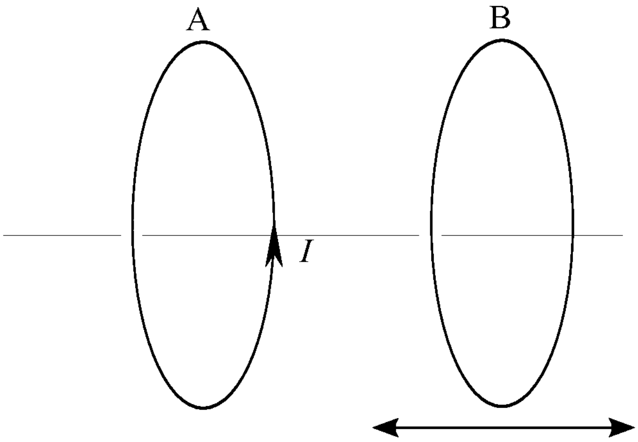
**INSTRUCCIONES GENERALES**: Deben contestarse de forma razonada las preguntas indicadas más abajo. Se permite el uso de calculadora científica no programable, compás y regla. **Cualquier otro material está prohibido**.

---

## Cuestiones

**Q1.** (1 punto) Disponemos de dos espiras conductoras, cerradas, circulares e idénticas, A y B, paralelas y coaxiales una a la otra. Por la espira A hacemos circular una corriente $I$. La espira B es móvil; primero la acercamos a la espira A y después la alejamos según el eje coaxial, siempre manteniendo ambas paralelas como se muestra en la figura adjunta. Se pide discutir y razonar cómo es la corriente que se induce en la espira B en su acercamiento y alejamiento de la espira A.




**Q2.** (1 punto) ¿Qué es la *norma de Lorenz*? ¿Qué ámbito de aplicación tiene?

**Q3.** (1 punto) ¿Cuál es la razón que justifica que no se diseñen guías de onda cuadradas? ¿Por qué se suele diseñar la guía rectangular de forma que $a = 2b$ siendo $a$ y $b$ las dimensiones de la guía?

**Q4.** (1 punto) Describa las distintas zonas de interés en el espacio a la hora de analizar los campos electromagnéticos producidos por un dipolo hertziano cuya corriente varía sinusoidalmente con el tiempo.

# Ejercicios

**E1.** (3,5 puntos) Tenemos una esfera imanada de radio $a$, cuya magnetización es uniforme y de valor $M_o = 4{,}9 \times 10^5$ A/m. Ésta produce un campo magnético en el exterior, cuyo valor sobre el eje de imanación (digamos, $z$) tiene la expresión

$$\mathbf{H}(z) = \frac{2}{3}\frac{a^3}{z^3} M_o\, \mathbf{u}_z$$

Vamos a explorar la fuerza magnética que ejerce esta esfera imanada sobre otra esfera de menor radio, $b \ll a$, compuesta de hierro dulce, material ferromagnético aproximadamente lineal ($\chi \simeq 5000$), que no presenta remanencia y cuya magnetización de saturación es $M_s = 2 \times 10^5$ A/m.

(a) Calcular la magnetización de la esferita de hierro cuando la situamos sobre el eje de imanación de la otra esfera a distancias $z = a$ y $z = 2a$. Calcular el momento dipolar magnético total de la esferita en ambos casos.

(b) Calcular la energía magnética de la esferita de hierro dulce en el campo producido por la otra esfera a lo largo de su eje de magnetización entre los puntos $a \leq z \leq 2a$.

(c) Calcular la fuerza entre las dos esferas cuando la esfera pequeña está situada sobre el eje de imanación de la esfera grande a una distancia $a \leq z \leq 2a$ de su centro. Comprobar que la fuerza es atractiva. Hacer el cálculo numérico si $a = 5\,\mathrm{cm}$ y $b = 1\,\mathrm{mm}$, particularizando en los puntos $z = a$ y $z = 2a$.

**E2.** (2,5 puntos) Una onda electromagnética plana se propaga en la dirección de $y > 0$. El campo eléctrico viene dado por $\mathbf{E}(y,t) = E(y,t)\mathbf{u}_z$. Las constantes del medio son $\varepsilon = 9\varepsilon_o$, $\mu = \mu_o$ y $\gamma = 0$. La onda varía cosenoidalmente con el tiempo con una frecuencia $f = 10^8$ Hz.

En el instante $t = 0{,}25 \times 10^{-8}$ s, se observa que se alcanza un máximo del campo en el punto $y = 0{,}5$ m.

(a) Calcular la constante de propagación y la longitud de onda.

(b) Expresar el campo eléctrico en función del tiempo $t$.

(c) Obtener el campo magnético correspondiente.

(d) Obtenga la expresión para los fasores campo eléctrico y campo magnético.

# FORMULARIO

$$\varepsilon_o = 8{,}854 \cdot 10^{-12}\ \mathrm{F/m} \qquad ; \qquad \mu_o = 4\pi \cdot 10^{-7}\ \mathrm{H/m}$$

## CÁLCULO VECTORIAL

### Rotacional

$$\nabla \times \mathbf{A} = \frac{1}{\rho}\begin{vmatrix} \mathbf{u}_\rho & \rho\mathbf{u}_\varphi & \mathbf{u}_z \\ \partial/\partial\rho & \partial/\partial\varphi & \partial/\partial z \\ A_\rho & \rho A_\varphi & A_z \end{vmatrix}, \qquad \nabla \times \mathbf{A} = \frac{1}{r^2 \operatorname{sen}\theta}\begin{vmatrix} \mathbf{u}_r & r\mathbf{u}_\theta & (r\operatorname{sen}\theta)\mathbf{u}_\varphi \\ \partial/\partial r & \partial/\partial\theta & \partial/\partial\varphi \\ A_\rho & rA_\theta & (r\operatorname{sen}\theta)A_\varphi \end{vmatrix}$$

## PROPAGACION LIBRE

$$\widehat{\mathbf{H}} = \frac{1}{Z}\hat{k} \times \widehat{\mathbf{E}} \quad ; \quad Z = \sqrt{\mu/\varepsilon} \quad ; \quad \varepsilon_c = \varepsilon' - j\frac{\gamma}{\omega} \quad ; \quad k = \omega\sqrt{\mu\varepsilon}$$

$$\alpha = \omega\left[\frac{\mu\varepsilon'}{2}\left(\sqrt{1+\left(\frac{\varepsilon''}{\varepsilon'}\right)^2} - 1\right)\right]^{1/2} \quad ; \quad \beta = \omega\left[\frac{\mu\varepsilon'}{2}\left(\sqrt{1+\left(\frac{\varepsilon''}{\varepsilon'}\right)^2} + 1\right)\right]^{1/2}$$

$$Z_c = \sqrt{\frac{\mu}{\varepsilon'}}\left(1 - j\frac{\varepsilon''}{\varepsilon'}\right)^{-1/2} \quad ; \quad v_{ph} = \omega/\beta \quad ; \quad \lambda = 2\pi/\beta \quad ; \quad \langle S\rangle = \frac{1}{2}\Re\left[\widehat{\mathbf{E}} \times \widehat{\mathbf{H}}^*\right]$$

Si $\varepsilon''/\varepsilon' \gg 1 \Rightarrow \delta = 1/\alpha$ ; $Z_c = (1+j)\frac{\alpha}{\gamma}$

$$\Gamma = \frac{Z_2 - Z_1}{Z_2 + Z_1} \quad ; \quad \tau = 1 + \Gamma$$

## PROPAGACIÓN GUIADA

$$\beta^2 = k^2 - k_c^2$$

$$\widehat{E}_x = \frac{-j}{k_c^2}\left[\beta\frac{\partial \widehat{E}_z}{\partial x} + \omega\mu\frac{\partial \widehat{H}_z}{\partial y}\right] \quad ; \quad \widehat{E}_y = \frac{j}{k_c^2}\left[-\beta\frac{\partial \widehat{E}_z}{\partial y} + \omega\mu\frac{\partial \widehat{H}_z}{\partial x}\right]$$

$$\widehat{H}_x = \frac{j}{k_c^2}\left[\omega\varepsilon\frac{\partial \widehat{E}_z}{\partial y} - \beta\frac{\partial \widehat{H}_z}{\partial x}\right] \quad ; \quad \widehat{H}_x = \frac{-j}{k_c^2}\left[\omega\varepsilon\frac{\partial \widehat{E}_z}{\partial x} + \beta\frac{\partial \widehat{H}_z}{\partial y}\right]$$



$Z_o$ $Z_o$

### Guías de ondas

$$\beta^2 = \omega^2\mu\varepsilon - \left[\left(\frac{m\pi}{a}\right)^2 + \left(\frac{n\pi}{b}\right)^2\right]$$

| Modos TE | Modos TM |
|---|---|
| $\widehat{H}_z = H_o \cos\left(\frac{m\pi x}{a}\right) \cos\left(\frac{n\pi y}{b}\right) e^{-j\beta z}$ | $\widehat{E}_z = E_o \sin\left(\frac{m\pi x}{a}\right) \sin\left(\frac{n\pi y}{b}\right) e^{-j\beta z}$ |
| $\widehat{E}_x = \frac{j\omega\mu}{k_c^2}\frac{n\pi}{b} H_o \cos\left(\frac{m\pi x}{a}\right) \sin\left(\frac{n\pi y}{b}\right) e^{-j\beta z}$ | $\widehat{E}_x = \frac{-j\beta}{k_c^2}\frac{m\pi}{a} E_o \cos\left(\frac{m\pi x}{a}\right) \sin\left(\frac{n\pi y}{b}\right) e^{-j\beta z}$ |
| $\widehat{E}_y = \frac{-j\omega\mu}{k_c^2}\frac{m\pi}{a} H_o \sin\left(\frac{m\pi x}{a}\right) \cos\left(\frac{n\pi y}{b}\right) e^{-j\beta z}$ | $\widehat{E}_y = \frac{-j\beta}{k_c^2}\frac{n\pi}{b} E_o \sin\left(\frac{m\pi x}{a}\right) \cos\left(\frac{n\pi y}{b}\right) e^{-j\beta z}$ |
| $\widehat{H}_x = -\widehat{E}_y/Z_{TE} \quad ; \quad \widehat{H}_y = \widehat{E}_x/Z_{TE}$ | $\widehat{H}_x = -\widehat{E}_y/Z_{TM} \quad ; \quad \widehat{H}_y = \widehat{E}_x/Z_{TM}$ |
| $Z_{TE} = Z\left[1-(f_c/f)^2\right]^{-1/2}$ | $Z_{TM} = Z\left[1-(f_c/f)^2\right]^{1/2}$ |

$$\langle P\rangle_{TE} = \frac{1}{2} Z_{TE} \frac{\beta^2}{k_c^2} \int H_z H_z^* ds \quad ; \quad \langle P\rangle_{TM} = \frac{1}{2Z_{TM}} \frac{\beta^2}{k_c^2} \int E_z E_z^* ds$$

## RADIACIÓN

$$D = 4\pi/\Omega_p \qquad ; \qquad A_e = P_{int}/S_i$$

### Dipolo corto

$$\widehat{\mathbf{A}} = \frac{\mu_o}{4\pi} I_o l \frac{e^{-jkr}}{r} \mathbf{u}_z \quad ; \quad \widehat{E}_\theta = j\frac{Z_o}{4\pi} I_o l k \frac{e^{-jkr}}{r} \sin\theta \quad ; \quad \widehat{H}_\phi = \widehat{E}_\theta / Z_o$$

$$D = 1{,}5 \quad ; \quad A_e = 3\lambda^2/8\pi$$

### Antena lineal

$$\widehat{E}_\theta = \frac{jZ_o I_o}{2\pi r} e^{-jkr} \left[\frac{\cos(kh\cos\theta) - \cos kh}{\operatorname{sen}\theta}\right] \quad ; \quad \widehat{H}_\varphi = \frac{\widehat{E}_\theta}{Z_o}$$

### Factor de agrupación de radiadores verticales

$$f(\theta) = \frac{\operatorname{sen}(N\psi/2)}{\operatorname{sen}(\psi/2)} \quad ; \quad \psi = \delta + kd\cos\theta$$