

I-2: $\mathbb{R}^n$ como espacio métrico

- El conjunto $\mathbb{R}^n$ además de ser un espacio vectorial de dimensión n sobre el cuerpo de los números reales, es también un espacio métrico

Def [Espacio métrico]

- un espacio métrico es un conjunto $M \neq \emptyset$ equipado con una noión de distancia entre sus elementos. Se llama distancia en el conjunto M , a una aplicación $d: M \times M \rightarrow \mathbb{R}$ que satisface las siguientes propiedades

- $d(x, y) \geq 0 \quad \forall x, y \in M$, y $d(x, y) = 0 \Leftrightarrow x = y$ (definida positiva)
- $d(x, y) = d(y, x) \quad \forall x, y \in M$. (Simétrica)
- $d(x, z) \leq d(x, y) + d(y, z) \quad \forall x, y, z \in M$, (desigualdad triangular)

- El conjunto $\mathbb{R}^n$ es un tipo particular de espacio métrico, en el cual la distancia se define en función de una norma para los vectores.

Def [Espacio vectorial normado]

- Un espacio vectorial normado es un espacio vectorial V provisto de una aplicación $\|\cdot\|: V \rightarrow \mathbb{R}$ llamada norma, que satisface las siguientes propiedades

- $\|x\| \geq 0 \quad \forall x \in V$ y $\|x\| = 0 \Leftrightarrow x = 0 \in V$
- $\|\lambda x\| = |\lambda| \|x\| \quad \forall \lambda \in \mathbb{R}, \forall x \in V$
- $\|x + y\| \leq \|x\| + \|y\| \quad \forall x, y \in V$

- En cualquier espacio vectorial normado, además de las propiedades i),

**CLASES PARTICULARES, TUTORÍAS TÉCNICAS ONLINE
LLAMA O ENVÍA WHATSAPP: 689 45 44 70**

**ONLINE PRIVATE LESSONS FOR SCIENCE STUDENTS
CALL OR WHATSAPP: 689 45 44 70**

Cartagena99

$$\| -x \| = \| (-1)x \| = |-1| \|x\| = \|x\|$$

• Además, de la desigualdad triangular

$$\|x\| = \|x - y + y\| \leq \|x - y\| + \|y\| \Rightarrow \|x\| - \|y\| \leq \|x - y\|$$

y cambiando los papeles de los vectores x e y , se tiene

$$\|y\| = \|y - x + x\| \leq \|x - y\| + \|x\| \Rightarrow \|y\| - \|x\| \leq \|x - y\|$$

con la cual, de las dos desigualdades anteriores

$$|\|x\| - \|y\|| = \max\{\|x\| - \|y\|, \|y\| - \|x\|\} \leq \|x - y\|$$

y por tanto se cumple la propiedad v)

• En cualquier espacio vectorial normado V , se puede definir una distancia entre vectores mediante

$$d(x, y) = \|x - y\|.$$

• A partir de las propiedades de la norma es inmediato comprobar que la distancia así definida, satisface las propiedades i), ii) y iii) que debe satisfacer la distancia en un espacio métrico. Por tanto podemos enunciar la siguiente proposición:

Proposición: En cualquier espacio vectorial normado V , la distancia definida en la forma $d(x, y) = \|x - y\|$, da a V estructura de espacio métrico.

• A continuación nos concentramos en $\mathbb{R}^n$, que es el espacio vectorial normado que nos interesa para el cálculo en varias variables. La norma $\|\cdot\|: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ que da a $\mathbb{R}^n$ estructura de espacio vectorial normado se define a partir del producto escalar de vectores. Dados x_i

Cartagena99

CLASES PARTICULARES, TUTORÍAS TÉCNICAS ONLINE
LLAMA O ENVÍA WHATSAPP: 689 45 44 70

ONLINE PRIVATE LESSONS FOR SCIENCE STUDENTS
CALL OR WHATSAPP: 689 45 44 70

$$\|x\| = \sqrt{x \cdot x} = \sqrt{x_1^2 + \dots + x_n^2}$$

- Para comprobar que la norma así definida satisface las propiedades (i), (ii) y (iii) de espacio vectorial normado, necesitamos la Desigualdad de Cauchy-Schwarz

Lema [Desigualdad de Cauchy-Schwarz]:

$\forall x, y \in \mathbb{R}^n$ se satisface la desigualdad $|x \cdot y| \leq \|x\| \|y\|$.

- Demostración: Si $y=0$, se cumple la desigualdad de manera trivial ($0 \leq 0$).

Ahora si $y \neq 0$, consideremos la función real de una variable real t dada por

$$g(t) = (x + ty) \cdot (x + ty)$$

Derivando dos veces con respecto a t obtenemos

$$g'(t) = 2x \cdot y + 2t y \cdot y, \quad g''(t) = 2 y \cdot y > 0.$$

Entonces la función $g(t)$ tiene un mínimo local en

$$t_0 = -\frac{x \cdot y}{y \cdot y}$$

Como además $g(t) \geq 0$ por construcción, el mínimo local es un mínimo absoluto y se tiene

$$g(t_0) = x \cdot x - 2 \frac{x \cdot y}{y \cdot y} (x \cdot y) + \left(\frac{x \cdot y}{y \cdot y} \right)^2 y \cdot y = x \cdot x - \frac{(x \cdot y)^2}{y \cdot y} \geq 0$$

o sea $(x \cdot y)^2 \leq (x \cdot x)(y \cdot y) \Rightarrow |x \cdot y| \leq \|x\| \|y\|$

- De acuerdo con la desigualdad de Cauchy-Schwarz podemos definir el ángulo θ entre dos vectores mediante

$$\cos \theta = \frac{x \cdot y}{\|x\| \|y\|}$$

Cartagena99

CLASES PARTICULARES, TUTORÍAS TÉCNICAS ONLINE
LLAMA O ENVÍA WHATSAPP: 689 45 44 70

ONLINE PRIVATE LESSONS FOR SCIENCE STUDENTS
CALL OR WHATSAPP: 689 45 44 70

- Con ayuda de la desigualdad de Cauchy - Schwarz podemos demostrar que $\|x\| = \sqrt{x \cdot x}$ satisface las propiedades de espacio vectorial normado

Proposición: la norma definida por $\|x\| = \sqrt{x \cdot x}$ da a $\mathbb{R}^n$ estructura de espacio vectorial normado.

Demostración:

i) se cumple ya que $\sqrt{x_1^2 + \dots + x_n^2} \geq 0 \quad \forall (x_1, \dots, x_n)$ y
 $\|x\| = \sqrt{x_1^2 + \dots + x_n^2} = 0 \Leftrightarrow (x_1, \dots, x_n) = (0, \dots, 0)$.

ii) también se cumple ya que

$$\|\lambda x\| = \sqrt{\lambda^2 x_1^2 + \dots + \lambda^2 x_n^2} = \sqrt{\lambda^2} \|x\| = |\lambda| \|x\|$$

Por último, utilizando la desigualdad de Cauchy - Schwarz tenemos

$$\begin{aligned} \|x+y\|^2 &= (x+y) \cdot (x+y) = x \cdot x + 2x \cdot y + y \cdot y \leq \\ &\leq \|x\|^2 + \|y\|^2 + 2\|x\|\|y\| = (\|x\| + \|y\|)^2 \end{aligned}$$

que extrayendo la raíz cuadrada nos da la desigualdad triangular.

Cartagena99

CLASES PARTICULARES, TUTORÍAS TÉCNICAS ONLINE
 LLAMA O ENVÍA WHATSAPP: 689 45 44 70

ONLINE PRIVATE LESSONS FOR SCIENCE STUDENTS
 CALL OR WHATSAPP: 689 45 44 70