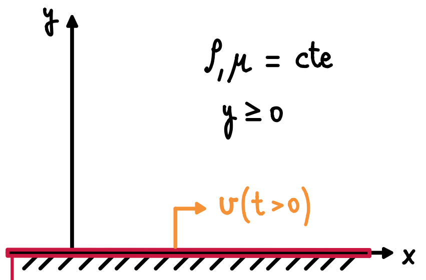
Problema del Flujo de Rayleigh



$\Sigma_s : y = 0 \quad (\forall x)$

$t = 0 : \ \vec{U} = \vec{0}$

$t > 0, \ y > 0 : \ u = U = u_s$

$\dfrac{\partial u}{\partial x} = 0$ (SYM DE FLUJO)

Ecuación continuidad $\longrightarrow \dfrac{\partial v}{\partial y} = 0 \longrightarrow v = \text{cte}(t)$

ECdM$_y$ con $v = 0$ y $\vec{f}_m = -\nabla U_m$:

$0 = -\dfrac{\partial}{\partial y}\left(\dfrac{p}{\rho} + U_m\right) = \text{cte}$ porque en $y \to \infty$ $v = 0 \ \forall t$

ECdM$_x$ con $\dfrac{\partial u}{\partial x} = 0$, $v = 0$ y $\dfrac{\partial u}{\partial x}\left(\dfrac{p}{\rho} + U_m\right) = 0$:

$$\underbrace{\frac{\partial u}{\partial t}}_{1 \text{ c.i.}} = \nu \underbrace{\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}}_{2 \text{ c.c. en } y}$$

$\nu = \dfrac{\mu}{\rho}$ VISCOSIDAD CINEMÁTICA

CONDICIÓN INICIAL (c.i.): $t = 0 : \ u = 0 \ \forall y$

CONDICIONES DE CONTORNO (c.c.): $y = 0 : \ u = U$; $\quad y \to \infty : \ u \to 0$

VARIABLES INDEPENDIENTES (V.I.): y, t
VARIABLES DEPENDIENTES (V.D.): u
PARÁMETROS EN LA ECUACIÓN: ν
PARÁMETROS EN LA c.i.: no hay
PARÁMETROS EN LAS c.c.: U

$\Rightarrow$ VD = f(VI, PARÁMETROS)

$u = u(y, t, \nu, U)$

Por tanto:

$v = 0 \ \forall x, y, t$ (FLUJO UNIDIRECCIONAL) $\longrightarrow \vec{U} = U(y,t)\,\vec{i}$

¡OJO! ANTES DE ADIMENSIONALIZAR VEMOS SI PODEMOS QUITARNOS ALGÚN PARÁMETRO AGRUPÁNDOLO CON ALGUNA VARIABLE.

$\dfrac{\partial u}{\partial t} = \nu \dfrac{\partial^2 u}{\partial y^2} \longrightarrow \dfrac{\partial u}{\partial (\nu t)} = \dfrac{\partial^2 u}{\partial y^2}$ (ν cte)

c.i.: $\nu t = 0 : \quad u = 0$

c.c.: $\nu t > 0$ $\begin{cases} y = 0 : & u = U \\ y \to \infty : & u \to 0 \end{cases}$

VARIABLES INDEPENDIENTES (V.I.): $y, \nu t$
VARIABLES DEPENDIENTES (V.D.): u
PARÁMETROS EN LA ECUACIÓN: no hay
PARÁMETROS EN LA c.i.: no hay
PARÁMETROS EN LAS c.c.: U

$\Rightarrow u = u(y, \nu t, U)$

HEMOS ELIMINADO UNA MAGNITUD DE LA FORMULACIÓN ORIGINAL

Ecuaciones de unidades de las distintas magnitudes:

$Re = \dfrac{\ell u}{\nu} \longrightarrow \nu = \ell u Re^{-1} \longrightarrow [\nu] = [\ell][u] = L^2 T^{-1} \longrightarrow [\nu t] = L^2$

A la hora de elegir magnitudes para adimensionalizar:

1) PARÁMETROS DIMENSIONALES ($\neq$ ECUACIONES DE UNIDADES)
2) VARIABLES INDEPENDIENTES

$\Rightarrow$ $\boxed{U,\ \nu t}$

Cambios en las magnitudes:

$u \longrightarrow \frac{u}{U}$

$y \longrightarrow \frac{y}{\sqrt{\nu t}}$

$\nu t \longrightarrow 1$

$U \longrightarrow 1$

$$\Rightarrow \frac{u}{U} = f\left(\frac{y}{\sqrt{\nu t}}\right) \xrightarrow{\frac{y}{\sqrt{\nu t}} = \eta}$$

SOLUCIÓN DE SEMEJANZA

$$\boxed{\frac{u}{U} = f(\eta),\ \text{con}\ \eta = \frac{y}{\sqrt{\nu t}}}$$

Ocurre al adimensionalizar con una V.I. y las V.D. se relacionan en una VARIABLE DE SEMEJANZA (η).

Para validar la ecuación vamos a necesitar las derivadas de η:

$$\frac{\partial\eta}{\partial(\nu t)} = \frac{\partial}{\partial(\nu t)}\left(\frac{y}{\sqrt{\nu t}}\right) = y\left[-\frac{1}{2}(\nu t)^{-3/2}\right] = -\frac{1}{2}\frac{\eta}{\nu t}$$

$$\frac{\partial\eta}{\partial y} = \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{y}{\sqrt{\nu t}}\right) = \frac{1}{\sqrt{\nu t}}$$

f sólo depende de η: $\partial \rightarrow d$

$$\boxed{\frac{\partial u}{\partial(\nu t)}} \quad \frac{\partial u}{\partial(\nu t)} = U\frac{\partial f}{\partial(\nu t)} = U\frac{df}{d\eta}\frac{\partial\eta}{\partial(\nu t)} = -\frac{1}{2}U\frac{\eta}{\nu t}\frac{df}{d\eta}$$

$$\boxed{\frac{\partial u}{\partial y}} \quad \frac{\partial u}{\partial y} = U\frac{\partial f}{\partial y} = U\frac{df}{d\eta}\frac{\partial\eta}{\partial y} = U\frac{1}{\sqrt{\nu t}}\frac{df}{d\eta}$$

$$\boxed{\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}} \quad \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = \frac{U}{\sqrt{\nu t}}\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{df}{d\eta}\right) = \frac{U}{\sqrt{\nu t}}\frac{d^2 f}{d\eta^2}\frac{\partial\eta}{\partial y} = \frac{U}{\nu t}\frac{d^2 f}{d\eta^2}$$

Sustituyendo en la ECdMx:

$$-\frac{1}{2}U\frac{\eta}{\nu t}\frac{df}{d\eta} = \frac{U}{\nu t}\frac{d^2 f}{d\eta^2}$$

$$f'' + \frac{1}{2}\eta f' = 0$$

c.i.: $\nu t = 0$: $u = 0 \longrightarrow \eta\to\infty$: $f \to 0$

$y = 0$: $u = U \longrightarrow \eta = 0$: $f = 1$

$$\boxed{f'' + \frac{1}{2}\eta f' = 0}$$

$\eta\to\infty$: $f\to 0$ $\longrightarrow$ PROBLEMA DE VALOR DE CONTORNO (boundary solve problem)

Si las dos c.c. se diesen en el mismo punto $\longrightarrow$ problema de valor inicial (initial value problem), mucho más fácil de resolver $\longrightarrow$ convertimos nuestro problema:

$$\eta = 0 \quad \begin{cases} f = 0 \\ f' = g_0 \,, \quad \text{con } g_0 \,/\, \lim\limits_{\eta \to \infty} f = 0 \end{cases}$$

$$f'(\eta) = g(\eta) \longrightarrow g' + \frac{1}{2}\eta g = 0 \longrightarrow \int_{\boxed{g_0}}^{g} \frac{\tilde{g}'}{\tilde{g}}\, d\tilde{g} = -\frac{1}{2}\int_{\boxed{0}}^{\eta} \tilde{\eta}\, d\tilde{\eta} \longrightarrow \ln\left(\frac{g}{g_0}\right) = -\left(\frac{\eta}{2}\right)^2 \longrightarrow$$

$\eta \to 0 : g = g_0$

Integramos de nuevo

$$\longrightarrow g = g_0 \exp\left[-\left(\frac{\eta}{2}\right)^2\right] = \frac{df}{d\eta} \longrightarrow \int_0^{\eta} \frac{df}{d\tilde{\eta}}\, d\tilde{\eta} = f\Big|_0^{\eta} = f - 1 = g_0 \int_0^{\eta} \exp\left[-\left(\frac{\tilde{\eta}}{2}\right)^2\right] d\tilde{\eta}$$

$f(\eta = 0) = 1$

Entonces:

$$f = 1 + g_0 \int_0^{\eta} \exp\left[-\left(\frac{\tilde{\eta}}{2}\right)^2\right] d\tilde{\eta}$$

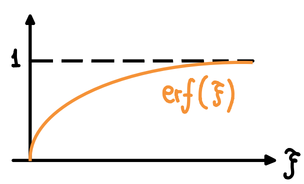
Aplicamos la c.c. que falta:

$$\lim_{\eta \to \infty} f = 0 \longrightarrow \lim_{\eta \to \infty} \left\{ 1 + g_0 \int_0^{\eta} \exp\left[-\left(\frac{\tilde{\eta}}{2}\right)^2\right] d\tilde{\eta} \right\} = 0 \longrightarrow 1 + g_0 \int_0^{\infty} \exp\left[-\left(\frac{\tilde{\eta}}{2}\right)^2\right] d\tilde{\eta} = 0$$

$$\boxed{g_0 = -\frac{1}{\displaystyle\int_0^{\infty} \exp\left[-\left(\frac{\tilde{\eta}}{2}\right)^2\right] d\tilde{\eta}} = -\frac{1}{\sqrt{\pi}}}$$

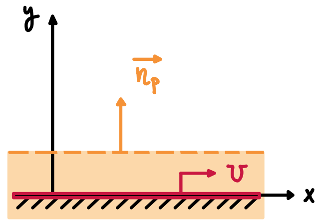
Finalmente:

$$f = 1 - \frac{\displaystyle\int_0^{\eta} \exp\left[-\left(\frac{\tilde{\eta}}{2}\right)^2\right] d\tilde{\eta}}{\displaystyle\int_0^{\infty} \exp\left[-\left(\frac{\tilde{\eta}}{2}\right)^2\right] d\tilde{\eta}}$$



FUNCIÓN ERROR COMPLEMENTARIA

Fuerza por Unidad de Superficie sobre la Placa



$$\vec{n}_p = \vec{j}$$

$$\vec{\tau}_p = \bar{\bar{\tau}}_\mu \Big|_{y=0} \cdot \vec{n}_p$$

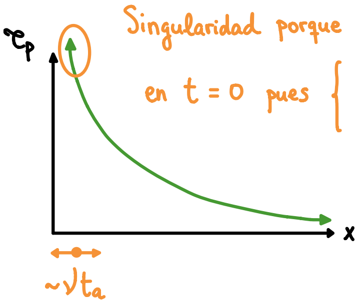
$$\bar{\bar{\tau}}_\mu = 2\mu \bar{\bar{S}} = \mu \begin{bmatrix} 2\cancelto{0}{\frac{\partial u}{\partial x}} & \frac{\partial u}{\partial y} + \cancelto{0}{\frac{\partial v}{\partial x}} \\ \frac{\partial u}{\partial y} + \cancelto{0}{\frac{\partial v}{\partial x}} & 2\cancelto{0}{\frac{\partial v}{\partial y}} \end{bmatrix} = \mu \begin{bmatrix} 0 & \frac{\partial u}{\partial y} \\ \frac{\partial u}{\partial y} & 0 \end{bmatrix}$$

Flujo 2D

$$\longrightarrow \vec{\tau}_p = \mu \begin{bmatrix} 0 & \frac{\partial u}{\partial y} \\ \frac{\partial u}{\partial y} & 0 \end{bmatrix}_{y=0} \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} \longrightarrow \boxed{\vec{\tau}_p = \mu \frac{\partial u}{\partial y}\Big|_{y=0} \vec{i}}$$

LA VISCOSIDAD SE OPONE AL MOVIMIENTO DE LA PLACA PUES $\frac{\partial u}{\partial y}\Big|_{y=0} < 0$ AL SER $\frac{\partial u}{\partial y} < 0$ AL $\downarrow u$ SI $\uparrow y$.

$$\longrightarrow \vec{\tau}_p = \mu U \frac{\partial f}{\partial y}\Big|_{y=0} \vec{i} = \mu U \left(\frac{df}{d\eta} \frac{\partial \eta}{\partial y} \right)_{y=0} \vec{i} = \frac{\mu U}{\sqrt{\nu t}} g_0 \vec{i} \longrightarrow \boxed{\vec{\tau}_p = -\frac{\mu U}{\sqrt{\pi \nu t}} \vec{i}}$$



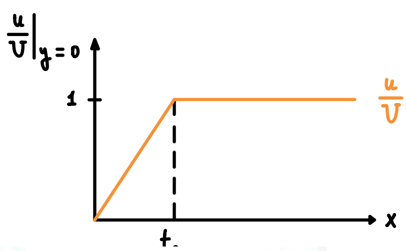
Singularidad porque le impartimos una aceleración infinita en $t = 0$ pues $\begin{cases} \bullet\ t = 0 & u = 0 \\ \bullet\ t > 0 & u = U \end{cases}$

$$\tau_p \sim \frac{\mu U}{l_{cy}} \; ; \; l_{cy} \sim \sqrt{\nu t}$$

CADA VEZ INCORPORAMOS MÁS FLUIDO AL MOVIMIENTO AL CRECER l_{cy} CON t.

CADA VEZ CUESTA MENOS MOVER LA PLACA.

En realidad va a haber un tiempo de arranque:



$$\frac{u}{U} = \begin{cases} \frac{t}{t_a} & 0 \le \frac{t}{t_a} \le 1 \\ 1 & \frac{t}{t_a} \ge 1 \end{cases}$$

ESTO NOS INTRODUCE $\sqrt{\nu t_a}$ EN EL PROBLEMA, DESTRUYENDO LA SOLUCIÓN DE SEMEJANZA EN EL ARRANQUE.

PERO LA SOLUCIÓN DE SEMEJANZA SIGUE SIENDO VÁLIDA EN $\frac{\sqrt{\nu t}}{t_a} \gg 1$ PORQUE SE PIERDE EL DETALLE DEL ARRANQUE.

$\sim\sqrt{\nu t_a}$