

triangulación de Householder,  $A \in \mathbb{R}^{m \times m}$

$$A = \underbrace{\begin{pmatrix} | & & | \\ A^{(1)} & \dots & A^{(m)} \\ | & & | \end{pmatrix}}_m \quad \left. \vphantom{\begin{pmatrix} | & & | \\ A^{(1)} & \dots & A^{(m)} \\ | & & | \end{pmatrix}} \right\}^m, \quad \text{sea } v^{(1)} \in \mathbb{R}^m \text{ el vector de Householder asociado a } A^{(1)}$$

$$\Rightarrow R_1 = \underbrace{(I_{m \times m} - 2P_{v^{(1)}})}_{Q_1} A = \begin{pmatrix} * & \cdot & \dots \\ \vdots & | & \dots \\ 0 & & \dots \end{pmatrix}$$

sea  $v^{(2)}$  el vector de Householder asociado a la segunda columna de  $R_1$ , contada a partir del segundo elemento :  $v^{(2)} \in \mathbb{R}^{m-1}$

$$\text{si } Q_2 = \begin{pmatrix} 1 & - & - \\ \vdots & I_{(m-1) \times (m-1)} - 2P_{v^{(2)}} & \vdots \\ \vdots & \vdots & \vdots \end{pmatrix} \Rightarrow \underbrace{Q_2 R_1}_{R_2} = \begin{pmatrix} * & \cdot & \cdot \\ \vdots & * & \cdot \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & \vdots & \vdots \end{pmatrix}$$

$$Q_3 = \begin{pmatrix} I_{2 \times 2} & 0 \\ 0 & I - 2P_{v^{(3)}} \end{pmatrix} \leftarrow v^{(3)} \leftarrow x \in \mathbb{R}^{m-2}$$

$$Q_3 R_2 = \begin{pmatrix} * & \cdot & \cdot \\ \vdots & * & \cdot \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \vdots \end{pmatrix} = R_3 \dots$$

↪ al paso  $k$  tenemos  $Q_k = \begin{pmatrix} I_{(k-1) \times (k-1)} & 0 \\ \vdots & \vdots \end{pmatrix}$

CLASES PARTICULARES, TUTORÍAS TÉCNICAS ONLINE  
LLAMA O ENVÍA WHATSAPP: 689 45 44 70

---

ONLINE PRIVATE LESSONS FOR SCIENCE STUDENTS  
CALL OR WHATSAPP: 689 45 44 70

de la triangulación, considerado

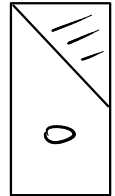
## observaciones:

- este procedimiento permite obtener

$$Q_m \dots Q_2 Q_1 A = R$$

↑  
 $m = \#$  columnas de  $A$

↑  
triangular superior:



- $Q_j = Q_j^*$ ,  $Q_j^{-1} = Q_j^*$ ;  $Q_j = \begin{pmatrix} I & 0 \\ 0 & I - 2P \end{pmatrix}$

$\Rightarrow A = \underbrace{Q_1 Q_2 \dots Q_m}_Q R$  : factorización QR completa  
Q unitaria

- si  $A$  tiene  $rg \max (=m)$ , entonces los elementos diagonales de  $R$  son no nulos. Pero el procedimiento de triangulación se puede llevar a cabo incluso si  $A$  no tiene  $rg m$

Cartagena99

CLASES PARTICULARES, TUTORÍAS TÉCNICAS ONLINE  
LLAMA O ENVÍA WHATSAPP: 689 45 44 70

---

ONLINE PRIVATE LESSONS FOR SCIENCE STUDENTS  
CALL OR WHATSAPP: 689 45 44 70

Algoritmo:  $[v^{(1)}, \dots, v^{(m)}, A] = \text{hh}(A)$

$v^{(k)} \in \mathbb{R}^{m-k+1}$       vectores de Householder  
 matriz triangularizada  $(\mathbb{R})$       INPUT: matriz original

for  $k = 1 : m$

$x = A(k:m, k)$  ← columna k a partir de la diag

$v^{(k)} = x + \text{sign}(x_1) \|x\| e_1$  ←  $v^{(k)} = x$   
 $v^{(k)}(1) = v^{(k)}(1) + s_+(x_1) \|x\|$

$v^{(k)} = \frac{v^{(k)}}{\|v^{(k)}\|}$

$A(k:m, k:m) = A(k:m, k:m) - 2 v^{(k)} v^{(k)T} A(k:m, k:m)$

end

¿cuantas flop se están haciendo?

la operación que cuesta más en el bucle es

$A(k:m, k:m) = A(k:m, k:m) - 2 \underbrace{v^{(k)} v^{(k)T}}_{s \times s} \underbrace{A(k:m, k:m)}_{s \times t}$

CLASES PARTICULARES, TUTORÍAS TÉCNICAS ONLINE  
 LLAMA O ENVÍA WHATSAPP: 689 45 44 70

---

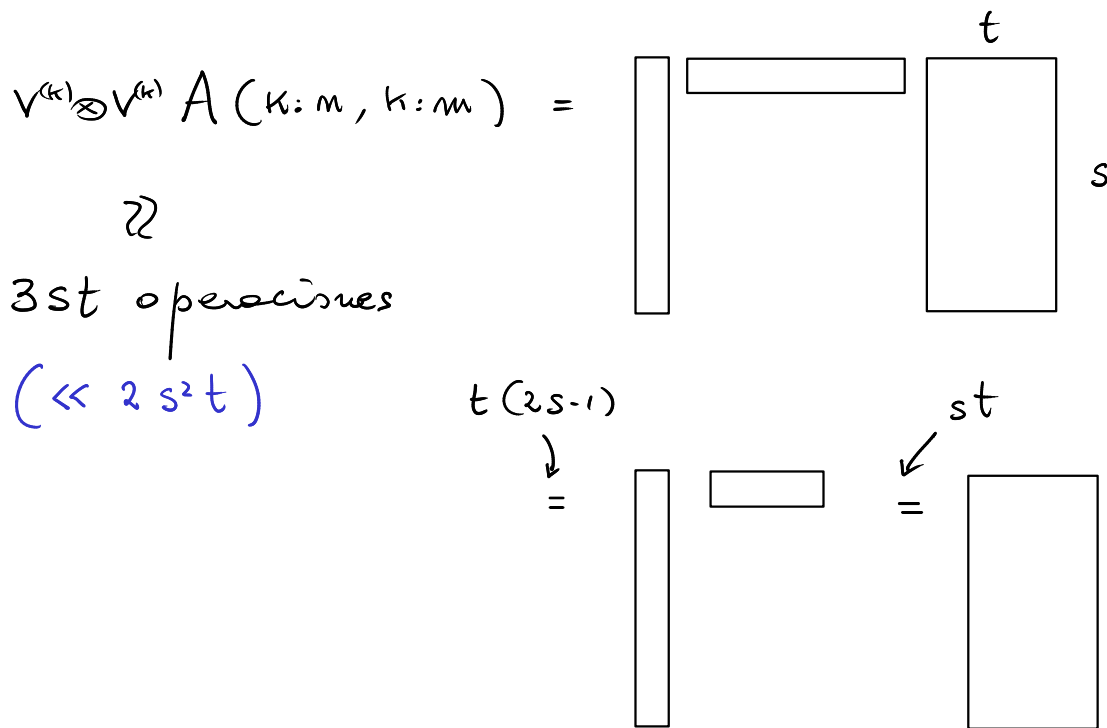
ONLINE PRIVATE LESSONS FOR SCIENCE STUDENTS  
 CALL OR WHATSAPP: 689 45 44 70



el producto de matrices  
 que es  $s \times t \times m$

¿cuantas flop?

el producto que estemos haciendo aquí tiene una forma especial: si la usamos, nos ahorramos muchas operaciones



considerando las restas, esta operación cuesta  $\approx 4st = 4(m-k+1)(m-k+1)$

$$\Rightarrow \# \text{ flop} = \sum_{k=1}^m 4(m-k+1)(m-k+1)$$

$$\approx 2m^2 - \frac{2}{3}m^3 = 2m^2 \left(m - \frac{m}{3}\right)$$

Cartagena99

CLASES PARTICULARES, TUTORÍAS TÉCNICAS ONLINE  
 LLAMA O ENVÍA WHATSAPP: 689 45 44 70

---

ONLINE PRIVATE LESSONS FOR SCIENCE STUDENTS  
 CALL OR WHATSAPP: 689 45 44 70