

1) Encuentra el dominio de las siguientes funciones:

(a)  $f(x) = \frac{1}{x - \sqrt{1 - x^2}}$ , (b)  $f(x) = \frac{1}{1 - \ln x}$ , (c)  $f(x) = \ln(x - x^2)$ , (d)  $f(x) = \sqrt[3]{x - 1}$ ,  
 (e)  $f(x) = \sqrt{3x^2 - 2x + 1}$ , (f)  $f(x) = e^{\frac{1}{x^2}}$ , (g)  $f(x) = \frac{3 - x}{\sin x}$  (h)  $f(x) = (\sin x + \cos x)^x$ .

2) Halla el conjunto imagen de las siguientes funciones:

(a)  $f(x) = x^2 - 3x$ , (b)  $f(x) = e^{2x}$ , (c)  $f(x) = \tan x$ , (d)  $f(x) = \sqrt{4 - x^2}$ .

Además, razona si son inyectivas y, para cada una de ellas, calcula la preimagen de  $y = 0$ , si existe. Interpreta geoméricamente la inyectividad, así como la existencia de la preimagen de  $y = 0$ .

3) La gráfica de una función  $f(x) = 2x^2 - bx + 1$  contiene el punto de coordenadas  $(1, 7)$ . Halla el valor de  $b$ .

4) Esboza la gráfica de una función con dominio  $(-\infty, -2) \cup [0, \infty)$  que sea decreciente en  $(-\infty, -2)$ , convexa en  $(-4, -2)$ , tenga un punto de inflexión en  $x = -4$ , un máximo absoluto en  $x = 1$  y un mínimo relativo en  $x = 4$ .

5) Razona si son inyectivas, periódicas, pares o impares las siguientes funciones:

(a)  $f(x) = |x - 1|$ ,  $f(x) = \sin |x|$ ,  $f(x) = 2 \cos^2 x - 3 \cos x - 1$ ,  $f(x) = x^5 - 3x^3 + x$ .

6) Sean  $f(x) = 3x - 9$  y  $g(x) = \frac{5}{x-3}$ .

- (a) Hallar  $g \circ f$  y  $f \circ g$ .
- (b) Observar que  $(g \circ f)(4)$  no está definido y explicar por qué. Hacer lo mismo con  $(f \circ g)(3)$ .
- (c) Hallar el dominio de  $g \circ f$  y de  $f \circ g$ .

7) Dadas las funciones  $f(x) = 2x + 1$ ,  $g(x) = 3x - 2$  y  $h(x) = x^2$ , calcular  $h \circ (g \circ f)$  y  $(h \circ g) \circ f$ , y comprobar que ambas composiciones son iguales.

8) Si  $f(x) = \sin(x)$  y  $g(x) = 1 - x^2$ , entonces una de las dos posibles composiciones  $f \circ g$  ó  $g \circ f$  coincide con la función  $h(x) = \cos^2(x)$ . ¿Cuál de ellas es?

9) Para cada apartado, decide si existe la función inversa de  $f$  y, en caso afirmativo, calcula esa función e indica su dominio de definición.

(a)  $f(x) = \tan^2(x)$ ,  $\text{Dom}(f) = \left[0, \frac{\pi}{2}\right)$ . (b)  $f(x) = \tan^2(x)$ ,  $\text{Dom}(f) = \left(-\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{4}\right)$ .



**CLASES PARTICULARES, TUTORÍAS TÉCNICAS ONLINE**  
**LLAMA O ENVÍA WHATSAPP: 689 45 44 70**

---

**ONLINE PRIVATE LESSONS FOR SCIENCE STUDENTS**  
**CALL OR WHATSAPP:689 45 44 70**

(c)  $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x^3 + 2x + 5}{2x^3 - 2x^2 + x + 3}$ , (d)  $\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{x^2 + 1}{3x^3 + 2x}$ .

11) Discute la existencia de los límites siguientes y calcula su valor cuando sea posible:

$$\begin{array}{lll}
 \text{(a)} \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^3 + 4x - 7}{7x^2 - \sqrt{2x^6 + x^5}}, & \text{(b)} \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{(3x^2 - 1)^2(x + 7)^3}{x^7 + 6}, & \text{(c)} \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\sqrt{x^2 + 5}}{x^2 - 7}, \\
 \text{(d)} \lim_{x \rightarrow \infty} (\sqrt{x^2 + 4x} - x), & \text{(e)} \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{e^x}{e^x - 1}, & \text{(f)} \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{e^x}{e^x - 1}, \\
 \text{(g)} \lim_{x \rightarrow 0^+} e^{1/x}, & \text{(h)} \lim_{x \rightarrow 0^-} e^{1/x}, & \text{(i)} \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{1 - e^{1/x}}{1 + e^{1/x}}, \\
 \text{(j)} \lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{1 - e^{1/x}}{1 + e^{1/x}}, & \text{(k)} \lim_{x \rightarrow 2^-} \frac{x}{x^2 - 4}, & \text{(l)} \lim_{x \rightarrow 1} \frac{|x - 1|}{x - 1}, \\
 \text{(m)} \lim_{x \rightarrow 0} \cos\left(\frac{1}{x^2}\right), & \text{(n)} \lim_{x \rightarrow 0^+} \sqrt{x} \operatorname{sen}\left(\frac{1}{x}\right) & \text{(o)} \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\log(x)}{\sqrt[3]{x} + \sqrt[3]{3}}, \\
 \text{(p)} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - e^{1/x}}{1 + e^{1/x}}, & \text{(q)} \lim_{x \rightarrow 0} e^{1/x}, & \text{(r)} \lim_{x \rightarrow 0} e^{(-1/x^2)}, \\
 \text{(s)} \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{e^{x/2}}{x^{10} + 48}, & \text{(t)} \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{e^{-2x}}{\sqrt{x^{18} + 1}} & \text{(u)} \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\log^2 x}{\sqrt{x + 3}}.
 \end{array}$$

12) Encontrar un ejemplo de funciones  $f, g$ , definidas en  $\mathbb{R}$ , tales que

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty, \quad \lim_{x \rightarrow +\infty} g(x) = -\infty,$$

y para las que, sin embargo,  $\lim_{x \rightarrow +\infty} (f(x) + g(x))$  no existe.

**Indicación:** Piensa primero en una función  $h$  que no tenga límite cuando  $x \rightarrow +\infty$ , y encuentra  $f$  y  $g$  en las condiciones anteriores de modo que  $f + g = h$ .

13) Calcula cuánto valen los límites siguientes:

$$\text{(a)} \lim_{x \rightarrow 2} \frac{\sqrt{x} - \sqrt{2}}{x - 2}, \quad \text{(b)} \lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^2 - 1}{3 - \sqrt{x^2 + 8}}.$$

**Ayuda:** Simplifica factores comunes.

14) Estudia el dominio y los puntos de discontinuidad de las siguientes funciones:

$$\begin{array}{llll}
 \text{(a)} f(x) = \frac{5x-10}{x^2-2x}, & \text{(b)} f(x) = \frac{x+1}{x}, & \text{(c)} f(x) = \ln|x|, & \text{(d)} f(x) = \begin{cases} \frac{|x|}{x} & \text{si } x \neq 0 \\ 0 & \text{si } x = 0 \end{cases}, \\
 \text{(e)} f(x) = \frac{\sin x}{x}, & \text{(f)} f(x) = \frac{x^2-x}{\sin(\pi x)}, & \text{(g)} f(x) = \frac{x^4-4}{x^2+4x+4}, & \text{(h)} f(x) = \begin{cases} -1 & \text{si } x < 0 \\ 0 & \text{si } x = 0 \\ 1 & \text{si } x > 0 \end{cases}.
 \end{array}$$

15) Calcula qué valor debe tener  $c$  para que la función  $f(x) = \begin{cases} \arctan x, & \text{para } x \leq 1 \\ \ln x + c, & \text{para } x > 1 \end{cases}$  sea continua, y dibuja la gráfica de  $f$  para ese valor.

16) Se considera la función  $f(x) = x^3 - 3x^2 - 9x + 1$  en el intervalo cerrado  $[-2, 6]$ . ¿Cuáles son los valores máximo y mínimo que alcanza  $f$  en dicho intervalo? Responde a la misma pregunta para las funciones  $g(x) = x^4 + 3x^2$  y  $h(x) = e^x$ .

17) Calcula las derivadas de las siguientes funciones:

**CLASES PARTICULARES, TUTORÍAS TÉCNICAS ONLINE  
LLAMA O ENVÍA WHATSAPP: 689 45 44 70**

---

**ONLINE PRIVATE LESSONS FOR SCIENCE STUDENTS  
CALL OR WHATSAPP:689 45 44 70**

(b) Da un ejemplo de una función continua  $f$ , definida en el intervalo  $[0, +\infty)$ , que no alcanza ni máximo ni mínimo global en este intervalo y satisface  $|f(x)| < 1$  para todo  $x \in [0, +\infty)$ .

20) Discute la existencia de los límites siguientes y calcula su valor cuando sea posible:

- (a)  $\lim_{x \rightarrow \sqrt{3}} \frac{x^2 - 3}{2x - 2\sqrt{3}}$ , (b)  $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{\operatorname{sen}(x^2 - 1)}{x - 1}$ , (c)  $\lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{4}} (2 \operatorname{sen}^2 x - 1) \arctan(2x)$ ,  
 (d)  $\lim_{x \rightarrow +\infty} e^{\frac{e^x + x}{e^x - x}}$ , (e)  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\tan^3 x}{x^4 + x^3}$ , (f)  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{(e^x - 1)^2 \operatorname{sen}^2 x}{\tan^3 x}$ ,  
 (g)  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos x + x^2}{2x^2}$ , (h)  $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{(\ln x)^2}{x}$ , (i)  $\lim_{x \rightarrow +\infty} \left( \frac{2x + 3}{2x - 3} \right)^x$ ,  
 (j)  $\lim_{x \rightarrow 0^+} (e^x + 2x)^{3/x}$ , (k)  $\lim_{x \rightarrow 0} \left( \frac{1}{\operatorname{sen}^2 x} - \frac{1}{x^2} \right)$ , (l)  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x}{x}$ ,  
 (m)  $\lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}} \frac{\tan 5x}{\tan 3x}$ , (n)  $\lim_{x \rightarrow 0^+} x^{\operatorname{sen} x}$ , (o)  $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{e^x + 2^x}{e^x - 2^x}$ .



Cartagena99

CLASES PARTICULARES, TUTORÍAS TÉCNICAS ONLINE  
 LLAMA O ENVÍA WHATSAPP: 689 45 44 70

---

ONLINE PRIVATE LESSONS FOR SCIENCE STUDENTS  
 CALL OR WHATSAPP: 689 45 44 70