Hoja 4 de Problemas
Forma canónica de Jordan

1. Estudiar si los siguientes endomorfismos son diagonalizables y, en caso afirmativo, determinar una base que permita representar al endomorfismo de forma diagonal

   a) $f : \mathscr{M}_{2\times 2}(\mathbb{R}) \longrightarrow \mathscr{M}_{2\times 2}(\mathbb{R})$ definida como

   $$f\left(\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}\right) = \begin{pmatrix} a+b+c+d & a+b+c+d \\ a+b+c+d & a+b+c+d \end{pmatrix}$$

   b) $f : \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^3$ definida como $f(x,y,z) = (x+y+z, 2y+z, 2y+3z)$.

   c) $f : \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^3$ definida como $f(x,y,z) = (x+y, y+z, -2y-z)$.

2. Se considera la matriz real

   $$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & a & 0 \\ a & 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}, \qquad a \in \mathbb{R}$$

   Determinar los valores de a para los que A es diagonalizable y, en caso afirmativo, realizar el proceso de diagonalización.

3. Sea $A \in \mathscr{M}_{n\times n}(\mathbb{K})$, con $\mathbb{K}$ cuerpo, una matriz cuadrada diagonalizable.

   a) Estudiar la diagonalización de la matriz A^m, $m \in \mathbb{N}$.

   b) Deducir un método para calcular A^m, $m \in \mathbb{N}$.

   c) Si $\det(A) \neq 0$, estudiar la diagonalización de la matriz A^{-1}

   d) Si $p(x) = a_m x^m + \cdots + a_0 \in \mathbb{K}[x]$, estudiar la diagonalización de la matriz $P(A) = a_m A^m + \cdots + a_0 \mathrm{I}$

4. Se considera la matriz

   $$A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \end{pmatrix}$$

   Se pide

   a) Estudiar si A es diagonalizable y, en caso afirmativo, calcular la matriz diagonal semejante y la matriz de paso.

   b) Estudiar si A^{-1} es diagonalizable y, en caso afirmativo, calcular la matriz diagonal semejante y la matriz de paso.

a) Estudiar si f es diagonalizable y, en caso afirmativo, determinar un base $\mathscr{B}$ de $\mathscr{U}$ tal que $\mathscr{M}(f,\mathscr{B})$ sea una matriz diagonal.

b) Analizar si f es un automorfismo.

5. Se consider la matriz real

$$A = \begin{pmatrix} -1 & 0 & -2 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Estudiar si A es diagonalizable y en caso afirmativo hallar la matriz de paso P tal que $D = P^{-1} \cdot A \cdot P$.

6. Se considera la matriz

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$$

Estudiar si

a) A es diagonalizable sobre $\mathbb{R}$ y, en caso afirmativo, realizar el proceso de diagonalización.

b) A es diagonalizable sobre $\mathbb{C}$ y, en caso afirmativo, realizar el proceso de diagonalización.

7. Se considera el endomorfismo

$$\begin{array}{rccc} f: & (\mathbb{Z}_3)_3[t] & \longrightarrow & (\mathbb{Z}_3)_3[t] \\ & [a_0]+[a_1]t+[a_2]t^2+[a_3]t^3 & \longmapsto & [a_0]+([a_1]+[a_3])t+(2[a_0]+2[a_2])t^2+2[a_3]t^3 \end{array}$$

Analizar si f es diagonalizable y, en caso afirmativo, determinar su expresión matricial diagonal y la base de $(\mathbb{Z}_3)_3[t]$ correspondiente.

8. Determinar la forma canónica de Jordan J, o canónica real $J_{\mathbb{R}}$, y la matriz de paso P para las siguientes matrices

a) $\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$ *c*) $\begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 4 & 4 \end{pmatrix}$ *e*) $\begin{pmatrix} -2 & -2 \\ 5 & 4 \end{pmatrix}$

b) $\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$ *d*) $\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 4 & 5 \end{pmatrix}$ *f*) $\begin{pmatrix} 3 & 4 \\ -2 & -1 \end{pmatrix}$

9. Determinar la matrix exponencial de las matrices del ejercicio anterior.

10. Determinar el polinomio mínimo de

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$$

12. Hallar la forma de Jordan así como la matriz de paso de las matrices

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 & -1/2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 5 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

13. Sea $\mathscr{U}$ un $\mathbb{R}$-espacio vectorial de dimensión 4 y sea $f \in \operatorname{End}(\mathscr{U})$ definido como

$$\begin{array}{ll} f(u_1) = u_1, & f(u_3) = -3u_1 - 2u_2 - u_3 - 2u_4 \\ f(u_2) = u_1 + u_2, & f(u_4) = u_1 + u_2 + u_3 + 2u_4 \end{array}$$

donde $\mathscr{B} = \{u_1, \ldots, u_4\}$ es una base de $\mathscr{U}$. Hallar la forma canónica de Jordan J de f así como la base $\mathscr{B}_J$ de $\mathscr{U}$ tal que $\mathscr{M}(f, \mathscr{B}_J) = J$.

14. Determinar la matriz forma canónica de Jordan real y la matriz de paso, así como la exponencial, de la matriz

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 \end{pmatrix}.$$

15. Hallar la forma canónica de Jordan, así como la matriz de paso, de la matriz:

$$\begin{pmatrix} \mathtt{i} & 1 & 0 & 1 \\ 0 & \mathtt{i} & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \mathtt{i} & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1-\mathtt{i} \end{pmatrix}.$$

16. Se considera el endomorfismo

$$\begin{array}{cccc} f: & \mathscr{M}_{2\times 2}(\mathbb{Z}_3) & \longrightarrow & \mathscr{M}_{2\times 2}(\mathbb{Z}_3) \\ & \begin{pmatrix} [a] & [b] \\ [c] & [d] \end{pmatrix} & \longmapsto & \begin{pmatrix} [2a+2b] & [2b] \\ [c+2d] & [d] \end{pmatrix} \end{array}$$

Hallar la forma canónica J de Jordan de f y obtener una base $\mathscr{B}$ de $\mathscr{M}_{2\times 2}(\mathbb{Z}_3)$ tal que $\mathscr{M}(f, \mathscr{B}) = J$.