CÁLCULO I (1° GITI). CURSO 2019-20. **20/01/2020**

SOLUCIONES CONTROL Bloque 3: Integración impropia y numérica, sucesiones y series.

1. Sea la integral definida:

$$\int_0^1 \operatorname{arctg}(x)dx$$

   a) Aproxima la integral utilizando la Regla del Trapecio con $n = 3$.

   b) Si queremos aproximar su valor con un error menor que 0.01 ¿qué número n de subintervalos tendríamos que utilizar?

   a) Como $n = 3$ se tiene $h = \frac{1}{3}$ y los extremos de los subintervalos son $x_0 = 0$, $x_1 = \frac{1}{3}$, $x_2 = \frac{2}{3}$ y $x_3 = 1$ y la aproximación mediante la regla del trapecio es:

$$T_3 = \frac{1}{6}(\operatorname{arctg}(0) + \operatorname{arctg}(1)) + \frac{1}{3}(\operatorname{arctg}(\frac{1}{3}) + \operatorname{arctg}(\frac{2}{3})) \approx 0,434150.$$

   b) Si el número de subintervalos es n la fórmula del error nos dice que

$$|E_T| \leq \frac{K}{12}\left(\frac{1}{n}\right)^2 (1-0) = \frac{K}{12n^2},$$

   donde K es una cota superior del valor absoluto de la derivada segunda de $\operatorname{arctg}(x)$ en $[0,1]$. Como $(\operatorname{arctg}(x))'' = \frac{-2x}{(1+x^2)^2}$ es inmediato comprobar que podemos tomar $K = 2$. Así $|E_T| \leq \frac{2}{12n^2}$, y está expresión será menor que 0,01 si $n = 5$.

2. *a*) Calcula la siguiente integral impropia:

$$\int_1^\infty (x-1)^2 e^{-x} dx.$$

   b) Enuncia el Criterio de la Integral de convergencia de series.

   c) Utiliza los apartados anteriores para estudiar la convergencia de la serie:

$$\sum_{n=1}^{\infty} (n-1)^2 e^{-n}.$$

CLASES PARTICULARES, TUTORÍAS TÉCNICAS ONLINE
LLAMA O ENVÍA WHATSAPP: 689 45 44 70

- - -

ONLINE PRIVATE LESSONS FOR SCIENCE STUDENTS
CALL OR WHATSAPP:689 45 44 70

Sea $f(x)$ una función continua, positiva y decreciente en el intervalo $[1,\infty)$ tal que $a_n = f(n)$ para todo $n \geq 1$.

www.cartagena99.com no se hace responsable de la información contenida en el presente documento en virtud al Artículo 17.1 de la Ley de Servicios de la Sociedad de la Información y de Comercio Electrónico, de 11 de julio de 2002.
Si la información contenida en el documento es ilícita o lesiona bienes o derechos de un tercero háganoslo saber y será retirada.

- Si $\displaystyle\int_1^\infty f(x)dx$ es convergente entonces $\displaystyle\sum_{n=1}^\infty a_n$ es convergente.
- Si $\displaystyle\int_1^\infty f(x)dx$ es divergente entonces $\displaystyle\sum_{n=1}^\infty a_n$ es divergente.

El teorema sigue siendo válido si se cumplen las hipótesis en un intervalo $[\alpha, \infty)$ para algún $\alpha > 1$.

c) Vamos a utilizar el Criterio de la Integral con $f(x) = (x-1)^2 e^{-x}$:

- f es continua en todo $\mathbf{R}$ por ser el producto de un polinomio y una exponencial.
- f es positiva en todo $\mathbf{R}$ por ser el producto de un cuadrado y una exponencial.
- Para ver que f es decreciente calculamos su derivada

$$f'(x) = 2(x-1)e^{-x} - (x-1)^2 e^{-x} = (3-x)(x-1)e^{-x} \leq 0 \text{ para } x \geq 3,$$

lo que asegura que f es decreciente en $[3, \infty)$.

Como se cumplen las hipótesis y la integral $\int_1^\infty (x-1)^2 e^{-x} dx$ es convergente, la serie $\sum_{n=1}^\infty (n-1)^2 e^{-n}$ también es convergente.

3. Dadas las siguientes series:

$$\text{(i)} \quad \sum_{n=1}^\infty (n^3 + n^4)e^{-n} \quad \text{(ii)} \quad \sum_{n=1}^\infty \frac{2^n - 1}{3^n + 1} \quad \text{(iii)} \quad \sum_{n=1}^\infty (-1)^n \frac{n^2 + 2}{n^3 + 3}$$

Justifica, aplicando los criterios correspondientes, si divergen o convergen.

¿Cuáles convergen absolutamente?

(i) $\displaystyle\sum_{n=1}^\infty (n^3 + n^4)e^{-n}$

Utilizamos el criterio del cociente:

$$\lim_{n\to\infty} \frac{((n+1)^3 + (n+1)^4)e^{-(n+1)}}{(n^3 + n^4)e^{-n}} = \frac{1}{e} < 1$$

luego la serie es convergente.

La serie converge también absolutamente pues es de términos positivos.

(ii) $\displaystyle\sum_{n=1}^\infty \frac{2^n - 1}{3^n + 1}$

Utilizamos el criterio de comparación directa:

CLASES PARTICULARES, TUTORÍAS TÉCNICAS ONLINE
LLAMA O ENVÍA WHATSAPP: 689 45 44 70

- - -

ONLINE PRIVATE LESSONS FOR SCIENCE STUDENTS
CALL OR WHATSAPP:689 45 44 70

$$\sum_{n=1} 3^n + 1$$

La serie converge también absolutamente pues es de términos positivos.

www.cartagena99.com no se hace responsable de la información contenida en el presente documento en virtud al Artículo 17.1 de la Ley de Servicios de la Sociedad de la Información y de Comercio Electrónico, de 11 de julio de 2002.
Si la información contenida en el documento es ilícita o lesiona bienes o derechos de un tercero háganoslo saber y será retirada.

(iii) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n\frac{n^2+2}{n^3+3}$ es una serie alternada, y vamos a comprobar su convergencia mediante las dos condiciones necesarias:

- $\displaystyle\lim_{n\to\infty}\frac{n^2+2}{n^3+3}=0.$
- La sucesión $\left\{\dfrac{n^2+2}{n^3+3}\right\}$ debe ser decreciente a partir de un n_0. Para comprobarlo estudiamos el signo de la derivada de la función $f(x)=\dfrac{x^2+2}{x^3+3}$:

$$f'(x)=\frac{-x^4-6x^2+6x}{(x^3+3)^2}<0 \text{ para } x\geq 1,$$

que nos permite asegurar que la sucesión es decreciente desde $n_0=1$.

Para estudiar su convergencia absoluta tenemos que estudiar la convergencia de la serie $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n^2+2}{n^3+3}$, que es comparable en el límite con la serie armónica:

$$\lim_{n\to\infty}\frac{\dfrac{n^2+2}{n^3+3}}{\dfrac{1}{n}}=\lim_{n\to\infty}\frac{n^3+2n}{n^3+3}=1\in(0,\infty).$$

Como $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}$ es divergente, $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n^2+2}{n^3+3}$ también. De manera que $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n\frac{n^2+2}{n^3+3}$ es condicionalmente convergente.

4. Dada la función $f(x)=\cos(\pi x)$ y el centro $a=1$:

   a) Encuentra su polinomio de Taylor de grado 3, $p_3(x)$.

   b) Enuncia el teorema de Taylor.

   c) Da una estimación del error que se comete cuando se utiliza $p_3(x)$ para aproximar a $f(x)$ en el intervalo $[\frac{1}{2},\frac{3}{2}]$.

   d) Escribe la serie de Taylor y justifica que converge a $\cos(\pi x)$ para todo $x\in(-\infty,\infty)$.

   a) Para buscar el polinomio de Taylor, y posteriormente la serie, calculamos algunas derivadas de f en $x=1$:

CLASES PARTICULARES, TUTORÍAS TÉCNICAS ONLINE
LLAMA O ENVÍA WHATSAPP: 689 45 44 70

- - -

ONLINE PRIVATE LESSONS FOR SCIENCE STUDENTS
CALL OR WHATSAPP:689 45 44 70

$p_3(x)=1+\frac{\ }{2}(x-1)+$

www.cartagena99.com no se hace responsable de la información contenida en el presente documento en virtud al Artículo 17.1 de la Ley de Servicios de la Sociedad de la Información y de Comercio Electrónico, de 11 de julio de 2002.
Si la información contenida en el documento es ilícita o lesiona bienes o derechos de un tercero háganoslo saber y será retirada.

b) Teorema de Taylor:

Sea f una función $n+1$ veces derivable en un intervalo abierto I que contiene al punto a.

Entonces para cada $x \in I$ existe un punto c, que depende de x y de n, situado entre a y x tal que:

$$R_n(x) = f(x) - p_n(x) = \frac{f^{(n+1)}(c)}{(n+1)!}(x-a)^{(n+1)}.$$

o también

$$f(x) = f(a) + \frac{f'(a)}{1!}(x-a) + \cdots + \frac{f^{(n)}(a)}{n!}(x-a)^n + \frac{f^{(n+1)}(c)}{(n+1)!}(x-a)^{(n+1)}.$$

c) Para estimar el error al utilizar $p_3(x)$ en vez de $f(x)$ en $[\frac{1}{2}, \frac{3}{2}]$ aplicamos el teorema de Taylor que nos dice que

$$|\cos(\pi x) - p_3(x)| = \left|\frac{\pi^4 \cos(\pi c)}{4!}(x-1)^4\right| \leq \frac{\pi^4}{4!}\left(\frac{1}{2}\right)^4 = \frac{\pi^4}{384} \approx 0,25367.$$

d) La serie de Taylor es

$$-1+\frac{\pi^2}{2!}(x-1)^2-\frac{\pi^4}{4!}(x-1)^4+\cdots+(-1)^{n+1}\frac{\pi^{2n}}{(2n)!}(x-1)^{2n}+\cdots = \sum_{n=0}^{\infty}(-1)^{n+1}\frac{\pi^{2n}}{(2n)!}(x-1)^{2n}.$$

Para justificar que converge a $\cos(\pi x)$ para todo $x \in (-\infty, \infty)$, comprobamos que el resto n-ésimo tiende a 0:

$$|\cos(\pi x) - p_n(x)| = \left|\frac{f^{(n+1)}(c)}{(n+1)!}(x-1)^{(n+1)}\right| \leq \frac{\pi^{n+1}}{(n+1)!}|x-1|^{(n+1)},$$

que tiende a 0 pues, para cualquier x, es una exponencial de base $\pi|x-1|$ dividido por el factorial.

CLASES PARTICULARES, TUTORÍAS TÉCNICAS ONLINE
LLAMA O ENVÍA WHATSAPP: 689 45 44 70

- - -

ONLINE PRIVATE LESSONS FOR SCIENCE STUDENTS
CALL OR WHATSAPP:689 45 44 70

www.cartagena99.com no se hace responsable de la información contenida en el presente documento en virtud al Artículo 17.1 de la Ley de Servicios de la Sociedad de la Información y de Comercio Electrónico, de 11 de julio de 2002.
Si la información contenida en el documento es ilícita o lesiona bienes o derechos de un tercero háganoslo saber y será retirada.