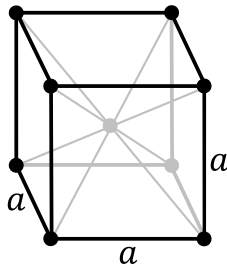


## Cuestiones

**Q1.** (1 punto) El hierro cristaliza en el sistema cúbico centrado en el cuerpo como se ve en la figura adjunta.



El parámetro de red es  $a = 0,287$  nm. En todos los puntos de la celda hay un átomo de hierro de momento dipolar  $m_o = 1,8 \times 10^{-23}$  A m<sup>2</sup>. Si todos los dipolos se orientan en la misma dirección y sentido calcule la magnetización de saturación de un dominio de hierro formado por la réplica de la celda unidad en todas las direcciones.

### Solución:

Veamos primero el momento dipolar total de una única celda. Cada dipolo de los vértices está compartido por 8 celdas, por tanto contribuye con  $m_o/8$ . Como hay 8 vértices el total es, contando el dipolo del centro de la celda:

$$m = 8 \frac{m_o}{8} + m_o = 2m_o$$

Si la muestra está compuesta por  $N$  celdas entonces su momento dipolar es  $2Nm_o$  y su volumen  $Na^3$ . Por tanto la magnetización —momento dipolar por unidad de volumen— es:

$$M = \frac{2Nm_o}{Na^3} = \frac{2m_o}{a^3} = \frac{3,6 \times 10^{-23}}{(0,287 \times 10^{-9})^3} = 1,5 \times 10^6 \text{ A/m}$$

**Q2.** (1 punto) Tenemos el siguiente campo vectorial expresado en coordenadas cilíndricas:

$$\mathbf{A}(\rho, z, \varphi) = A_o \left( \left( \frac{z \operatorname{sen} \varphi}{h} - 1 \right) \mathbf{u}_\rho + \frac{z + \rho}{\rho} \mathbf{u}_z + \left( \frac{z \cos \varphi}{h} - \frac{\rho^2}{\sqrt{R^2 + h^2}} \right) \mathbf{u}_\varphi \right)$$

donde  $A_o$ ,  $h$  y  $R$  son constantes. ¿Puede representar este campo un campo magnético,  $\mathbf{B}$ ? Razone la respuesta.

### Solución:

**CLASES PARTICULARES, TUTORÍAS TÉCNICAS ONLINE  
LLAMA O ENVÍA WHATSAPP: 689 45 44 70**

---

**ONLINE PRIVATE LESSONS FOR SCIENCE STUDENTS  
CALL OR WHATSAPP:689 45 44 70**

- Q3.** (1 punto) Analice las diferencias en la propagación de una señal electromagnética en un cable coaxial y en una guía de ondas. ¿Que limitaciones presenta uno y otro sistema de transmisión?
- Q4.** (1 punto) A partir de las expresiones para  $\mathbf{E}$  y  $\mathbf{H}$  de una antena lineal, deduzca las propiedades de los campos de radiación y defina lo que se entiende por factor de antena. Particularice para una antena de media longitud de onda.

## Ejercicios

- E1.** (3 puntos) Una esfera de radio  $a$  presenta la siguiente imanación:

$$\mathbf{M}(r) = M_o \left(1 - \frac{r^2}{a^2}\right) \mathbf{u}_z$$

donde  $r$  es la distancia al centro de la esfera.

- Calcule el momento magnético total de la esfera.
- Calcule las corrientes de imanación  $\mathbf{J}_m$  y  $\mathbf{K}_m$ .
- Calcule el potencial escalar magnético,  $\phi_m$ , en puntos del eje  $z$  alejados de la esfera ( $|z| \gg a$ ).

### Solución:

*En el enunciado de examen faltaba el factor  $M_o$  en la magnetización.*

El momento magnético se obtiene integrando la magnetización a todo el volumen:

$$\mathbf{m} = \int \mathbf{M} dv$$

con  $dv$  dado en coordenadas esféricas  $dv = (r \sin \theta d\varphi)(r d\theta)(dr)$ ,

$$\mathbf{m} = M_o \mathbf{u}_z \int \left(1 - \frac{r^2}{a^2}\right) r^2 \sin \theta d\varphi d\theta dr$$

Integrando en las variables angulares:

$$\mathbf{m} = 4\pi M_o \mathbf{u}_z \int_0^a \left(1 - \frac{r^2}{a^2}\right) r^2 dr$$

**CLASES PARTICULARES, TUTORÍAS TÉCNICAS ONLINE  
LLAMA O ENVÍA WHATSAPP: 689 45 44 70**

---

**ONLINE PRIVATE LESSONS FOR SCIENCE STUDENTS  
CALL OR WHATSAPP:689 45 44 70**

Las corrientes superficiales de imanación se obtienen evaluando  $\mathbf{M}$  en las fronteras del material; en este caso:

$$\mathbf{M}(a) = M_o \left(1 - \frac{a^2}{a^2}\right) = 0$$

por tanto:

$$\mathbf{K}_m = \mathbf{M}(a) \times \mathbf{n} = 0$$

La densidad de corriente de imanación es  $\mathbf{J}_m = \nabla \times \mathbf{M}$ . Podemos realizar la operación en coordenadas esféricas, transformando  $\mathbf{u}_z = \cos \theta \mathbf{u}_r - \sin \theta \mathbf{u}_\theta$ . Pero por simplicidad elegimos hacerlo en coordenadas cilíndricas, tomando  $r^2 = \rho^2 + z^2$ ; en este caso sólo hay una derivada distinta de 0:

$$\mathbf{J}_m = \nabla \times \mathbf{M} = -\frac{\partial M_z}{\partial \rho} \mathbf{u}_\varphi = \frac{2M_o}{a^2} \rho \mathbf{u}_\varphi = \frac{2M_o}{a^2} r \sin \theta \mathbf{u}_\varphi$$

El potencial escalar se obtiene a partir de la ec. (1.42):

$$\phi_m = \frac{1}{4\pi} \oint_{S_o} \frac{\mathbf{M} \cdot \mathbf{n}}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|} ds' - \frac{1}{4\pi} \int_{V_o} \frac{\nabla' \cdot \mathbf{M}}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|} dv'$$

El primer término es el término superficial y ya sabemos que es nulo porque la magnetización se anula en la superficie de la esfera. Por tanto queda,

$$\phi_m = -\frac{1}{4\pi} \int_{V_o} \frac{\nabla' \cdot \mathbf{M}}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|} dv'$$

Para resolver la integral tenemos primero que calcular la divergencia de la magnetización; elegimos de nuevo las coordenadas cilíndricas para realizar esta operación.

$$\nabla \cdot \mathbf{M} = \frac{\partial M_z}{\partial z} = -\frac{2M_o}{a^2} z = -\frac{2M_o}{a^2} r \cos \theta$$

Y sustituiremos en la integral la forma en coordenadas esféricas puesto que la integral es más cómodo realizarla en ese sistema de coordenadas. Los otros elementos son:

$$dv' = r^2 \sin \theta d\varphi d\theta dr$$

**CLASES PARTICULARES, TUTORÍAS TÉCNICAS ONLINE  
LLAMA O ENVÍA WHATSAPP: 689 45 44 70**

---

**ONLINE PRIVATE LESSONS FOR SCIENCE STUDENTS  
CALL OR WHATSAPP:689 45 44 70**

Sustituimos todo y realizamos ya la integral en  $\varphi$ :

$$\phi_m = \frac{M_o}{a^2} \int \frac{r^3 \cos \theta \sin \theta}{\sqrt{r^2 + z^2 - 2zr \cos \theta}} d\theta dr$$

Desarrollamos el denominador aprovechando que, en todo el intervalo de integración,  $|z| \gg r$ :

$$(r^2 + z^2 - 2zr \cos \theta)^{-1/2} \simeq z^{-1} \left(1 - \frac{2r}{z} \cos \theta\right)^{-1/2} \simeq \frac{1}{z} \left(1 + \frac{r}{z} \cos \theta\right)$$

Sustituyendo:

$$\phi_m = \frac{M_o}{za^2} \int r^3 \cos \theta \sin \theta \left(1 + \frac{r}{z} \cos \theta\right) d\theta dr$$

Realizamos las integrales angulares:

$$\int_0^\pi \cos \theta \sin \theta d\theta = \left[ -\frac{\cos^2 \theta}{2} \right]_0^\pi = -\left(\frac{1}{2} - \frac{1}{2}\right) = 0$$

$$\int_0^\pi \cos^2 \theta \sin \theta d\theta = \left[ -\frac{\cos^3 \theta}{3} \right]_0^\pi = -\left(-\frac{1}{3} - \frac{1}{3}\right) = \frac{2}{3}$$

Ahora sólo queda:

$$\phi_m = \frac{2M_o}{3z^2 a^2} \int_0^a r^4 dr = \frac{2M_o a^3}{15z^2}$$

Algunos han intentado el ejercicio a partir de la expresión nativa del potencial escalar (1.41):

$$\begin{aligned} \phi_m &= \frac{1}{4\pi} \int_{V_o} \left( \mathbf{M} \cdot \frac{\mathbf{r} - \mathbf{r}'}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|^3} \right) dv' \\ &= \frac{M_o}{4\pi} \int \frac{\mathbf{u}_z \cdot (z\mathbf{u}_z - r\mathbf{u}_r)}{|z\mathbf{u}_z - r\mathbf{u}_r|^3} \left(1 - \frac{r^2}{a^2}\right) r^2 \sin \theta dr d\theta d\varphi \\ &= \frac{M_o}{2} \int \frac{z - r \cos \theta}{(z^2 + r^2 - 2zr \cos \theta)^{3/2}} \left(1 - \frac{r^2}{a^2}\right) r^2 \sin \theta dr d\theta \end{aligned}$$

Esto es posible, pero hay que tener un poco de cuidado con la aproximación del de-

**CLASES PARTICULARES, TUTORÍAS TÉCNICAS ONLINE  
LLAMA O ENVÍA WHATSAPP: 689 45 44 70**

---

**ONLINE PRIVATE LESSONS FOR SCIENCE STUDENTS  
CALL OR WHATSAPP:689 45 44 70**

Sustituyendo:

$$\begin{aligned}\phi_m &= \frac{M_o}{2z^2} \int \left(1 - \frac{r}{z} \cos \theta\right) \left(1 + \frac{3r}{z} \cos \theta\right) \left(1 - \frac{r^2}{a^2}\right) r^2 \sin \theta dr d\theta \\ &\simeq \frac{M_o}{2z^2} \int \left(1 + \frac{2r}{z} \cos \theta\right) \left(1 - \frac{r^2}{a^2}\right) r^2 \sin \theta dr d\theta\end{aligned}$$

Al hacer la integral angular se ve que el término principal no se anula (la integral vale 2) y sí lo hace el primer término en  $(r/z)$ ; pero podría haber sido al revés.

$$\phi_m = \frac{M_o}{z^2} \int_0^a \left(1 - \frac{r^2}{a^2}\right) r^2 dr = \frac{2M_o a^3}{15z^2}$$

**E2.** (3 puntos) Una onda plana linealmente polarizada en el eje  $X$  se propaga en el aire en la dirección del eje  $Z$ . La frecuencia de la onda es de 1,5 GHz y la amplitud del campo magnético  $H_o$  es de 0,32 A/m. La onda incide normalmente en  $z = 0$  en un medio dieléctrico semiinfinito no magnético con  $\epsilon_r = 9$ . Determine:

- La expresión fasorial del campo eléctrico incidente
- Los coeficientes de reflexión y transmisión
- Las expresiones fasoriales de los campos eléctricos reflejado y transmitido
- ¿Cuál es la intensidad del campo eléctrico en la superficie de separación de ambos medios?
- La distancia en el aire desde la frontera al máximo más cercano de la intensidad de campo eléctrico. En dicho punto ¿qué valor tendrá la intensidad de campo magnético?

**Solución:**

a) El fasor correspondiente al campo eléctrico viene dado por la siguiente expresión

$$\hat{\mathbf{E}}^i = E_o e^{-jkz} \mathbf{u}_x$$

donde, la amplitud del campo eléctrico está relacionada con la amplitud del campo magnético mediante la impedancia característica del medio que en este caso es

**CLASES PARTICULARES, TUTORÍAS TÉCNICAS ONLINE  
LLAMA O ENVÍA WHATSAPP: 689 45 44 70**

---

**ONLINE PRIVATE LESSONS FOR SCIENCE STUDENTS  
CALL OR WHATSAPP:689 45 44 70**

y la constante de propagación es

$$k = \frac{\omega}{c} = \frac{2\pi f}{c} = \frac{2\pi 1,5 \cdot 10^9}{3 \cdot 10^8} = 10\pi \text{ m}^{-1} = 31,4 \text{ m}^{-1}$$

Por tanto

$$\hat{\mathbf{E}}^i = 120,64 e^{-j10\pi z} \mathbf{u}_x \quad \text{V/m}$$

b) Para determinar los coeficientes de transmisión y reflexión necesitamos conocer la impedancia característica del medio dielectrico

$$Z_d = \sqrt{\frac{\mu}{\epsilon}} = \sqrt{\frac{\mu_o}{9\epsilon_o}} = 40\pi$$

Y entonces, tenemos

$$\tau = \frac{2Z_d}{Z_o + Z_d} = 0,5$$

y

$$\Gamma = \tau - 1 = -0,5$$

c) Las expresiones fasoriales para los campos transmitido y reflejado son

$$\hat{\mathbf{E}}^t = \tau E_o e^{-jk_d z} \mathbf{u}_x$$

y

$$\hat{\mathbf{E}}^r = \Gamma E_o e^{jk_d z} \mathbf{u}_x$$

donde  $k_d$  es la constante de propagación en el dieléctrico y cuyo valor es

$$k_d = \frac{\omega}{v}$$

con  $v$  la velocidad de propagación de la onda en el dieléctrico

$$v = \frac{1}{\sqrt{\mu\epsilon}} = \frac{c}{3} = 10^8 \text{ m/s}$$

Entonces

$$k_d = \frac{\omega}{v} = 3k = 30\pi \text{ m}^{-1} = 94,25 \text{ m}^{-1}$$

Por tanto, las expresiones fasoriales para los campos transmitido y reflejado son

$$\hat{\mathbf{E}}^t = 60,3e^{-j30\pi z} \mathbf{u}_x \quad \text{V/m}$$

**CLASES PARTICULARES, TUTORÍAS TÉCNICAS ONLINE  
LLAMA O ENVÍA WHATSAPP: 689 45 44 70**

---

**ONLINE PRIVATE LESSONS FOR SCIENCE STUDENTS  
CALL OR WHATSAPP:689 45 44 70**

$$\widehat{\mathbf{E}}^T = \widehat{\mathbf{E}}^i + \widehat{\mathbf{E}}^r = 120,64 (e^{-j10\pi z} - 0,5e^{j10\pi z}) \mathbf{u}_x \quad \text{V/m}$$

Y en  $z = 0$

$$\widehat{\mathbf{E}}^T = 60,3\mathbf{u}_x \quad \text{V/m}$$

e) El módulo del campo eléctrico total en el aire viene dado por

$$|\mathbf{E}^T| = \sqrt{\widehat{\mathbf{E}}^T \widehat{\mathbf{E}}^{T*}} = E_o^i \sqrt{1 + \Gamma^2 + 2\Gamma \cos(2kz)}$$

que, teniendo en cuenta que  $\Gamma$  es negativo, será máximo para

$$\cos(2kz) = -1 \quad \Rightarrow \quad 2kz = -\pi \quad \Rightarrow \quad z = \frac{-\pi}{2k} = -0,05 \text{ m} = -5 \text{ cm}$$

En dicho punto, el valor del campo eléctrico es

$$|\mathbf{E}^T| = E_o^i \sqrt{1 + \Gamma^2 - 2\Gamma} = 1,5E_o = 181 \text{ V/m}$$

El campo magnetico será

$$\widehat{\mathbf{H}}^T = \widehat{\mathbf{H}}^i + \widehat{\mathbf{H}}^r = 0,32 (e^{-j10\pi z} + 0,5e^{j10\pi z}) \mathbf{u}_y \quad \text{A/m}$$

En el puntos  $z = 0,05$ , tenemos

$$\widehat{\mathbf{H}}^T = 0,32 (e^{-j\pi/2} + 0,5e^{j\pi/2}) \mathbf{u}_y = 0,32 \left( \frac{j}{2} \right) \mathbf{u}_y \quad \text{A/m}$$

Y la amplitud del campo magnético en este punto es

$$|\mathbf{H}^T| = 0,16 \text{ A/m}$$



CLASES PARTICULARES, TUTORÍAS TÉCNICAS ONLINE  
LLAMA O ENVÍA WHATSAPP: 689 45 44 70

---

ONLINE PRIVATE LESSONS FOR SCIENCE STUDENTS  
CALL OR WHATSAPP:689 45 44 70