Variables aleatorias unidimensionales

Hasta ahora, para cada experimento aleatorio se ha construido el espacio muestral como el conjunto de todos los resultados posibles de dicho experimento y se han considerado tanto sucesos simples como compuestos asociados al mismo para obtener las distintas probabilidades de interés.

Para algunos experimentos aleatorios, la descripción del espacio muestral puede resultar laboriosa debido a la naturaleza del experimento, por ejemplo si se desea describir el espacio muestral asociado al experimento consistente en lanzar 8 veces una moneda. Además, el manejo del espacio muestral resulta incómodo, por no tener un resultado numérico asociado al experimento aleatorio.

En este capítulo se introduce la idea de trabajar siempre con un espacio muestral asociado al experimento aleatorio cuyo resultado sea numérico. Para ello, se define el concepto de *variable aleatoria* como el mecanismo matemático que sirve para asignar valores numéricos a todos los posibles resultados del experimento aleatorio, de forma que el espacio muestral Ω vendrá dado por un conjunto de números que representan las características de interés del experimento aleatorio.

1.1. Definición de variable aleatoria unidimensional

El objetivo es tener una función que asigne a cada posible resultado del experimento A un número, tal que

$$X : \Omega \longrightarrow \mathbb{R}$$

$$A \longrightarrow X(A)$$

Así por ejemplo, en el experimento consistente en lanzar 8 veces una moneda, la variable aleatoria X puede venir dada como $X =$"número de caras".

Definición 1.1

Sea $(\Omega, \mathcal{P}(\Omega), P)$ un espacio de probabilidad. Se define la función $X : \Omega \longrightarrow \mathbb{R}$ como una variable aleatoria unidimensional *(v.a.) sii*

$$\forall x \in \mathbb{R} \quad se \quad verifica \quad que \quad B = \{A \in \Omega \ / \ X(A) \leq x\} = X^{-1}((-\infty, x]) \in \mathcal{P}(\Omega)$$

Ejemplo 1.1

Sea el experimento aleatorio que consiste en lanzar dos monedas.

a) *Describir el experimento y comprobar si $X =$"número de caras obtenidas" es una variable aleatoria*

b) *Calcular la probabilidad de que el número de caras sea como máximo una*

a) $\Omega = \{(c, c), (c, x), (x, c), (x, x)\} = \{A_1, A_2, A_3, A_4\}$

$\mathcal{P}(\Omega) = \{\varnothing, \Omega, A_i \ \forall i = 1, ..., 4,$ *uniones y complementarios de* $A_i \ \forall i = 1, ..., 4\}$

Sea la v.a. $X(A) =$*"nº de caras obtenidas" tal que* $X : \Omega \longrightarrow \mathbb{R}$ *siendo:*

$X(A_1) = 2$

$X(A_2) = X(A_3) = 1$

$X(A_4) = 0$

Una vez descrito el experimento aleatorio, se comprueba si X es una variable aleatoria:

$\forall x < 0: \quad B_1 = \{A \in \Omega \ \ / \ X(A) \leq x\} = \varnothing \in \mathcal{P}(\Omega)$

$\forall 0 \leq x < 1: \quad B_2 = \{A \in \Omega \ \ / \ X(A) \leq x\} = \{A_4\} \in \mathcal{P}(\Omega)$

$\forall 1 \leq x < 2: \quad B_3 = \{A \in \Omega \ \ / \ X(A) \leq x\} = \{A_2, A_3, A_4\} \in \mathcal{P}(\Omega)$

$\forall x \geq 2: \quad B_4 = \{A \in \Omega \ \ / \ X(A) \leq x\} = \Omega \in \mathcal{P}(\Omega)$

Como todos los sucesos $B_i \in \mathcal{P}(\Omega)$ $\forall i = 1, ..., 4 \Longrightarrow X$ es una variable aleatoria.

b) *La probabilidad de obtener como máximo una cara viene dada como:*

$P(X \leq 1) = P(B_3) = P(A_2, A_3, A_4) = P(A_2) + P(A_3) + P(A_4) = \frac{1}{4} + \frac{1}{4} + \frac{1}{4} = \frac{3}{4}$

De igual forma se obtiene que:

$P(X \leq 1) = P(X = 0) + P(X = 1) = \frac{1}{4} + \frac{1}{2} = \frac{3}{4}$

1.1.1.Propiedadesdeunavariablealeatoriaunidimensional

1. Sea X una v.a. y sean $a, b \in \mathbb{R} \Longrightarrow Y = aX + b$ es también una v.a.
2. Sean X e Y dos variables aleatorias, entonces también son variables aleatorias las siguientes transformaciones:
   - $X + Y$
   - $X - Y$
   - $X \cdot Y$
   - X/Y si $Y \neq 0$

1.2.Función de distribución

Para conocer la probabilidad de todos los valores que toma una v.a. X, se introduce la *función de distribución*, definida como una aplicación $F : \mathbb{R} \longrightarrow [0, 1]$ tal que

$$F_X(x) = P(A \in \Omega \ \ / \ X(A) \leq x) = P(X \leq x) \qquad \forall x \in \mathbb{R}$$

Por su definición, la función de distribución no puede ser negativa y ha de estar entre 0 y 1, ya que es una probabilidad. Tampoco puede ser decreciente por su carácter de función acumulativa. Por lo tanto, para que $F_X(x)$ sea una función de distribución, ha de verificar que:

(i) F_X sea una función no decreciente: $x_1 < x_2 \Rightarrow F_X(x_1) \leq F_X(x_2)$

(ii) $\lim_{x \to -\infty} F_X(x) = 0$ y $\lim_{x \to +\infty} F_X(x) = 1$

(iii) F sea una función continua por la derecha: $\forall x_0 \in \mathbb{R}, F_X(x_0) = \lim_{\substack{x \longrightarrow x_0^+ \\ x_0 < x}} F_X(x)$

A continuación se comprueba que la función de distribución, por su definición, cumple las características anteriormente expuestas.

(i) F *es una función no decreciente*: $x_1 < x_2 \Rightarrow F_X(x_1) \leq F_X(x_2)$

Sean $x_1, x_2 \in \mathbb{R}$ *tal que* $x_1 < x_2 \Rightarrow F_X(x_2) = P\{A \in \Omega \ \ / \ X(A) \leq x_2\} =$

$= P(X \leq x_2) = P(\{X \leq x_1\} \cup \{x_1 < X \leq x_2\}) \stackrel{disjuntos}{=}$

$= P(\{X \leq x_1\}) + P(\{x_1 < X \leq x_2\}) \geq P(\{X \leq x_1\}) = F_X(x_1)$

$\Rightarrow F_X(x_2) \geq F_X(x_1)$

(ii) $\lim_{x \to -\infty} F_X(x) = 0$ y $\lim_{x \to +\infty} F_X(x) = 1$

$F(-\infty) = \lim_{x \to -\infty} F_X(x) = \lim_{x \to -\infty} P(X \leq x) = P(\varnothing) = 0$

$F(+\infty) = \lim_{x \to +\infty} F_X(x) = \lim_{x \to +\infty} P(X \leq x) = P(\Omega) = 1$

(iii) F *es continua por la derecha*: $\forall x_0 \in \mathbb{R}, F_X(x_0) = \lim_{\substack{x \longrightarrow x_0^+ \\ x_0 < x}} F_X(x)$

$\lim_{x \longrightarrow x_0^+} F_X(x) = \lim_{x \longrightarrow x_0^+} P(X \leq x) \stackrel{x_0 \leq x}{=} P(X \leq x_0) + \lim_{x \longrightarrow x_0^+} P(x_0 < X \leq x) =$

$= F_X(x_0) + P(\varnothing) = F_X(x_0)$

Además de las características expuestas anteriormente, la función de distribución cumple las siguientes propiedades:

1. $\forall x \in \mathbb{R} : P(X > x) = 1 - F_X(x)$
2. Sean $x_1, x_2 \in \mathbb{R}$ tal que $x_1 < x_2 \Rightarrow P(x_1 < X \leq x_2) = F_X(x_2) - F_X(x_1)$
3. $\forall x \in \mathbb{R} : P(X < x) = F_X(x) - P(X = x)$

Ejemplo 1.2

Se lanza una moneda equilibrada y se define la v.a. X que describe el "número de caras obtenidas en el lanzamiento".

Determinar la v.a. X y calcular su función de distribución.

$\Omega = \{c, x\} \Longrightarrow X : \Omega \longrightarrow \mathbb{R}$ *tal que* $X(A) = \begin{cases} 1 & si \quad A = c \\ 0 & si \quad A = x \end{cases}$

Como la moneda es equilibrada la $P(X = 0) = P(X = 1) = \frac{1}{2}$

Para obtener la función de distribución se sabe que

$$F_X(x) = P(X \leq x) \forall x \in \mathbb{R}$$

Entonces,

$\forall x < 0 : F_X(x) = P(X \leq x) = P(\varnothing) = 0$

$\forall 0 \leq x < 1 : F_X(x) = P(X \leq x) = P(X = 0) = \frac{1}{2}$

$\forall x \geq 1 : F_X(x) = P(X \leq x) = P(\Omega) = 1$

Por tanto, la función de distribución es tal que

$$F_X(x) = \begin{cases} 0 & si \quad x < 0 \\ \frac{1}{2} & si \quad 0 \leq x < 1 \\ 1 & si \quad x \geq 1 \end{cases}$$

1.3.Tiposdevariablesaleatorias

Toda variable aleatoria viene caracterizada por su función de distribución. Por ello, dependiendo de los valores que tome dicha función de distribución se pueden distinguir distintos tipos de variables aleatorias:

- Variables aleatorias discretas
- Variables aleatorias continuas
- Variables aleatorias mixtas

1.3.1. Variables aleatorias discretas. Función de masa

Una variable aleatoria $X : \Omega \longrightarrow \mathbb{R}$ es una *variable aleatoria discreta* si toma valores sobre un conjunto finito o infinito numerable, $\{x_1, x_2, ..., x_n, ...\}$. Los puntos $\{x_1, x_2, ..., x_n, ...\}$ se denominan *puntos de masa* y son aquellos tales que $P(X = x_i) = p_i \neq 0 \;\; \forall i \in \mathbb{N}$. Además, se cumple:

(i) $p_i = P(X = x_i) > 0 \;\; \forall i \in \mathbb{N}$

(ii) $\sum_{i=1}^{\infty} p_i = 1$

La *función de masa* es el conjunto de las probabilidades asignadas a los puntos de masa, dada por

$$P(X = x_i) = \begin{cases} p_1 & si & x = x_1 \\ p_2 & si & x = x_2 \\ \vdots & & \vdots \\ p_n & si & x = x_n \\ 0 & si & x \text{ no es punto de masa} \end{cases}$$

Relación entre función de masa y función de distribución

La función de distribución de una v.a. discreta X es una función escalonada, es decir, es una función continua salvo en un conjunto infinito numerable de puntos (los puntos de masa) donde se presentan discontinuidades de saltos finitas. La función de distribución de una v.a. discreta X viene dada mediante la función de masa, según la siguiente expresión

$$F_X(x) = P(X \leq x) = \sum_{x_i \leq x} P(X = x_i) = \sum_{x_i \leq x} p_i$$

Así, la función de distribución de una v.a. discreta es tal que

$$F_X(x) = \begin{cases} 0 & si & x < x_1 \\ p_1 & si & x_1 \leq x < x_2 \\ p_1 + p_2 & si & x_2 \leq x < x_3 \\ \vdots & & \vdots \\ \sum_{i=1}^{n-1} p_i & si & x_{n-1} \leq x < x_n \\ 1 & si & x \geq x_n \end{cases}$$

La relación entre ambas funciones se puede observar a través de las siguientes figuras. En la Figura 2.1. se muestra la función de masa de una v.a. X que tiene cuatro puntos de masa y en la Figura 2.2. aparece la función de distribución asociada a dicha v.a. X.

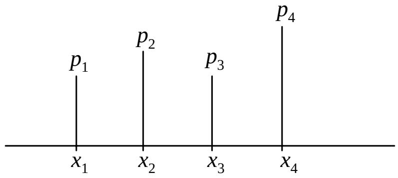

Figura 1.1. Función de masa de una v.a. X

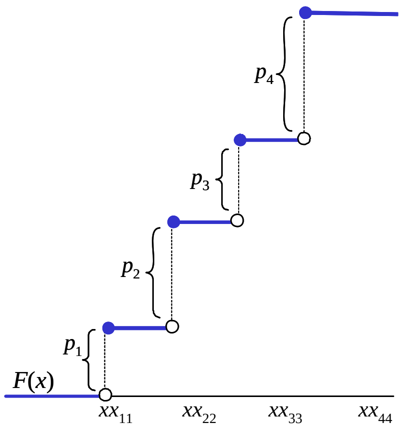

Figura 1.2. Función de distribución de la v.a. X

Ejemplo 1.3

Una urna contiene diez bolas de las que ocho son blancas. Se extraen al azar dos de esas diez bolas. Sea la v.a. $X =$*"número de bolas blancas extraídas". Calcular:*

a) *La función de masa y de distribución de la v.a.* X

b) *La probabilidad de que* X *sea mayor que* 1

c) *La probabilidad de que* X *esté en el intervalo* $[1, 2]$

a) *La v.a.* X *puede tomar los siguientes puntos de masa* $X = \{0, 1, 2\}$, *por tanto la función de masa viene dada por:*

$$p_1 = P(X = 0) = \frac{2}{10}\frac{1}{9} = \frac{1}{45}$$

$$p_2 = P(X = 1) = \frac{2}{10}\frac{8}{9} + \frac{8}{10}\frac{2}{9} = \frac{16}{45}$$

$$p_3 = P(X = 2) = \frac{8}{10}\frac{7}{9} = \frac{28}{45}$$

Obsérvese que $p_1 + p_2 + p_3 = 1$

Con esta función de masa se calcula la función de distribución de X *como*

$$F_X(x) = \begin{cases} 0 & si \quad x < 0 \\ \frac{1}{45} & si \quad 0 \leq x < 1 \\ \frac{17}{45} & si \quad 1 \leq x < 2 \\ 1 & si \quad x \geq 2 \end{cases}$$

b) *Para el cálculo de* $P(X > 1)$ *se utilizan las funciones obtenidas en el apartado anterior.*

Si se utiliza la función de distribución, la probabilidad de interés se calcula como

$$P(X > 1) = 1 - P(X \leq 1) = 1 - F(1) = \frac{28}{45}$$

Utilizando la función de masa, la probabilidad de interés es tal que

$$P(X > 1) = 1 - P(X \leq 1) = 1 - P(X = 0) - P(X = 1) = 1 - \frac{1}{45} - \frac{16}{45} = \frac{28}{45}$$

c) *Se pide la* $P(1 \leq X \leq 2)$ *que al igual que en el apartado anterior se puede calcular utilizando tanto la función de masa como la función de distribución.Si se utiliza la función de distribución se obtiene que*

$P(1 \leq X \leq 2) = P(X \leq 2) - P(X < 1) = P(X \leq 2) - P(X \leq 0) =$

$= F(2) - F(0) = 1 - \frac{1}{45} = \frac{44}{45}$

1.3.2. Variables aleatorias continuas. Función de densidad

Una variable aleatoria $X : \Omega \longrightarrow \mathbb{R}$ es una *variable aleatoria continua* si su función de distribución es absolutamente continua, es decir si existe una función no negativa f tal que:

$$F_X(x) = \int_{-\infty}^{x} f(t)dt \qquad \forall x \in \mathbb{R}$$

La función f se denomina *función de densidad* y cumple las siguientes características:

(i) $f(t) \geq 0 \quad \forall t \in \mathbb{R}$

(ii) $\int_{-\infty}^{+\infty} f(t)dt = 1$

Además si $f(t)$ es continua en t, la derivada de la función de distribución en t coincide con la función de densidad en dicho punto, tal que $F'(t) = f(t)$.

Cuando se trabaja con variables aleatorias continuas, es importante tener en cuenta como calcular las probabilidades en un punto o en un intervalo, así para el caso continuo si se pretende obtener

1. $P(X = x_0) = \int_{x_0}^{x_0} f(t)dt = 0 \qquad \forall x_0 \in \mathbb{R}$
2. $P(a < X \leq b) = P(a \leq X \leq b) = P(a \leq X < b) = P(a < X < b) =$
   $= \int_a^b f(t)dt = F(b) - F(a)$

Ejemplo 1.4

En un hospital se ha comprobado que el peso en Kg de los niños al nacer es una v.a. X cuya función de densidad viene dada por

$$f_X(x) = \begin{cases} cx & si \quad 2 \leq x \leq 4 \\ 0 & en \quad otro\ caso \end{cases}$$

a) *Calcular c para que f(x) sea función de densidad*

b) *Calcular la función de distribución* $F_X(x)$

c) *Calcular la probabilidad de que un niño elegido al azar pese más de 3 Kg*

a) *Sea* $X =$*"peso de los niños al nacer en dicho hospital".*

Para conocer el valor de c se utiliza la característica (ii) de la función de densidad, por tanto

$\int_{-\infty}^{+\infty} f_X(x)dx = \int_{-\infty}^{2} 0\ dx + \int_2^4 cxdx + \int_4^{+\infty} 0dx = c\left[\frac{x^2}{2}\right]_2^4 = c(8-2) = 6c = 1 \Longrightarrow c = \frac{1}{6}$

Por lo que la función de densidad queda

$$f_X(x) = \begin{cases} \frac{1}{6}x & si \quad 2 \leq x \leq 4 \\ 0 & en \quad otro\ caso \end{cases}$$

b) *Se sabe que* $F_X(x) = \int_{-\infty}^{x} f_X(x)dx \quad \forall x \in \mathbb{R} \Longrightarrow$

Si $x < 2 : F_X(x) = \int_{-\infty}^{x} 0\ dx = 0$

Si $2 \leq x \leq 4 : F_X(x) = \int_{-\infty}^{2} 0dx + \int_2^x \frac{1}{6}xdx = \frac{1}{6}\left[\frac{x^2}{2}\right]_2^x = \dfrac{x^2-4}{12}$

Si $x > 4 : F_X(x) = \int_{-\infty}^{2} 0dx + \int_2^4 \frac{1}{6}xdx + \int_4^x 0dx = 1$

Así, la función de distribución es

$$F_X(x) = \begin{cases} 0 & si & x < 2 \\ \dfrac{x^2-4}{12} & si & 2 \leq x \leq 4 \\ 1 & si & x > 4 \end{cases}$$

c) *Se pide calcular* $P(X > 3)$

$P(X > 3) = 1 - P(X \leq 3) = 1 - F(3) = 1 - \dfrac{3^2-4}{12} = \dfrac{7}{12}$

1.3.3. Variables aleatorias mixtas

Una variable aleatoria $X : \Omega \longrightarrow \mathbb{R}$ es una *variable aleatoria mixta* si su función de distribución presenta saltos en un conjunto de puntos y es continua para el resto de valores de $\mathbb{R}$. Por tanto, una variable aleatoria mixta se caracteriza por tener una parte discreta y una parte continua.

Sea X una v.a. mixta con probabilidad, $p_1, p_2, ..., p_n$ ($p_i \neq 0 \; \forall i$), en los puntos de masa $\{x_1, x_2, ..., x_n\}$ y con función de densidad $f_X(x)$ definida para el intervalo $[a, b]$, entonces se tiene que:

- $\sum_{i=1}^{n} p_i = p < 1$ y
- $P(a \leq x \leq b) = \int_a^b f_X(x)dx = 1 - p$

La función de distribución de una variable aleatoria mixta se puede obtener mediante dos funciones de distribución, una función de distribución discreta y una función de distribución continua, tal que

$$F_X(x) = \alpha F_d(x) + (1 - \alpha)F_c(x)$$

siendo $F_d(x)$ la función de distribución correspondiente a la parte discreta de la v.a. mixta, $F_c(x)$ la función de distribución absolutamente continua correspondiente a la parte continua de la v.a. mixta y $\alpha \in$ (0,1).

Ejemplo 1.5

El tiempo de espera en la cola del banco es cero cuando no hay cola, esto sucede con una probabilidad de $\frac{1}{3}$; y se distribuye como una v.a. continua, si es necesario esperar en la cola por un tiempo determinado.

Sea X la v.a. mixta tal que $X =$"tiempo de espera en la cola del banco".

Para la v.a. mixta X, se conoce tanto la función de masa asociada a la parte discreta, como la función de densidad asociada a la parte continua. Sea la función de masa asociada a la parte discreta $P(X = 0) = \frac{1}{3}$ y sea la función de densidad asociada a la parte continua $f_X(x) = \begin{cases} ce^{-x} & si \quad x > 0 \\ 0 & en \quad otro\ caso \end{cases}$

a) *Calcular el valor de c*

b) *Calcular la función de distribución de la v.a. X*

a) *Para calcular el valor de c hay que tener en cuenta la probabilidad acumulada en la parte continua, por tanto como* $P(X=0)=\frac{1}{3}=p \Longrightarrow$

$\int_0^{+\infty} ce^{-x}dx = 1-p=\frac{2}{3}$

$\int_0^{+\infty} ce^{-x}dx = [-ce^{-x}]_0^{+\infty} = 0+c=\frac{2}{3} \Longrightarrow c=\frac{2}{3}$

b) *Para el cálculo de la función de distribución de la v.a. X, se procede de la siguiente forma*

Si $x<0: F_X(x)=0$

Si $x=0: F_X(x)=\frac{1}{3}$

Si $x>0: F_X(x)=\frac{1}{3}+\int_0^x \frac{2}{3}e^{-x}dx=\frac{1}{3}+\left[-\frac{2}{3}e^{-x}\right]_0^x=\frac{1}{3}-\frac{2}{3}e^{-x}+\frac{2}{3}=1-\frac{2}{3}e^{-x}$

Por tanto, la función de distribución de la v.a. X viene dada por:

$$F_X(x)=\begin{cases} 0 & si \quad x<0 \\ \frac{1}{3} & si \quad x=0 \\ 1-\frac{2}{3}e^{-x} & si \quad x>0 \end{cases}$$

1.4.Transformacionesdeunavariablealeatoria

En este apartado se presentan distintos métodos para obtener la distribución de una transformación aplicada a una variable aleatoria, que es también variable aleatoria.

Sea X una v.a. definida en el espacio de probabilidad $(\Omega, \mathcal{P}(\Omega), P)$ con función de distribución $F_X(x)$. Sea Y una transformación de la v.a. X dada por $Y = h(X)$, donde Y es también v.a. cuyo espacio de probabilidad depende del espacio de probabilidad de la v.a. X y de su función de distribución. Sea A un suceso de Y, entonces:

$$P(Y\in A)=P(h(X)\in A)=P(X\in h^{-1}(A))$$

Para caracterizar la nueva v.a. Y hay que determinar su función de distribución $F_Y(y)$, dada por

$$F_Y(y)=P(Y\leq y)=P(h(X)\leq y)=P(X\leq h^{-1}(y))=F_X(h^{-1}(y))$$

1.4.1. Transformación de una v.a. discreta

Sea X una v.a. discreta y sea $Y = h(X)$ entonces la función de masa de la nueva v.a. Y viene dada como:

$$P(Y = y) = P(h(X) = y) = P(X = h^{-1}(y)) = \sum_{x \in h^{-1}(y)} P(X = x)$$

Ejemplo 1.6

Sea X una v.a. discreta con función de masa $P(X = -2) = \frac{1}{5}$, $P(X = -1) = \frac{1}{6}$, $P(X = 0) = \frac{1}{5}$, $P(X = 1) = \frac{1}{15}$ y $P(X = 2) = \frac{11}{30}$. Sea $Y = X^2$ una transformación de la v.a. X. Calcular la función de masa de la v.a. Y.

Los puntos de masa de la v.a. Y son $\{0, 1, 4\}$, entonces, su función de masa queda determinada por

$P(Y = 0) = P(X = 0) = \frac{1}{5}$

$P(Y = 1) = P(X = -1) + P(X = 1) = \frac{1}{6} + \frac{1}{15} = \frac{7}{30}$

$P(Y = 4) = P(X = -2) + P(X = 2) = \frac{1}{5} + \frac{11}{30} = \frac{17}{30}$

1.4.2. Transformación de una v.a. continua

Sea X una v.a. continua con función de distribución $F_X(x)$ y con función de densidad $f_X(x)$. Sea $Y = h(X)$ una transformación de la v.a. X tal que:

- h es estrictamente monótona y
- h es una función derivable

Entonces, la función de densidad de la nueva variable aleatoria Y viene dada por la siguiente expresión:

$$f_Y(y) = f_X(h^{-1}(y)) \left| \frac{\partial}{\partial y}(h^{-1}(y)) \right|$$

Ejemplo 1.7

Sea X una v.a. continua, cuya función de densidad viene dada por:

$$f_X(x) = \begin{cases} 3x^2 & si \quad 0 < x < 1 \\ 0 & en \quad otro\ caso \end{cases}$$

Sea $Y = 1 - X^2$ *una transformación de la v.a.* X.

a) *Calcular la función de densidad de la v.a.* Y

b) *Calcular la función de distribución de la v.a.* Y

a) *La transformación asociada a la* Y *es derivable y estrictamente monótona cuando* X *toma valores en el intervalo* $(0,1)$. *Por tanto, se puede aplicar lo descrito en el apartado 3.4.2, quedando la función de densidad de la v.a.* Y *tal que*

$$f_Y(y) = f_X(h^{-1}(y)) \left|\frac{\partial}{\partial y}(h^{-1}(y))\right| = f_X\left(\sqrt{1-y}\right)\left|\frac{\partial}{\partial y}\left(\sqrt{1-y}\right)\right| =$$

$$= 3\left(\left(\sqrt{1-y}\right)^2\right)\left|-\tfrac{1}{2}(1-y)^{-\frac{1}{2}}\right| = 3(1-y)\left|-\tfrac{1}{2\sqrt{1-y}}\right|$$

La función de densidad de la v.a. Y *viene dada por*

$$f_Y(y) = \begin{cases} \frac{3}{2}\sqrt{1-y} & si \quad 0 < y < 1 \\ 0 & en \quad otro\ caso \end{cases}$$

b) *Para el cálculo de la función de distribución de la v.a.* Y, *se tiene que*

Si $y \leq 0 : F_Y(y) = 0$

Si $0 < y < 1 : F_Y(y) = \int_{-\infty}^{0} 0dy + \int_0^y \frac{3}{2}\sqrt{1-y}dy = \left[-\sqrt{(1-y)^3}\right]_0^y =$

$$= 1 - \left(\sqrt{(1-y)}\right)^3$$

Si $y \geq 1 : F_Y(y) = 1$

Por tanto, la función de distribución de la v.a. Y *viene dada por:*

$$F_Y(y) = \begin{cases} 0 & si \quad y \leq 0 \\ 1 - \left(\sqrt{(1-y)}\right)^3 & si \quad 0 < y < 1 \\ 1 & si \quad y \geq 1 \end{cases}$$

Ejemplo 1.8

Sea X *una v.a. continua, cuya función de densidad viene dada por:*

$$f_X(x) = \begin{cases} \frac{1}{2} & si \quad -1 < x < 1 \\ 0 & en \quad otro\ caso \end{cases}$$

Sea $Y = X^2$ *una transformación de la v.a.* X. *Calcular:*

a) *La función de distribución de la v.a. Y*

b) *La función de densidad de la v.a. Y*

a) *En primer lugar se comprueba si la transformación asociada a Y es derivable y estrictamente monótona cuando X toma valores en el intervalo $(-1, 1)$.*

Esta transformación es derivable, pero no es estrictamente monótona, ya que, en el intervalo $(-1, 0)$ la transformación es decreciente y en el intervalo $[0, 1)$ es creciente. En este caso, hay que determinar la función de distribución de la v.a. Y para el caso general de las transformaciones de una variable aleatoria (apartado 3.4), ya que no se puede aplicar lo descrito en el apartado 3.4.2.

$$F_Y(y) = P(Y \leq y) = P(X^2 \leq y) = P(|X| \leq \sqrt{y}) = P(-\sqrt{y} \leq X \leq \sqrt{y}) =$$

$$= \int_{-\sqrt{y}}^{\sqrt{y}} \frac{1}{2} dx = \left|\frac{1}{2}x\right|_{-\sqrt{y}}^{\sqrt{y}} = \sqrt{y}$$

Por lo tanto, la función de distribución de la v.a. Y queda:

$$F_Y(y) = \begin{cases} 0 & si & y < 0 \\ \sqrt{y} & si & 0 \leq y < 1 \\ 1 & si & y \geq 1 \end{cases}$$

b) *Una vez calculada la función de distribución de la v.a. Y, la función de densidad de dicha variable se obtiene como*

$$f_Y(y) = F_Y^{'}(y) \begin{cases} \frac{1}{2\sqrt{y}} & si & 0 \leq y < 1 \\ 0 & en & otro\ caso \end{cases}$$