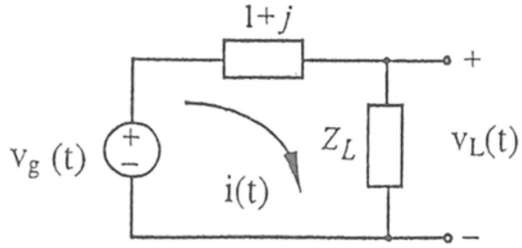


(b)

III. PROBLEMA 7. Si la impedancia de carga es Z_L = 3-4j Ω para la frecuencia ω_o del generador de excitación, $v_g(t)$ = 100 cos$\omega_o t$, calcular:

a) la onda de corriente $i(t)$ en la malla y la onda de tensión $v_L(t)$ sobre la carga.
b) potencia activa y reactiva sobre sobre la carga Z_L y sobre la impedancia de salida del generador.
c) la carga Z_2 que hay que conectar en paralelo con Z_L para conseguir máxima transferencia de potencia sobre este paralelo.

Solución:
(a) $i(t) = 20\cos(\omega_o t + 36.87^o)$ A
$v_L(t) = 100\cos(\omega_o t - 16.26^o)$ V
(b) 600W, -800VAR
200W, 200VAR
(c) $Z_2 = (1.46 - j\,1.307)$ Ω



III. PROBLEMA 8. Considere el circuito mostrado en la figura y calcule la impedancia equivalente $Z_{AB}(s)$ del subcircuito a la izquierda de los nudos A y B.

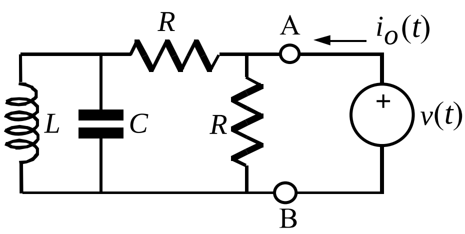
a) Imponga régimen senoidal permanente para calcular las expresiones matemáticas de módulo y argumento de la correspondiente impedancia compleja
b) Simplifique al máximo dicha impedancia suponiendo que R=1Ω, L=1H, C=1F y la fuente de tensión $v(t)$ proporciona una señal senoidal de 5V de amplitud, $1/\pi$ Hz de frecuencia y $\pi/6$ de fase.
c) Exprese matemáticamente la señal $v(t)$ y determine la correspondiente onda de corriente $i_o(t)$.

Solución:

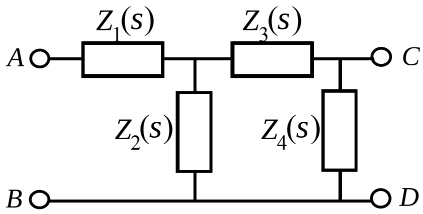
(a) $|Z_{AB}(\omega)| = \sqrt{\dfrac{R^4(1-\omega^2LC)^2+(\omega RL)^2}{4R^2(1-\omega^2LC)^2+(\omega L)^2}}\ \Omega,\ \mathrm{Arg}[Z_{AB}(\omega)] = \arctan\dfrac{\omega RL}{R^2(1-\omega^2LC)} - \arctan\dfrac{\omega L}{2R(1-\omega^2LC)}$

(b) $|Z_{AB}(\omega)| = \sqrt{\dfrac{13}{40}}\ \Omega,\ Arg[Z_{AB}(\omega)] = -15{,}25^o$

(c) $v(t) = 5\cos(2t+30^o)$ V, $i_o(t) = 8{,}77\cos(2t+45{,}25^o)$ A



III. PROBLEMA 9. Para el circuito transformado de la figura, compuesto por cuatro impedancias $Z_m(s);\ m=1,2,3,4$



a) Calcule, en función de estas cuatro impedancias, la impedancia equivalente $Z_{AB}(s)$ vista desde los terminales de entrada A y B, así como la función de transferencia en tensión $H(s)$.

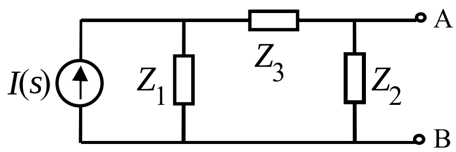
b) Suponga $Z_1(s)$: resistencia R en paralelo con condensador C; $Z_2(s)$: resistencia $2R$ en serie con bobina de $6L$ en serie con condensador C; $Z_3(s)$: resistencia $4R$ en serie con bobina $2L$; y $Z_4(s)$: bobina $4L$ en paralelo con condensador C. Imponiendo régimen senoidal permanente, calcule qué relación debe verificarse entre R, L y C para que se cumpla $Arg\left[Z_3(\omega)\right]=45^\circ=-Arg\left[Z_1(\omega)\right]$.

c) Bajo esa relación, considerando que $R=1\ \Omega$ y excitación senoidal con periodo de 2π segundos, complete el cuadro adjunto y represente el circuito completo, con todos los componentes y los valores concretos de sus correspondientes impedancias complejas en régimen senoidal permanente.

m	$Z_m(s)$	$Z_m(\omega)$	$\lvert Z_m(\omega)\rvert$	$Arg\left[Z_m(\omega)\right]$
1				-45º
2				
3				45º
4				

Solución: (a) $Z_{AB}(s)=\dfrac{Z_1Z_2+(Z_1+Z_2)(Z_3+Z_4)}{Z_2+Z_3+Z_4}$, $H(s)=\dfrac{Z_2Z_4}{Z_1Z_2+(Z_1+Z_2)(Z_3+Z_4)}$ (b) $R=\dfrac{1}{C\omega}=\dfrac{\omega L}{2}$

III. PROBLEMA 10. Considere el circuito completo mostrado en la figura y calcule, utilizando exclusivamente el método de transformación de fuentes y equivalentes serie-paralelo, el circuito equivalente Thèvenin entre los nudos A y B.



a) Considere ahora que $Z_1(s)$ = paralelo resistencia R_1 con condensador C_1 ; $Z_2(s)$ = serie resistencia R_2 con inductor L_2 ; $Z_3(s)$ = paralelo resistencia R_3 con condensador C_3 y complete:

m	$Z_m(s)$	$Z_m(\omega)$	$\lvert Z_m(\omega)\rvert$	$Arg\left[Z_m(\omega)\right]$
1				
2				
3				

b) Suponga a continuación que $R_3=2R_2=2R_1=2\Omega$; $C_1=2C_3=2\text{F}$; $L_2=2\text{H}$ y $f=1/2\pi$ Hz para dibujar el circuito completo indicando el valor de los componentes pasivos en régimen senoidal permanente y simplifique al máximo el equivalente Thèvenin calculado inicialmente, expresando $Z_{TH}(\omega)$ en forma módulo-argumento.

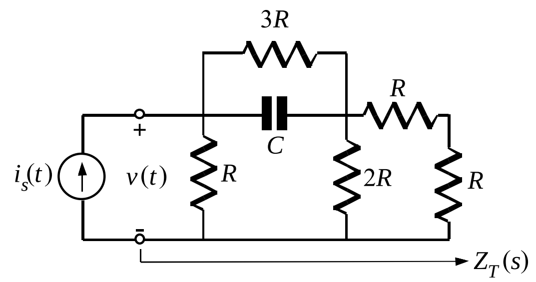
Solución: (a) $Z_{TH}(s)=\dfrac{Z_2(Z_1+Z_3)}{Z_1+Z_2+Z_3}$, $V_{TH}(s)=I(s)\dfrac{Z_1Z_2}{Z_1+Z_2+Z_3}$ (b) $\left|Z_{TH}(\omega)\right|=\dfrac{3\sqrt{5}}{4}$, $Arg\left[Z_{TH}(\omega)\right]=-26{,}57^\circ$

III. PROBLEMA 11. Calcule la impedancia equivalente $Z_T(s)$ vista desde los terminales A y B suponiendo condiciones iniciales nulas en los elementos reactivos.

a) Considere ahora que R =1 kΩ y C = 500 μF para deducir expresiones compactas para el módulo y argumento de esta impedancia en régimen senoidal permanente.

b) Con estos resultados previos, calcule de la forma más rápida posible la salida estacionaria correspondiente a $i_s(t) = A\cos(\omega_o t + \phi)$ cuando $A = 12$ mA; $f_o = 1{,}5/\pi$ Hz y $\phi = 60°$.

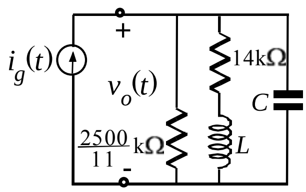
c) Utilice este mismo método rápido cuando la excitación es un escalón de amplitud 12 mA. Compare este resultado con el que se obtiene aplicando $v(t) = TL^{-1}[V(s)]$ y explique, si las hay, las posibles diferencias.

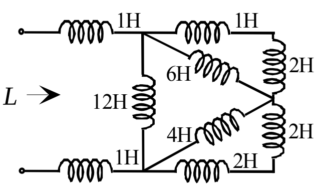


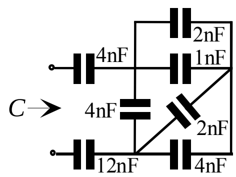
Solución: (a) $Z_T(s) = \dfrac{R(4+3sRC)}{5+6sRC}, |Z_T(\omega)| = \sqrt{\dfrac{16+2{,}25\omega^2}{25+9\omega^2}}$ kΩ, $Arg[Z_T(\omega)] = \arctan\dfrac{1{,}5\omega}{4} - \arctan\dfrac{3\omega}{5}$

(b) $v(t) = 7{,}02\cos(3t + 47{,}42°)$ V, (c) $v(t) = \dfrac{48}{5}u(t)$ V, $v(t) = TL^{-1}[V(s)] = \dfrac{48}{5}u(t) - \dfrac{18}{5}e^{-5t/3}u(t)$

III. PROBLEMA 12. Calcule los equivalentes L y C mostrados a la derecha, con todos los componentes inicialmente descargados, para incorporarlos al circuito de la izquierda.





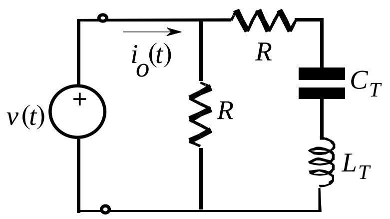


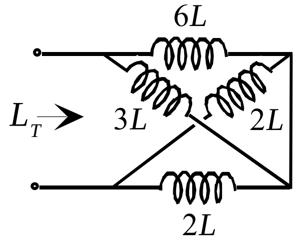
a) Si la fuente de corriente proporciona una onda senoidal $i_g(t) = I_g\cos(\omega_o t + \varphi_o)$, determine cuál ha de ser el valor de la frecuencia (en Hz) para asegurar que la tensión de salida $v_o(t)$ está en fase con la excitación. Se recomienda no sustituir valores numéricos hasta el final del apartado.

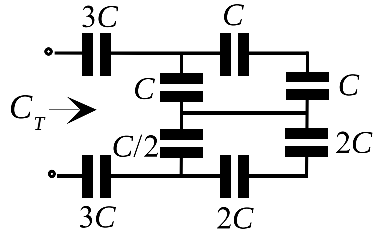
b) Suponga ahora que $I_g = 2{,}5$ mA y determine, con la frecuencia calculada en el apartado anterior, cuál es la amplitud de la onda senoidal de salida. ¿Por qué motivo sabemos que la señal de salida es también senoidal?

Solución: $L = 5$H, $C = 2$nF (a) $f_o = 1{,}53$ kHz (b) $V_o = 250$ V

III. PROBLEMA 13. Calcule los equivalentes L_T y C_T mostrados a la derecha, con todos los componentes inicialmente descargados, para incorporarlos al circuito de la izquierda.







a) Determine la impedancia total del circuito $Z_T(s)$ vista desde los terminales de la fuente de tensión. Imponga régimen senoidal permanente para extraer las expresiones matemáticas de módulo y argumento de $Z_T(\omega)$.

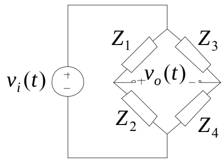
b) Suponga a partir de ahora (no antes) que $R = 1\Omega$; $C = 1\text{F}$ y $L = 1\text{H}$ para calcular la onda de corriente $i_o(t)$ cuando la fuente de tensión proporciona una señal senoidal de 4V de amplitud, $1/2\pi$ Hz de frecuencia y 45º de fase.

Solución: $L_T = 3L,\ C_T = C/2$

(a) $\left|Z_T(\omega)\right| = \dfrac{R\sqrt{(2-3\omega^2LC)^2 + (\omega RC)^2}}{\sqrt{(2-3\omega^2LC)^2 + (2\omega RC)^2}}; Arg\left[Z_T(\omega)\right] = \arctan\dfrac{\omega RC}{2-3\omega^2LC} - \arctan\dfrac{2\omega RC}{2-3\omega^2LC}$

(b) $i_o(t) = 6{,}32\cos(t + 26{,}57^\circ)\,\text{A}$

III. PROBLEMA 14. Observe el circuito de la siguiente figura correspondiente a un puente genérico.

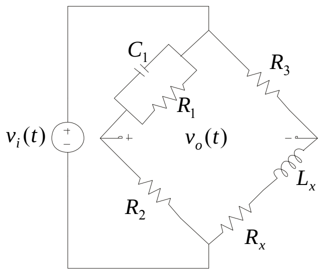


a) Demuestre que si se cumple la condición

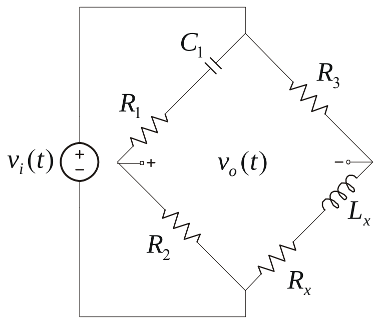
$$\frac{Z_1}{Z_2} = \frac{Z_3}{Z_4}$$

entonces el voltaje de salida $v_o(t)$ se anula, independientemente del valor del voltaje de entrada $v_i(t)$. En este caso se dice que el puente formado por las cuatro impedancias está equilibrado.

b) Esta condición de equilibrio se usa en la medida de la inductancia así como del valor de la resistencia en serie parásita de un inductor real, gracias al puente de Maxwell mostrado en la siguiente figura. Calcule el valor de L_x y R_x que hacen que el puente esté equilibrado, independientemente del valor de la frecuencia de trabajo.

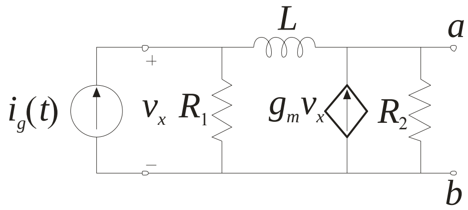


c) Existe otro puente, denominado de Hay y mostrado en la siguiente figura, para realizar el mismo cálculo. Supuesto que para la frecuencia ω_h se anula el voltaje de salida $v_o(t)$, exprese el valor de L_x y R_x en función del resto de impedancias así como de dicha frecuencia ω_h.



Solución: (b) $R_x = \dfrac{R_2R_3}{R_1}$; $L_x = R_2R_3C_1$ (c) $R_x = \dfrac{R_1R_2R_3C_1^2\omega_h^2}{1+R_1^2C_1^2\omega_h^2}$; $L_x = \dfrac{R_2R_3C_1}{1+R_1^2C_1^2\omega_h^2}$

III. PROBLEMA 15. Observe el circuito de la siguiente figura.



a) Supuestas condiciones nulas represente el circuito en el dominio transformado. Calcule y represente el equivalente Thèvenin del circuito entre los terminales de salida *a* y *b*. Suponiendo los siguientes valores: R_1=1 Ω, R_2=2 Ω, L=2 H, g_m=4 S e $i_g(t)$=sin(10t), particularice dicho circuito equivalente.

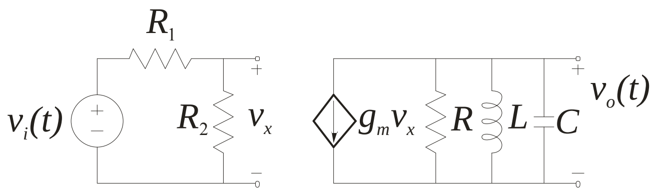
b) A partir de este resultado calcule la impedancia que colocada entre los terminales de salida maximiza la transferencia de potencia activa entre el circuito y dicha impedancia supuesto régimen senoidal permanente. Proponga una posible implementación para esta impedancia de carga utilizando para ello resistencias, condensadores y bobinas.

Solución: (a) $V_{TH}(s) = I_g \dfrac{R_1R_2(1+sg_mL)}{R_1+R_2-R_1R_2g_m+sL} = \dfrac{20(8s+1)}{(s^2+100)(2s-5)}$

$$Z_{TH}(s) = \frac{R_2(R_1+sL)}{R_1+R_2-R_1R_2g_m+sL} = \frac{2(2s+1)}{2s-5}$$

(b) $Z_{TH}(\omega=10) = 1.86 - j0.56$; $Z_L(\omega=10) = 1.86 + j0.56 \Leftrightarrow R = 1.86\,\Omega,\ L = 0.056\,\text{H}$

III. PROBLEMA 16. Observe el circuito de la siguiente figura el cual representa un receptor AM. Suponga en todo momento excitación senoidal con una frecuencia de trabajo ω.



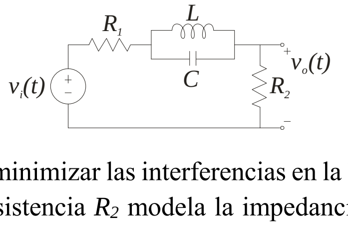
a) Supuestas condiciones nulas represente el circuito en el dominio transformado. Calcule y represente el equivalente Norton del circuito entre los terminales de salida *a* y *b*. Suponiendo los siguientes valores: R_1=R_2=R=1 Ω, L=1 H, C=1 F y g_m=2 S, particularice dicho circuito equivalente.

b) A partir de este resultado calcule la impedancia que colocada entre los terminales de salida maximiza la transferencia de potencia activa entre el circuito y dicha impedancia, supuesto régimen senoidal permanente y una frecuencia de trabajo ω.

Solución: (b) $I_N(s) = -V_i(s)\dfrac{R_2}{R_1+R_2}g_m = -V_i(s)$ $\qquad Z_N(s) = \dfrac{\frac{1}{C}s}{s^2+\frac{1}{RC}s+\frac{1}{LC}} = \dfrac{s}{s^2+s+1}$

(c) $Z_N(\omega) = \dfrac{j\omega}{1-\omega^2+j\omega}$ $\qquad Z_L(\omega) = Z_N^*(\omega) = \dfrac{\omega^2}{\omega^4-\omega^2+1} + j\omega\dfrac{\omega^2-1}{\omega^4-\omega^2+1}$

III. PROBLEMA 17. Observe el circuito de la siguiente figura.



Dicho circuito se puede utilizar para minimizar las interferencias en la línea telefónica debido a la presencia cercana de líneas de potencia. La resistencia R_2 modela la impedancia de la línea telefónica. Suponga la señal de excitación es una señal cosenoidal de frecuencia ω.

a) Represente el circuito en el dominio transformado supuestas condiciones nulas. Calcule el equivalente Thèvenin entre los nodos de salida del circuito sin considerar la resistencia R_2.

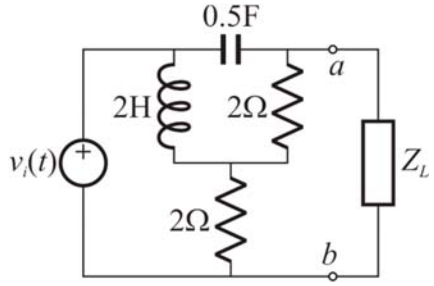
b) Añada la resistencia R_2 al equivalente y calcule sobre el circuito completo la función de transferencia $H(s) = V_o(s)/V_i(s)$.

c) Suponga que $v_i(t)=\cos(2\pi 50t)+\cos(2\pi 250t)$ y se desea obtener a la salida un voltaje estacionario de la forma $v_o(t)=0{,}45\cos(2\pi 250t+\alpha)$. Calcule los valores para L y para C que satisfacen estos requerimientos, supuesto $R_1=R_2=600\ \Omega$.

Solución: (a) $V_{TH}(s) = V_i(s)$; $Z_{TH}(s) = R_1 \dfrac{s^2LC + s(L/R_1) + 1}{s^2LC + 1}$ (b) $H(s) = \dfrac{R_2}{R_1 + R_2} \dfrac{s^2LC + 1}{s^2LC + sL/(R_1 + R_2) + 1}$

(c) $L = 8.88\text{H}; C = 1.14\mu\text{F}$

III. PROBLEMA 18. Observe el circuito de la siguiente figura.



a) Represente el circuito en el dominio transformado supuestas condiciones nulas. Calcule el equivalente Thèvenin entre los nodos *a* y *b* de salida del circuito y así como la función de transferencia entre el voltaje de entrada y el voltaje de salida entre los mencionados nodos omitiendo en ambos cálculos la impedancia de carga Z_L.

b) Calcule a partir de este resultado, la impedancia de carga Z_L que maximiza la transferencia de potencia entre el circuito y dicha impedancia supuesto el voltaje de entrada de la forma: $v_i(t)=12\cos(t)$. Proponga una posible implementación para esta impedancia así calculada.

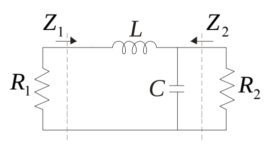
c) En las condiciones de máxima transferencia de potencia, calcule la amplitud de la potencia activa y reactiva en Z_L.

Solución: (a) $V_{TH}(s) = V_i(s)\dfrac{s^2 + 0.5s + 0.5}{s^2 + s + 0.5}$ $Z_{TH}(s) = \dfrac{2s + 1}{s^2 + s + 0.5}$ $H(s) = \dfrac{s^2 + 0.5s + 0.5}{s^2 + s + 0.5}$

(b) $Z_L(\omega) = \dfrac{6}{5} + j\dfrac{8}{5}$ $R_L = \dfrac{6}{5}\,\Omega$ en serie con $L_L = \dfrac{8}{5}\text{H}$

(c) P=6 W; Q=8 VAR

III. PROBLEMA 19. Observe el circuito de la siguiente figura.



Suponga que $R_1<R_2$ y que el circuito opera bajo régimen senoidal permanente. Supuesto que la frecuencia de trabajo es ω, calcule el valor de L y C para que se cumpla que las impedancias equivalentes vistas desde la izquierda y derecha del circuito sean:

$$Z_1 = R_1$$
$$Z_2 = R_2$$

Es necesario que demuestre que con los valores obtenidos para L y C se cumplen ambas propiedades.

Solución: $L = \dfrac{1}{\omega}\sqrt{R_1(R_2 - R_1)}$; $C = \dfrac{1}{\omega R_2}\sqrt{\dfrac{R_2 - R_1}{R_1}}$