uc3m | Universidad Carlos III de Madrid
Departamento de Matemáticas

ECUACIONES EN DERIVADAS PARCIALES
Problemas. HOJA 1

Máster in Ingeniería Matemática
Curso 2020-2021

Para entregar antes del jueves 18 de febrero a las 24.00.

Problema 1.1 Usando la concavidad de la función $\log x$, demuestra la desigualdad numérica de Young

$$ab \le \frac{a^p}{p} + \frac{b^{p'}}{p'}, \qquad a, b > 0, \quad p > 1, \quad \frac{1}{p} + \frac{1}{p'} = 1.$$

Problema 1.2 Prueba la desigualdad de interpolación para $u \in C_0^2(\Omega)$, $\varepsilon > 0$,

$$\int_\Omega |\nabla u|^2 \le \varepsilon \int_\Omega |\Delta u|^2 + \frac{1}{4\varepsilon} \int_\Omega u^2.$$

Problema 1.3 La transformada de Kelvin (inversión respecto de la esfera de radio R) de una función $u : \mathbb{R}^N \to \mathbb{R}$ se define como

$$\widetilde{u}(\widetilde{x}) = |x|^k u(x), \qquad \widetilde{x} = \frac{R^2 x}{|x|^2}, \quad x \neq 0,$$

para un cierto $k \in \mathbb{R}$.
Supongamos que la función u es radial y armónica. Calcula el valor del exponente k para que su transformada de Kelvin $\widetilde{u}$ sea también armónica.

Problema 1.4 Dadas las ecuaciones de Maxwell del electromagnetismo

$$\begin{cases} \partial_t E = rot\, B, \\ \partial_t B = -rot\, E, \\ div\, E = div\, B = 0, \end{cases}$$

donde $E, B : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$, demuestra que cada componente de E y de B satisface la ecuación de ondas.

Problema 1.5 Usando la representación

$$u(x) = \frac{1}{\omega_N} \int_\Omega \frac{\nabla u(y) \cdot (x - y)}{|x - y|^N}\, dy$$

demuestra la desiguladad de Sobolev para $u \in W_0^{1,p}(\Omega)$,

$$\|u\|_r \le C \|\nabla u\|_p \qquad \text{si } \; r < \frac{Np}{N - p}, \quad 1 \le p < N,$$

con $C = C(\Omega, p, r, N)$. Será necesaria la siguiente versión en dominios acotados de la desigualdad de Young: *si* $f \in L^p(\Omega)$, $g \in L^q(\Omega)$ *es simétrica, y*

$$v(x) = \int_\Omega f(y)g(x-y)\,dy,$$

entonces

$$\|v\|_r \leq \|f\|_p \left(\sup_{x\in\Omega}\int_\Omega |g(x-y)|^q\,dy\right)^{1/q} \qquad \textit{para}\ \ \frac{1}{r}+1=\frac{1}{p}+\frac{1}{q}.$$

Problema 1.6 Comprueba que para cierto $\alpha > 0$, la función $f(x) = (\log(1/|x|)^\alpha$ definida en la bola unidad $B_1 \subset \mathbb{R}^N$, es un contraejemplo para la inclusión de Sobolev crítica

$$W_0^{1,N}(B_1) \subset L^q(B_1) \quad \forall\, q < \infty, \qquad W_0^{1,N}(B_1) \not\subset L^\infty(B_1).$$

– $\mathcal{A}$$\mathcal{G}$P–

ECUACIONES EN DERIVADAS PARCIALES
Problemas. HOJA 2

Máster in Ingeniería Matemática
Curso 2020-2021

Para entregar antes del viernes 5 de marzo a las 24.00.

Problema 2.1 Encuentra las soluciones radiales regulares del problema en la bola $B_R = \{|x| < R\} \subset \mathbb{R}^N$,

$$\begin{cases} \Delta u = 1 & \text{en } B_R \\ u = 0 & \text{en } \partial B_R \end{cases}$$

Problema 2.2

a) Encuentra las soluciones radiales singulares de la ecuación en $\mathbb{R}^3$,

$$\Delta v + k^2 v = 0$$

b) Utiliza las soluciones obtenidas para demostrar que las soluciones de soporte compacto de la ecuación

$$\Delta u + k^2 u = f$$

pueden escribirse mediante la representación

$$u(x) = \frac{1}{4\pi} \int_{\mathbb{R}^3} \frac{\cos(k|x-y|)}{|x-y|} f(y)\, dy.$$

Problema 2.3

a) A partir de la función de Green del laplaciano en el semiplano superior $\mathbb{R}^N_+ = \mathbb{R}^{N-1} \times (0, \infty)$ calcula el correspondiente núcleo de Poisson.

b) La misma cuestión para el caso de la bola $B_R \subset \mathbb{R}^N$.

Problema 2.4

a) Comprueba que para ciertos valores de $\alpha > 0$, la función $f(x) = (1+|x|^2)^{-\alpha}$ es superarmónica en $\mathbb{R}^N$, $N \geq 3$.

b) Comprueba que el hessiano de f no es semidefinido negativo por ejemplo en el caso $N = 3$ en puntos $(x_1, 0, 0)$ con $|x_1|$ grande.

Problema 2.5 Demuestra que si $u \in H_0^1(\Omega)$ es solución débil de la ecuación

$$-\Delta u + cu = f$$

donde $f \in L^2(\Omega)$, $c \in \mathbb{R}$, entonces minimiza la energía

$$E(v) = \frac{1}{2}\int_\Omega |\nabla u|^2 + \frac{c}{2}\int_\Omega u^2 - \int_\Omega fv.$$

Problema 2.6 Demuestra que la forma bilineal

$$\mathcal{E}(u,v) = \sum_{i,j=1}^N \int_\Omega a^{ij}(x)\partial_{x_i}u\partial_{x_j}u + \sum_{i=1}^N \int_\Omega b^i(x)\partial_{x_i}uv + \int_\Omega c(x)uv,$$

donde

$$a^{ij} \in L^\infty(\Omega), \quad b^i \in L^N(\Omega), \quad c \in L^{N/2}(\Omega),$$

es continua en $H_0^1(\Omega) \times H_0^1(\Omega)$.
