Forma Canónica de Jordan (Resumen)

Índice

En todo este resumen **se asume** que:

- $\mathscr{U}$ es un $\mathbb{K}$-e.v. de tipo finito, $\dim(\mathscr{U}) = n$,
- $f \in \operatorname{End}(\mathscr{U})$,
- $A \in \mathscr{M}_{n\times n}(\mathbb{K})$ es la representación matricial de f en una cierta base $\overline{\mathscr{B}}$ de $\mathscr{U}$ (en la práctica, si es posible, $\overline{\mathscr{B}}$ es la base canónica).

Al igual que en el `Resumen` sobre Diagonalización de Endomorfismos, teniendo en cuenta el isomorfismo entre $\operatorname{End}(\mathscr{U})$ y $\mathscr{M}_{n\times n}(\mathbb{K})$ (véase `Resumen` sobre Homomorfismos entre Espacios Vectoriales), se desarrolla la teoría para matrices. Es decir, se trabajará con A en lugar de con f, pero el lector debe tener en cuenta que en cualquier momento las afirmaciones son traducibles de un contexto al otro.

Obsérvese que $\mathrm{Ker}((A-\lambda \mathrm{I})^m)$ es un subespacio vectorial de $\mathbb{K}^n$ y, por tanto, tiene sentido hablar de su dimensión y de bases.

1. Planteamiento y motivación del problema.

Véase pizarra.

2. Forma canónica de Jordan 2×2.

En esta sección de realiza un tratamiento directo y específico del problema para el caso 2×2. En la siguiente sección el problema se analiza con toda generalidad.

2.1. Caso de raíces en $\mathbb{K}$.

Sea $A \in \mathscr{M}_{2\times 2}(\mathbb{K})$. Se supone que el polinomio característico de A, $P_A(t)$, tiene sus dos raíces en $\mathbb{K}$. Obsérvese que esto **siempre sucede si** $\mathbb{K} = \mathbb{C}$. Sean $\lambda_1, \lambda_2 \in \mathbb{K}$ las raíces de P_A. Existe una matriz $J \in \mathscr{M}_{2\times 2}(\mathbb{K})$, cuya estructura es de la forma

$$J \in \left\{ \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 \\ 0 & \lambda_2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} \lambda_1 & 1 \\ 0 & \lambda_1 \end{pmatrix}, \text{donde } \lambda_1, \lambda_2 \in \mathbb{K} \right\},$$

y una matriz no-singular P tal que

$$J = P^{-1}AP.$$

A la matriz J se le llama forma canónica de Jordan y a P matriz de paso. A continuación se muestra como determinar J y P.

- Caso diagonalizable. Si A es diagonalizable, entonces J es la representación diagonal de A y P la matriz cuyas columnas son la base de autovectores de A (véase `Resumen` sobre Diagonalización de Endomorfismos).

- Caso no diagonalizable. Si A no es diagonalizable, como las dos raíces de P_A pertenecen al cuerpo base $\mathbb{K}$, se deduce que
$$P_A(t) = (t-\lambda)^2 \text{ y } \dim(\mathscr{W}_\lambda) = 1.$$
En este caso,
$$J = \begin{pmatrix} \lambda & 1 \\ 0 & \lambda \end{pmatrix}.$$
Para la determinación de P se puede proceder como sigue
  1. Sea $w \notin \mathscr{W}_\lambda$
  2. Sea $v^T = (A-\lambda \mathrm{I})\, w^T$.
  3. Entonces $P = (v^T \,|\, w^T)$.

2.2. Caso real–complejo

y P, no-singular, tal que

$$J_{\mathbb{R}} = P^{-1}AP.$$

A la matriz $J_{\mathbb{R}}$ se le llama forma canónica real de Jordan y a P matriz de paso. A continuación se muestra como determinar $J_{\mathbb{R}}$ y P. Sean $a \pm b\,\mathtt{i}$, con $b \neq 0$ las dos raíces de P_A. Entonces

$$J_{\mathbb{R}} = \begin{pmatrix} a & b \\ -b & a \end{pmatrix}, \text{ con } a, b \in \mathbb{R}.$$

Para la determinación de P se puede proceder como sigue

1. Sea $\mathscr{B}_{a+b\,\mathtt{i}} = \{w\}$ una base de $\mathscr{W}_{a+b\,\mathtt{i}}$
2. Entonces $P = (\text{ParteReal}(w)^T \,|\, \text{ParteImaginaria}(w)^T)$.

3. La forma canónica de Jordan $n \times n$.

3.1. El polinomio mínimo.

Definición. Sea $A \in \mathscr{M}_{n\times n}(\mathbb{K})$ y $p(t) = a_m t^m + \cdots + a_1 t + a_0 \in \mathbb{K}[t]$. Se dice que A es un cero de $p(t)$ si se verifica que $p(A) = \mathbf{0}$, donde $\mathbf{0}$ es la matriz nula en $\mathscr{M}_{n\times n}(\mathbb{K})$; es decir, si

$$a_m A^m + \cdots + a_1 A + a_0 \mathrm{I} = \mathbf{0}.$$

Ejemplo. Comprobar que $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ es un cero de $t^2 - t - 1$.

Teorema. (Caley-Hamilton)
Toda matriz cuadrada es un cero de su polinomio característico. Es decir

$$P_A(A) = \mathbf{0}, \ \forall A \in \mathscr{M}_{n\times n}(\mathbb{K}).$$

Definición. Sea $A \in \mathscr{M}_{n\times n}(\mathbb{K})$. Se define el polinomio mínimo de A, y se representa por $m_A(t)$, como el polinomio de menor grado, no constante y mónico, que tiene a A como cero.

Teorema. (Propiedades fundamentales del polinomio mínimo)
Sea $A \in \mathscr{M}_{n\times n}(\mathbb{K})$, entonces se verifica:

1. El polinomio mínimo existe y es único.
2. Si A es un cero de $q(t) \in \mathbb{K}[t]$, entonces $m_A(t)$ divide a $q(t)$.
3. $m_A(t)$ divide a $p_A(t)$.
4. $m_A(t)$ y $p_A(t)$ tienen los mismos factores irreducibles.

Cálculo del polinomio mínimo: véase pizarra.

3.2. Forma canónica de Jordan J.

Teorema. (Versión Matricial)
Sea $A \in \mathscr{M}_{n\times n}(\mathbb{K})$. Sean

$$\begin{aligned} &p(t) = (t-\lambda_1)^{r_1}\cdots(t-\lambda_p)^{r_p},\\ &m(t) = (t-\lambda_1)^{s_1}\cdots(t-\lambda_p)^{s_p}, \quad \lambda_1,\ldots,\lambda_p \in \mathbb{K}\end{aligned}$$

los polinomios característico y mínimo de A, respectivamente. A es semejante a una matrix $J \in \mathscr{M}_{n\times n}(\mathbb{K})$ que verifica que:

(1) J está formada por "*cajas*" del tipo

$$J_{\lambda_i} = \begin{pmatrix} \lambda_i & 1 & & \\ & \ddots & \ddots & \\ & & \ddots & 1 \\ & & & \lambda_i \end{pmatrix}$$

situadas a lo largo de la diagonal principal y es resto de la matriz son ceros.

(2) Para cada autovalor λ_i se tiene que

(2.1) El número de cajas del tipo J_{λ_i} coincide con $\dim(\mathscr{W}_{\lambda_i})$ (dimensión del autoespacio)

(2.2) La suma de los órdenes de todas las cajas del tipo J_{λ_i} es r_i (multiplicidad del autovalor en el polinomio característico).

(2.3) Existe una caja del tipo J_{λ_i} de orden s_i (multiplicidad del autovalor en el polinomio mínimo) y el resto son de orden menor o igual.

(2.4) El número de cajas del tipo J_{λ_i} de orden mayor o igual que $m \in \mathbb{N}$ coincide con

$$\dim(\ker[(A-\lambda_i\,\mathrm{I})^m]) - \dim(\ker[(A-\lambda_i\,\mathrm{I})^{m-1}])$$

Teorema. (Versión Endomorfismos)
Sea $\mathscr{U}$ un $\mathbb{K}$-espacio vectorial, $\dim(\mathscr{U}) = n$, y $f \in \mathrm{End}(\mathscr{U})$. Sean

$$\begin{aligned} &p(t) = (t-\lambda_1)^{r_1}\cdots(t-\lambda_p)^{r_p},\\ &m(t) = (t-\lambda_1)^{s_1}\cdots(t-\lambda_p)^{s_p}, \quad \lambda_1,\ldots,\lambda_p \in \mathbb{K}\end{aligned}$$

los polinomios característico y mínimo de f, respectivamente. Existe una base $\mathscr{B}_J$ de $\mathscr{U}$ tal que la matriz $J = \mathscr{M}(f, \mathscr{B}_J)$ verifica que:

(1) J está formada por "*cajas*" del tipo

(2) Para cada autovalor λ_i se tiene que

(2.1) El número de cajas del tipo J_{λ_i} coincide con $\dim(\mathscr{W}_{\lambda_i})$ (dimensión del autoespacio)

(2.2) La suma de los órdenes de todas las cajas del tipo J_{λ_i} es r_i (multiplicidad del autovalor en el polinomio característico).

(2.3) Existe una caja del tipo J_{λ_i} de orden s_i (multiplicidad del autovalor en el polinomio mínimo) y el resto son de orden menor o igual.

(2.4) El número de cajas del tipo J_{λ_i} de orden mayor o igual que $m \in \mathbb{N}$ coincide con

$$\dim(\ker[(f - \lambda_i \operatorname{id})^m]) - \dim(\ker[(f - \lambda_i \operatorname{id})^{m-1}])$$

Observación.

(1) A la matriz J se le llama forma canónica de Jordan de f o de A.

(2) La diagonalización es un caso particular de la forma canónica de *Jordan*.

(3) Las siguientes afirmaciones son equivalentes

1. A es diagonalizable
2. $s_1 = s_2 = \cdots = s_p = 1$
3. $m_A(t)$ es producto de factores lineales simples
4. $\dim(\mathscr{W}_{\lambda_i}) = r_i$ para todo $i = 1, \ldots, p$.

(4) Si en (2.4) se toma $m = 1$ aparece (2.1). En efecto:

$$\dim(\ker[(f - \lambda_i\, id)]) - \dim(\ker[(f - \lambda_i\, id)^0]) = \dim(\mathscr{W}_{\lambda_i}) - \dim(\ker[id]) = \dim(\mathscr{W}_{\lambda_i}) - 0 = \dim(\mathscr{W}_{\lambda_i}).$$

Por tanto, el número de cajas del tipo J_{λ_i} de orden mayor o igual que 1 (es decir el número de cajas) es $\dim(\mathscr{W}_{\lambda_i})$.

Teorema.

- (Versión endomorfismos)
  Sea $\mathscr{U}$ un $\mathbb{K}$-espacio vectorial, $\dim(\mathscr{U}) = n$, y $f \in \operatorname{End}(\mathscr{U})$. La forma canónica de Jordan de f existe si y sólo si el polinomio característico de f tiene todas sus raíces en $\mathbb{K}$.
- (Versión matricial)
  La forma canónica de Jordan de A existe si y sólo si el polinomio característico de A tiene todas sus raíces en $\mathbb{K}$.

Observación.

(1) Si $\mathbb{K}$ es algebraicamente cerrado, como por ejemplo $\mathbb{K} = \mathbb{C}$, la forma canónica de Jordan siempre

3.3. Cálculo de la Matriz de Paso

Se expone el tema para el caso de matrices. De forma análoga, se desarrolla para el caso de endomorfismos. Sea $A \in \mathscr{M}_{n\times n}(\mathbb{K})$ y

$$P_A(t) = (t-\lambda_1)^{r_1}\cdots(t-\lambda_p)^{r_p},\ m_A(t) = (t-\lambda_1)^{s_1}\cdots(t-\lambda_p)^{s_p},\quad \lambda_1,\ldots,\lambda_p \in \mathbb{K}$$

los polinomios característico y mínimo de A, respectivamente. En esta situación, existe $P \in \mathscr{M}_{n\times n}(\mathbb{K})$ tal que $\det(P) \neq 0$ y

$$J = P^{-1}AP$$

es la forma canónica de Jordan de A (véase Sección 3.2.). El objetivo de esta sección es la determinación de P.

Si A es diagonalizable, sabemos que (véase `Resumen` sobre Diagonalización de Endomorfismos)

$$\mathbb{K}^n = \mathscr{W}_{\lambda_1}\oplus\cdots\oplus\mathscr{W}_{\lambda_p},\ \text{es decir}\ \ \mathbb{K}^n = \ker(A-\lambda_1\mathrm{I})\oplus\cdots\oplus\ker(A-\lambda_p\mathrm{I})$$

y que si $\mathscr{B}_{\mathscr{W}_{\lambda_i}}$ es una base del autoespacio $\mathscr{W}_{\lambda_i}$ entonces

$$P = \left(\begin{array}{cccc} \boxed{\begin{array}{c}\text{Base}\\ \text{de}\\ \mathscr{W}_{\lambda_1}\end{array}} & \boxed{\begin{array}{c}\text{Base}\\ \text{de}\\ \mathscr{W}_{\lambda_2}\end{array}} & \cdots & \boxed{\begin{array}{c}\text{Base}\\ \text{de}\\ \mathscr{W}_{\lambda_{n_r}}\end{array}} \end{array}\right)$$

Si A no es diagonalizable el problema es más complicado. En general, se verifica que para cada i:

$$\mathscr{W}_{\lambda_i} = \ker(A-\lambda_i\mathrm{I}) \subset \ker[(A-\lambda_i\mathrm{I})^2] \subset\cdots\subset \ker[(A-\lambda_i\mathrm{I})^{s_i}] = \ker[(A-\lambda_i\mathrm{I})^{s_i+1} = \cdots$$

Observación.

1. La cadena anterior de subespacios se estabiliza en $\ker[(A-\lambda_i\mathrm{I})^{s_i}]$, es decir, cuando el exponente es la multiplicidad del autovalor en el polinomio mínimo.
2. $\dim(\ker[(A-\lambda_i\mathrm{I})^{s_i}]) = r_i$, es decir la dimensión del subespacio, donde se estabiliza la cadena, es la multiplicidad del autovalor en el polinomio característico.
3. Comparar 1 y 2 con el caso diagonalizable.
4. Las ecuaciones implícitas de $\ker[(A-\lambda_i\mathrm{I})^k]$ se obtienen como sigue (véase la manipulación del núcleo en el `Resumen` sobre Homomorfismos (aplicaciones lineales) entre Espacios Vectoriales):
   - Considerar la matriz $B = (A-\lambda_i\mathrm{I})^k$.
   - Triangular B por filas; sea B^* el resultado

En esta situación, se verifica que:

$$\begin{array}{ccccccc} \mathbb{K}^n & = & \ker[(A-\lambda_1 \mathrm{I})^{s_1}] & \oplus & \cdots & \oplus & \ker[(A-\lambda_p \mathrm{I})^{s_p}] \\ & & \bigcup & & & & \bigcup \\ & & \vdots & & & & \vdots \\ & & \bigcup & & & & \bigcup \\ & & \ker(A-\lambda_1 \mathrm{I}) & & & & \ker(A-\lambda_p \mathrm{I}) \end{array}$$

Basándose en todo lo anterior, la matriz P se expresa como

$$P = \left(\boxed{\begin{array}{c} \text{Base de} \\ \ker[(A-\lambda_1 \mathrm{I})^{s_1}] \\ \text{convenientemente} \\ \text{construida.} \end{array}} \quad \cdots \quad \boxed{\begin{array}{c} \text{Base de} \\ \ker[(A-\lambda_p \mathrm{I})^{s_p}] \\ \text{convenientemente} \\ \text{construida.} \end{array}} \right)$$

Sea $\mathscr{B}_{J_{\lambda_i}}$ la base de $\ker[(A-\lambda_i \mathrm{I})^{s_i}]$ *convenientemente construida.* Para cada λ_i, la base $\mathscr{B}_{J_{\lambda_i}}$ se determina como se indica abajo. Para ello, y para simplificar la notación, representamos por λ el autovalor que se está analizando y las multiplicidades de λ, en el polinomio característico y en el polinomio mínimo, por r y s respectivamente. Además, consideramos que la cadena correspondiente a λ es:

$$\begin{array}{lccccccc} \text{Cadena:} & \ker(A-\lambda \mathrm{I}) & \subset & \ker[(A-\lambda \mathrm{I})]^2 & \subset & \cdots & \subset & \ker[(A-\lambda \mathrm{I})]^s \\ & \| & & \| & & & & \| \\ \text{Notación:} & N_1 & \subset & N_2 & \subset & \cdots & \subset & N_s \\ & & & & & & & \\ \text{Dimensiones:} & \dim(N_1)=m_1 & < & \dim(N_2)=m_2 & < & \cdots & < & \dim(N_s)=m_s=r \end{array} \tag{1}$$

En esta situación, para obtener la base $\mathscr{B}_\lambda$, se dan los siguientes pasos:

Paso-1 (Construcción)

Se obtiene una base de N_1 y se extiende a una base de N_2, que a su vez se extiende a una base de N_3, así sucesivamente hasta obtener una base $\mathscr{B}$ de N_s:

$$\mathscr{B} = \{ \underbrace{\underbrace{\underbrace{u_1, \ldots, u_{m_1}}_{\substack{\text{base de } N_1 \\ \text{Primer Bloque}}} \; | u_{m_1+1}, \ldots, u_{m_2}}_{\substack{\text{base de } N_2 \\ \text{Segundo Bloque}}} | \cdots | u_{m_{s-1}+1}, \ldots, u_{m_s}}_{\substack{\text{base de } N_s \\ s\text{-ésimo Bloque}}} \}$$

1. Se inicializa el proceso desde el último bloque de vectores, donde simplemente se renombran los vectores
$$\mathscr{B} \longrightarrow \mathscr{B}_1 = \{u_1, \dots, u_{m_1} | u_{m_1+1}, \dots, u_{m_2} | \cdots | \mathbf{w_{m_{s-1}+1}, \dots, w_{m_s}}\}$$
donde
$$\begin{cases} w_{m_{s-1}+1} = u_{m_{s-1}+1} \\ \qquad\vdots \\ w_{m_s} = u_{m_s} \end{cases}$$

2 Se regenera el penúltimo bloque:
$$\mathscr{B}_1 \longrightarrow \mathscr{B}_2 = \{u_1, \dots, u_{m_1} | \cdots | u_{m_{s-3}+1}, \dots, u_{m_{s-2}} | \mathbf{w_{m_{s-2}+1}, \dots, w_{m_{s-1}}} | w_{m_{s-1}+1}, \dots, w_{m_s}\}$$
donde

2.1. Si el bloque que se está reciclando (penúltimo bloque en este caso) tiene el mismo número de vectores que el bloque que recicla (último bloque en este caso) entonces
$$\begin{aligned} w^T_{m_{s-2}+1} &= (A - \lambda \mathrm{I}) \cdot w^T_{m_{s-1}+1} \\ \vdots \quad & \qquad \vdots \\ w^T_{m_{s-1}} &= (A - \lambda \mathrm{I}) \cdot w^T_{m_s} \end{aligned}$$

2.2. Si el bloque que se está reciclando (penúltimo bloque en este caso) tiene mas vectores que el bloque que recicla (último bloque en este caso),
$$\begin{array}{ll} \text{Bloque a reciclar:} & \{*_1, \dots, *_\ell, *_{\ell+1}, \dots, *_{\ell'}\} \\ \text{Bloque que recicla:} & \{(**)_1, \dots, (**)_\ell\} \end{array}$$
entonces:

2.2.1. Primero se reciclan los vectores $\{*_1, \dots, *_\ell\}$ a partir de los vectores $\{(**)_1, \dots, (**)_\ell\}$, tal y como se señala en el paso 2.1. Es decir
$$\begin{aligned} \text{Nuevo vector } *_1 &= (A - \lambda \mathrm{I})(**)_1 \\ &\ \vdots \\ \text{Nuevo vector } *_\ell &= (A - \lambda \mathrm{I})(**)_\ell \end{aligned}$$

2.2.2. A continuación, se reciclan sucesivamente los vectores sobrantes (es decir $*_{\ell+1}, \dots, *_{\ell'}$) como sigue:

- ◇ Si $\{\cdots | \text{Nuevo vector } *_1, \dots, \text{Nuevo vector } *_\ell, *_{\ell+1}\}$ es linealmente independiente se toma como substituto de $*_{\ell+1}$ el propio vector $*_{\ell+1}$. En caso contrario, se busca un vector $\square$ en N_{s-1} (subespacio vectorial al que pertenecen los vectores que están siendo reciclados) de forma que $\{\cdots | \text{Nuevo vector } *_1, \dots, \text{Nuevo vector } *_\ell, \square\}$ es linealmente independiente y substituye $*_{\ell+1}$ por $\square$.

Al final de este proceso la base que se obtiene es

$$\tilde{\mathscr{B}} = \{w_1, \dots, w_{m_1} | w_{m_1+1}, \dots, w_{m_2} | \cdots | w_{m_{s-1}+1}, \dots, w_{m_s}\}.$$

Paso-3 (Reordenación)

En este paso se reordenan los vectores de la base $\tilde{\mathscr{B}}$, del apartado anterior, obteniendo la base $\mathscr{B}_\lambda$. Se procede como sigue:

La base obtenida en el paso 2 es $\tilde{\mathscr{B}} = \{w_1, \dots, w_{m_1} | w_{m_1+1}, \dots, w_{m_2} | \cdots | w_{m_{s-1}+1}, \dots, w_{m_s}\}$. La nueva base se obtiene colocando en primer lugar los primeros vectores de cada bloque, en segundo lugar los segundos vectores de cada bloque, etc:

$$\mathscr{B}_{J_\lambda} = \{w_1, w_{m_1+1}, w_{m_2+1}, \dots, w_{m_{s-1}+1} | w_2, w_{m_1+2}, w_{m_2+2}, \dots, w_{m_{s-1}+2} | \cdots\}.$$

Ejemplo. Considérese que, en (1), la situación es

$$\begin{array}{ccccccccc}
N_1 & \subset & N_2 & \subset & N_3 & \subset & N_4 & \subset & N_5 \\
\downarrow & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow \\
\dim(N_1) = 6 & < & \dim(N_2) = 10 & < & \dim(N_3) = 13 & < & \dim(N_4) = 16 & < & \dim(N_5) = 19
\end{array}$$

Paso-1 (Construcción). Se obtiene una base de N_1 y se extiende a una base de N_2, que a su vez se extiende a una base de N_3, así sucesivamente hasta obtener una base $\mathscr{B}$ de N_5:

$$\mathscr{B} = \{ \underbrace{\underbrace{\underbrace{v_1, \dots, v_6}_{\substack{\text{base de } N_1 \\ \text{Primer Bloque}}} \mid v_7, v_8, v_9, v_{10}}_{\substack{\text{base de } N_2 \\ \text{Segundo Bloque}}} \mid \cdots \mid v_{17}, v_{18}, v_{19}}_{\substack{\text{base de } N_5 \\ \text{Quinto Bloque}}} \}$$

Paso-2 (Reciclado). Paso a paso

- $\{v_1, \dots, v_6 \,|\, v_7, \dots, v_{10} \,|\, v_{11}, v_{12}, v_{13} \,|\, v_{14}, v_{15}, v_{16} \,|\, \mathbf{w_{17}, w_{18}, w_{19}}\}$ donde

$$w_{17} = v_{17}$$
$$w_{18} = v_{18}$$
$$w_{19} = v_{19}$$

- $\{v_1,\ldots,v_6 \,|\, v_7,\ldots,v_{10} \,|\, \mathbf{w_{11}}, \mathbf{w_{12}}, \mathbf{w_{13}} \,|\, w_{14}, w_{15}, w_{16} \,|\, w_{17}, w_{18}, w_{19}\}$ donde

$$\begin{aligned} w_{11} &= (A-\lambda\mathrm{I})w_{14} \\ w_{12} &= (A-\lambda\mathrm{I})w_{15} \\ w_{13} &= (A-\lambda\mathrm{I})w_{16} \end{aligned}$$

- $\{v_1,\ldots,v_6 \,|\, \mathbf{w_7}, \mathbf{w_8}, \mathbf{w_9}, \boxed{v_{10}} \,|\, w_{11}, w_{12}, w_{13} \,|\, w_{14}, w_{15}, w_{16} \,|\, w_{17}, w_{18}, w_{19}\}$ donde

$$\begin{aligned} w_7 &= (A-\lambda\mathrm{I})w_{11} \\ w_8 &= (A-\lambda\mathrm{I})w_{12} \\ w_9 &= (A-\lambda\mathrm{I})w_{13} \end{aligned}$$

- $\{v_1,\ldots,v_6 \,|\, w_7, w_8, w_9, \mathbf{w_{10}} \,|\, w_{11}, w_{12}, w_{13} \,|\, w_{14}, w_{15}, w_{16} \,|\, w_{17}, w_{18}, w_{19}\}$ donde w_{10} es elegido como sigue:
  - Si $\{v_1,\ldots,v_6 \,|\, w_7, w_8, w_9, v_{10}\}$ son l.i. entonces $w_{10} = v_{10}$
  - Si $\{v_1,\ldots,v_6 \,|\, w_7, w_8, w_9, v_{10}\}$ son l.d. se busca $w_{10} \in N_2$ de forma que $\{v_1,\ldots,v_6 \,|\, w_7, w_8, w_9, w_{10}\}$ sea base de N_2.

- $\{\mathbf{w_1}, \mathbf{w_2}, \mathbf{w_3}, \mathbf{w_4}, \boxed{v_5, v_6} \,|\, w_7, w_8, w_9, w_{10} \,|\, w_{11}, w_{12}, w_{13} \,|\, w_{14}, w_{15}, w_{16} \,|\, w_{17}, w_{18}, w_{19}\}$ donde

$$\begin{aligned} w_1 &= (A-\lambda\mathrm{I})w_7 \\ w_2 &= (A-\lambda\mathrm{I})w_8 \\ w_3 &= (A-\lambda\mathrm{I})w_9 \\ w_4 &= (A-\lambda\mathrm{I})w_{10} \end{aligned}$$

- $\{w_1, w_2, w_3, w_4, \mathbf{w_5}, \mathbf{w_6} \,|\, w_7, w_8, w_9, w_{10} \,|\, w_{11}, w_{12}, w_{13} \,|\, w_{14}, w_{15}, w_{16} \,|\, w_{17}, w_{18}, w_{19}\}$ donde w_5, w_6 son elegidos como sigue:
  - Si $\{w_1, w_2, w_3, w_4, v_5\}$ son l.i. entonces $w_5 = v_5$
  - Si $\{w_1, w_2, w_3, w_4, v_5\}$ son l.d. se busca $w_5 \in N_1$ de forma que $\{w_1, w_2, w_3, w_4, w_5\}$ sean l.i.
  - Si $\{w_1, w_2, w_3, w_4, w_5, v_6\}$ son l.i. entonces $w_6 = v_6$
  - Si $\{w_1, w_2, w_3, w_4, w_5, v_6\}$ son l.d. se busca $w_6 \in N_1$ de forma que $\{w_1, w_2, w_3, w_4, w_5, w_6\}$ sea base de N_1.

Paso-3 (Reordenación). La base es

$$\mathscr{B} = \{w_1, w_7, w_{11}, w_{14}, w_{17} \,|\, w_2, w_8, w_{12}, w_{15}, w_{18} \,|\, w_3, w_9, w_{13}, w_{16}, w_{19} \,|\, w_4, w_{10} \,|\, w_5 \,|\, w_6\}.$$

La parte λ de la matriz J es

$$
J = \begin{pmatrix}
\ddots & & & & & & & \\
& \boxed{\begin{matrix} \lambda & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \lambda & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \lambda \end{matrix}} & & & & & & \\
& & \boxed{\begin{matrix} \lambda & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \lambda & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \lambda \end{matrix}} & & & & & \\
& & & \boxed{\begin{matrix} \lambda & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \lambda & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \lambda \end{matrix}} & & & & \\
& & & & \boxed{\begin{matrix} \lambda & 1 \\ 0 & \lambda \end{matrix}} & & & \\
& & & & & \boxed{\lambda} & & \\
& & & & & & \boxed{\lambda} & \\
& & & & & & & \ddots
\end{pmatrix}
$$

3.4. Forma canónica real de Jordan $J_{\mathbb{R}}$.

Sea $A \in \mathscr{M}_{n\times n}(\mathbb{R}) \subset \mathscr{M}_{n\times n}(\mathbb{C})$. Siempre existe la forma canónica compleja de Jordan $J_{\mathbb{C}}$ de A. Si $\lambda \in \mathbb{C} \setminus \mathbb{R}$ es un autovalor de A, se verifica que

1. $\overline{\lambda}$ también es autovalor de A.
2. La estructura de cajas asociadas a λ es la conjugación de la estructura de cajas asociadas a $\overline{\lambda}$.
3. La base de Jordan $\mathscr{B}_\lambda$, asociada a λ, es la conjugación de la base de Jordan $\mathscr{B}_{\overline{\lambda}}$ asociada a $\overline{\lambda}$. Es decir
$$\overline{\mathscr{B}_\lambda} = \mathscr{B}_{\overline{\lambda}}$$

Supongamos que $\mu_1, \dots, \mu_r, \lambda_1 \dots, \lambda_s, \overline{\lambda_1}, \dots, \overline{\lambda_s}$ son los autovalores de A con

1. $\mu_1, \dots, \mu_r \in \mathbb{R}$

- segundo aparecen las cajas correspondientes a λ_j
- por último, aparecen las cajas correspondientes a $\overline{\lambda_j}$

$J_{\mathbb{R}}$ (la forma canónica real de Jordan) se obtiene a partir de $J_{\mathbb{C}}$ haciendo los siguientes cambios

1. las cajas correspondientes a los autovalores reales no varían,
2. si $\lambda_j = a_j + b_j\,\mathtt{i}$, cada caja
$$\boxed{\begin{array}{cccc} \lambda_j & 1 & & \\ & \ddots & \ddots & \\ & & \lambda_j & 1 \\ & & & \lambda_j \end{array}}$$
se substituye por otra de doble tamaño, donde
   - λ_j es reemplazado por $\boxed{\begin{array}{cc} a_j & b_j \\ -b_j & a_j \end{array}}$
   - 1 es reemplazado por $\boxed{\begin{array}{cc} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{array}}$
   - 0 es reemplazado por $\boxed{\begin{array}{cc} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{array}}$
3. las cajas correspondientes a los autovalores $\overline{\lambda_j}$ se eliminan.

La obtención de la base $\mathscr{B}_{J_{\mathbb{R}}}$ es como sigue. Sea
$$\mathscr{B}_{J_{\mathbb{C}}} = \mathscr{B}_{\mu_1} \cup \cdots \cup \mathscr{B}_{\mu_r} \cup \mathscr{B}_{\lambda_1} \cup \cdots \cup \mathscr{B}_{\lambda_s} \cup \mathscr{B}_{\overline{\lambda_1}} \cup \cdots \cup \mathscr{B}_{\overline{\lambda_s}}.$$
Si
$$\mathscr{B}_{\lambda_j} = \{v_{j,1}, \dots v_{j,n_j}\}$$
definimos
$$\mathscr{B}^*_{\lambda_j} = \{\text{ParteReal}(v_{j,1}), \text{ParteImaginaria}(v_{j,1}), \dots, \text{ParteReal}(v_{j,n_j}), \text{ParteImaginaria}(v_{j,n_j})\}.$$
En esta situación
$$\boxed{\mathscr{B}_{J_{\mathbb{R}}} = \mathscr{B}_{\mu_1} \cup \cdots \cup \mathscr{B}_{\mu_r} \cup \mathscr{B}^*_{\lambda_1} \cup \cdots \cup \mathscr{B}^*_{\lambda_s}.}$$

3. Exponencial de una matriz

En esta sección se introduce la noción de exponencial de una matriz, así como algunas propiedades y se muestra como se calcula. La exponencial de una matriz aparece de manera natural en la resolución de sistemas lineales de ecuaciones diferenciales ordinarias. En este desarrollo aparecen series numéricas y series de potencias, conceptos que se estudian en la asignatura de Cálculo I.

Se define la exponencial de A (se representa por $\boxed{e^A}$), como

$$e^A = \sum_{k\geq 0} \frac{A^k}{k!}.$$

Es decir, si $A^k = (a_{i,j}^{(k)})_{1\leq i,j\leq n}$ entonces

$$e^A = \begin{pmatrix} \sum_{k\geq 0} \frac{a_{1,1}^{(k)}}{k!} & \cdots & \sum_{k\geq 0} \frac{a_{1,n}^{(k)}}{k!} \\ \vdots & & \vdots \\ \sum_{k\geq 0} \frac{a_{n,1}^{(k)}}{k!} & \cdots & \sum_{k\geq 0} \frac{a_{n,n}^{(k)}}{k!} \end{pmatrix}.$$

Observación.

1. Obsérvese que $a_{i,j}^{(k)} \neq a_{i,j}^k$. Es decir, $a_{i,j}^{(k)}$ es el elemento (i,j) de la matriz A^k y no la potencia k-ésima de $a_{i,j}$.
2. Se demuestra que las series $\sum_{k\geq 0} \frac{a_{i,j}^{(k)}}{k!}$ son convergentes y por tanto $e^A \in \mathscr{M}_{n\times n}(\mathbb{R})$.

Definición. Se define la función matricial exponencial como

$$\begin{array}{rccl} E: & \mathbb{R} & \to & \mathscr{M}_{n\times n}(\mathbb{R}) \\ & t_0 & \mapsto & e^{t_0 A} = \sum_{k\geq 0} \frac{(t_0 A)^k}{k!} \end{array}$$

En general, se escribirá $E(t)$ o bien e^{tA}.

Proposición.

1. E es continua en $\mathbb{R}$
2. E es derivable en $\mathbb{R}$ y $(e^{tA})' = A \cdot e^{tA} = e^{tA} \cdot A$
3. $e^{\mathbf{0}} = \mathrm{I}$
4. e^{tA} es invertible y $(e^{tA})^{-1} = e^{-tA}$.
5. Si $A \cdot B = B \cdot A$ entonces $e^{t(A+B)} = e^{tA} e^{tB}$
6. Si $A = P \cdot J \cdot P^{-1}$ entonces $e^{tA} = P \cdot e^{tJ} \cdot P^{-1}$.

4.2. Caso diagonalizable

En esta sección, se asume que la matriz $A \in \mathscr{M}_{n\times n}(\mathbb{R})$ es diagonalizable sobre $\mathbb{R}$. Supóngase además que $D = P^{-1} \cdot A \cdot P$ siendo

$$D = \begin{pmatrix} \lambda_1 & & \\ & \ddots & \end{pmatrix}$$

$$= P \cdot \begin{pmatrix} \displaystyle\sum_{k\geq 0} \frac{(t\lambda_1)^k}{k!} & & \\ & \ddots & \\ & & \displaystyle\sum_{k\geq 0} \frac{(t\lambda_n)^k}{k!} \end{pmatrix} \cdot P^{-1} = P \cdot \begin{pmatrix} e^{\lambda_1 t} & & \\ & \ddots & \\ & & e^{\lambda_n t} \end{pmatrix} \cdot P^{-1}.$$

Por tanto,

Teorema. Si A es una matriz diagonalizable sobre $\mathbb{R}$, con autovalores $\lambda_1, \ldots, \lambda_n$ (contados con multiplicidad) y P es la matriz de paso de A a D, entonces

$$P \cdot e^{tD} \cdot P^{-1} = P \cdot \begin{pmatrix} e^{\lambda_1 t} & & \\ & \ddots & \\ & & e^{\lambda_n t} \end{pmatrix} \cdot P^{-1}.$$

4.3. Caso 2×2.

En la Sección 2, se ha estudiado la forma canónica de Jordan y la forma canónica de Jordan real de una matriz real 2×2. Ahora se analiza el cálculo de la matriz exponencial. La matriz $A \in \mathscr{M}_{2\times 2}(\mathbb{R})$ es semejante a una matriz real del tipo

1. $J_1 = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 \\ 0 & \lambda_2 \end{pmatrix}$ [Autovalores reales, no necesariamente distintos: λ_1, λ_2]
2. $J_2 = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 1 \\ 0 & \lambda_1 \end{pmatrix}$ [Autovalores reales iguales (caso no diagonalizable): λ_1]
3. $J_3 = \begin{pmatrix} a & b \\ -b & a \end{pmatrix}$ [Autovalores complejos no reales (necesariamente distintos): $a \pm b\,\mathtt{i}$ $(b \neq 0)$.]

Es decir, $A = PJ_iP^{-1}$. Entonces, e^{tA} es (utilizando la notación J_i introducida arriba)

$$e^{tA} = Pe^{tJ_i}P^{-1}$$

donde

1. $e^{tJ_1} = \begin{pmatrix} e^{\lambda_1 t} & 0 \\ 0 & e^{\lambda_2 t} \end{pmatrix}$
2. $e^{tJ_2} = \begin{pmatrix} e^{\lambda_1 t} & te^{\lambda_1 t} \\ 0 & e^{\lambda_1 t} \end{pmatrix}$
3. $e^{tJ_3} = \begin{pmatrix} e^{at}\cos(bt) & e^{at}\,\mathrm{sen}(bt) \\ -e^{at}\,\mathrm{sen}(bt) & e^{at}\cos(bt) \end{pmatrix}.$

Supongamos que J se expresa como

$$J = \begin{pmatrix} J_1 & & \\ & \ddots & \\ & & J_s \end{pmatrix}$$

donde J_i son cajas de Jordan. Es decir, J_i es de la forma

$$J_i = \begin{pmatrix} \lambda & 1 & & \\ & \ddots & \ddots & \\ & & \ddots & 1 \\ & & & \lambda \end{pmatrix}$$

para algún $\lambda \in \mathbb{R}$. En esta situación, se verifica que

$$e^{tA} = P \begin{pmatrix} e^{tJ_1} & & \\ & \ddots & \\ & & e^{tJ_s} \end{pmatrix} P^{-1}.$$

Por tanto, todo se reduce al cálculo de matrices exponenciales del tipo

$$e^{tJ_\lambda} \quad \text{donde } J_\lambda = \begin{pmatrix} \lambda & 1 & & \\ & \ddots & \ddots & \\ & & \ddots & 1 \\ & & & \lambda \end{pmatrix} \text{ con } \lambda \in \mathbb{R}.$$

Para ello, se descompone J_λ como

$$J_\lambda = \overbrace{\begin{pmatrix} \lambda & 0 & & \\ & \ddots & \ddots & \\ & & \ddots & 0 \\ & & & \lambda \end{pmatrix}}^{D_\lambda} + \overbrace{\begin{pmatrix} 0 & 1 & & \\ & \ddots & \ddots & \\ & & \ddots & 1 \\ & & & 0 \end{pmatrix}}^{S_\lambda} = D_\lambda + S_\lambda$$

Como D_λ es diagonal, se verifica que

$$D_\lambda S_\lambda = S_\lambda D_\lambda.$$

Por tanto, aplicando las propiedades de la matriz exponencial (véase Sección 4.1.), se deduce que

$$e^{t\,J_\lambda} = e^{t\,(D_\lambda + S_\lambda)} = e^{t\,D_\lambda} e^{t\,S_\lambda}.$$

Finalmente, utilizando que S_λ es una matriz nilpotente, se concluye que

4.5. Caso real–complejo.

En esta subsección se generaliza, al caso $n \times n$, el estudio realizado en la Subsección 2.2. Sea $A \in \mathscr{M}_{n\times n}(\mathbb{R})$. Supóngase, ahora, que NO todas las raíces del polinomio característico de A son números reales. En esta situación, A NO tiene forma canónica (pura) de Jordan sobre $\mathbb{R}$. Se recurre, por tanto, a la forma canónica real de Jordan $J_{\mathbb{R}}$; véase Subsección 3.4. Sabemos, entonces, que A admite una descomposición del tipo

$$J_{\mathbb{R}} = P^{-1}AP$$

donde J_R se expresa como

$$J_R = \begin{pmatrix} J_1^{\text{real}} & & & & & \\ & \ddots & & & & \\ & & J_s^{\text{real}} & & & \\ & & & J_1^{\text{compl.}} & & \\ & & & & \ddots & \\ & & & & & J_m^{\text{compl.}} \end{pmatrix}$$

y donde J_i^{real} son cajas reales de Jordan y $J_i^{\text{compl.}}$ son cajas complejas de Jordan. Es decir, J_i^{real} y $J_i^{\text{compl.}}$ son de la forma

$$J_i^{\text{real}} = \begin{pmatrix} \lambda & 1 & & \\ & \ddots & \ddots & \\ & & \ddots & 1 \\ & & & \lambda \end{pmatrix}, \quad J_i^{\text{compl.}} = \begin{pmatrix} E & \mathrm{I} & & \\ & \ddots & \ddots & \\ & & \ddots & \mathrm{I} \\ & & & E \end{pmatrix}, \quad \text{donde } E = \begin{pmatrix} a & b \\ -b & a \end{pmatrix}, \mathrm{I} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

para un autovalor real $\lambda \in \mathbb{R}$, en el caso de J_i^{real}, y para algún autovalor complejo $\lambda = a + b\,\mathtt{i} \in \mathbb{C} \setminus \mathbb{R}$, en el caso $J_i^{\text{compl.}}$. En esta situación, se verifica que

$$e^{tA} = P \begin{pmatrix} e^{tJ_1^{\text{real}}} & & & & & \\ & \ddots & & & & \\ & & e^{tJ_s^{\text{real}}} & & & \\ & & & e^{tJ_1^{\text{compl.}}} & & \\ & & & & \ddots & \\ & & & & & e^{tJ_m^{\text{compl.}}} \end{pmatrix} P^{-1}.$$

Ya se ha estudiado como calcular $e^{tJ_j^{\text{real}}}$. Por tanto, todo se reduce al cálculo de matrices exponenciales del tipo $e^{tJ_j^{\text{compl.}}}$. De forma mas precisa, sea $\lambda = a + b\,\mathtt{i} \in \mathbb{C} \setminus \mathbb{R}$ y

Razonando como en el caso real, se decompone $J_j^{\text{compl.}}$ como

$$J_j^{\text{compl.}} = \overbrace{\begin{pmatrix} E & 0 & & \\ & \ddots & \ddots & \\ & & \ddots & 0 \\ & & & E \end{pmatrix}}^{D_\lambda} + \overbrace{\begin{pmatrix} \begin{matrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{matrix} & \mathrm{I} & & \\ & \ddots & \ddots & \\ & & \ddots & \mathrm{I} \\ & & & \begin{matrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{matrix} \end{pmatrix}}^{S_\lambda} = D_\lambda + S_\lambda$$

Se deduce que

$$e^{t\, J_j^{\text{compl.}}} = e^{t\,(D_\lambda + S_\lambda)} = e^{t\, D_\lambda} e^{t\, S_\lambda}.$$

Finalmente, se concluye que

$$e^{tJ_\lambda} = \begin{pmatrix} R_{CS} & 0 & & \\ & \ddots & \ddots & \\ & & \ddots & 0 \\ & & & R_{CS} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} I & tI & \frac{t^2}{2!}I & \frac{t^3}{3!}I & \cdots \\ & I & tI & \frac{t^2}{2!}I & \cdots \\ & & \ddots & & \\ & & & I & tI \\ & & & & I \end{pmatrix}$$

donde

$$R_{CS} = \begin{pmatrix} e^{at}\cos(bt) & e^{at}\,\text{sen}(bt) \\ -e^{at}\,\text{sen}(bt) & e^{at}\cos(bt) \end{pmatrix}$$