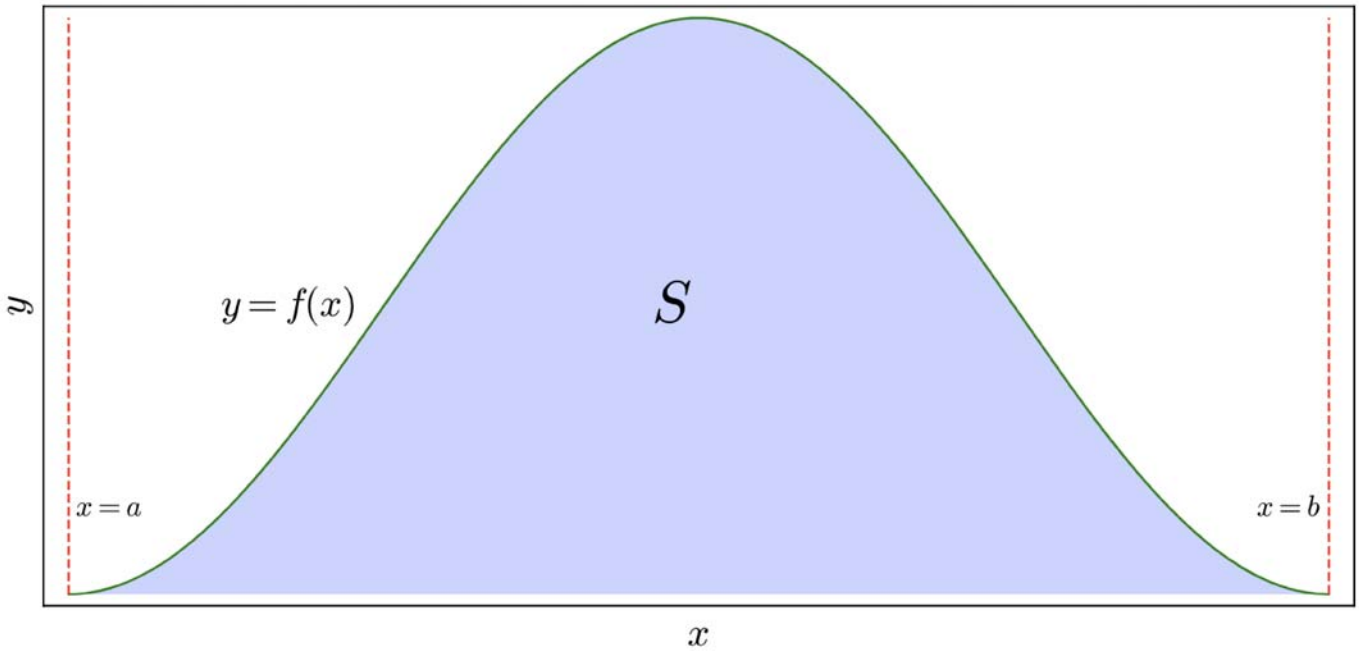
Temas 11 y 12: Cálculo de primitivas. Integrales definidas	
Asignatura: 21/04/2020	
Prof.: I. V. Toranzo	***GII***

El concepto de *integral* tiene sus orígenes en el problema de definir qué se entiende por *área*, en concreto, el *área encerreda bajo una curva arbitraria*. Aquí la dificultad redica, no en la idea intuitiva de lo que es el área de una región sino más bien en cómo formalizar su definición en términos matemáticos.



$S = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : a \leq x \leq b,\ 0 \leq y \leq f(x)\}$

De forma más específica, el problema puede plantearse del siguiente modo:

> Calcular el **área** de la región, S, acotada por el eje x y la gráfica de una función **no negativa** continua f definida sobre un intervalo $[a, b]$

Nota 1:
La condición de que f sea **no negativa**, significa geométricamente que ninguna parte de su gráfica queda por debajo del eje x.

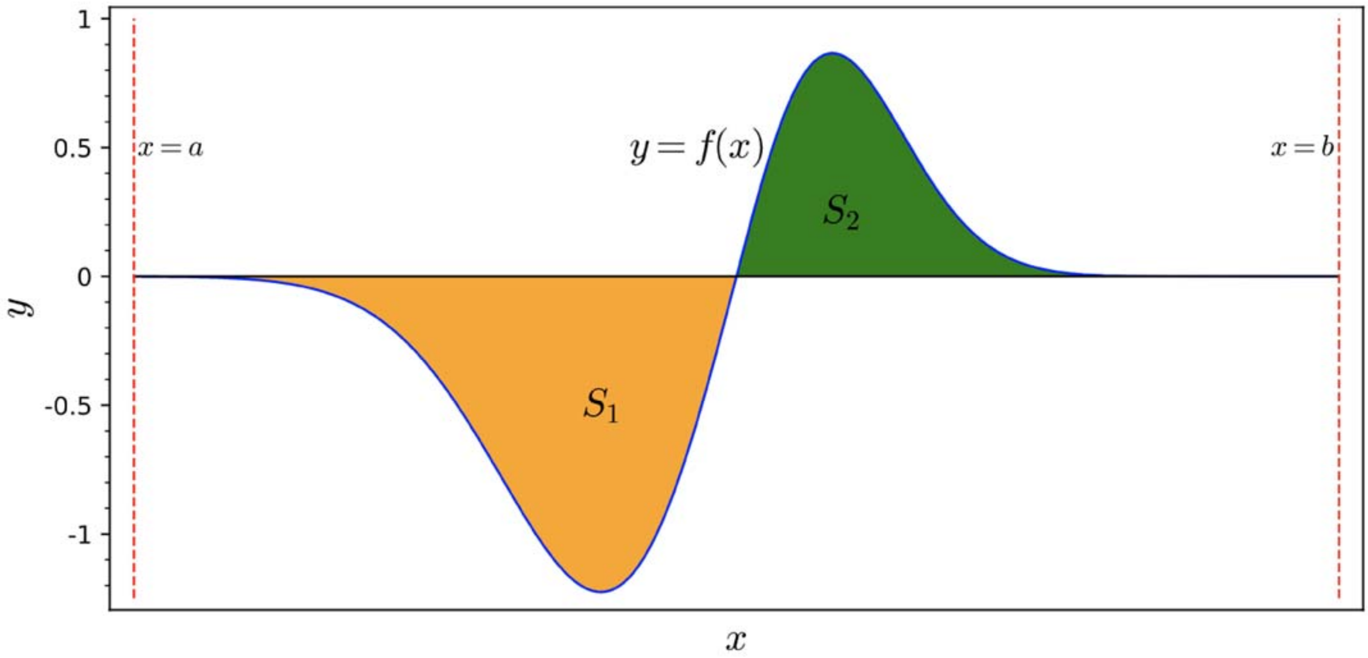
El número real, I, que se asigna al valor del área de la región S recibe el nombre de **integral de f sobre** $[a, b]$ y se denota como

$$A = \int_S f(x)\, dx = \int_a^b f(x)\, dx \tag{4.1}$$

A (4.1) también se le denomina con el nombre de **integral definida**, dado que se conocen los límites de integración de la variable x, siendo:

- **integrando:** $f(x)$
- **Límite inferior:** $x = a$
- **Límite superior:** $x = b$

Nota 2:
Realmente, la integral también se define para funciones **arbitrarias**, i.e., aquellas que no satisfacen la condición $f(x) \geq 0 \; \forall x \in [a, b]$. En este caso, la integral represental diferencia entre las áreas de las regiones positivas y las regiones negativas.



S_1: región negativa, S_2: región positiva, $S = S_1 \cup S_2$

Posteriormente, profundizaremos en él cálculo de integrales definidas y veremos otros posibles casos de regiones para las que calcular su área. Sin embargo, previamente nos centraremos en la definición, propiedades y técnicas de cálculo de las denominadas **integrales indefinidas**, aquellas no se especifican los límites de integración de la variable x, y que se denotan como

$$I(x) = \int f(x)\,dx \tag{4.2}$$

cuyo resultado es, a su vez, una función de x.
De forma más específica, las integrales indefinidas pueden considerarse como la función *inversa* de la derivada de una función f.

Nota 3:
El símbolo de la integral, $\int$, atribuido al matemático Gottfried Leibniz, y que representa una S alargada se debe a que la integral se define como un límite de sumas. Al proceso de resolución de una integral se le denomina integración

4.1. Primitivas de funciones

Se dice que la función F es una **primitiva** o **integral indefinida** de la función f y se denota como

$$F(x) = \int f(x)\,dx \tag{4.3}$$

si se verifica que

$$F'(x) = f(x), \tag{4.4}$$

Nota 4:
En realidad, existen infinitas primitivas de f puesto que si F es una primitiva de f (i.e., $F' = f$) si definimos $G = F + k,\ k \in \mathbb{R}$, entonces igualmente se cumple que $G' = (F + k)' = F' = f$, luego se trata también de una primitiva de f. Así, la primitiva de una función f suele escribirse de la forma

$$\int f(x)\,dx = F(x) + k, \qquad k \in \mathbb{R} \tag{4.5}$$

siendo k la llamada **constante de integración**

A continuación, se mostrarán las principales propiedades de las integrales indefinidas.

Propiedades de las integrales indefinidas
Sean f y g funciones continuas.

i) Suma de funciones:

$$\int (f(x) + g(x))\,dx = \int f(x)\,dx + \int g(x)\,dx \tag{4.6}$$

ii) Producto por un escalar por f:

$$\int k\,f(x)\,dx = k \int f(x), dx, \qquad k \in \mathbb{R} \tag{4.7}$$

Nota 5:
En general,

$$\int f(x) \cdot g(x)\,dx \neq \int f(x)\,dx \cdot \int g(x)\,dx \quad \text{y} \quad \int \frac{f(x)}{g(x)}\,dx \neq \frac{\int f(x)\,dx}{\int g(x)\,dx}$$

puesto que $(f \cdot g)' \neq f' \cdot g'$ y $\left(\frac{f}{g}\right)' \neq \frac{f'}{g'}$.
En el caso particular, $g(x) = k,\ k \in \mathbb{R}$ se aplicaría la propiedad ii).

Antes de describir diversas técnicas de resolución de integrales indefinidas o cálculo de primitivas, se mostrará una tabla con las integrales indefinidas de funciones *elementales*

Tabla de integrales indefinidas de funciones elementales

1. $\int \alpha \, dx = \alpha \, x + k, \ \ \alpha \in \mathbb{R}$
2. $\int f'(x) \, [f(x)]^r \, dx = \frac{[f(x)]^{r+1}}{r+1} + k,$ $r \neq -1$
3. $\int \frac{f'(x)}{f(x)} \, dx = \log |f(x)| + k$
4. $\int f'(x) a^{f(x)} \, dx = \frac{a^{f(x)}}{\log(a)} + k,$ $a \in \mathbb{R}^+$
5. $\int f'(x) e^{f(x)} \, dx = e^{f(x)} + k$
6. $\int f'(x) \sinh f(x) \, dx = \cosh f(x) + k$
7. $\int f'(x) \cosh f(x) \, dx = \sinh f(x) + k$
8. $\int f'(x) \frac{1}{\sinh(f(x))} \, dx = \log \left(\tanh \left(\frac{f(x)}{2} \right) \right) + k$
9. $\int f'(x) \frac{1}{\cosh(f(x))} \, dx = \arctan(\sinh(f(x))) + k$
10. $\int f'(x) \frac{1}{\sinh^2(f(x))} \, dx = -\mathrm{cotanh}(f(x)) + k$
11. $\int f'(x) \frac{1}{\cosh^2(f(x))} \, dx = \tanh(f(x)) + k$
12. $\int f'(x) \tanh f(x) \, dx = \log(\cosh f(x)) + k$
13. $\int f'(x) \mathrm{cotanh} f(x) \, dx = \log(\sinh f(x)) + k$
14. $\int f'(x) \sin(f(x)) \, dx = -\cos(f(x)) + k$
15. $\int f'(x) \frac{1}{\sin(f(x))} \, dx = \log \left(\tan \left(\frac{f(x)}{2} \right) \right) + k$
16. $\int f'(x) \frac{1}{\sin^2(f(x))} \, dx = -\mathrm{cotan}(f(x)) + k$
17. $\int f'(x) \cos(f(x)) \, dx = \sin(f(x)) + k$
18. $\int f'(x) \frac{1}{\cos(f(x))} \, dx = \log(\sec(x) + \tan(x)) + k$
19. $\int f'(x) \frac{1}{\cos^2(f(x))} \, dx = \tan(f(x)) + k$
20. $\int f'(x) \frac{\sin(f(x))}{\cos^2(f(x))} \, dx = \frac{1}{\cos(f(x))} + k$
21. $\int f'(x) \frac{\cos(f(x))}{\sin^2(f(x))} \, dx = -\frac{1}{\sin(f(x))} + k$
22. $\int f'(x) \tan(f(x)) \, dx = -\log|\cos(f(x))| + k$
23. $\int f'(x) \,\mathrm{cotan}(f(x)) \, dx = \log|\sin(f(x))| + k$
24. $\int \frac{f'(x)}{\sqrt{1 - f^2(x)}} \, dx = \arcsin(f(x)) + k$
25. $\int \frac{f'(x)}{\sqrt{f^2(x) + 1}} \, dx = \mathrm{arcsinh}(f(x)) + k$
26. $\int \frac{f'(x)}{\sqrt{f^2(x) - 1}} \, dx = \mathrm{arccosh}(f(x)) + k$
27. $\int \frac{f'(x)}{a + f^2(x)} \, dx = \frac{\arctan\left(\frac{f(x)}{\sqrt{a}}\right)}{\sqrt{a}} + k$
28. $\int \frac{f'(x)}{a - f^2(x)} \, dx = \frac{\mathrm{arctanh}\left(\frac{f(x)}{\sqrt{a}}\right)}{\sqrt{a}} + k$

Una integral se dirá que es *elemental* o *inmediata* si se puede calcular haciendo uso de esta tabla.

Ejemplo 1: Resolver las siguientes integrales inmediatas

1. $\int (-2x^6 + 7x^3 - 1) \, dx$

$$\int(-2x^6+7x^3-1)\,dx = -2\int x^6\,dx + 7\int x^3\,dx - \int dx = -2\,\frac{x^7}{7} + 7\,\frac{x^4}{4} - x + k$$
$$= -\frac{2}{7}x^7 + \frac{7}{4}x^4 - x + k$$

2. $\int(11x-5)^7\,dx$

   Para resolver esta integral inmediata, sólo hay que darse cuenta de que prácticamente tengo en el integrando a $f(x) = 11x - 5$ y su derivada $f'(x) = 11$,

$$\int(11x-5)^7\,dx = \frac{1}{11}\int 11(11x-5)^7\,dx = \frac{1}{11}\,\frac{(11x-5)^8}{8} + k = \frac{1}{88}(11x-5)^8 + k$$

3. $\int \frac{1}{2x+3}\,dx$

   Esta integral tiene como primitivas funciones $\propto \log(2x+3)$, pues en el numerador tenemos prácticamente la derivada del denominador, i.e.,

$$\int \frac{1}{2x+3}\,dx = \frac{1}{2}\int \frac{2}{2x+3}\,dx = \frac{1}{2}\log|2x+3| + k$$

4. $\int e^{7x-3}\,dx$

   La derivada de la función en el exponente $f(x) = 7x - 3$ es $f'(x) = 7$, de forma que,

$$\int e^{7x-3}\,dx = \frac{1}{7}\int 7\,e^{7x-3}\,dx = \frac{1}{7}\,e^{7x-3} + k$$

5. $\int \frac{x}{2-x^2}\,dx$

   Prácticamente en el numerador está la derivada de la función en el denominador, dado que $f(x) = 2 - x^2$ y $f'(x) = -2x$. Luego sólo falta multiplicar y dividir por -2,

$$\int \frac{x}{2-x^2}\,dx = -\frac{1}{2}\int \frac{-2\,x}{2-x^2}\,dx = -\frac{1}{2}\log|2-x^2| + k$$

6. $\int x\tan(-8x^2+6)\,dx$

   La función en el argumento de la tangente, $f(x) = -8x^2 + 6$, tiene como derivada $f'(x) = -16x$, de forma que sólo resta, para conseguir que en el integrando aparezca $f'(x)$, multiplicar y dividir por -16,

$$\int x\tan(-8x^2+6)\,dx = -\frac{1}{16}\int -16\,x\tan(-8x^2+6)\,dx$$
$$= \frac{1}{16}\log|\cos(-8x^2+6)| + k$$

7. $\int \frac{1}{\sin^2(7x)}\,dx$
La derivada de la función en el argumento de la función seno es $f(x) = 7x$, siendo su derivada $f'(x) = 7$, luego

$$\int \frac{1}{\sin^2(7x)}\,dx = \frac{1}{7}\int \frac{7}{\sin^2(7x)}\,dx = -\frac{1}{7}\operatorname{cotan}(7x) + k$$

8. $\int \frac{1}{x^2-6x+9}\,dx$
A primera vista no parece una integral inmediata, pero basta darse cuenta de que $x^2 - 6x + 9 = (x-3)^2$, donde $f(x) = x - 3$ está elevada a -2 y su derivada es $f'(x) = 1$, luego la integral está prácticamente resuelta

$$\int \frac{1}{x^2-6x+9}\,dx = \int \frac{1}{(x-3)^2}\,dx = \int (x-3)^{-2}\,dx = \frac{(x-3)^{-1}}{-1} + k$$
$$= -\frac{1}{x-3} + k$$

9. $\int \frac{1}{\sqrt{x+3}-\sqrt{x+2}}\,dx$
En este caso, conviene multiplicar y dividir por el conjugado de la expresión en el denominador del integrando, lo que probablemente simplifique la integral y desvele su naturaleza inmediata. Vamos a ver,

$$\int \frac{1}{\sqrt{x+3}-\sqrt{x+2}}\,dx = \int \frac{1}{\sqrt{x+3}-\sqrt{x+2}}\,\frac{\sqrt{x+3}+\sqrt{x+2}}{\sqrt{x+3}+\sqrt{x+2}}\,dx$$
$$= \int \frac{\sqrt{x+3}+\sqrt{x+2}}{(x+3)-(x+2)}\,dx = \int (\sqrt{x+3}+\sqrt{x+2})\,dx$$
$$= \int \sqrt{x+3}\,dx + \int \sqrt{x+2}\,dx$$
$$= \int (x+3)^{\frac{1}{2}}\,dx + \int (x+2)^{\frac{1}{2}}\,dx$$
$$= \frac{(x+3)^{\frac{3}{2}}}{\frac{3}{2}} + \frac{(x+2)^{\frac{3}{2}}}{\frac{3}{2}} + k$$
$$= \frac{2}{3}\left(\sqrt{(x+3)^3} + \sqrt{(x+2)^3}\right) + k$$

10. $\int \frac{1}{x(\log x)^2}\,dx$
En este caso, $f(x) = \log x$ siendo su derivada $f'(x) = \frac{1}{x}$ y ambas funciones aparecen en el integrando, de modo que

$$\int \frac{1}{x(\log x)^2}\,dx = \int \frac{1}{x}(\log x)^{-2}\,dx = \frac{(\log x)^{-1}}{-1} + k = -\frac{1}{\log x} + k$$

11. $\int \frac{1}{x\sqrt{1-(\log x)^2}}\,dx$

Considerando $f(x) = \log x$ tenemos que su derivada es $f'(x) = \frac{1}{x}$ y dado que $f(x)$ aparece elevada al cuadrado dentro de la raíz cuadrada, se tiene que

$$\int \frac{1}{x\sqrt{1-(\log x)^2}}\,dx = \int \frac{\frac{1}{x}}{\sqrt{1-(\log x)^2}}\,dx = \arcsin(\log x) + k$$

4.1.1. Técnicas de resolución de integrales elementales

Integrales de funciones racionales

Una integral **racional** es de la forma

$$\int \frac{N(x)}{D(x)}\,dx = \int \frac{p_n x^n + p_{n-1}x^{n-1} + \ldots + p_1 x + p_0}{q_m x^m + q_{m-1}x^{m-1} + \ldots + q_1 x + q_0}\,dx \tag{4.8}$$

donde $p_i, q_j \in \mathbb{R},\ i = 0, \ldots n,\ j = 0, \ldots, m$, $n, m \in \mathbb{N}$.
A la hora de resolver este tipo de integrales el procedimiento es el siguiente:

i) Si $n \geq m \Longrightarrow$ calcular $\frac{N(x)}{D(x)}$, i.e,

$$\frac{N(x)}{D(x)} = C(x) + \frac{R(x)}{D(x)}, \qquad \deg(R(x)) = r < m$$

y la integral queda

$$\int \frac{N(x)}{D(x)}\,dx = \int \left(C(x) + \frac{R(x)}{D(x)}\right)\,dx = \underbrace{\int C(x)\,dx}_{I_1} + \underbrace{\int \frac{R(x)}{D(x)}\,dx}_{I_2} \tag{4.9}$$

La integral I_1 es inmediata, pues se trata de la integral de un polinimio.
La integral I_2 sigue siendo una integral racional, pero ahora el grado del numerador es menor que el grado del denominador.

Nota 6:
Si en la integral original (4.8) ocurre que $n < m$, directamente se comienza con el siguiente paso, ii)

ii) Comprobar si $I_2 = \int \frac{R(x)}{D(x)}\,dx$ es una integral inmediata perteneciente a uno de estos tres tipos de la tabla (4.1):

a) $\int \frac{f'(x)}{f(x)}\,dx = \log|f(x)| + k$

b) $\int f'(x) f^{\alpha}(x)\, dx = \frac{f^{\alpha+1}(x)}{\alpha+1} + k$

c) $\int \frac{f'(x)}{a+f^2(x)}\, dx = \frac{\arctan\left(\frac{f(x)}{\sqrt{a}}\right)}{\sqrt{a}} + k$

iii) En el caso de que I_2 no sea inmediata, se aplicará la técnica de **descomposición en fracciones simples**, con la idea de transformar I_2 en una suma de integrales elementales. En concreto, las integrales resultantes pertenecerán a uno de los tres tipos del apartado ii). A continuación se mostrarán los posibles casos que pueden ocurrir a la hora de aplicar esta técnica:

(a) $I_2 = \int \frac{R(x)}{(x-a)^m}\, dx$

Aplicando la descomposición en fracciones simples, el integrando queda

$$\frac{R(x)}{(x-a)^m} = \frac{A_1}{x-a} + \frac{A_2}{(x-a)^2} + \frac{A_3}{(x-a)^3} + \ldots + \frac{A_m}{(x-a)^m}, \tag{4.10}$$

para ciertos coeficientes $A_i \in \mathbb{R},\ i = 1 \ldots m$

(b) $I_2 = \int \frac{R(x)}{(x-a_1)(x-a_2)(x-3)\cdots(x-a_m)}\, dx,\ a_i \neq a_j\ \forall i, j = 1, \ldots, m$

Aplicando la descomposición en fracciones simples, el integrando queda

$$\frac{R(x)}{(x-a_1)(x-a_2)(x-3)\cdots(x-a_m)} = \frac{A_1}{x-a_1} + \frac{A_2}{x-a_2} + \frac{A_3}{x-a_3} + \ldots + \frac{A_m}{x-a_m}, \tag{4.11}$$

para ciertos coeficientes $A_i \in \mathbb{R},\ i = 1 \ldots m$

(c) $I_2 = \int \frac{R(x)}{(x-a_1)^{m_1}(x-a_2)^{m_2}\cdots(x-a_M)^{m_M}}\, dx,\ a_i \neq a_j\ \forall i, j = 1, \ldots, M,$
$m = m_1 + m_2 + \ldots + m_M$

Aplicando la descomposición en fracciones simples, el integrando queda

$$\begin{aligned} &\frac{R(x)}{(x-a_1)^{m_1}(x-a_2)^{m_2}\cdots(x-a_M)^{m_M}} \\ &= \frac{A_1}{x-a_1} + \ldots + \frac{A_{m_1}}{(x-a_1)^{m_1}} + \ldots + \frac{B_1}{x-a_2} + \ldots + \frac{B_{m_2}}{(x-a_2)^{m_2}} + \ldots \\ &\quad + \frac{C_1}{x-a_M} + \ldots + \frac{C_{m_M}}{(x-a_M)^{m_M}} \end{aligned} \tag{4.12}$$

para ciertos coeficientes $A_{i_1}, B_{i_2}, \ldots, C_{i_M} \in \mathbb{R},\ i_j = 1 \ldots m_j, j = 1, \ldots, M$

(d) $I_2 = \int \frac{R(x)}{(x^2+bx+c)(x-a_1)^{m_1}\cdots(x-a_M)^{m_M}}\, dx$ donde $x^2 + bx + c$ no tiene raíces reales y $a_i \neq a_j\ \forall i, j = 1, \ldots, M$

Aplicando la descomposición en fracciones simples, el integrando queda

$$\begin{aligned} \frac{R(x)}{(bx^2+cx+d)(x-a_1)^{m_1}\cdots(x-a_M)^{m_M}} &= \frac{Bx+C}{x^2+bx+c} \\ + \frac{A_1^{(1)}}{x-a_1} + \ldots + \frac{A_{m_1}^{(1)}}{(x-a_1)^{m_1}} &+ \ldots + \frac{A_1^{(M)}}{x-a_M} + \ldots + \frac{A_{m_M}^{(M)}}{(x-a_M)^{m_M}} \end{aligned} \tag{4.13}$$

donde

$$\int \frac{Bx+C}{x^2+bx+c}\,dx = \frac{B}{2}\log(x^2+bx+c) + \frac{2C-Bb}{2\sqrt{a}}\arctan\left(\frac{x+\frac{b}{2}}{\sqrt{a}}\right) + k,$$

con $a = c - \frac{b^2}{4} > 0$

Nota 7:
Para cerciorarse de que la descomposición en fracciones simple se realiza de forma correcta, el número de coeficientes A_i ha de ser siempre igual al grado del denominador, i.e., $\#A_i = m$

Ejemplo 2: Resolver las siguientes integrales racionales

1. $\int \frac{3x^2+11x-2}{x^2+4x-5}\,dx$
   En este caso, la función en el numerador $N(x) = 3x^2+11x-2$ tiene grado 2 y la función en el denominador $D(x) = x^2+4x-5$ también tiene grado 2, de forma que previo a la resolución de la integral vamos a dividir el numerador entre el denominador, lo que resulta en lo siguiente

$$\frac{3x^2+11x-2}{x^2+4x-5} = 3 + \frac{13-x}{x^2+4x-5} = 3 + \frac{13-x}{(x-1)(x+5)}$$

   donde el resto de la división $R(x) = 13-x$ tiene grado 1 que es menor que el grado del denominador. Así, la integral queda tras este primer paso de la forma

$$\int \frac{3x^2+11x-2}{x^2+4x-5}\,dx = \int \left(3 + \frac{13-x}{(x-1)(x+5)}\right)dx = 3\underbrace{\int dx}_{I_1} + \underbrace{\int \frac{13-x}{(x-1)(x+5)}\,dx}_{I_2}$$

   La integral I_1 es inmediata y la dejaremos para el final. Nos centraremos en resolver la integral I_2 y para ello haremos uso del método de descomposición en fracciones simples sobre la expresión racional en el integrando,

$$\frac{13-x}{(x-1)(x+5)} = \frac{A}{x-1} + \frac{B}{x+5} = \frac{A(x+5)+B(x-1)}{(x+5)(x-1)} = \frac{x(A+B)+5A-B}{(x+5)(x-1)}$$

   luego

$$\begin{cases} -1 = A+B \\ 13 = 5A-B \end{cases} \implies \begin{cases} A = 2 \\ B = -3 \end{cases}$$

y por tanto la integral I_2 resulta

$$I_2 = \int \frac{13-x}{(x-1)(x+5)}\,dx = \int \left(\frac{2}{x-1} + \frac{-3}{x+5}\right)\,dx = 2\int \frac{1}{x-1}\,dx - 3\int \frac{1}{x+5}\,dx$$
$$= 2\log|x-1| - 3\log|x+5|$$

Dado que

$$I_1 = \int dx = x$$

el resultado final de la integral indefinida del enunciado es

$$\int \frac{3x^2+11x-2}{x^2+4x-5}\,dx = 3\,I_1 + I_2 = 3x + 2\log|x-1| - 3\log|x+5| + k$$

2. $\int \frac{-x}{x^2+8x+16}\,dx$ Como el denominador tiene grado mayor que el numerador, pasamos directamente a aplicar el método de descomposición en fracciones simples

$$\frac{-x+0}{(x+4)^2} = \frac{A}{x+4} + \frac{B}{(x+4)^2} = \frac{A(x+4)+B}{(x+4)^2} = \frac{x\,A + 4A + B}{(x+4)^2}$$

luego

$$\begin{cases} -1 = A \\ 0 = 4A + B \end{cases} \qquad \Longrightarrow \qquad \begin{cases} A = -1 \\ B = 4 \end{cases}$$

De forma que la integral queda,

$$\int \frac{-x}{x^2+8x+16}\,dx = \int \left(\frac{-1}{x+4} + \frac{4}{(x+4)^2}\right)\,dx = -\int \frac{1}{x+4}\,dx + 4\int \frac{1}{(x+4)^2}\,dx$$
$$= -\log|x+4| + 4\frac{(x+4)^{-1}}{-1} + k = -\log|x+4| - \frac{4}{(x+4)} + k$$

3. $\int \frac{-3x^2-4x-3}{x^3-2x^2-3x}\,dx$

En primer lugar, vamos a factorizar el denominador en el integrando,

$$x^3 - 2x^2 - 3x = x(x^2-2x-3) = x(x-3)(x+1)$$

y dado que el grado del numerador es menor que el del denominador, pasamos directamente a aplicar el método de descomposición en fracciones simples,

$$\frac{-3x^2-4x-3}{x(x-3)(x+1)} = \frac{A}{x} + \frac{B}{x-3} + \frac{C}{x+1} = \frac{A(x-3)(x+1) + Bx(x+1) + Cx(x-3)}{x(x-3)(x+1)}$$

Como el denominador tiene 3 raíces $x = 0, -1, 3$ vamos a utilizar estos valores para obtener el sistetema de ecuaciones que nos permitirá calcular los valores de los coeficientes A, B, C

$$\begin{cases} x = 0 \quad \Longrightarrow \quad -3 = -3A \\ x = -1 \quad \Longrightarrow \quad -2 = 4C \\ x = 3 \quad \Longrightarrow \quad -42 = 12B \end{cases} \qquad \Longrightarrow \qquad \begin{cases} A = 1 \\ B = -\frac{7}{2} \\ C = -\frac{1}{2} \end{cases}$$

Luego la integral quedaría,

$$\begin{aligned}\int \frac{-3x^2-4x-3}{x^3-2x^2-3x}\,dx &= \int \left(\frac{1}{x} - \frac{1}{2(x+1)} - \frac{7}{2(x-3)}\right)\,dx \\ &= \int \frac{1}{x}\,dx - \frac{1}{2}\int \frac{1}{x+1}\,dx - \frac{7}{2}\int \frac{1}{x-3}\,dx \\ &= \log|x| - \frac{1}{2}\log|x+1| - \frac{7}{2}\log|x-3| + k\end{aligned}$$

4. $\int \frac{x-3}{x^4-1}\,dx$

En primer lugar, vamos a factorizar el denominador en el integrando,

$$x^4 - 1 = (x-1)(x+1)(x^2+1)$$

de forma que, como el grado del denominador es superior al del numerador, procedemos directamente a aplicar el método de descomposición en fracciones simples,

$$\begin{aligned}\frac{x-3}{(x-1)(x+1)(x^2+1)} &= \frac{A}{x-1} + \frac{B}{x+1} + \frac{Cx+D}{x^2+1} \\ &= \frac{A(x+1)(x^2+1) + B(x-1)(x^2+1) + (Cx+D)(x-1)(x+1)}{(x-1)(x+1)(x^2+1)}\end{aligned}$$

En este caso, el denominador tiene 2 raíces reales $x = 1, -1$ así que vamos a utilizar estos valores junto con otros dos más, por ejemplo $x = 0$ y $x = 2$ para obtener el sistetema de ecuaciones que nos permitirá calcular los valores de los coeficientes A, B, C, D

$$\begin{cases} x = -1 \implies -4 = -4B \\ x = 1 \implies -2 = 4A \\ x = 0 \implies -3 = A - B - D \\ x = 2 \implies -1 = 15A + 5B + 3D + 6C \end{cases} \implies \begin{cases} A = -\frac{1}{2} \\ B = 1 \\ C = -\frac{1}{2} \\ D = \frac{3}{2} \end{cases}$$

Luego la integral quedaría,

$$\begin{aligned}\int \frac{x-3}{x^4-1}\,dx &= \int \left(-\frac{1}{2(x-1)} + \frac{1}{x+1} + \frac{-\frac{1}{2}x + \frac{3}{2}}{(x^2+1)}\right)\,dx \\ &= -\frac{1}{2}\int \frac{1}{x-1}\,dx + \int \frac{1}{x+1}\,dx - \frac{1}{2\cdot 2}\int \frac{2\,x}{1+x^2}\,dx + \frac{3}{2}\int \frac{1}{x^2+1}\,dx \\ &= -\frac{1}{2}\log|x-1| + \log|x+1| - \frac{1}{4}\log(1+x^2) + \frac{3}{2}\arctan(x) + k\end{aligned}$$

Sean $f(x)$ y $g(x)$ funciones derivables, entonces

$$\int f(x)\,dg(x) = f(x)g(x) - \int g(x)\,df(x) \tag{4.14}$$

donde $df(x) = f'(x)\,dx$ se denomina **diferencial** de la función $f(x)$

Nota 8:
El uso de la técnica de integración por partes tiene en mente que la integral resultante sea inmediata, ya sea aplicándo esta técnica una vez o un número finito de veces.

Los casos en los que es conveniente aplicar esta técnica son los siguientes:

- $\int p(x)e^{a\,x+b}\,dx$
- $\int p(x)(a\,x+b)^{\alpha}\,dx$
- $\int p(x)\sin(a\,x+b)\,dx$
- $\int p(x)\cos(a\,x+b)\,dx$

con $a, b, \alpha \in \mathbb{R}$, siendo $f(x) = p(x)$ y

- $\int p(x)\log(a\,x+b)\,dx$
- $\int p(x)\arcsin(a\,x+b)\,dx$
- $\int p(x)\arccos(a\,x+b)\,dx$
- $\int p(x)\arctan(a\,x+b)\,dx$

con $a, b, \alpha \in \mathbb{R}$, siendo $dg(x) = p(x)dx$

Ejemplo 3: Resolver las siguientes integrales aplicando el método de integración por partes

1. $\int (2x^2+x-1)e^{-\frac{x}{2}}\,dx$
   Consideramos $f(x) = 2x^2+x-1$ y $dg(x) = e^{-\frac{x}{2}}\,dx$. Entonces,

$$df(x) = (4x+1)\,dx \quad \text{y} \quad g(x) = \int e^{-\frac{x}{2}}\,dx = -2e^{-\frac{x}{2}}$$

   Así, la integral queda

$$\int (2x^2+x-1)e^{-\frac{x}{2}}\,dx = -2(2x^2+x-1)e^{-\frac{x}{2}} + 2\int (4x+1)e^{-\frac{x}{2}}\,dx$$

   La integral indefinida resultante sigue sin ser inmediata, de forma que de nuevo aplicamos el método de integración por partes con

$$f(x) = 4x+1 \quad \text{y} \quad dg(x) = e^{-\frac{x}{2}}\,dx$$

de forma que

$$df(x) = 4\,dx \quad \text{y} \quad g(x) = \int e^{-\frac{x}{2}}\,dx = -2e^{-\frac{x}{2}}$$

Sustituyendo en la integral anterior queda

$$\begin{aligned}
\int (2x^2+x-1)e^{-\frac{x}{2}}\,dx &= -2(2x^2+x-1)e^{-\frac{x}{2}} + 2\int (4x+1)e^{-\frac{x}{2}}\,dx \\
&= -2(2x^2+x-1)e^{-\frac{x}{2}} - 4(4x+1)e^{-\frac{x}{2}} + 4\int e^{-\frac{x}{2}}4\,dx \\
&= -2(2x^2+x-1)e^{-\frac{x}{2}} - 4(4x+1)e^{-\frac{x}{2}} - 32e^{-\frac{x}{2}} + k \\
&= \left(-4x^2-2x+2-16x-4-32\right)e^{-\frac{x}{2}} + k \\
&= -2\left(2x^2+9x+17\right)e^{-\frac{x}{2}} + k
\end{aligned}$$

2. $\int (3x-5)(x-2)^{\frac{1}{3}}\,dx$
   Para resolver esta integral por partes consideramos

$$f(x) = 3x-5 \quad \text{y} \quad dg(x) = (x-2)^{\frac{1}{3}}\,dx$$

de forma que

$$df(x) = 3\,dx \quad \text{y} \quad g(x) = \int (x-2)^{\frac{1}{3}}\,dx = \frac{(x-2)^{\frac{4}{3}}}{\frac{4}{3}} = \frac{3}{4}(x-2)^{\frac{4}{3}}$$

Sustituyendo en la integral anterior queda

$$\begin{aligned}
\int (3x-5)(x-2)^{\frac{1}{3}}\,dx &= \frac{3}{4}(x-2)^{\frac{4}{3}}(3x-5) - \frac{3}{4}\int (x-2)^{\frac{4}{3}}3\,dx \\
&= \frac{3}{4}(x-2)^{\frac{4}{3}}(3x-5) - \frac{9}{4}\frac{(x-2)^{\frac{7}{3}}}{\frac{7}{3}} + k \\
&= \frac{3}{4}(x-2)^{\frac{4}{3}}(3x-5) - \frac{27}{28}(x-2)^{\frac{7}{3}} + k \\
&= \frac{3}{4}(x-2)^{\frac{4}{3}}\left[(3x-5) - \frac{9}{7}(x-2)^{\frac{3}{3}}\right] + k \\
&= \frac{3}{4}(x-2)^{\frac{4}{3}}\left[(3x-5) - \frac{9}{7}(x-2)\right] + k \\
&= \frac{3}{28}(x-2)^{\frac{4}{3}}(12x-17) + k
\end{aligned}$$

3. $\int x^3\cos(x^2)\,dx$
   En este caso,

$$f(x) = x^2 \quad \text{y} \quad dg(x) = x\cos(x^2)\,dx$$

luego

$$df(x) = 2x\,dx \quad \text{y} \quad g(x) = \int x\cos(x^2)\,dx = \frac{1}{2}\sin(x^2)$$

Así la integral queda,

$$\int x^3\cos(x^2)\,dx = \frac{1}{2}x^2\sin(x^2) - \int x\sin(x^2)\,dx = \frac{1}{2}x^2\sin(x^2) + \frac{1}{2}\cos(x^2) + k$$

4. $\int (\arcsin(x))^2\,dx$

   Para resolver esta integral conviene hacer
$$f(x) = (\arcsin(x))^2 \quad \text{y} \quad dg(x) = dx$$
   luego
$$df(x) = 2\arcsin(x)\frac{1}{\sqrt{1-x^2}} \quad \text{y} \quad g(x) = \int dx = x$$
   De forma que la integral queda
$$\int (\arcsin(x))^2\,dx = x(\arcsin(x))^2 - 2\int \arcsin(x)\frac{x}{\sqrt{1-x^2}}\,dx$$
   Vamos de nuevo a aplicar el método de integración por partes a la integral resultante haciendo
$$f(x) = \arcsin(x) \quad \text{y} \quad dg(x) = \frac{x}{\sqrt{1-x^2}}\,dx$$
   luego
$$df(x) = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}\,dx \quad \text{y} \quad g(x) = \int \frac{x}{\sqrt{1-x^2}}\,dx = -\frac{1}{2}\frac{\sqrt{1-x^2}}{\frac{1}{2}} = -\sqrt{1-x^2}$$
   De forma que,
$$\begin{aligned}\int (\arcsin(x))^2\,dx &= x(\arcsin(x))^2 - 2\int \arcsin(x)\frac{x}{\sqrt{1-x^2}}\,dx\\ &= x(\arcsin(x))^2 + 2\arcsin(x)\sqrt{1-x^2} - 2\int \frac{\sqrt{1-x^2}}{\sqrt{1-x^2}}\,dx\\ &= x(\arcsin(x))^2 + 2\arcsin(x)\sqrt{1-x^2} - 2\int dx\\ &= x(\arcsin(x))^2 + 2\arcsin(x)\sqrt{1-x^2} - 2x + k\end{aligned}$$

5. $\int (5x^2-3x+11)\log(x)\,dx$

   Para aplicar integración por partes a esta integral consideramos,
$$f(x) = \log(x) \quad \text{y} \quad dg(x) = (5x^2-3x+11)\,dx$$
   donde
$$df(x) = \frac{1}{x}\,dx \quad \text{y} \quad g(x) = \int (5x^2-3x+11)\,dx = \frac{5}{3}x^3 - \frac{3}{2}x^2 + 11x$$
   De forma que la integral queda,
$$\begin{aligned}\int (5x^2-3x+11)\log(x)\,dx &= \left(\frac{5}{3}x^3 - \frac{3}{2}x^2 + 11x\right)\log(x) - \int \frac{\frac{5}{3}x^3 - \frac{3}{2}x^2 + 11x}{x}\,dx\\ &= \left(\frac{5}{3}x^3 - \frac{3}{2}x^2 + 11x\right)\log(x) - \int \left(\frac{5}{3}x^2 - \frac{3}{2}x + 11\right)dx\\ &= \left(\frac{5}{3}x^3 - \frac{3}{2}x^2 + 11x\right)\log(x) - \frac{5}{9}x^3 + \frac{3}{4}x^2 - 11x + k\end{aligned}$$

Sean f y g funciones derivables. Entonces,

$$\int f(x)\,dx \underbrace{=}_{i)\; x=g(t)\,\Rightarrow\, dx=g'(t)\,dt} \int f(g(t))g'(t)\,dt \tag{4.15}$$

Otros cambios posibles son:

ii) $t = F(x)$ iii) $F_1(x) = F_2(t)$

donde en ii) y iii) hay que despejar x en función de t para obtener dx

Nota 9:
Tras resolver la integral inmediata que resulta de realizar el cambio de variable, es necesario deshacer el cambio y expresar la función primitiva,F, en términos de la variable original, x

A continuación se presentan aquellos casos de integrales en los que la aplicación de un cambio de variable adecuado simplifica enormemente su resolución:

i) $\int f(e^x)\,dx$
Cambio de variable: $t = e^x \;\Rightarrow\; x = \log(t),\; dx = \frac{dt}{t}$
Luego,

$$\boxed{\int f(e^x)\,dx = \int \frac{f(t)}{t}\,dt}$$

ii) $\int f\left((a+bx)^{\frac{1}{r_1}}, (a+bx)^{\frac{1}{r_2}}, \ldots, (a+bx)^{\frac{1}{r_n}}\right)\,dx,\;\; r_i \in \mathbb{N},\;\; i = 1, \ldots n$
Cambio de variable: $t^m = a + bx,\;\; m = m.c.m.(r_1, r_2, \ldots, r_n)$
$\Rightarrow\;\; x = \frac{t^m}{b} - \frac{a}{b},\;\; dx = \frac{m}{b}t^{m-1}\,dt$
Luego,

$$\boxed{\int f\left((a+bx)^{\frac{1}{r_1}}, (a+bx)^{\frac{1}{r_2}}, \ldots, (a+bx)^{\frac{1}{r_n}}\right)\,dx = \int f\left(t^{\frac{m}{r_1}}, t^{\frac{m}{r_2}}, \ldots, t^{\frac{m}{r_n}}\right)\frac{m}{b}t^{m-1}\,dt}$$

iii) $\int f\left(\sqrt{a - b(x-\alpha)^2}\right)\,dx,\;\; a, b \in \mathbb{R}^+,\;\; \alpha \in \mathbb{R}$
Cambio de variable: $\sqrt{a}\sin(t) = \sqrt{b}(x - \alpha)$
$\Rightarrow\;\; x = \sqrt{\frac{a}{b}}\sin(t) + \alpha,\;\; dx = \sqrt{\frac{a}{b}}\cos(t)\,dt$
Luego,

$$\boxed{\int f\left(\sqrt{a - b(x-\alpha)^2}\right)\,dx = \int f\left(\sqrt{a}\cos(t)\right)\sqrt{\frac{a}{b}}\cos(t)\,dt}$$

iv) $\int f\left(\sqrt{a+b(x-\alpha)^2}\right)\,dx,\quad a,b\in\mathbb{R}^+,\ \alpha\in\mathbb{R}$

Cambio de variable: $\sqrt{a}\tan(t)=\sqrt{b}(x-\alpha)$

$\Rightarrow\quad x=\sqrt{\frac{a}{b}}\tan(t)+\alpha,\ dx=\sqrt{\frac{a}{b}}\frac{1}{\cos^2(t)}\,dt$

Luego,

$$\boxed{\int f\left(\sqrt{a+b(x-\alpha)^2}\right)\,dx=\int f\left(\frac{\sqrt{a}}{\cos(t)}\right)\sqrt{\frac{a}{b}}\frac{1}{\cos^2(t)}\,dt}$$

v) $\int f\left(\sqrt{b(x-\alpha)^2-a}\right)\,dx,\quad a,b\in\mathbb{R}^+,\ \alpha\in\mathbb{R}$

Cambio de variable: $\frac{\sqrt{a}}{\cos(t)}=\sqrt{b}(x-\alpha)$

$\Rightarrow\quad x=\sqrt{\frac{a}{b}}\frac{1}{\cos(t)}+\alpha,\ dx=\sqrt{\frac{a}{b}}\frac{\tan(t)}{\cos(t)}\,dt$

Luego,

$$\boxed{\int f\left(\sqrt{b(x-\alpha)^2-a}\right)\,dx=\int f\left(\sqrt{a}\tan(t)\right)\sqrt{\frac{a}{b}}\frac{\tan(t)}{\cos(t)}\,dt}$$

Ejemplo 4: Resolver las siguientes integrales aplicando el método de cambio de variable

1. $\int \frac{e^x}{e^{2x}-9}\,dx$

   En este caso, el cambio de variable a aplicar es el siguiente:

$$t=e^x\quad \text{y}\quad dt=e^x\,dx$$

   de forma que la integral queda

$$\int\frac{e^x}{e^{2x}-9}\,dx=\int\frac{1}{t^2-9}\,dt=\int\frac{1}{(t-3)(t+3)}\,dt$$

   Aplicamos ahora el método de descomposición en fracciones simples,

$$\frac{1}{(t-3)(t+3)}=\frac{A}{t-3}+\frac{B}{t+3}=\frac{A(t+3)+B(t-3)}{(t+3)(t-3)}=\frac{t(A+B)+3A-3B}{(t+3)(t-3)}$$

   de donde se tiene que

$$\begin{cases}A+B=0\\3A-3B=1\end{cases}\quad\Longrightarrow\quad\begin{cases}A=\frac{1}{6}\\B=-\frac{1}{6}\end{cases}$$

   luego

$$\int\frac{1}{(t-3)(t+3)}\,dt=\frac{1}{6}\int\left(\frac{1}{t-3}-\frac{1}{t+3}\right)\,dx=\frac{1}{6}\left(\log|t-3|-\log|t+3|\right)+k$$
$$=\frac{1}{6}\log\left|\frac{t-3}{t+3}\right|+k$$

Deshaciendo el cambio de variable, se tiene finalmente que

$$\int \frac{e^x}{e^{2x}-9}\,dx = \frac{1}{6}\log\left|\frac{e^x-3}{e^x+3}\right| + k$$

2. $\int \frac{1}{x\sqrt{1-x^2}}\,dx$
Dada la forma del integrando, el cambio de variable más conveniente es

$$\sin(t) = x \quad \text{y} \quad \cos(t)\,dt = dx$$

de forma que la integral queda

$$\begin{aligned}
\int \frac{1}{x\sqrt{1-x^2}}\,dx &= \int \frac{\cos(t)}{\sin(t)\sqrt{1-(\sin(t))^2}}\,dt = \int \frac{\cos(t)}{\sin(t)\cos(t)}\,dt \\
&= \int \frac{1}{\sin(t)}\,dt = -\log|\cot(t) + \mathrm{cosec}(t)| + k \\
&= -\log|\cot(\arcsin(x)) + \mathrm{cosec}(\arcsin(x))| + k \\
&= -\log\left|\frac{1}{x}\left(\sqrt{1-x^2}+1\right)\right| + k
\end{aligned}$$

$\cot(x) = \frac{\cos(x)}{\sin(x)}$ $\cos(x) = \sqrt{1-\sin^2(x)}$ $\mathrm{cosec}(x) = \frac{1}{\sin(x)}$ $f(f^{-1}(x)) = x$

$\cot(\arcsin(x)) + \mathrm{cosec}(\arcsin(x)) = \frac{\cos(\arcsin(x))}{\sin(\arcsin(x))} + \frac{1}{\sin(\arcsin(x))}$

$= \frac{\sqrt{1-\sin^2(\arcsin(x))}}{x} + \frac{1}{x} = \frac{\sqrt{1-x^2}}{x} + \frac{1}{x}$

$= \frac{1}{x}\left(\sqrt{1-x^2}+1\right)$

3. $\int \sin(\sqrt{x})\,dx$
El cambio de variable a realizar en este caso es

$$t = \sqrt{x} \quad \text{y} \quad dt = \frac{1}{2\sqrt{x}}\,dx \quad \Rightarrow \quad dx = 2\sqrt{x}\,dt = 2t\,dt$$

quedando la integral

$$\int \sin(\sqrt{x})\,dx = 2\int t\sin(t)\,dt$$

Ahora, aplicamos el método de integración por partes con

$$f(t) = t \quad \text{y} \quad dg(t) = \sin(t)\,dt$$

de donde

$$df(t) = dt \quad \text{y} \quad g(t) = \int \sin(t)\,dt = -\cos(t)$$

de forma que

$$\begin{aligned}
\int \sin(\sqrt{x})\,dx = 2\int t\sin(t)\,dt &= -2t\cos(t) + 2\int \cos(t)\,dt \\
&= -2t\cos(t) + 2\sin(t) + k \\
&= -2\sqrt{x}\cos(\sqrt{x}) + 2\sin(\sqrt{x}) + k
\end{aligned}$$

4. $\int \frac{1}{\sqrt{x^2+3x+3}}\,dx$
Teniendo en cuenta la forma del integrando, en primer lugar vamos a completar cuadrados en el radicando, i.e.,

$$x^2+3x+3 = \left(x+\frac{3}{4}\right)^2 + \frac{3}{4}$$

que sustituyendo en la integral queda

$$\int \frac{1}{\sqrt{x^2+3x+3}}\,dx = \int \frac{1}{\sqrt{\left(x+\frac{3}{4}\right)^2+\frac{3}{4}}}\,dx$$

y el cambio de variable que vamos a realizar es

$$t = x + \frac{3}{4} \quad \Longrightarrow \quad dt = dx$$

de forma que

$$\int \frac{1}{\sqrt{\left(x+\frac{3}{4}\right)^2+\frac{3}{4}}}\,dx = \int \frac{1}{\sqrt{t^2+\frac{3}{4}}}\,dt$$

Sobre esta última integral realizamos el cambio de variable

$$\sqrt{\frac{3}{4}}\tan(u) = t \quad \Longrightarrow \quad dt = \sqrt{\frac{3}{4}}\frac{1}{\cos^2(u)}\,du$$

que sustituyendo en la integral resulta

$$\begin{aligned}
\int \frac{1}{\sqrt{t^2+\frac{3}{4}}}\,dt &= \int \frac{1}{\sqrt{\frac{3}{4}\tan^2(u)+\frac{3}{4}}}\sqrt{\frac{3}{4}}\frac{1}{\cos^2(u)}\,du \\
&= \int \frac{1}{\sqrt{\frac{3}{4}}\sqrt{\tan^2(u)+1}}\sqrt{\frac{3}{4}}\frac{1}{\cos^2(u)}\,du = \int \frac{1}{\sec(u)}\frac{1}{\cos^2(u)}\,du \\
&= \int \frac{\cos(u)}{\cos^2(u)}\,du = \int \frac{1}{\cos(u)}\,du \\
&= \log|\sec(u)+\tan(u)| + k \\
&= \log\left|\sec\left(\arctan\left(\sqrt{\frac{4}{3}}t\right)\right) + \tan\left(\arctan\left(\sqrt{\frac{4}{3}}t\right)\right)\right| + k \\
&= \log\left|\sec\left(\arctan\left(\sqrt{\frac{4}{3}}\left(x+\frac{3}{4}\right)\right)\right) + \tan\left(\arctan\left(\sqrt{\frac{4}{3}}\left(x+\frac{3}{4}\right)\right)\right)\right| + k \\
&= \log\left|\sec\left(\arctan\left(\sqrt{\frac{4}{3}}\left(x+\frac{3}{4}\right)\right)\right) + \sqrt{\frac{4}{3}}\left(x+\frac{3}{4}\right)\right| + k
\end{aligned}$$

5. $\int \frac{1}{\cos^4(x)}\,dx$

Para resolver esta integral, consdieramos el cambio de variable

$$t = \tan(x) \quad \Longrightarrow \quad dt = \frac{1}{\cos^2(x)}\,dx$$

teniendo en cuenta que

$$\begin{aligned}
t = \tan(x) = \frac{\sin(x)}{\cos(x)} \;&\Rightarrow\; t^2 = \frac{\sin^2(x)}{\cos^2(x)} = \frac{1-\cos^2(x)}{\cos^2(x)} = \frac{1}{\cos^2(x)} - 1 \\
&\Rightarrow\; t^2+1 = \frac{1}{\cos^2(x)}
\end{aligned}$$

luego, sustituyendo en la integral queda

$$\begin{aligned}\int \frac{1}{\cos^4(x)}\,dx = \int \frac{1}{\cos^2(x)}\frac{1}{\cos^2(x)}\,dx &= \int (t^2+1)\,dt \\ &= \frac{1}{3}t^3 + t + k \\ &= \frac{1}{3}\tan^3(x) + \tan(x) + k\end{aligned}$$

Según la integral trigonométrica a resolver, a veces será conveniente emplear:

- Relaciones trigonométricas, siendo algunas de las más utilizadas:

$\sin^2(x) + \cos^2(x) = 1$	$\cos(2x) = \cos^2(x) - \sin^2(x)$
$\tan^2(x) - \sec^2(x) = -1$	$\tan(2x) = \frac{2\tan(x)}{1-\tan^2(x)}$
$\cot^2(x) - \mathrm{cosec}^2(x) = -1$	$\sin^2(x) = \frac{1-\cos(2x)}{2}$
$\sin(2x) = 2\cos(x)\sin(x)$	$\cos^2(x) = \frac{1+\cos(2x)}{2}$

- Alguno/s de los métodos mostrados con anterioridad

Existen cierta clase de integrandos de integrales trigonométricas para los que resulta conveniente hacer determinado cambio de variable o emplear alguna relación trigonométrica en particular. Estos son:

i) $\int \sin^n(x)\cos^m(x)\,dx, \qquad n, m \in \mathbb{N}$

i.A) n impar $\Rightarrow t = \cos(x),\ dt = -\sin(x)\,dx$
Luego,

$$\boxed{\int \sin^n(x)\cos^m(x)\,dx = -\int \left(1-t^2\right)^{\frac{n-1}{2}} t^m\,dt}$$

i.B) m impar $\Rightarrow t = \sin(x),\ dt = \cos(x)\,dx$
Luego,

$$\boxed{\int \sin^n(x)\cos^m(x)\,dx = \int t^n \left(1-t^2\right)^{\frac{m-1}{2}}\,dt}$$

i.C) Si n y m son pares se hará uso de las identidades trigonométricas que involucran el coseno del ángulo doble, i.e.,

$$\sin^2(x) = \frac{1-\cos(2x)}{2}, \qquad \cos^2(x) = \frac{1+\cos(2x)}{2}$$

i.D) Si n y m son impares se utilizarán i.A) o i.B). Específicamente:

- si $m < n \;\Rightarrow\; t = \sin(x)$
- si $m > n \;\Rightarrow\; t = \cos(x)$

ii) $\int R(\sin(x), \cos(x))\, dx$, i.e., integrales con funciones racionales de funciones trigonométricas

i.A) $R(-\sin(x), \cos(x)) = -R(\sin(x), \cos(x)), \;\Rightarrow\; t = \cos(x),\; dt = -\sin(x)\, dx$
Luego,

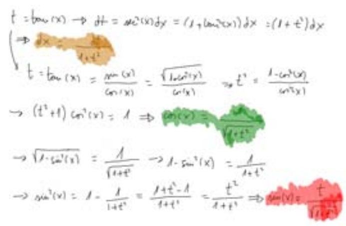
$$\boxed{\int R(\sin(x), \cos(x))\, dx = -\int R\left(\sqrt{1-t^2}, t\right) \frac{1}{\sqrt{1-t^2}}\, dt}$$

i.B) $R(\sin(x), -\cos(x)) = -R(\sin(x), \cos(x)), \;\Rightarrow\; t = \sin(x),\; dt = \cos(x)\, dx$
Luego,

$$\boxed{\int R(\sin(x), \cos(x))\, dx = \int R\left(t, \sqrt{1-t^2}\right) \frac{1}{\sqrt{1-t^2}}\, dt}$$

i.C) $R(-\sin(x), -\cos(x)) = R(\sin(x), \cos(x))$

$$t = \tan(x)\,, \;\; dx = \frac{1}{1+t^2}\, dt$$



donde

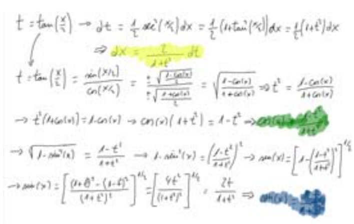
$$\cos(x) = \frac{1}{\sqrt{1+t^2}}, \qquad \sin(x) = \frac{t}{\sqrt{1+t^2}}$$

Luego,

$$\boxed{\int R(\sin(x), \cos(x))\, dx = \int R\left(\frac{t}{\sqrt{1+t^2}}, \frac{1}{\sqrt{1+t^2}}\right) \frac{1}{1+t^2}\, dt}$$

i.D) Si ninguno de los casos anteriores se cumple, siempre es posible aplicar el cambio de variable

$$t = \tan\left(\frac{x}{2}\right), \;\; dx = \frac{2}{1+t^2}\, dt$$



donde

$$\cos(x) = \frac{1-t^2}{1+t^2}, \qquad \sin(x) = \frac{2t}{1+t^2}$$

Luego,

$$\boxed{\int R(\sin(x), \cos(x))\, dx = \int R\left(\frac{2t}{1+t^2}, \frac{1-t^2}{1+t^2}\right) \frac{2}{1+t^2}\, dt}$$

Ejemplo 5: Resolver las siguientes integrales trigonométricas

1. $\int \sin^7(x)\cos^5(x)\,dx$

   Dado que $m = 5 < n = 7$ y ambos son impares, vamos a realizar el cambio de variable

$$t = \sin(x) \quad \Longrightarrow \quad dt = \cos(x)\,dx$$

   De forma que la integral queda

$$\begin{aligned}\int \sin^7(x)\cos^5(x)\,dx &= \int \sin^7(x)\cos^4(x)\cos(x)\,dx \\ &= \int t^7(1-t^2)(1-t^2)\,dt = \int (t^{11} - 2t^9 + t^7)\,dt \\ &= \frac{1}{12}t^{12} - \frac{2}{10}t^{10} + \frac{1}{8}t^8 + k \\ &= \frac{1}{12}\sin^{12}(x) - \frac{1}{5}\sin^{10}(x) + \frac{1}{8}\sin^8(x) + k\end{aligned}$$

2. $\int \tan^4(x)\text{cosec}^3(x)\,dx$

   En primer lugar, vamos a simplificar el integrando,

$$\tan^4(x)\text{cosec}^3(x) = \frac{\sin^4(x)}{\cos^4(x)}\frac{1}{\sin^3(x)} = \frac{\sin(x)}{\cos^4(x)}$$

   de forma que la integral queda

$$\int \tan^4(x)\text{cosec}^3(x)\,dx = \int \frac{\sin(x)}{\cos^4(x)}\,dx$$

   para la que escogemos el cambio de variable

$$t = \cos(x) \quad \Longrightarrow \quad dt = -\sin(x)\,dx$$

   y por tanto,

$$\int \frac{\sin(x)}{\cos^4(x)}\,dx = -\int \frac{1}{t^4}\,dt = -\frac{t^{-3}}{-3} + k = \frac{t^3}{3} + k = \frac{\cos^3(x)}{3} + k$$

3. $\int \sin^4(x)\cos^4(x)\,dx$

   Vamos a reescribir el integrando ligeramente,

$$\int (\sin^2(x))^2(\cos^2(x))^2\,dx$$

lo que nos permite hacer uso de las identidades trigonométricas del coseno del ángulo doble de forma que,

$$\begin{aligned}\int (\sin^2(x))^2(\cos^2(x))^2\,dx &= \int \left(\frac{1-\cos(2x)}{2}\right)^2\left(\frac{1+\cos(2x)}{2}\right)^2 dx\\ &= \frac{1}{16}\int (1-\cos(2x))^2(1+\cos(2x))^2\,dx\\ &= \frac{1}{16}\int (1-\cos^2(2x))^2\,dx\\ &= \frac{1}{16}\int \left(1-2\cos^2(2x)+\cos^4(2x)\right)\,dx\\ &= \frac{1}{16}\int dx - \frac{1}{8}\int \cos^2(2x)\,dx + \frac{1}{16}\int \cos^4(2x)\,dx\\ &= \frac{1}{16}\int dx - \frac{1}{8}\int \left(\frac{1+\cos(4x)}{2}\right) dx + \frac{1}{16}\int \left(\frac{3+4\cos(4x)+\cos(8x)}{8}\right) dx\\ &= \frac{1}{16}x - \frac{1}{16}x - \frac{1}{16}\frac{1}{4}\sin(4x) + \frac{3}{128}x + \frac{1}{32}\frac{1}{4}\sin(4x) + \frac{1}{128}\frac{1}{8}\sin(8x) + k\\ &= \frac{3}{128}x - \frac{1}{128}\sin(4x) + \frac{1}{1024}\sin(8x) + k\end{aligned}$$

4. $\int \frac{\sin^2(x)\cos^5(x)}{\tan^3(x)}\,dx$

Antes de nada, vamos a simplificar la expresión en el integrando

$$\frac{\sin^2(x)\cos^5(x)}{\tan^3(x)} = \frac{\sin^2(x)\cos^5(x)}{\frac{\sin^3(x)}{\cos^3(x)}} = \frac{\cos^8(x)}{\sin(x)}$$

de forma que la integral queda

$$\int \frac{\sin^2(x)\cos^5(x)}{\tan^3(x)}\,dx = \int \frac{\cos^8(x)}{\sin(x)}\,dx$$

de manera que el cambio de variable que vamos a aplicar es

$$t=\cos(x) \quad\Longrightarrow\quad dt=-\sin(x)\,dx \;\Rightarrow\; dx=-\frac{dt}{\sin(x)}=-\frac{dt}{\sqrt{1-t^2}}$$

que llevado a la integral resulta

$$\int \frac{\cos^8(x)}{\sin(x)}\,dx = -\int \frac{t^8}{\sqrt{1-t^2}}\frac{1}{\sqrt{1-t^2}}\,dt = -\int \frac{t^8}{1-t^2}\,dt = \int \frac{t^8}{t^2-1}\,dt$$

dado que se trata de una integral racional donde el grado del numerador es mayor que el grado del denominador, vamos a realizar el cociente de ambos polinomios de forma que obtengamos una expresión más simplificada del integrado,

$$\begin{aligned}
\int \frac{t^8}{1-t^2}\,dt &= \int \left(1 + t^2 + t^4 + t^6 + \frac{1}{2(t-1)} - \frac{1}{2(t+1)}\right)\,dx \\
&= t + \frac{1}{3}t^3 + \frac{1}{5}t^5 + \frac{1}{7}t^7 + \frac{1}{2}\log|t-1| - \frac{1}{2}\log|t+1| + k \\
&= \cos(x) + \frac{1}{3}\cos^3(x) + \frac{1}{5}\cos^5(x) + \frac{1}{7}\cos^7(x) + \frac{1}{2}\log\left|\frac{\cos(x)-1}{\cos(x)+1}\right| + k
\end{aligned}$$

5. $\int \tan^4(x)\,dx$

Reescribiendo la integral de la forma,

$$\int \tan^4(x)\,dx = \int \frac{\sin^4(x)}{\cos^4(x)}\,dx$$

el cambio de variable a aplicar más conveniente es

$$t = \tan\left(\frac{x}{2}\right) \quad\Longrightarrow\quad dx = \frac{2}{1+t^2}\,dt$$

así,

$$\begin{aligned}
\int \frac{\sin^4(x)}{\cos^4(x)}\,dx &= \int \left(\frac{\frac{2t}{1+t^2}}{\frac{1-t^2}{1+t^2}}\right)^4 \frac{2}{1+t^2}\,dt = \int \left(\frac{2t}{1-t^2}\right)^4 \frac{2}{1+t^2}\,dt \\
&= 32\int \frac{t^4}{(1-t^2)^4(1+t^2)}\,dt = 32\int \frac{t^4}{(1-t)^4(1+t)^4(1+t^2)}\,dt
\end{aligned}$$

Al tratarse de una integral racional donde el grado del numerador es inferior al grado del denominador, se aplicaría directamente el método de descomposición en fraccionaes simples de modo que la integral resultaría,

$$\begin{aligned}
\int \frac{\sin^4(x)}{\cos^4(x)}\,dx &= 32\int \frac{t^4}{(1-t)^4(1+t)^4(1+t^2)}\,dt \\
&= 32\int \left(\frac{1}{16(t^2+1)} - \frac{1}{32(t-1)^2} - \frac{1}{32(t+1)^2} + \frac{1}{32(t-1)^3}\right. \\
&\quad \left. - \frac{1}{32(t+1)^3} + \frac{1}{32(t-1)^4} + \frac{1}{32(t+1)^4}\right)\,dt \\
&= 2\arctan(t) + \frac{1}{t-1} + \frac{1}{t+1} - \frac{1}{2(t-1)^2} \\
&\quad + \frac{1}{2(t+1)^2} - \frac{1}{3(t-1)^3} - \frac{1}{3(t+1)^3} + k \\
&= 2\arctan(t) + \frac{2t}{(t^2-1)} - \frac{2t}{(t^2-1)^2} - \frac{2}{3}\frac{t(t^2+3)}{(t^2-1)^3} \\
&= x + \frac{1}{\tan\left(\frac{x}{2}\right)-1} + \frac{1}{\tan\left(\frac{x}{2}\right)+1} - \frac{1}{2(\tan\left(\frac{x}{2}\right)-1)^2} \\
&\quad + \frac{1}{2(\tan\left(\frac{x}{2}\right)+1)^2} - \frac{1}{3(\tan\left(\frac{x}{2}\right)-1)^3} - \frac{1}{3(\tan\left(\frac{x}{2}\right)+1)^3} + k \\
&= x + \frac{1}{3}\tan(x)(\sec^2(x)-4) + k
\end{aligned}$$

4.2. Integrales definidas

Antes de entrar al cálculo de integrales definidas, conviene mostrar los siguientes teoremas que establecen bajo qué condiciones una función $f(x)$ definida en un intervalo $[a,b] \subset \mathbb{R}$ es integrable.

Teorema 1: Continuidad $\Longrightarrow$ Integrabilidad
Sea f una función definida en un intervalo $[a,b] \subset \mathbb{R}$. Si f es continua en $[a,b]$ entonces

$$\exists \int_a^b f(x)\,dx$$

Es decir, f es integrable sobre dicho intervalo

Nota 10:
El Teorema 1 establece una condición *necesaria pero no suficiente* para asegurar la existencia de $\int_a^b f(x)\,dx$. De hecho, el conjunto de las funciones continuas sobre el intervalo $[a,b]$ es un subconjunto del conjunto de funciones integrables sobre $[a,b]$

Teorema 2: Condiciones suficientes de integrabilidad
Sea f una función definida en un intervalo $[a,b]$.
Si

1. f está acotada en $[a,b]$, i.e.,

$$\exists\, m,\, M \in \mathbb{R} \quad \text{tq} \quad m \leq f(x) \leq M \quad \forall x \in [a,b]$$

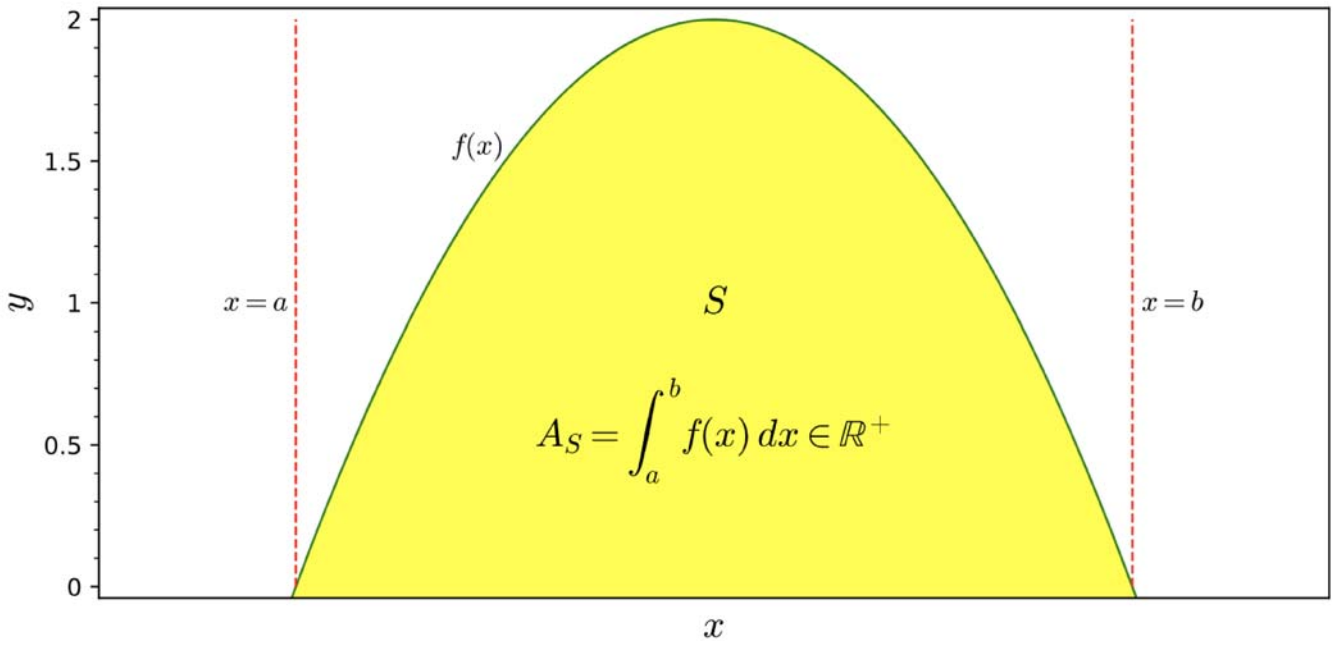
2. f tiene un número finito de discontinuidades en $[a,b]$

entonces

$$\exists \int_a^b f(x)\,dx$$

Una vez determinadas las condiciones de integrabilidad de f en $[a,b]$ cabe mencionar que, a diferencia de la integral indefinida, en general una integral definida es un **número real**. En el caso de que $f(x) \geq 0 \; \forall\, x \in [a,b]$ (esto es, que la función sea positiva) entonces la integral definida de f representa el **área** de la región encerrada por la gráfica de f y el eje x, i.e.,

A continuación se presentan propiedades de la integral definida.



Área de la región, S, encerrada por la gráfica de f y el eje x con $a \leq x \leq b$

Propiedades:

Sean f y g funciones integrables en $[a, b]$. Entonces,

1. *Igualdad de los límites de integración*: $\int_a^a f(x)\,dx = 0$
2. *Inversión de los límites*: $\int_a^b f(x)\,dx = -\int_b^a f(x)\,dx$
3. *Multiplicación por un escalar*: $\int_a^b k\,f(x)\,dx = k\int_a^b f(x)\,dx$
4. *Suma/diferencia de funciones*: $\int_a^b [f(x) \pm g(x)]\,dx = \int_a^b f(x)\,dx \pm \int_a^b g(x)\,dx$
5. *Propiedad aditiva del intervalo*: $\int_a^b f(x)\,dx = \int_a^c f(x)\,dx + \int_c^b f(x)\,dx$ con $c \in [a, b]$
6. *Integral de una función constante*: $\int_a^b k\,dx = k(b-a)$
7. Si $f(x) \leq g(x)\ \forall x \in [a, b] \Longrightarrow \int_a^b f(x)\,dx \leq \int_a^b g(x)\,dx$
8. Si $m \leq f \leq M\ \forall x \in [a, b] \Longrightarrow m(b-a) \leq \int_a^b f(x)\,dx \leq M(b-a)$

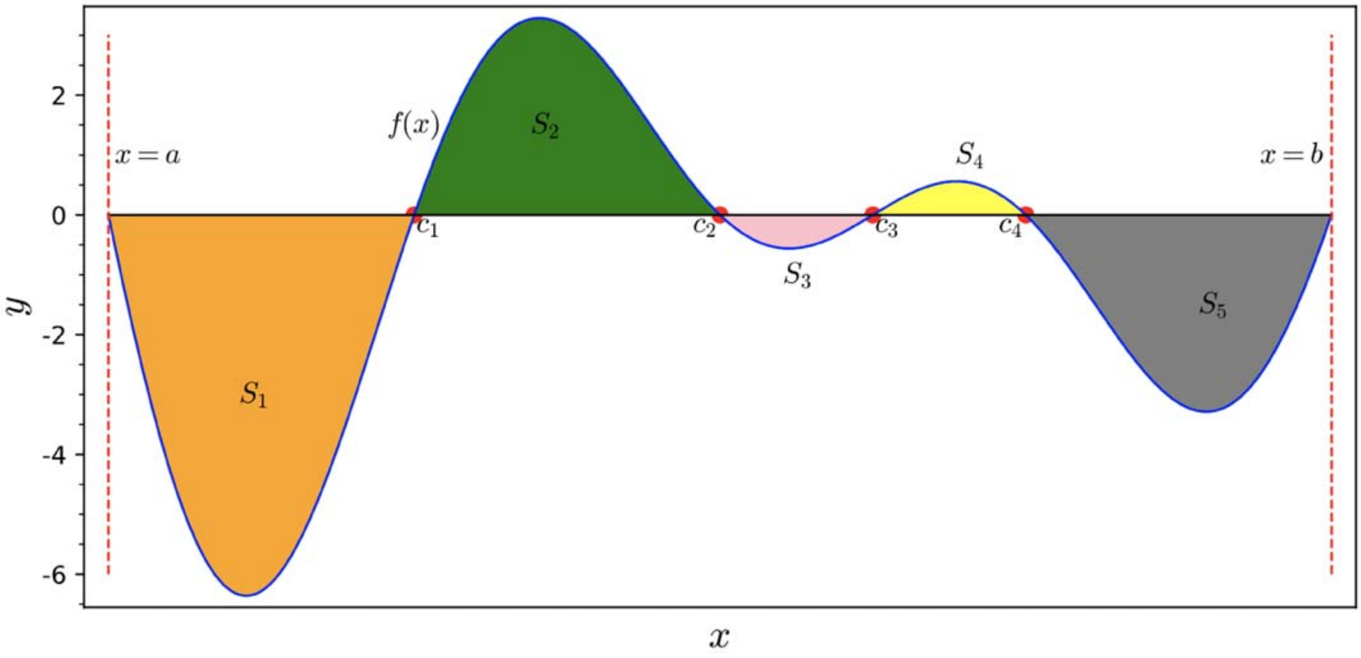
Nota 11:

Como casos particulares en la propiedad **7.** tenemos que

7.1 si $f(x) = 0$, entonces $g(x) \geq 0\ \forall x \in [a, b] \Longrightarrow \int_a^b g(x)\,dx \geq 0$

7.2 si $g(x) = 0$, entonces $f(x) \leq 0\ \forall x \in [a, b] \Longrightarrow \int_a^b f(x)\,dx \leq 0$

Si f toma valores tanto positivos como negativos a lo largo de $[a, b]$, la integral definida $\int_a^b f(x)\,dx$ no representa el área de la región acotada por f sino la denominada **área neta con signo** entre la gráfica de f y el eje x con $a \leq x \leq b$.



La integral definida de f como el área neta con signo de las regiones acotadas por la gráfica de f y el eje x

En el caso presentando en la figura anterior la integral definida resulta

$$\begin{aligned}\int_a^b f(x)\,dx &= \int_a^{c_1} f(x)\,dx + \int_{c_1}^{c_2} f(x)\,dx + \int_{c_2}^{c_3} f(x)\,dx + \int_{c_3}^{c_4} f(x)\,dx + \int_{c_4}^{b} f(x)\,dx \\ &= -A_{S_1} + A_{S_2} - A_{S_3} + A_{S_4} - A_{S_5}\end{aligned}$$

Hasta ahora hemos visto condiciones de integrabilidad, propiedades de la integral definida y qué representa esta desde un punto de vista geométrico.
A continuación, vamos a ver cómo calcular este tipo de integrales a través del llamado **Teorema fundamental del cálculo**.

Teorema 3: Teorema fundamental del cálculo

i) Sea f continua en $[a, b]$, entonces

$$F(x) = \int_a^x f(t)\,dt, \qquad a \leq x \leq b$$

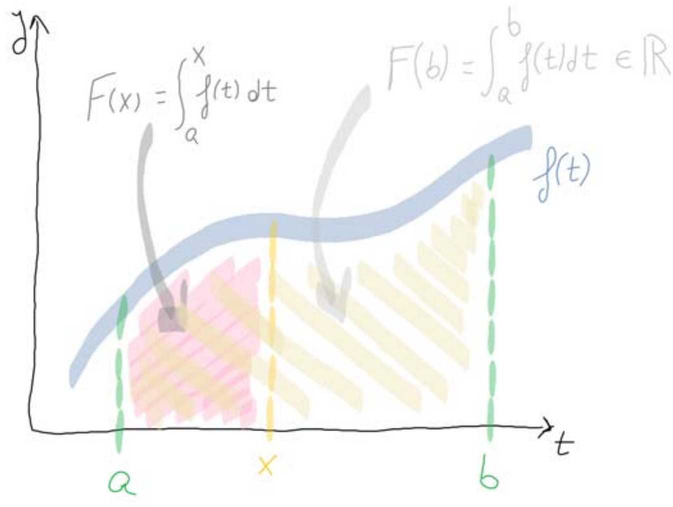
es continua en $[a, b]$, derivable en (a, b) y

$$F'(x) = \frac{d}{dx}\int_a^x f(t)\,dt = f(x)$$

ii) Sea f continua en $[a, b]$, entonces

$$\int_a^b f(x)\,dx = F(b) - F(a)$$

donde $F(x)$ es una función primitiva de f, esto es, $F' = f$



Nota 12:

La parte i) del Teorema establece que si se integra f y posteriormente se deriva, se regresa de nuevo a f. Esto pone de manifiesta la relación inversa que existe entre el operador integral y el operador derivada.

La parte ii) del Teorema establece una forma de calcular la integral definida de una función f a través de una de sus funciones antiderivada.

Nota 13:

En particular, los resultados de las integrales definidas se basan todos en la versión ii) del Teorema fundamental del cálculo

Ejemplo 6: Resolver las siguientes integrales definidas

1. $\int_{-1}^{2} (x^3 - 2x)\, dx$

$$\begin{aligned}\int_{-1}^{2} (x^3 - 2x)\, dx &= \int_{-1}^{2} x^3\, dx - 2\int_{-1}^{2} x\, dx = \frac{1}{4}x^4\Big|_{-1}^{2} - x^2\Big|_{-1}^{2} \\ &= \frac{1}{4}(2^4 - (-1)^4) - (2^2 - (-1)^2) = \frac{3}{4}\end{aligned}$$

2. $\int_{1}^{9} \frac{x-1}{\sqrt{x}}\, dx$

$$\begin{aligned}\int_{1}^{9} \frac{x-1}{\sqrt{x}}\, dx &= \int_{1}^{9} \frac{x}{\sqrt{x}}\, dx - \int_{1}^{9} \frac{1}{\sqrt{x}}\, dx = \int_{1}^{9} \sqrt{x}\, dx - \int_{1}^{9} \frac{1}{\sqrt{x}}\, dx \\ &= \frac{x^{\frac{3}{2}}}{\frac{3}{2}}\Bigg|_{1}^{9} - \frac{x^{\frac{1}{2}}}{\frac{1}{2}}\Bigg|_{1}^{9} = \frac{2}{3}(9^{\frac{3}{2}} - 1) - 2(9^{\frac{1}{2}} - 1) = \frac{40}{3}\end{aligned}$$

3. $\int_{0}^{4} (2\sin(x) - e^x)\, dx$

$$\begin{aligned}\int_{0}^{4} (2\sin(x) - e^x)\, dx &= 2\int_{0}^{4} \sin(x)\, dx - \int_{0}^{4} e^x\, dx = 2(-\cos(x))\Big|_{0}^{4} - e^x\Big|_{0}^{4} \\ &= 2(-\cos(4) - (-\cos(0))) - (e^4 - e^0) = -2\cos(4) - e^4 + 3\end{aligned}$$

4. $\int_{\frac{1}{\sqrt{2}}}^{\sqrt{2}} \frac{7}{1+x^2}\, dx$

$$\int_{\frac{1}{\sqrt{2}}}^{\sqrt{2}} \frac{7}{1+x^2}\,dx = 7\int_{\frac{1}{\sqrt{2}}}^{\sqrt{2}} \frac{1}{1+x^2}\,dx = 7\arctan(x)\Big|_{\frac{1}{\sqrt{2}}}^{\sqrt{2}}$$
$$= 7\left(\arctan(\sqrt{2}) - \arctan\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)\right)$$

5. $\int_{\frac{1}{5}}^{\frac{1}{\sqrt{5}}} \frac{3}{\sqrt{1-x^2}}\,dx$

$$\int_{\frac{1}{5}}^{\frac{1}{\sqrt{5}}} \frac{3}{\sqrt{1-x^2}}\,dx = 3\int_{\frac{1}{5}}^{\frac{1}{\sqrt{5}}} \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}\,dx = 3\arcsin(x)\Big|_{\frac{1}{5}}^{\frac{1}{\sqrt{5}}}$$
$$= 3\left(\arcsin\left(\frac{1}{\sqrt{5}}\right) - \arcsin\left(\frac{1}{5}\right)\right)$$

6. $\int_{-\frac{1}{3}}^{2} \frac{5x}{x+1}\,dx$

$$\int_{-\frac{1}{3}}^{2} \frac{5x}{x+1}\,dx = 5\int_{-\frac{1}{3}}^{2} \frac{x}{x+1}\,dx = 5\int_{-\frac{1}{3}}^{2} \left(1 - \frac{1}{1+x}\right)\,dx$$
$$= 5\int_{-\frac{1}{3}}^{2} dx - 5\int_{-\frac{1}{3}}^{2} \frac{1}{1+x}\,dx = 5\,x\Big|_{-\frac{1}{3}}^{2} - 5\log|x+1|\Big|_{-\frac{1}{3}}^{2}$$
$$= 5\left(2 - \left(-\frac{1}{3}\right)\right) - 5\left(\log|2+1| - \log\left|-\frac{1}{3}+1\right|\right)$$
$$= \frac{35}{3} - 5\log\left(\frac{9}{2}\right)$$

7. $\int_0^7 |x-3|\,dx$

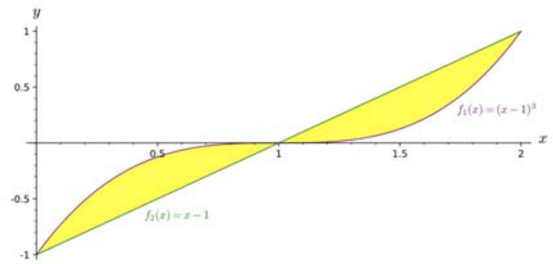
$$\int_0^7 |x-3|\,dx = \int_0^3 -(x-3)\,dx + \int_3^7 (x-3)\,dx$$
$$= \int_0^3 (-x+3)\,dx + \int_3^7 (x-3)\,dx$$
$$= -\frac{1}{2}x^2\Big|_0^3 + 3\,x\Big|_0^3 + \frac{1}{2}x^2\Big|_3^7 - 3\,x\Big|_3^7$$
$$= -\frac{1}{2}(3^2-0) + 3(3-0) + \frac{1}{2}(7^2-3^2) - 3(7-3) = \frac{25}{2}$$

En el caso de que la región del plano, S, cuya área se quiere calcular, esté comprendida entre la gráfica de dos funciones, f y g, continuas y las rectas verticales $x = a$ y $x = b$, se tiene que

- si $f(x) \leq g(x) \Longrightarrow A_S = \int_a^b [g(x) - f(x)]\, dx$
- si $f(x) \geq g(x) \Longrightarrow A_S = \int_a^b [f(x) - g(x)]\, dx$

Nota 13:
Si la región se encuentra acotada entre las gráficas de dos funciones, f y g, que intersectan, los extremos del intervalo $[a, b]$ que proporcionan los límites de integración de la variable independiente, x, no se conocen *a priori* y habría que determinarlos calculando los puntos de intersección de ambas curvas. Estos se obtienen resolviendo la ecuación $f(x) = g(x)$

Ejemplo 7: Calcular el área neta de la región acotada entre las gráficas de las funciones $f_1(x) = (x-1)^3$ y
$f_2(x) = x - 1$



Dado que se trata de calcular el área de la región acotada por las curvas dadas en el enunciado, lo primero que vamos a hacer es determinar sus puntos de intersección, i.e., $f_1(x) = (x-1)^3 = f_2(x) = x - 1$. Así,

$$\begin{aligned}(x-1)^3 = x - 1 \quad &\Longrightarrow \quad (x-1)^3 - (x-1) = 0 \quad \Longrightarrow \quad (x-1)[(x-1)^2 - 1] = 0\\ &\Longrightarrow \quad (x-1)(x^2 - 2x + 1 - 1) = 0 \quad \Longrightarrow \quad (x-1)(x^2-2x) = 0\\ &\Longrightarrow \quad (x-1)(x-2)x = 0\\ &\Longrightarrow \quad \begin{cases} x_1 = 0 \\ x_2 = 1 \\ x_3 = 2 \end{cases}\end{aligned}$$

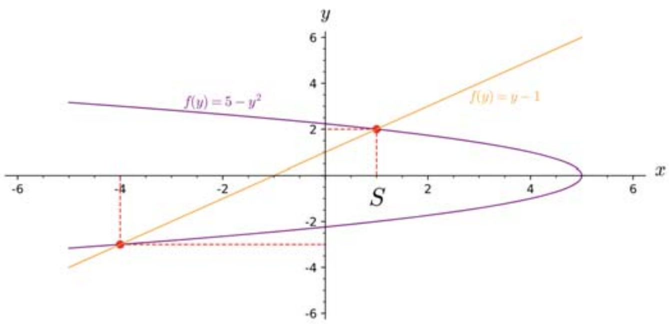
Luego el intervalo de integración es $[0, 2]$ donde:

- $\forall x \in [0, 1] \Longrightarrow f_1(x) \geq f_2(x)$
- $\forall x \in [1, 2] \Longrightarrow f_2(x) \geq f_1(x)$

De forma que

$$
\begin{aligned}
A_S &= \int_0^1 [f_1(x) - f_2(x)]\,dx + \int_1^2 [f_2(x) - f_1(x)]\,dx \\
&= \int_0^1 \left[(x-1)^3 - x\right]\,dx + \int_1^2 \left[x - (x-1)^3\right]\,dx \\
&= \int_0^1 (x-1)^3\,dx - \int_0^1 x\,dx + \int_1^2 x\,dx - \int_1^2 (x-1)^3\,dx \\
&= \frac{1}{4}(x-1)^4\Big|_0^1 - \frac{1}{2}x^2\Big|_0^1 + \frac{1}{2}x^2\Big|_1^2 - \frac{1}{4}(x-1)^4\Big|_1^2 \\
&= \frac{1}{4}(0-1) - \frac{1}{2}(1-0) + \frac{1}{2}(4-1) - \frac{1}{4}(1-0) \\
&= \frac{1}{2}
\end{aligned}
$$

Ejemplo 8: Calcular el área de la región, S, acotada por las gráficas de las funciones $f_1(y) = 5 - y^2$ y $f_2(y) = y - 1$



En este caso consideramos como la variable independiente y, siendo x la variable dependiente. Dado que lo que se pide es calcular el área de la región acotada por la gráfica de ambas funciones, hemos de hallar los puntos de intersección entre ellas. Así,

$$
\begin{cases} x = f_1(y) = 5 - y^2 \\ x = f_2(y) = y - 1 \end{cases} \implies 5 - y^2 = y - 1 \implies y^2 + y - 6 = 0 \implies \begin{cases} y = -3 \\ y = 2 \end{cases}
$$

Una vez determinados los límites de integración para y podemos pasar a calcular el área de S,

$$
\begin{aligned}
A_S &= \int_{-3}^2 \left[(5-y^2) - (y-1)\right]\,dy = \int_{-3}^2 \left(-y^2 - y + 6\right)\,dy \\
&= -\frac{1}{3}y^3\Big|_{-3}^2 - \frac{1}{2}y^2\Big|_{-3}^2 + 6y\Big|_{-3}^2 = -\frac{1}{3}(2^3 - (-3)^3) - \frac{1}{2}(2^2 - (-3)^2) + 6(2 - (-3)) \\
&= \frac{125}{6}
\end{aligned}
$$

Apéndice

Integrales impropias

Las integrales definidas implican que:

i) El intervalo de integración $[a, b]$ es finito

ii) La función del integrando f es continua en $[a, b]$

Sin embargo, puede ocurrir que uno de los extremos del intervalo o ambos sean infinitos o que la función f posea asíntotas verticales en alguno de los extremos de dicho intervalo o en algún punto en el interio del mismo. En este caso, se habla de integrales **impropias**, que se clasifican en:

a) Integrales impropias *tipo I*: límites de integración infinitos

b) Integrales impropias *tipo II*: función con asíntotas verticales en algún punto de $[a, b]$

La principal característica de este tipo de integrales, en términos de su evaluación, reside en que su evaluación final tiene lugar a través de un límite.

Integrales impropias de tipo I

1. Sea $f(x)$ continua en $[a, +\infty)$, entonces

$$\int_a^{\infty} f(x)\,dx = \lim_{b\to\infty} \int_a^b f(x)\,dx \tag{4.16}$$

2. Sea $f(x)$ continua en $(-\infty, b]$, entonces

$$\int_{-\infty}^{b} f(x)\,dx = \lim_{a\to-\infty} \int_a^b f(x)\,dx \tag{4.17}$$

3. Sea $f(x)$ continua en $(-\infty, +\infty)$, entonces

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(x)\,dx = \int_{-\infty}^{c} f(x)\,dx + \int_c^{\infty} f(x)\,dx, \qquad c \in \mathbb{R} \tag{4.18}$$

En cada uno de los casos anteriores, si el límite es **finito**, se dice que la integral impropia es **convergente**; si el límite **no existe** o es **infinito**, se dice que la integral es **divergente**

Ejemplo 9: Estudiar la convergencia de las siguientes integrales impropias de tipo I

i) $\int_0^\infty e^{-3x}\,dx$

$$\int_0^\infty e^{-3x}\,dx = \lim_{b\to+\infty}\int_0^b e^{-3x}\,dx = \lim_{b\to+\infty} -\frac{e^{-3x}}{3}\Big|_0^b = \lim_{b\to+\infty}\left(\frac{1}{3}-\frac{1}{3e^{3b}}\right) = \frac{1}{3}$$

ii) $\int_{-\infty}^{\frac{1}{2}} \sin(\pi x)\,dx$

$$\int_{-\infty}^{\frac{1}{2}} \sin(\pi x)\,dx = \lim_{a\to-\infty}\int_a^{\frac{1}{2}} \sin(\pi x)\,dx = \lim_{a\to-\infty} -\frac{1}{\pi}\cos(\pi x)\Big|_a^{\frac{1}{2}} = \lim_{a\to-\infty}\frac{1}{\pi}\cos(\pi a) \Rightarrow \nexists$$

Dado que el límite no existe (a medida que a tiene a $-\infty$ la función coseno oscila cada vez más rápido entre -1 y 1) se concluye que la integral impropia diverge, en este caso, por la no existencia del límite.

iii) $\int_{-\infty}^{\infty} \frac{r}{r^2+4x^2}\,dx,\, r>0$

Para determinar la convergencia de la integral se ha de estudiar la convergencia de las integrales

$$\int_{-\infty}^0 \frac{r}{r^2+2x^2}\,dx \quad \text{y} \quad \int_0^\infty \frac{r}{r^2+4x^2}\,dx$$

$$\begin{aligned}
\int_{-\infty}^0 \frac{r}{r^2+2x^2}\,dx &= \lim_{a\to-\infty}\int_a^0 \frac{r}{r^2+4x^2} = \lim_{a\to-\infty}\int_a^0 \frac{r}{4\left(\left(\frac{r}{2}\right)^2+x^2\right)} \\
&= \lim_{a\to-\infty}\frac{r}{4}\frac{\arctan\left(\frac{x}{\sqrt{\left(\frac{r}{2}\right)^2}}\right)}{\sqrt{\left(\frac{r}{2}\right)^2}}\Bigg|_a^0 = \lim_{a\to-\infty}\frac{1}{2}\arctan\left(\frac{2x}{r}\right)\Bigg|_a^0 \\
&= -\lim_{a\to-\infty}\frac{1}{2}\arctan\left(\frac{2a}{r}\right) = -\frac{1}{2}\arctan\left(\frac{-\infty}{r}\right) = -\frac{1}{2}\left(-\frac{\pi}{2}\right) = \frac{\pi}{4}
\end{aligned}$$

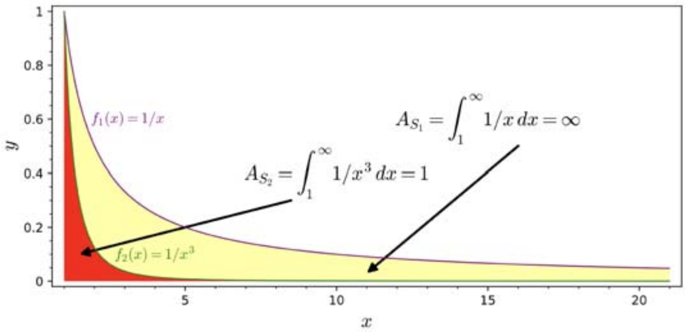
$$\begin{aligned}
\int_0^\infty \frac{r}{r^2+4x^2}\,dx &= \lim_{b\to\infty}\int_0^b \frac{r}{r^2+4x^2} = \lim_{b\to\infty}\int_0^b \frac{r}{4\left(\left(\frac{r}{2}\right)^2+x^2\right)} \\
&= \lim_{b\to\infty}\frac{r}{4}\frac{\arctan\left(\frac{x}{\sqrt{\left(\frac{r}{2}\right)^2}}\right)}{\sqrt{\left(\frac{r}{2}\right)^2}}\Bigg|_0^b = \lim_{b\to\infty}\frac{1}{2}\arctan\left(\frac{2x}{r}\right)\Bigg|_0^b \\
&= \lim_{b\to\infty}\frac{1}{2}\arctan\left(\frac{2b}{r}\right) = \frac{1}{2}\arctan\left(\frac{\infty}{r}\right) = \frac{1}{2}\left(\frac{\pi}{2}\right) = \frac{\pi}{4}
\end{aligned}$$

Como ambas integrales impropias convergen, se concluye que la integral $\int_{-\infty}^{\infty} \frac{r}{r^2+4x^2}\, dx$ converge y su valor es

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{r}{r^2+2x^2}\, dx = \frac{\pi}{4} + \frac{\pi}{4} = \frac{\pi}{2}$$

Ejemplo 10: Estudiar la convergencia de la integral

$$\int_1^{\infty} \frac{1}{x^p}\, dx, \qquad p \in \mathbb{R}$$



Vamos a estudiar dos casos por separado:

i) $p \neq 1$

$$\int_1^{\infty} \frac{1}{x^p}\, dx = \lim_{b\to\infty} \int_1^{b} \frac{1}{x^p}\, dx$$

donde

$$\int_1^{b} \frac{1}{x^p}\, dx = \frac{x^{-p+1}}{-p+1}\bigg|_1^b = \frac{1}{1-p}\left(b^{-p+1}-1\right) = \frac{1}{1-p}\left(\frac{1}{b^{p-1}}-1\right)$$

$$\int_1^{\infty} \frac{1}{x^p}\, dx = \lim_{b\to\infty} \int_1^{b} \frac{1}{x^p}\, dx = \lim_{b\to\infty} \frac{1}{1-p}\left(\frac{1}{b^{p-1}}-1\right) = \begin{cases} \frac{1}{p-1}, & p>1 \\ \infty, & p<1 \end{cases}$$

Luego, la integral impropia es convergente si $p > 1$ y divergente si $p < 1$

ii) $p = 1$

$$\int_1^{\infty} \frac{1}{x}\, dx = \lim_{b\to\infty} \int_1^{b} \frac{1}{x}\, dx$$

donde

$$\int_1^{b} \frac{1}{x}\, dx = \log(x)\Big|_1^b = \log(b) - \log(1) = \log(b)$$

$$\int_1^{\infty} \frac{1}{x}\, dx = \lim_{b\to\infty} \int_1^{b} \frac{1}{x}\, dx = \lim_{b\to\infty} \log(b) = \infty$$

Por tanto, la integral impropia es divergente si $p = 1$

En el caso de que no sea posible determinar analíticamente la convergencia de una integral impropia, puede hacerse uso del llamado *test de comparación* con integrales impropias cuya convergencia es conocida.

Test de comparación

Sean f y g funciones continuas en $[a, b]$ tales que $0 \leq f(x) \leq g(x)\ \forall\, x \in [a, b]$. Entonces,

i) Si $\int_a^\infty g(x)\, dx$ **converge**, entonces $\int_a^\infty f(x)\, dx$ **converge**

ii) Si $\int_a^\infty f(x)\, dx$ **diverge**, entonces $\int_a^\infty g(x)\, dx$ **diverge**

Ejemplo 11: Estudiar la convergencia de la integral

$$\int_2^\infty \frac{1}{\sqrt{1+x^5}}\, dx$$

Resolver analíticamente la integral $\int \frac{1}{\sqrt{1+x^5}}\, dx$ no es en absoluto trivial, por lo tanto, para determinar su convergencia aplicaremos el método de comparación.
En este caso, la función que escogemos para comparar es $g(x) = \frac{1}{x^{\frac{5}{2}}}$ dado que

$$\frac{1}{\sqrt{1+x^5}} < \frac{1}{x^{\frac{5}{2}}} \quad \forall\, x \in [2, \infty) \quad \text{y} \quad \int_2^\infty \frac{1}{x^{\frac{5}{2}}}\, dx < \infty$$

Por lo tanto, se concluye que $\int_2^\infty \frac{1}{\sqrt{1+x^5}}\, dx$ converge.

Ejemplo 12: Estudiar la convergencia de la integral

$$\int_0^\infty \frac{e^x}{\sqrt{1+e^{2x}}}\, dx$$

Para estudiar la convergencia de la integral no la resolveremos. En su lugar, aplicaremos el método de comparación. Sin embargo, previamente a su aplicación, sí que reescribiremos la integral del siguiente modo

$$\int_0^\infty \frac{e^x}{\sqrt{1+e^{2x}}}\, dx = \int_0^\infty \frac{e^x}{\sqrt{1+(e^x)^2}}\, dx = \int_1^\infty \frac{1}{\sqrt{1+u^2}}\, du$$

Esto es, se ha hecho el cambio de variable $u = e^x \to du = e^x dx$ modificando, en consecuencia, uno de los límites de integración.

Teniendo en cuenta el integrando resultante, en este caso, la función que escogemos para comparar es $g(x) = \frac{1}{1+u}$ dado que

$$\frac{1}{1+u} \leq \frac{1}{\sqrt{1+u^2}} \quad \forall\, u \in [1, \infty) \quad \text{y} \quad \int_1^\infty \frac{1}{1+u}\, du \quad \text{diverge}(*)$$

$$\left((*) \int_1^{\infty} \frac{1}{1+u}\, du = \lim_{b\to+\infty} \int_1^{b} \frac{1}{1+u}\, du = \lim_{b\to\infty} \log(1+u)\Big|_1^b \right.$$

$$\left. = \lim_{b\to+\infty} (\log(1+b) - \log(2)) = \log(\infty) - \log(2) = \infty \right)$$

Por lo tanto, se concluye que $\int_1^{\infty} \frac{1}{\sqrt{1+u^2}}\, du$ diverge, o equivalentemente, que $\int_0^{\infty} \frac{e^x}{\sqrt{1+e^{2x}}}\, dx$ diverge.

Integrales impropias de tipo II

1. Sea f continua en $(a, b]$ y discontinua en a, entonces

$$\int_a^b f(x)\, dx = \lim_{c\to a^+} \int_c^b f(x)\, dx \tag{4.19}$$

2. Sea f continua en $[a, b)$ y discontinua en b, entonces

$$\int_a^b f(x)\, dx = \lim_{c\to b^-} \int_a^c f(x)\, dx \tag{4.20}$$

3. Sea f continua en $[a, b]$ y discontinua en $c \in (a, b)$, entonces

$$\int_a^b f(x)\, dx = \int_a^c f(x)\, dx + \int_c^b f(x)\, dx \tag{4.21}$$

En cada uno de los casos anteriores, si el límite es **finito**, se dice que la integral impropia es **convergente**; si el límite **no existe** o es **infinito**, se dice que la integral es **divergente**

Ejemplo 13: Estudiar la convergencia de las integrales impropias de tipo II

i) $\int_0^1 \frac{1}{e-e^x}\, dx$

$$\int_0^1 \frac{1}{e-e^x}\, dx = \lim_{c\to 1^-} \int_0^c \frac{1}{e-e^x}\, dx = \lim_{c\to 1^-} \left(\frac{x}{e} - \frac{\log(e-e^x)}{e} \right) \Big|_0^1$$

$$= \lim_{c\to 1^-} \left(\frac{1}{e} - \frac{\log(e-e^c)}{e} + \frac{\log(e-1)}{e} \right)$$

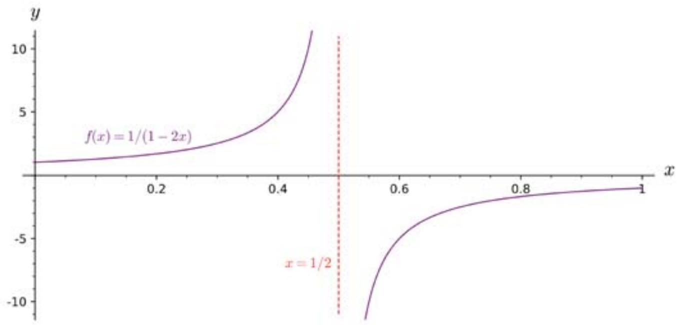
$$= \frac{\log(e-1)}{e} + \frac{1}{e} - \frac{-\infty}{e} = +\infty$$

ii) $\int_2^5 \frac{1}{\sqrt{x-2}}\,dx$

$$\int_2^5 \frac{1}{\sqrt{x-2}}\,dx = \lim_{c\to 2^+}\int_c^5 \frac{1}{\sqrt{x-2}}\,dx = \lim_{c\to 2^+} 2\sqrt{x-2}\Big|_c^5$$
$$= \lim_{c\to 2^+} 2(\sqrt{3}-\sqrt{c-2}) = 2\sqrt{3}$$

Ejemplo 14: Estudiar la convergencia de la integral impropia

$$\int_0^1 \frac{1}{1-2x}\,dx$$



La función $f(x) = \frac{1}{1-2x}$ es continua en los intervalos $\left[0,\frac{1}{2}\right) \cup \left(\frac{1}{2},1\right]$ y discontinua en $x=\frac{1}{2}$ dado que en ese punto

$$\lim_{x\to\frac{1}{2}^-} \frac{1}{1-2x} = +\infty \quad \text{y} \quad \lim_{x\to\frac{1}{2}^+} \frac{1}{1-2x} = -\infty$$

Así pues, evaluamos la integral del siguiente modo

$$\int_0^1 \frac{1}{1-2x}\,dx = \int_0^{\frac{1}{2}} \frac{1}{1-2x}\,dx + \int_{\frac{1}{2}}^1 \frac{1}{1-2x}\,dx$$
$$= \lim_{c\to\frac{1}{2}^-}\int_0^c \frac{1}{1-2x}\,dx + \lim_{c\to\frac{1}{2}^+}\int_c^1 \frac{1}{1-2x}\,dx$$

Vamos a calcular el primer límite,

$$\lim_{c\to\frac{1}{2}^-}\int_0^c \frac{1}{1-2x}\,dx = \lim_{c\to\frac{1}{2}^-} -\frac{1}{2}\log|1-2x|\Big|_0^c = -\frac{1}{2}\lim_{c\to\frac{1}{2}^-}\log|1-2c|$$
$$= \infty$$

Dado que el primer límite es infinito, la integral impropia correspondiente es divergente y no resulta necesario calcular la otra integral. Se concluye por tanto que la integral impropia $\int_0^1 \frac{1}{1-2x}\,dx$ es divergente

Otro criterio de convergencia de series: el criterio de la integral

Las integrales impropias tienen su aplicación a la hora de estudiar la convergencia de series de números reales. Específicamente, proporcionan el siguiente criterio.

Teorema 4: Criterio de la integral

Sea f una función **positiva** y **monótona decreciente** (i.e., if $x < y \Rightarrow f(x) > f(y)$) sobre $[1, \infty)$ y tq $f(n) = a_n \; \forall\, x \in \mathbb{N}$. Entonces, $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ **converge** si y sólo si

$$\int_1^{\infty} f(x)\, dx = \lim_{c \to \infty} \int_1^{c} f(x)\, dx \tag{4.22}$$

es **convergente**

Ejemplo 11: Estudiar la convergencia de la serie armónica

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$$

aplicando el criterio de la integral

Consideramos la función $f(x) = \frac{1}{x}$, que el intervalo $[1, \infty)$ cumple que es $f(x) > 0$ y monótona decreciente, tq $f(n) = \frac{1}{n} = a_n$. Tal y como establece el criterio de la integral vamos a calcular la integral impropia dada por (4.22) cuya convergencia determinará a su vez la convergencia de la serie armónica,

$$\int_1^{\infty} \frac{1}{x}\, dx = \lim_{c \to \infty} \int_1^{c} \frac{1}{x}\, dx = \lim_{c \to \infty} \log |x| \Big|_1^{c} = \lim_{c \to \infty} \log |c| = +\infty$$

Como la integral impropia es divergente, por el criterio de la integral se concluye que la serie armónica es divergente

Nota 14:

Las condiciones bajos las cuales es conveniente emplear el criterio de la integral para estudiar la convergencia de una serie son las siguientes:

1. Ninguno de los criterios de convergencia para series de términos positivos es concluyente
2. La integral de f es fácil de calcular o estimar