

Ejercicios del tema 4.

(1) Calcula los siguientes determinantes:

$$(a) \begin{vmatrix} 1 & -2 & -3 & 4 \\ -2 & 3 & 4 & -5 \\ 3 & -4 & -5 & 6 \\ -4 & 5 & 6 & -7 \end{vmatrix} \quad (b) \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & -1 \\ 1 & 1 & -1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 & 1 \\ -1 & 1 & 1 & 1 \end{vmatrix} \quad (c) \begin{vmatrix} 3 & 9 & 27 & 81 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ -2 & 4 & -8 & 16 \\ 2 & 4 & 8 & 16 \end{vmatrix}$$

$$(d) \begin{vmatrix} 12 & 15 & 18 & 21 \\ 0 & 3 & 6 & 9 \\ 1 & 2 & 3 & 4 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{vmatrix} \quad (e) \begin{vmatrix} 1 & 2 & 0 & 0 & 0 \\ 3 & 4 & 0 & 0 & 0 \\ -8 & 9 & 2 & -7 & 7 \\ 5 & -6 & 0 & 1 & 8 \\ 8 & 7 & 0 & 0 & -1 \end{vmatrix}.$$

(2) Demuestra las igualdades para los determinantes siguientes

$$\begin{vmatrix} x & a & b & c \\ x & x & b & c \\ x & x & x & c \\ x & x & x & x \end{vmatrix} = x(x-a)(x-b)(x-c) \quad \begin{vmatrix} p^2 & q^2 & pq \\ 2p & 2q & p+q \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix} = (q-p)^3 \quad \begin{vmatrix} x & a & b & c \\ a & x & b & c \\ a & b & x & c \\ a & b & c & x \end{vmatrix} = (x-a)(x-b)(x-c)(x+a+b+c)$$

(3) Demuestra las igualdades para los determinantes siguientes, que se denominan *determinates de Vandermonde*.

$$(a) \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ a & b & c \\ a^2 & b^2 & c^2 \end{vmatrix} = (b-a)(c-a)(c-b).$$

$$(b) \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ a & b & c & d \\ a^2 & b^2 & c^2 & d^2 \\ a^3 & b^3 & c^3 & d^3 \end{vmatrix} = (b-a)(c-a)(c-b)(d-a)(d-b)(d-c).$$

$$(c) \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & \cdots & 1 \\ a_0 & a_1 & a_2 & \cdots & a_n \\ a_0^2 & a_1^2 & a_2^2 & \cdots & a_n^2 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_0^n & a_1^n & a_2^n & \cdots & a_n^n \end{vmatrix} = \prod_{i < j} (a_j - a_i).$$

Indicación: usa las propiedades del determinante e inducción sobre el orden de la matriz.

(4) Calcula, usando las fórmulas demostradas en el ejercicio 2, el siguiente determinante de Vandermonde:

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 2 & 3 & 4 & 5 \\ 4 & 9 & 16 & 25 \\ 8 & 27 & 64 & 125 \end{vmatrix}$$

CLASES PARTICULARES, TUTORÍAS TÉCNICAS ONLINE
LLAMA O ENVÍA WHATSAPP: 689 45 44 70

ONLINE PRIVATE LESSONS FOR SCIENCE STUDENTS
CALL OR WHATSAPP:689 45 44 70

$$\begin{vmatrix} 0 & 1 & 2b & 0 & -1 & -2c \\ 0 & 1 & 2a & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 2a & 0 & 0 & 0 \end{vmatrix}$$

- (6) Usa determinantes y usa el método de Gauss–Jordan para decidir si las siguientes matrices son invertibles y para hallar sus matrices inversas en caso de que lo sean. ¿Qué método te parece mejor?

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad B = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 2 & 0 & 3 \end{pmatrix} \quad C = \begin{pmatrix} 0 & 5 & 2 \\ -1 & -4 & 1 \\ -1 & 3 & -2 \end{pmatrix}$$

$$D = \begin{pmatrix} 3 & 7 & -3 \\ 1 & 1 & -4 \\ 2 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad E = \begin{pmatrix} 3 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & -1 \end{pmatrix} \quad F = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -1 \end{pmatrix}.$$

- (7) Vuelve a resolver el ejercicio 16 del tema 1 usando en esta ocasión determinantes en lugar del método de Gauss. ¿Qué método te parece mejor?
- (8) Halla el rango de las matrices siguientes usando determinantes y usando el método de Gauss. ¿Qué método te parece mejor?

$$A = \begin{pmatrix} -2 & 4 & 0 & 2 & -2 & 0 & 2 \\ -1 & -1 & 0 & 1 & 0 & 1 & -2 \\ -2 & 1 & 0 & 2 & -1 & 1 & -1 \\ 4 & 1 & 0 & -4 & 1 & -3 & 5 \end{pmatrix} \quad B = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -3 & 0 & -1 & 2 & 0 \\ 2 & 1 & -2 & 0 & 1 & 3 & 3 \\ 1 & 1 & 1 & 0 & 3 & 2 & 4 \\ 1 & 2 & -3 & 0 & 1 & 3 & 2 \end{pmatrix}.$$

- (9) Vuelve a resolver el ejercicio 17 del tema 1 usando en esta ocasión determinantes en lugar del método de Gauss. ¿Qué método te parece mejor?
- (10) Vuelve a resolver el ejercicio 15 del tema 2 argumentado con determinantes
Indicación: Forma una matriz con los vectores de cada uno de los conjuntos A , B y C .
- (11) Vuelve a resolver los apartados (a) y (c) del ejercicio 26 del tema 3, usando esta vez determinantes en lugar del método de Gauss para estudiar los rangos de las matrices

$$\begin{pmatrix} 1 & -1 & \lambda - 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & \lambda \\ \lambda & 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} \quad \text{y} \quad \begin{pmatrix} 1 & -1 & \lambda - 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & \lambda & 2 \\ \lambda & 0 & 1 & 1 & 3 \end{pmatrix}.$$

¿Qué método te parece mejor?

- (12) Consideramos la matriz

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 4 \\ 1 & \alpha & 1 & 1 & 4 \\ 1 & 1 & \alpha & 3 - \alpha & 6 \\ 2 & 2 & 2 & \alpha & 6 \end{pmatrix}.$$

Demuestra que si $\alpha \neq 1$, entonces el rango de A es 4. ¿Cuál es el rango de A cuando $\alpha = 1$?

- (13) Resuelve, usando la regla de Cramer y usando el método de Gauss–Jordan, el sistema siguiente.
¿Qué procedimiento te parece mejor?

**CLASES PARTICULARES, TUTORÍAS TÉCNICAS ONLINE
LLAMA O ENVÍA WHATSAPP: 689 45 44 70**

**ONLINE PRIVATE LESSONS FOR SCIENCE STUDENTS
CALL OR WHATSAPP:689 45 44 70**

$$a) \begin{cases} x + y + z = 3 \\ y - z = 3 \end{cases} \quad b) \begin{cases} -x + y + z = -1 \\ y - z = 1 \end{cases} \quad c) \begin{cases} x - w = 3 \\ 2x - y + z - 2w = 9 \end{cases}$$

(15) Para el sistema

$$\left. \begin{aligned} 3x + 3y - z &= 0 \\ -4x - 2y + mz &= 0 \\ 3x + 4y + 6z &= 0 \end{aligned} \right\}$$

halla, usando el método de Gauss y usando determinantes para calcular el rango de la matriz asociada, aquel valor o valores de m para los que tenga alguna solución distinta de la trivial. ¿Qué procedimiento te parece más fácil? Resuelve el sistema para ese valor o valores.

(16) Discute, usando el método de Gauss y usando determinantes para calcular los rangos de las matrices asociadas y de las matrices ampliadas, los sistemas siguientes. ¿Qué procedimiento te parece mejor? En los casos en que los sistemas sean compatibles, calcula su solución o soluciones usando la regla de Cramer y usando el método de Gauss-Jordan. ¿Qué procedimiento te parece mejor?

$$\text{a) } \left\{ \begin{aligned} 2x + y - z &= 1 \\ x - 2y + z &= 3 \\ 5x - 5y + 2z &= m \end{aligned} \right. \quad \text{b) } \left\{ \begin{aligned} mx + y - z &= 1 \\ x - 2y + z &= 1 \\ 3x + 4y - 2z &= -3 \end{aligned} \right. \quad \text{c) } \left\{ \begin{aligned} x + y - z &= 1 \\ mx - 2y + 2z &= 1 \\ 2x + y + z &= 1 \end{aligned} \right.$$

(17) Elimina los parámetros de los siguientes sistemas:

$$\left\{ \begin{aligned} x_1 &= 2a + b + c - 1 \\ x_2 &= -a - 2b + c + 2 \\ x_3 &= a + 3b - 2c - 5 \\ x_4 &= 4a - 2b + 6c + 4 \end{aligned} \right. \quad \left\{ \begin{aligned} x &= 1 - 3\lambda + 2\mu \\ y &= 2 + \lambda + \mu \\ z &= -2\lambda + \mu \end{aligned} \right. \quad \left\{ \begin{aligned} x &= 1 + 4\lambda + 2\mu \\ y &= 2 - 2\lambda - \mu \\ z &= 1 + 2\lambda + \mu \end{aligned} \right.$$

(18) Consideramos la aplicación lineal $f : \mathbf{R}^2 \rightarrow \mathbf{R}^4$, cuya matriz, respecto de las bases canónicas, es

$$M = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 1 \\ 2 & 1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}.$$

M . Halla unas ecuaciones implícitas de la imagen de f . Decide si el vector $(1, 0, -1, 2)$ pertenece a la imagen de f y, en caso afirmativo, halla todos los vectores v de \mathbf{R}^2 que cumplen $f(v) = (1, 0, -1, 2)$.

(19) Halla ecuaciones paramétricas e implícitas del plano del espacio afín \mathbf{R}^3 que pasa a los puntos $(1, 0, 1)$, $(0, 1, 0)$, $(1, 0, 2)$.

(20) Halla ecuaciones paramétricas e implícitas de la recta del espacio afín \mathbf{R}^3 que pasa por el punto $(1, 1, 1)$ y que tiene al vector $(1, -1, -1)$ como vector director.

(21) Halla explícitamente el conjunto de puntos en la intersección de los planos del espacio afín \mathbf{R}^3 de ecuaciones $x + 2y - z = 1$ y $2x - y + z = -1$.

(22) Encuentra ecuaciones paramétricas e implícitas para el subespacio vectorial de \mathbf{R}^4 generado por los vectores $(1, 0, 1, -1)$, $(1, 1, 0, -1)$, $(1, 1, 1, 1)$. Haz lo mismo para el subespacio vectorial generado por $(1, 0, 1, -1)$, $(1, 1, 0, -1)$.

(23) Calcula unas ecuaciones paramétricas y unas ecuaciones implícitas de la imagen inversa del vector $(2, 0, -2)$ de \mathbf{R}^3 por la aplicación lineal $f : \mathbf{R}^4 \rightarrow \mathbf{R}^3$ que tiene como matriz respecto de las bases canónicas a la matriz

$$\begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 & -1 \end{pmatrix}$$

CLASES PARTICULARES, TUTORÍAS TÉCNICAS ONLINE
LLAMA O ENVÍA WHATSAPP: 689 45 44 70

ONLINE PRIVATE LESSONS FOR SCIENCE STUDENTS
CALL OR WHATSAPP:689 45 44 70

Cartagena99