





14. Estudiar si el conjunto de todas las series reales convergentes, con la suma usual de series y con la multiplicación usual por escalares, es un espacio vectorial sobre  $\mathbb{R}$ .

15. Demostrar o refutar las siguientes afirmaciones. Sea  $(\mathcal{V}, +, \cdot)$  un espacio vectorial finito dimensional sobre un cuerpo  $\mathbb{K}$  y  $\mathcal{W}$  un s.v. de  $\mathcal{V}$ :

- a)  $\bar{0} \in \mathcal{W}$ .
- b)  $\mathcal{W} \setminus \{\bar{0}\}$  no es un subespacio vectorial de  $\mathcal{V}$ .
- c) Sea  $u \in \mathcal{V}$  entonces  $\mathcal{V} \setminus \{\lambda u \mid \lambda \in \mathbb{K}\}$  es un subespacio vectorial de  $V$ .
- d) Si  $A \subset B \subset \mathcal{V}$  entonces  $L(A) \subset L(B)$ .
- e) Sean  $\mathcal{W}_1, \mathcal{W}_2$  s.v. de  $\mathcal{V}$  tales que  $\dim(\mathcal{W}_1) \leq \dim(\mathcal{W}_2)$ , entonces  $\mathcal{W}_1 \subset \mathcal{W}_2$ .
- f) Sean  $\mathcal{W}_1, \mathcal{W}_2$  s.v. de  $\mathcal{V}$  tales que  $\mathcal{W}_1 \subset \mathcal{W}_2$ , entonces  $\dim(\mathcal{W}_1) \leq \dim(\mathcal{W}_2)$

16. [Coordenadas] En cada apartado, estudiar si  $\mathcal{B}$  es una base de  $\mathcal{V}$  y, en caso afirmativo, determinar las coordenadas de  $u$  respecto a  $\mathcal{B}$ .

a)  $u = (1, 2, 3, 4) \in \mathbb{R}^4 = \mathcal{V}$  y  $\mathcal{B} = \{(1, 1, 1, 1), (0, 1, 1, 1), (0, 0, 1, 1), (0, 0, 0, 1)\}$

b)  $u = (1, 3, 4, 1) \in \mathbb{R}^4 = \mathcal{V}$  y  $\mathcal{B} = \{(1, 2, 3, 0), (1, 3, 4, 0), (1, 3, 5, 1), (1, 3, 5, 2)\}$ .

c)  $u = \begin{pmatrix} 4 & 5 \\ 7 & 10 \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_{2 \times 2}(\mathbb{R}) = \mathcal{V}$  y  $\mathcal{B} = \left\{ \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 3 & 3 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 4 \end{pmatrix} \right\}$ .

d)  $u = \begin{pmatrix} 1 & 4 \\ 5 & 1 \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_{2 \times 2}(\mathbb{R}) = \mathcal{V}$  y  $\mathcal{B} = \left\{ \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 4 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 4 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 2 & 2 \end{pmatrix} \right\}$ .

e)  $u = 1 + t + t^2 \in \mathbb{R}_2[t] = \mathcal{V}$  y  $\mathcal{B} = \{1 + t^2, t + t^2, 1 + t + t^2\}$ .

f)  $u = 1 + 4t + 5t^2 \in \mathbb{R}_2[t] = \mathcal{V}$  y  $\mathcal{B} = \{1 + 2t + 3t^2, 1 + 3t + 4t^2, 1 + 2t + 4t^2\}$ .

g)  $u = \begin{pmatrix} [1] & [0] \\ [1] & [1] \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_{2 \times 2}(\mathbb{Z}_2) = \mathcal{V}$  y  $\mathcal{B} = \left\{ \begin{pmatrix} [1] & [0] \\ [1] & [0] \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} [1] & [1] \\ [0] & [0] \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} [1] & [0] \\ [0] & [1] \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} [0] & [1] \\ [0] & [0] \end{pmatrix} \right\}$ .

h)  $u = [1] + [4]t + [1]t^3 \in (\mathbb{Z}_5)_3[t] = \mathcal{V}$   
 $\mathcal{B} = \{[1] + [2]t + [3]t^2, [1] + [3]t + [4]t^2, [1] + [2]t + [4]t^2 + [1]t^3, [1]t^2 + [2]t^3\}$ .

i)  $u = \left( 6 + 5t, \begin{pmatrix} 4 & 3 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} \right) \in \mathbb{R}_1[t] \times \mathcal{M}_{2 \times 2}(\mathbb{R}) = \mathcal{V}$  y

$\mathcal{B} = \left\{ \left( 1, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \right), \left( t, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \right), \left( 1+t, \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \right), \left( 1+t, \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \right), \left( 1+t, \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \right), \left( 1+t, \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \right) \right\}$ .

j)  $u = (t + 2t^2, 2 + t) \in \mathbb{R}_2[t]^2 = \mathcal{V}$   
 $\mathcal{B} = \{(1+2t+3t^2, 0), (1+3t+4t^2, 0), (1+2t+4t^2, 1), (t+2t^2, 2+t), (1+4t+5t^2, 1+t), (1+t, 1+t+t^2)\}$

17. [Independencia lineal (tipo finito)] Estudiar si los siguientes conjuntos de vectores son linealmente independientes en los respectivos espacios vectoriales.

a)  $\{(1, 1, 1, 1), (1, -1, 1, -1), (1, 1, 1, 0), (0, 1, 1, 1)\}$       c)  $\{1+t, 1-t^2, t^3, 2+t-t^2\}$



**CLASES PARTICULARES, TUTORÍAS TÉCNICAS ONLINE  
 LLAMA O ENVÍA WHATSAPP: 689 45 44 70**

---

**ONLINE PRIVATE LESSONS FOR SCIENCE STUDENTS  
 CALL OR WHATSAPP:689 45 44 70**

19. En  $\mathbb{K}_n[t]$  se considera un conjunto de vectores  $S = \{p_0(t), \dots, p_n(t)\}$  tal que  $\text{grado}(p_i) = i$  para  $i = 0, \dots, n$  y  $p_0 \neq 0$ . Demostrar que  $S$  es una base  $\mathbb{K}_n[t]$ . Como aplicación,

a) Demostrar que todo polinomio  $p(t) \in \mathbb{K}[t]$  de grado  $m$ , se puede escribir de forma única como:

$$p(t) = a_0 + a_1t + a_2t(t-1) + \dots + a_mt(t-1)(t-2)\dots(t-m+1).$$

donde  $a_i \in \mathbb{K}$  (relacionar este resultado con la suma de series factoriales).

b) Demostrar que para todo  $a \in \mathbb{K}$ , todo polinomio  $p(t) \in \mathbb{K}[t]$  de grado  $m$ , se puede escribir de forma única como:

$$p(t) = a_0 + a_1(t-a) + \dots + a_m(t-a)^m.$$

donde  $a_i \in \mathbb{K}$  (relacionar este resultado con el polinomio de Taylor).

20. [Independencia lineal en  $\mathcal{F}(I, \mathbb{R})$ ] Analizar la independencia lineal de las siguientes funciones, en los intervalos indicados

$$a) I = [-1, 1], f_1(t) = \begin{cases} t^2 & \text{si } t \in [-1, 0] \\ 0 & \text{si } t \in (0, 1] \end{cases}, f_2(t) = \begin{cases} 0 & \text{si } t \in [-1, 0] \\ t^2 & \text{si } t \in (0, 1] \end{cases}$$

b)  $\{t, |t|\}$  con  $I = [0, +\infty)$ .

f)  $\{te^t, e^{2t}\}$  con  $I = \mathbb{R}$ .

c)  $\{t, |t|\}$  con  $I = (-r, r)$ .

g)  $\{\text{sen}(t), \cos(t), e^t \cos(t)\}$  con  $I = \mathbb{R}$ .

d)  $\{\text{sen}(t), \cos(t)\}$  con  $I = \mathbb{R}$ .

h)  $\{e^t, te^t + t^2e^t\}$  con  $I = (-1, 1)$ .

e)  $\{t, t^2\}$  con  $I = \mathbb{R}$ .

i)  $\{t^2, t|t|\}$  con  $I = [-1, 1]$ .

21. [Manipulación de subespacios] En cada caso, determinar bases, dimensiones y ecuaciones implícitas y paramétricas de  $\mathcal{W}_1$ ,  $\mathcal{W}_2$ ,  $\mathcal{W}_1 \cap \mathcal{W}_2$  y  $\mathcal{W}_1 + \mathcal{W}_2$ ; asimismo analizar si  $\mathcal{V} = \mathcal{W}_1 \oplus \mathcal{W}_2$ , donde  $\mathcal{V}$  es el espacio vectorial ambiente.

a)  $\mathcal{V} = \mathbb{R}^3$ ,  $\mathcal{W}_1 = \{(a, b, c) / a + b + c = 0\}$  y  $\mathcal{W}_2 = L(\{(1, 1, 1), (0, 1, 1), (0, 0, 1), (1, 2, 3)\})$ .

b)  $\mathcal{V} = \mathbb{R}^3$ ,  $\mathcal{W}_1 = \{(a, b, c) / a = b = 0\}$  y  $\mathcal{W}_2 = L(\{(1, 1, 1), (2, 3, 4), (3, 4, 5)\})$ .

c)  $\mathcal{V} = \mathcal{M}_{2 \times 2}(\mathbb{R})$ ,  $\mathcal{W}_1 = \left\{ \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in \mathcal{V} / a + b + c + d = 0 \right\}$ ,  $\mathcal{W}_2 = L \left( \left\{ \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \right\} \right)$ .

d)  $\mathcal{V} = \mathcal{M}_{2 \times 2}(\mathbb{R})$ ,  $\mathcal{W}_1 = \{A \in \mathcal{V} / A = A^T\}$   $\mathcal{W}_2 = L \left( \left\{ \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \right\} \right)$ .

e)  $\mathcal{V} = \mathbb{R}_2[t]$ ,  $\mathcal{W}_1 = \{p(t) \in \mathcal{V} / p(1) = 0\}$ , y  $\mathcal{W}_2 = L(\{1, 1 + t^2\})$ .

f)  $\mathcal{V} = \mathbb{R}_2[t]$ ,  $\mathcal{W}_1 = \{p(t) \in \mathcal{V} / p(0) + p'(0) = 0\}$ , y  $\mathcal{W}_2 = L(\{1 + t, 1 + t^2, 2, 2 + t + t^2\})$ .

g)  $\mathcal{V} = \mathbb{R}_1[t] \times \mathcal{M}_{2 \times 2}(\mathbb{R})$ ,  $\mathcal{W}_1 = \{(p(t), A) \in \mathcal{V} / p(0) = 0 \text{ y } \text{Traza}(A) = 0\}$  y  $\mathcal{W}_2 = L \left( \left\{ \left( 1 + t, \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \right), \left( -1 - t, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \right), \left( 0, \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \right) \right\} \right)$ .



**CLASES PARTICULARES, TUTORÍAS TÉCNICAS ONLINE  
LLAMA O ENVÍA WHATSAPP: 689 45 44 70**

---

**ONLINE PRIVATE LESSONS FOR SCIENCE STUDENTS  
CALL OR WHATSAPP:689 45 44 70**

22. [Cambios de base]

- a) En  $\mathcal{V} = \mathbb{R}^2$  se consideran las bases  $\mathcal{B}_1 = \{(2, 1), (-1, 0)\}$  y  $\mathcal{B}_2 = \{(3, -1), (2, 1)\}$ .
- 1) Hallar la matriz del cambio de base de  $\mathcal{B}_1$  a  $\mathcal{B}_c$ , de  $\mathcal{B}_2$  a  $\mathcal{B}_c$ , de  $\mathcal{B}_1$  a  $\mathcal{B}_2$  y de  $\mathcal{B}_2$  a  $\mathcal{B}_1$ .
  - 2) Calcular las coordenadas del vector  $(2, 3)$  respecto a la base  $\mathcal{B}_1$  y a la base  $\mathcal{B}_2$ .
  - 3) Sea  $v$  el vector de coordenadas  $(-2, 0)$  respecto a la base  $\mathcal{B}_1$ . Calcular las coordenadas de  $v$  respecto a  $\mathcal{B}_c$  y a  $\mathcal{B}_2$ .

- b) En  $\mathcal{V} = \mathbb{R}^3$  se consideran las bases  $\mathcal{B}_1 = \{(1, 0, 1), (2, 1, -1), (0, 0, 3)\}$  y  $\mathcal{B}_2 = \{(-1, 1, 0), (2, 0, 1), (3, -1, 0)\}$ .

- 1) Hallar la matriz de cambio de base de  $\mathcal{B}_1$  a  $\mathcal{B}_2$ .
- 2) Sabiendo que las coordenadas del vector  $u = (6, 2, 3)$  en  $\mathcal{B}_2$  son  $(3, 3, 1)$ , calcular sus coordenadas en  $\mathcal{B}_1$ .

- c) En  $\mathcal{V} = \mathcal{M}_{2 \times 2}(\mathbb{R})$  se considera la base

$$\mathcal{B}_1 = \left\{ \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \right\}.$$

- 1) Hallar las matrices de cambio de base de  $\mathcal{B}_1$  a  $\mathcal{B}_c$  y de  $\mathcal{B}_c$  a  $\mathcal{B}_1$ .

- 2) Calcular las coordenadas en  $\mathcal{B}_1$  de  $\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$ .

- d) En  $\mathcal{V} = \mathbb{R}_2[t]$  se considera la base  $\mathcal{B}_1 = \{1 - t, t + t^2, 2t + t^2\}$ .

- 1) Calcular las matrices de cambio de base de  $\mathcal{B}_1$  a  $\mathcal{B}_c$  y de  $\mathcal{B}_c$  a  $\mathcal{B}_1$ .

- 2) Dado el polinomio  $p(t) = 2 + 3t + t^2$ , determinar sus coordenadas en  $\mathcal{B}_1$ .

- e) En  $\mathcal{V} = (R_1[t])^2$  se considera la base

$$\mathcal{B}_1 = \{(1, 0), (1 + t, 0), (t, 1), (0, 1 + t)\}$$

- 1) Hallar las matrices de cambio de base de  $\mathcal{B}_1$  a  $\mathcal{B}_c$  y de  $\mathcal{B}_c$  a  $\mathcal{B}_1$ .

- 2) Calcular las coordenadas en  $\mathcal{B}_1$  de  $(2 + t, 1 + t)$ .

23. Sean  $\mathcal{W}_1 = L(\{(-1, 0, 0, 1), (0, -1, -1, 1), (0, 1, -1, 0)\})$ , y  $\mathcal{W}_2 = \{(x, y, z, t) \in \mathbb{R}^4 / x + t = 0\}$ . Se pide:

- a) Ecuaciones implícitas de  $\mathcal{W}_1$  y paramétricas de  $\mathcal{W}_2$ .
- b) Dar bases de  $\mathcal{W}_1 \cap \mathcal{W}_2$ ,  $\mathcal{W}_1 + \mathcal{W}_2$ .
- c) Determinar para que valores del parámetro  $\lambda$  el vector  $(\lambda, 1, 2 - \lambda, 1)$  pertenece a  $\mathcal{W}_1$ .

24. En el espacio vectorial real  $\mathbb{R}_3[t]$  se considera el subespacio vectorial

$$W = L(\{t^3 + t^2 + t + 1, t^3 + t^2 + t, at^3 + t^2 + t + 1\}),$$

donde  $a \in \mathbb{R}$ . Determinar la dimensión de  $W$  según los valores del parámetro  $a$ .

**CLASES PARTICULARES, TUTORÍAS TÉCNICAS ONLINE  
LLAMA O ENVÍA WHATSAPP: 689 45 44 70**

---

**ONLINE PRIVATE LESSONS FOR SCIENCE STUDENTS  
CALL OR WHATSAPP:689 45 44 70**