

Números complejos

En el cuerpo $\mathbb{R}$ de los números reales no tiene solución la ecuación $x^2 + 1 = 0$. Para resolver este problema se hace necesaria una nueva ampliación del concepto de número introduciendo un nuevo elemento, i , que verifique dicha ecuación, y construyendo un nuevo cuerpo que contenga a $\mathbb{R}$ y a este elemento.

5.1. Definición. Cuerpo de los números complejos

En el conjunto $\mathbb{R}^2$ de los pares ordenados de números reales se pueden definir las operaciones suma y producto de la forma:

$$\begin{aligned}(a, b) + (c, d) &= (a + c, b + d) \\ (a, b) \cdot (c, d) &= (ac - bd, ad + bc)\end{aligned}$$

que lo dotan de una estructura de cuerpo. Este cuerpo se denomina cuerpo $\mathbb{C}$ de los números complejos.

Además, el cuerpo $\mathbb{R}$ de los números reales es isomorfo al subcuerpo de los números complejos de la forma $(a, 0)$.

El número $(0, 1)$ verifica $(0, 1)(0, 1) = (-1, 0)$ por lo que este número, denotado por i y denominado unidad imaginaria, verifica que $i^2 = -1$.

La expresión más intuitiva de un número complejo es su forma binómica, que definimos a continuación.

5.2. Definición. Forma binómica de un número complejo

Se llama forma binómica del número complejo $z = (x, y)$ a la expresión $z = x + yi$ donde i es la unidad imaginaria, x se denomina parte real de z e y parte imaginaria de z denotándose

$$x = \operatorname{Re} z \quad y = \operatorname{Im} z$$

COMENTARIOS:

- i) El número complejo $x + yi$ se puede representar en el plano $\mathbb{R}^2$ como el punto de coordenadas cartesianas (x, y) .
- ii) El cuerpo $\mathbb{C}$ es algebraicamente cerrado, es decir toda ecuación polinómica con coeficientes complejos tiene solución en $\mathbb{C}$.
- iii) $\mathbb{C}$ no admite un orden total compatible con la estructura de cuerpo.

5.3. Operaciones elementales con números complejos

CLASES PARTICULARES, TUTORÍAS TÉCNICAS ONLINE
LLAMA O ENVÍA WHATSAPP: 689 45 44 70

- - -

ONLINE PRIVATE LESSONS FOR SCIENCE STUDENTS
CALL OR WHATSAPP: 689 45 44 70

Cartagena99

$$\frac{z_1}{z_2} = \frac{(x_1 + y_1 i)(x_2 - y_2 i)}{(x_2 + y_2 i)(x_2 - y_2 i)} = \frac{x_1 x_2 + y_1 y_2}{x_2^2 + y_2^2} + \frac{x_2 y_1 - x_1 y_2}{x_2^2 + y_2^2} i$$

En particular, el inverso del número $z = x + yi \neq 0$ es

$$\frac{1}{z} = \frac{x}{x^2 + y^2} - \frac{y}{x^2 + y^2} i$$

5.4. Potencias de la unidad imaginaria

Observemos que dado que $i^2 = -1$ las primeras potencias de la unidad imaginaria son

$$\begin{array}{llll} i^1 = i & i^2 = -1 & i^3 = -i & i^4 = 1 \\ i^5 = i & i^6 = -1 & i^7 = -i & \text{etc.} \end{array}$$

Para calcular i^n con $n \in \mathbb{Z}$ basta elevar i al resto de la división de n entre 4.

5.5. Definición. Complejo conjugado

Se llama conjugado del número complejo $z = x + yi$ al número $\bar{z} = x - yi$.

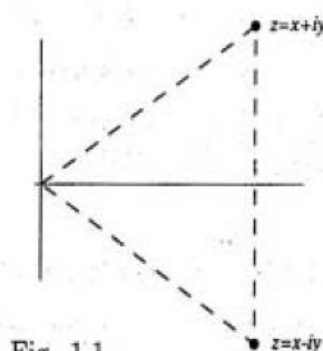


Fig. 1.1

5.6. Propiedades del conjugado

- Para todo $z \in \mathbb{C}$ se verifica $\overline{\bar{z}} = z$.
- Si $z_1, z_2 \in \mathbb{C}$ entonces $\overline{z_1 + z_2} = \bar{z}_1 + \bar{z}_2$ y $\overline{z_1 z_2} = \bar{z}_1 \cdot \bar{z}_2$.
Y si $z_2 \neq 0$, $\overline{\left(\frac{z_1}{z_2}\right)} = \frac{\bar{z}_1}{\bar{z}_2}$.
- Para todo $z \in \mathbb{C}$ se verifica $\operatorname{Re} z = \frac{z + \bar{z}}{2}$ e $\operatorname{Im} z = \frac{z - \bar{z}}{2} i$ de donde se deduce que un número complejo $z \in \mathbb{R}$ si y sólo si $z = \bar{z}$.

5.7. Definición. Módulo y argumento de un número complejo

Dado el número complejo $z = x + yi$ se define el módulo de z de la forma

$$|z| = \sqrt{x^2 + y^2}$$

y el argumento de z es un ángulo θ , denotado $\arg z$, que verifica

$$z = |z| e^{i\theta} \quad \text{y} \quad \bar{z} = |z| e^{-i\theta}$$

CLASES PARTICULARES, TUTORÍAS TÉCNICAS ONLINE
LLAMA O ENVÍA WHATSAPP: 689 45 44 70

ONLINE PRIVATE LESSONS FOR SCIENCE STUDENTS
CALL OR WHATSAPP: 689 45 44 70

Cartagena99

5.8. Propiedades del módulo y argumento

- $|z| \geq 0 \quad \forall z \in \mathbb{C}.$
- $|z| = 0 \iff z = 0.$
- $|z|^2 = z\bar{z} \quad \forall z \in \mathbb{C}$
- $|z_1 + z_2| \leq |z_1| + |z_2| \quad \forall z_1, z_2 \in \mathbb{C}$
- $|z_1 z_2| = |z_1| |z_2| \quad \forall z_1, z_2 \in \mathbb{C}$
- Si θ_1 es un argumento de z_1 y θ_2 es un argumento de z_2 entonces $\theta_1 + \theta_2$ es un argumento de $z_1 \cdot z_2$ y $\theta_1 - \theta_2$ es un argumento de $\frac{z_1}{z_2}$ cuando $z_2 \neq 0$.

5.9. Forma módulo-argumental de un número complejo

La expresión en forma módulo-argumental de un número complejo z es el par (ρ, θ) donde $\rho = |z|$ y θ es un argumento de z .

NOTAS:

- La expresión binómica de un número complejo equivale a utilizar coordenadas cartesianas en $\mathbb{R}^2$, mientras que la expresión módulo-argumental se corresponde a las coordenadas polares.

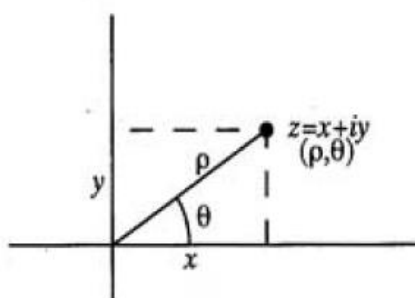


Fig. 1.2

Se verifican las relaciones del cambio de coordenadas

$$x = \rho \cos \theta$$

$$y = \rho \sin \theta$$

- Para operar con números complejos se utilizará la forma de éstos en la cual los cálculos sean más sencillos, por ejemplo el producto y el cociente de números complejos en forma módulo-argumental admiten una expresión muy simple:

$$z_1 z_2 = (\rho_1 \rho_2, \theta_1 + \theta_2)$$

CLASES PARTICULARES, TUTORÍAS TÉCNICAS ONLINE
LLAMA O ENVÍA WHATSAPP: 689 45 44 70

ONLINE PRIVATE LESSONS FOR SCIENCE STUDENTS
CALL OR WHATSAPP: 689 45 44 70

Cartagena99

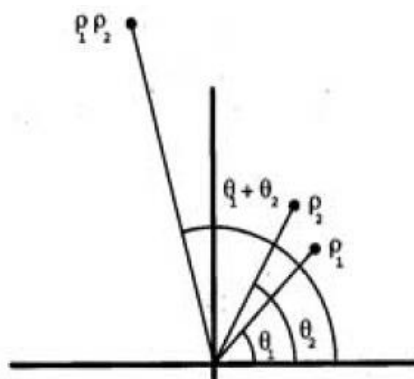


Fig. 1.3

En particular, multiplicar un número complejo z por otro de módulo 1 y argumento θ supone un giro de θ radianes.

5.10. Definición. Exponencial compleja

Dado $\varphi \in \mathbb{R}$ se define $e^{i\varphi} = \cos \varphi + i \operatorname{sen} \varphi$.

Así, dado un número complejo $z = x + yi$ la exponencial de z es

$$e^z = e^x (\cos y + i \operatorname{sen} y)$$

5.11. Teorema.

Todo número complejo z puede expresarse de la forma

$$z = \rho e^{i\theta}$$

siendo $\rho = |z|$ y θ un argumento de z .

Así, $z = x + iy = \rho e^{i\theta} = \rho(\cos \theta + i \operatorname{sen} \theta)$.

5.12. Propiedades de la exponencial compleja

- a) $e^0 = 1$.
- b) $e^z \neq 0 \quad \forall z \in \mathbb{C}$.
- c) $e^{z_1} e^{z_2} = e^{z_1 + z_2} \quad \forall z_1, z_2 \in \mathbb{C}$.
- d) $|e^z| = e^{\operatorname{Re} z} \quad \forall z \in \mathbb{C}$.
- e) $e^z = 1 \iff z = 2k\pi i \quad \text{con } k \in \mathbb{Z}$.
- f) $e^{z_1} = e^{z_2} \iff z_1 - z_2 = 2k\pi i \quad \text{con } k \in \mathbb{Z}$. (La función exponencial compleja no es inyectiva).

5.13. Potencia de un número complejo. Fórmula de De Moivre

Para calcular una potencia entera $z^n = \underbrace{z \cdot \dots \cdot z}_n$ de un número complejo puede utilizarse

CLASES PARTICULARES, TUTORÍAS TÉCNICAS ONLINE
LLAMA O ENVÍA WHATSAPP: 689 45 44 70

ONLINE PRIVATE LESSONS FOR SCIENCE STUDENTS
CALL OR WHATSAPP: 689 45 44 70

Cartagena99

es decir z^n tiene módulo ρ^n y argumento $n\theta$.

La expresión (*) se conoce como fórmula de De Moivre y, además de su utilidad en este contexto, se puede aplicar para obtener relaciones entre las razones trigonométricas de un ángulo y la de sus múltiplos enteros.

5.14. Raíces enteras de un número complejo

Dado el número complejo $z = \rho e^{i\theta} \neq 0$ existen n números w_k , $k = 0, 1, \dots, n-1$ que verifican $(w_k)^n = z$, es decir son las raíces n -ésimas de z . Además, estos números son

$$w_k = \sqrt[n]{\rho} e^{i \frac{\theta + 2k\pi}{n}} \quad k = 0, 1, \dots, n-1$$

COMENTARIO: Todas las raíces de un número complejo $z = (\rho, \theta)$ tienen el mismo módulo $\sqrt[n]{\rho}$ y sus argumentos se obtienen empezando en $\frac{\theta}{n}$ e incrementando sucesivamente $\frac{2\pi}{n}$ radianes.

Esto se puede expresar

$$w_0 = \sqrt[n]{\rho} e^{i \frac{\theta}{n}}, \quad w_k = e^{i \frac{2\pi}{n}} w_{k-1} \quad k = 1, \dots, n-1$$

5.15. Definición. Logaritmo de un número complejo

Dado el número complejo $z = (\rho, \theta) \neq 0$, un logaritmo de z es un número complejo w tal que $e^w = z$. Se denotará $w = \log z$ y se verifica que $\log z = \log \rho + i(\theta + 2k\pi)$ es decir, $\log z$ es un número complejo cuya parte real es el logaritmo (neperiano, real) del módulo de z y cuya parte imaginaria es un argumento de z .

El logaritmo principal del número complejo z es $\log z = \log \rho + i\theta$ donde θ es el argumento principal de z .

5.16. Definición. Potencias de base y exponente complejos

Sean $z, w \in \mathbb{C}$. Se define $z^w = e^{w \log z}$.

COMENTARIO: El valor z^w no es único.

PROBLEMAS RESUELTOS

13. Calcular

a) $\frac{(3-2i)(2+3i)}{(3-4i)}$

b) i^{5787}

SOLUCIÓN:

a)

CLASES PARTICULARES, TUTORÍAS TÉCNICAS ONLINE
LLAMA O ENVÍA WHATSAPP: 689 45 44 70

ONLINE PRIVATE LESSONS FOR SCIENCE STUDENTS
CALL OR WHATSAPP: 689 45 44 70

Cartagena99

Tema 2. Los números complejos

14. a) Expresar en forma módulo-argumental el número complejo $z = 1 + i$.
 b) Expresar en forma binómica los números complejos cuya forma módulo-argumental es $\left(2, \frac{\pi}{2}\right)$ y $\left(\sqrt{2}, \frac{3\pi}{4}\right)$.

SOLUCIÓN:

a) $|z| = \rho = \sqrt{1+1} = \sqrt{2}$
 $\theta = \arg z = \arctg \frac{1}{1} = \frac{\pi}{4}$ ó $\frac{\pi}{4} + \pi$.

La solución es $\theta = \frac{\pi}{4}$ ya que $1 + i$ se encuentra en el primer cuadrante.

Entonces, $z = 1 + i = \left(\sqrt{2}, \frac{\pi}{4}\right)$.

b) $z = \left(2, \frac{\pi}{2}\right) = x + iy$, siendo $x = 2 \cos \frac{\pi}{2} = 0$, $y = 2 \sin \frac{\pi}{2} = 2$. Por tanto, $z = 2i$.

$z = \left(\sqrt{2}, \frac{3\pi}{4}\right) = x + iy$, siendo $x = \sqrt{2} \cos \frac{3\pi}{4} = -1$, $y = \sqrt{2} \sin \frac{3\pi}{4} = 1$. Por tanto,
 $z = -1 + i$.

15. Calcular

a) $(1 + 4i)^3$

b) $(1 + i)^4$

SOLUCIÓN:

a) Se utiliza la fórmula del binomio de Newton

$$(1 + 4i)^3 = \binom{3}{0}1^3 + \binom{3}{1}1^2(4i) + \binom{3}{2}(4i)^2 + \binom{3}{3}(4i)^3 = 1 + 12i - 48 - 64i = -47 - 52i.$$

b) Al ser $1 + i = \left(\sqrt{2}, \frac{\pi}{4}\right)$ se tiene

$$(1 + i)^4 = \left(\left(\sqrt{2}\right)^4, 4\frac{\pi}{4}\right) = (4, \pi) = -4 + 0i.$$

NOTA: Compruebe el lector este resultado aplicando el binomio de Newton.

19. Determinar los números complejos z tales que su cuadrado es igual a su conjugado.

SOLUCIÓN:

Se debe resolver la ecuación $z^2 = \bar{z}$.

CLASES PARTICULARES, TUTORÍAS TÉCNICAS ONLINE
 LLAMA O ENVÍA WHATSAPP: 689 45 44 70

ONLINE PRIVATE LESSONS FOR SCIENCE STUDENTS
 CALL OR WHATSAPP: 689 45 44 70

Cartagena99

$$z_1 = (1, 0) = 1$$

$$z_2 = \left(1, \frac{2\pi}{3}\right) = \cos \frac{2\pi}{3} + i \operatorname{sen} \frac{2\pi}{3} = -\frac{1}{2} + i \frac{\sqrt{3}}{2}$$

$$z_3 = \left(1, \frac{4\pi}{3}\right) = \cos \frac{4\pi}{3} + i \operatorname{sen} \frac{4\pi}{3} = -\frac{1}{2} - i \frac{\sqrt{3}}{2}$$

20. Hallar los números complejos z tales que $z^6 - 9z^3 + 8 = 0$.

SOLUCIÓN:

Sea $z^3 = t$. La ecuación se convierte en

$$t^2 - 9t + 8 = 0$$

que tiene como soluciones $t = 1$ y $t = 8$.

Se resuelven ahora $z^3 = 1$ y $z^3 = 8$. Se trata pues de hallar las raíces cúbicas de 1 y de 8; para ello, expresaremos estos números en forma módulo-argumental.

Puesto que la forma módulo-argumental de 1 es $(1, 0)$ sus raíces cúbicas son

$$z_1 = (1, 0) \quad z_2 = \left(1, \frac{2\pi}{3}\right) \quad z_3 = \left(1, \frac{4\pi}{3}\right)$$

Por ser $8 = (2^3, 0)$ se tiene que las raíces cúbicas de 8 son

$$z_1 = (2, 0) \quad z_2 = \left(2, \frac{2\pi}{3}\right) \quad z_3 = \left(2, \frac{4\pi}{3}\right)$$

22. Se considera un circuito de corriente alterna, de frecuencia ω , formado por una resistencia, una bobina y un condensador. Se define la impedancia de dicho circuito como el número complejo

$$z = R + \left(L\omega - \frac{1}{C\omega}\right)i$$

donde R es la resistencia medida en ohmios, L es la inducción de la bobina medida en henrios y C es la capacidad del condensador medida en faradios.

Si la fuerza electromotriz es $E = E_0 \operatorname{sen} \omega t$, la intensidad del circuito es $I = \frac{E}{z}$. Se pide:

- Hallar el ángulo que forman los vectores I y E , llamado ángulo de desfase.
- Para un valor fijo de R , hallar la relación que debe existir entre L y C para que el circuito sea "resonante" (la intensidad sea máxima).

SOLUCIÓN:

CLASES PARTICULARES, TUTORÍAS TÉCNICAS ONLINE
LLAMA O ENVÍA WHATSAPP: 689 45 44 70

- - -

ONLINE PRIVATE LESSONS FOR SCIENCE STUDENTS
CALL OR WHATSAPP: 689 45 44 70

Cartagena99

- b) Para que la intensidad sea máxima, debe ser $|z|$ mínimo. Puesto que R está fija, esto se consigue con $L\omega = \frac{1}{C\omega}$, es decir $LC = \frac{1}{\omega^2}$.

En esta situación el ángulo de desfase es $\varphi = 0$ e $I = \frac{E}{R}$.

NOTA: En un circuito resonante, la bobina y el condensador se "compensan".

25. a) Calcular $\sin 3\varphi$, $\cos 3\varphi$ en función de las razones trigonométricas de φ , donde $\varphi \in \mathbb{R}$.
b) Obtener $\cos^3 \varphi$ en una fórmula que no contenga potencias de razones trigonométricas.

SOLUCIÓN:

- a) Elevando al cubo $e^{i\varphi}$

$$(e^{i\varphi})^3 = (\cos \varphi + i \sin \varphi)^3$$

se obtiene, por la fórmula de De Moivre,

$$e^{3i\varphi} = \cos 3\varphi + i \sin 3\varphi = (\cos \varphi + i \sin \varphi)^3$$

Utilizando el desarrollo del binomio de Newton se tiene

$$(\cos \varphi + i \sin \varphi)^3 = \cos^3 \varphi + 3i \cos^2 \varphi \sin \varphi - 3 \cos \varphi \sin^2 \varphi - i \sin^3 \varphi.$$

Igualando las partes reales e imaginarias

$$\cos 3\varphi = \cos^3 \varphi - 3 \cos \varphi \sin^2 \varphi$$

$$\sin 3\varphi = 3 \cos^2 \varphi \sin \varphi - \sin^3 \varphi$$

- b) De la igualdad obtenida en el apartado anterior

$$\cos 3\varphi = \cos^3 \varphi - 3 \cos \varphi \sin^2 \varphi;$$

teniendo en cuenta $\sin^2 \varphi = 1 - \cos^2 \varphi$, se obtiene

$$\cos 3\varphi = \cos^3 \varphi - 3 \cos \varphi (1 - \cos^2 \varphi).$$

Por tanto, despejando $\cos^3 \varphi$

$$\cos^3 \varphi = \frac{\cos 3\varphi + 3 \cos \varphi}{4}.$$

26. Calcular

a) $\log(3 + 3i)$

b) $i^{\log i}$

SOLUCIÓN:

- a) El número complejo $3 + 3i$ en forma módulo-argumental es $(3\sqrt{2}, \frac{\pi}{4})$; por tanto,

$$\log(3 + 3i) = \log 3\sqrt{2} + i \left(\frac{\pi}{4} + 2k\pi \right)$$

CLASES PARTICULARES, TUTORÍAS TÉCNICAS ONLINE
LLAMA O ENVÍA WHATSAPP: 689 45 44 70

- - -

ONLINE PRIVATE LESSONS FOR SCIENCE STUDENTS
CALL OR WHATSAPP: 689 45 44 70

Cartagena99

PROBLEMAS PROPUESTOS

12. Calcular

a) $\frac{z_1 z_2 z_3 z_4}{z_1 + z_2 + z_3 + z_4}$ siendo $z_1 = i$, $z_2 = -i$, $z_3 = 1$ y $z_4 = 1 - i$.

b) $1 + i + i^2 + \dots + i^{43}$.

13. Calcular

a) $(1 - 2i)^3$

b) $(2 - 2i)^5$

14. a) Expresar en forma módulo-argumental los complejos $z_1 = 3 + 3i$ y $z_2 = 4i$.

b) Expresar en forma binómica el complejo $z = \left(\sqrt{2}, \frac{5\pi}{4} \right)$

17. Dado $a \in \mathbb{C}$ se considera el número complejo $z = \frac{3 - 2ai}{4 - 3i}$.

Determinar a para que z verifique, en cada caso, que

a) Sea un número imaginario puro.

b) Sea un número real.

c) Esté sobre la bisectriz del primer cuadrante.

20. Hallar los números complejos z tales que $z^{10} - 2z^5 + 1 = 0$.

23. Obtener $\sin 5\varphi$ y $\cos 5\varphi$ en función de las razones trigonométricas de $\varphi \in \mathbb{R}$.

BIBLIOGRAFÍA

García, A.; García, F.; López, A.; Rodríguez, G.; De La Villa, A.; "Cálculo I. Teoría y problemas de análisis matemático en una variable" Clasa 2007

CLASES PARTICULARES, TUTORÍAS TÉCNICAS ONLINE
LLAMA O ENVÍA WHATSAPP: 689 45 44 70

ONLINE PRIVATE LESSONS FOR SCIENCE STUDENTS
CALL OR WHATSAPP: 689 45 44 70

Cartagena99