

# Respuesta en frecuencia

*Ingeniería Electrónica de Comunicaciones*

Eva Besada Portas

Departamento de Arquitectura de Computadores y Automática.  
Universidad Complutense de Madrid

Curso 2020-2021

## Esquema



- 1 **Objetivos**
- 2 Respuesta en frecuencia de SL Continuos
- 3 Respuesta en Frecuencia de SL Discretos



Los objetivos de esta parte del tema son caracterizar el comportamiento en frecuencia (ante entradas sinusoidales) del sistema en lazo cerrado:

- Sistemas continuos:
  - ▶ Respuesta a entrada sinusoidal
  - ▶ Diagrama de Bode: construcción y análisis
- Sistemas discretos:
  - ▶ Respuesta a entrada sinusoidal
  - ▶ Diagrama de Bode: relación con el continuo



- 1 Objetivos
- 2 Respuesta en frecuencia de SL Continuos
- 3 Respuesta en Frecuencia de SL Discretos

# Respuesta sistema LTI a $A\cos(\omega t)$



- Respuesta genérica:  $y(t) = \mathcal{T}[x(t)] = (x * h)(t)$  con  $h(t) = \mathcal{T}[\delta(t)]$
- Respuesta a  $e^{j\omega t + \phi}$ :
 
$$y(t) = \mathcal{T}[e^{j(\omega t + \phi)}] = \int_{-\infty}^{\infty} h(\tau) e^{j(\omega(t-\tau) + \phi)} d\tau =$$

$$= \int_{-\infty}^{\infty} h(\tau) e^{j(\omega t + \phi)} e^{-j\omega\tau} d\tau = e^{j(\omega t + \phi)} \int_{-\infty}^{\infty} h(\tau) e^{-j\omega\tau} d\tau =$$

$$= H(j\omega) e^{j(\omega t + \phi)} = |H(j\omega)| e^{j(\omega t + \phi + \arg(H(j\omega)))}$$
- Respuesta a  $A\cos(\omega t) = A \frac{e^{j\omega t} + e^{-j\omega t}}{2}$ :
 
$$y(t) = A \frac{H(j\omega) e^{j\omega t} + H(-j\omega) e^{-j\omega t}}{2} = A |H(j\omega)| \frac{e^{j(\omega t + \arg(H(j\omega)))} + e^{-j(\omega t + \arg(H(j\omega)))}}{2} =$$

$$= A |H(j\omega)| \cos(\omega t + \arg(H(j\omega)))$$
- La respuesta en el permanente a una onda sinusoidal es una onda con la misma frecuencia, con la amplitud multiplicada por  $|H(j\omega)|$  y temporalmente desfasada en  $\arg(H(j\omega))$ .
- Relación de la respuesta al impulso con las transformadas:
  - ▶ Transformada Fourier:  $H(j\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} h(\tau) e^{-j\omega\tau} d\tau$
  - ▶ Transformada de Laplace:  $H(s) = \int_{-\infty}^{\infty} h(\tau) e^{-s\tau} d\tau$
- $H(j\omega)$  se obtiene sustituyendo en la función de transferencia  $s$  por  $j\omega$

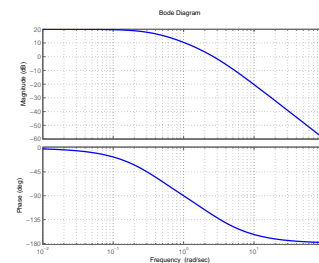
# Diagrama de Bode I



El diagrama de Bode es una representación de la magnitud  $M_w = |G(j\omega)|$  y el desfase  $\phi_w = \arg(G(j\omega))$  introducido por el sistema con función de transferencia  $G(s)$  a diferentes frecuencias  $\omega$ .

La representación se realiza en dos gráficas:

- En la superior se representa  $20 \log_{10}(M_w)$  frente a  $\omega$ .
- En la inferior se representa el desfase en grados:  $\frac{\phi_w * 180}{\pi}$  frente a  $\omega$ .



En ambas graficas se presenta  $\omega$  en escala logarítmica  $\log_{10}(\omega)$

Para obtener el diagrama de Bode de un SL:

- 1 Obtener los valores  $M_w$  y  $\phi_w$ :
  - ▶ A partir de la FT del sistema, con las expresiones vista.
  - ▶ Utilizando la orden bode:  **$[M_w, \text{desfase grados}, w] = \text{bode}(\text{sys})$** .
  - ▶ A partir de un sistema real, aplicandole señales sinusoidales a diferentes  $\omega$ , observando la salida, y calculando  $M_w = \frac{\text{AmplitudSalida}}{\text{AmplitudEntrada}}$  y el desfase  $\phi_w$  entre dos maximos consecutivos de la señal de entrada y salida en el estacionario.
- 2 Representar en escala logarítmica en el eje x,  $\omega$  frente  $20 \log_{10}(M_w)$  y  $w$  frente desfase en grados (calcularlo si está en radianes).

# Diagrama de Bode II

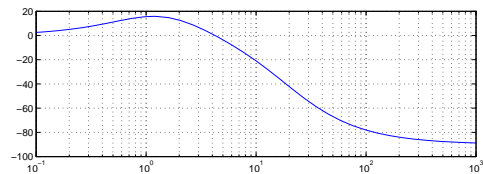
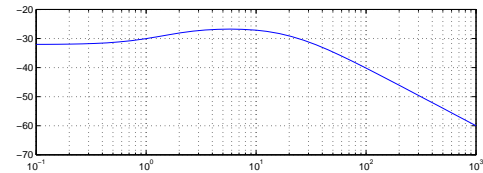
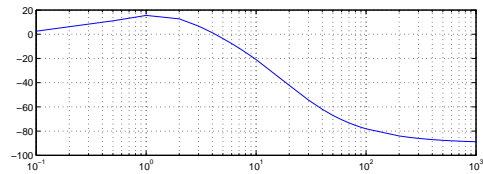
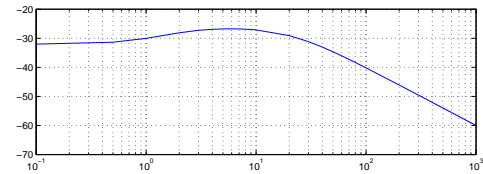


**Ejemplo:** Dibujar el diagrama de Bode de  $G(s) = \frac{s+1}{(s+20)(s+2)}$

```
ws=[0.1 0.5 1:10 20:10:100 200:100:1000];  
[num,den]=tfdata(zpk(-1,[-2,-20],1),'v');  
for k=1:length(ws)  
    w=ws(k);  
    gw=polyval(num,j*w)/polyval(den,j*w);  
    Mg(k)=abs(gw);  
    phi(k)=angle(gw);  
end  
subplot(2,1,1);semilogx(ws,20*log10(Mg));  
grid on;  
subplot(2,1,2);semilogx(ws,phi*180/pi);  
grid on;
```

```
sys=zpk(-1,[-2,-20],1);  
[Mg,phigrado,ws]=bode(sys);  
subplot(2,1,1);semilogx(ws,20*log10(squeeze(Mg)));  
grid on;  
subplot(2,1,2);semilogx(ws,squeeze(phigrado));  
grid on;
```

La orden `squeeze` es necesaria, porque `bode` devuelve los vectores con dimensiones no validas. Ejecutando `bode` sin parametros de salida, se obtiene directamente la representación gráfica.

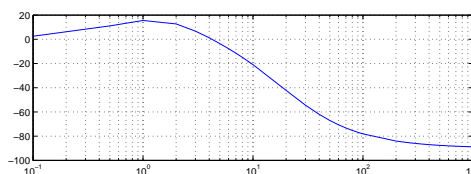
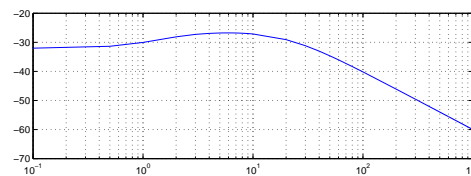


# Interpretación del diagrama de Bode



Dado el diagrama de bode de un sistema podemos:

- Obtener el valor de  $M_w$  y  $\phi_w$  para una frecuencia determinada



- **Identificar el sistema:** Obtener el modelo del sistema en FT, es decir las posiciones de los ceros y polos del sistema, interpretando la forma del diagrama de Bode.

# Forma del diagrama de Bode I



Para dibujar el diagrama de Bode de un SISO lineal continuo:

- Calculamos la magnitud y la fase a partir de  $G(s=jw)$ .
- Si la FT es de un sistema real, sus coeficientes son reales, y por lo tanto solo tiene ceros y polos reales o complejos conjugados:

$$G(s) = \frac{K' \prod_d (s + \sigma_d) \prod_p (s^2 + 2w_{np} \zeta_p s + w_{np}^2)}{s^n \prod_l (s + \sigma_l) \prod_q (s^2 + 2w_{nq} \zeta_q s + w_{nq}^2)} = \frac{K \prod_d (\tau_d s + 1) \prod_p (\frac{s^2}{w_{np}^2} + \frac{2\zeta_p s}{w_{np}} + 1)}{s^n \prod_l (\tau_l s + 1) \prod_q (\frac{s^2}{w_{nq}^2} + \frac{2\zeta_q s}{w_{nq}} + 1)}$$

$$G(s = jw) = \frac{K \prod_d (jw\tau_d + 1) \prod_p (\frac{(jw)^2}{w_{np}^2} + \frac{2jw\zeta_p}{w_{np}} + 1)}{(jw)^n \prod_l (jw\tau_l + 1) \prod_q (\frac{(jw)^2}{w_{nq}^2} + \frac{2jw\zeta_q}{w_{nq}} + 1)}$$

$$r_1 e^{j\theta_1} r_2 e^{j\theta_2} = r_1 r_2 e^{j(\theta_1 + \theta_2)}$$

$$\log_{10} |r_1 e^{j\theta_1} r_2 e^{j\theta_2}| = \log_{10} r_1 + \log_{10} r_2 = \log_{10} |r_1 e^{j\theta_1}| + \log_{10} |r_2 e^{j\theta_2}|$$

$$\arg(r_1 e^{j\theta_1} r_2 e^{j\theta_2}) = \theta_1 + \theta_2 = \arg(r_1 e^{j\theta_1}) + \arg(r_2 e^{j\theta_2})$$

# Forma del diagrama de Bode II



$$G(s = jw) = \frac{K \prod_d (jw\tau_d + 1) \prod_p (\frac{(jw)^2}{w_{np}^2} + \frac{2jw\zeta_p}{w_{np}} + 1)}{(jw)^n \prod_l (jw\tau_l + 1) \prod_q (\frac{(jw)^2}{w_{nq}^2} + \frac{2jw\zeta_q}{w_{nq}} + 1)}$$

$$\begin{aligned} 20 \log_{10} |G(jw)| &= 20 \log_{10} K + \sum_d 20 \log_{10} |jw\tau_d + 1| + \\ &\quad \sum_p 20 \log_{10} \left| \frac{(jw)^2}{w_{np}^2} + \frac{2jw\zeta_p}{w_{np}} + 1 \right| - n 20 \log_{10} (jw) \\ &\quad - \sum_l 20 \log_{10} |jw\tau_l + 1| \\ &\quad - \sum_q 20 \log_{10} \left| \frac{(jw)^2}{w_{nq}^2} + \frac{2jw\zeta_q}{w_{nq}} + 1 \right| \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \arg(G(jw)) &= (\text{sign}(K) = -1) \pi + \sum_d \arg(jw\tau_d + 1) + \\ &\quad \sum_p \arg\left(\frac{(jw)^2}{w_{np}^2} + \frac{2jw\zeta_p}{w_{np}} + 1\right) - \frac{n\pi}{2} \\ &\quad - \sum_l \arg(jw\tau_l + 1) \\ &\quad - \sum_q \arg\left(\frac{(jw)^2}{w_{nq}^2} + \frac{2jw\zeta_q}{w_{nq}} + 1\right) \end{aligned}$$

Podemos ver que le sucede a cada componente por separado, y luego sumar/restar sus aportaciones.

La de los ceros y los polos es similar, solo hay que cambiar el signo.

# Forma del diagrama de Bode III - Ganancia



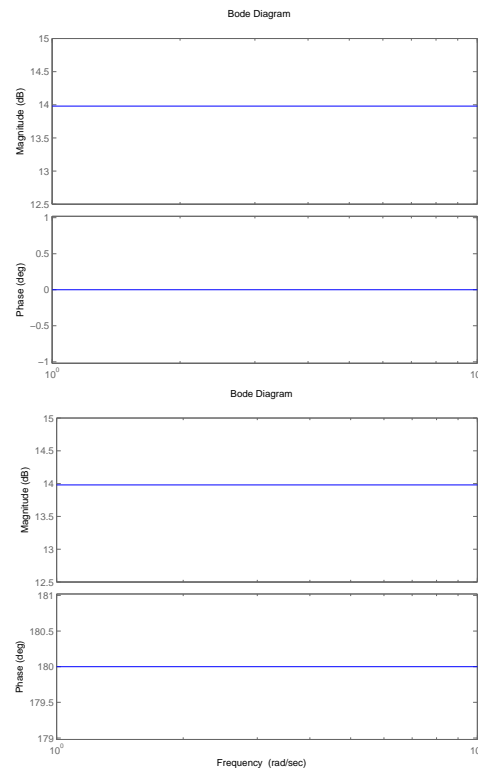
Para una ganancia  $k$ :

$$L_w = 20 \log_{10}(k)$$

$$\arg(k) = \begin{cases} 0 & \text{si } k > 0 \\ \pi & \text{si } k < 0 \end{cases}$$

Ejemplos:

- Arriba:  $k=5$
- Abajo:  $k=-5$



# Forma del diagrama de Bode IV -Polo/cero origen



Para un polo/cero en  $s$ :

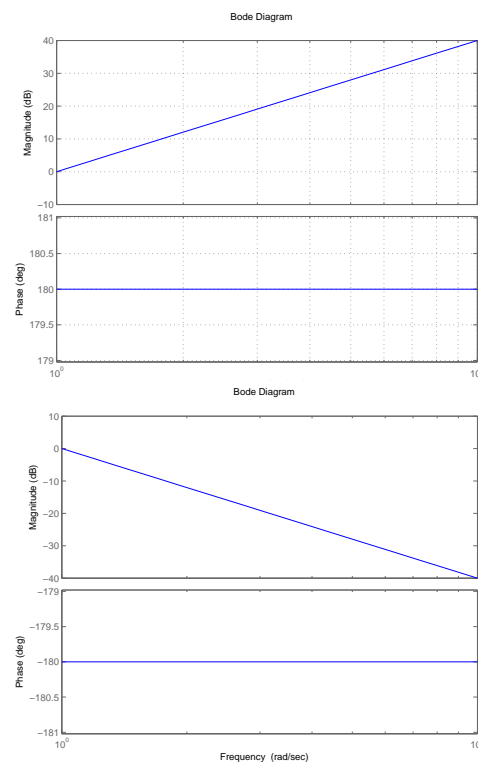
$$s^n = (jw)^n:$$

$$L_w = \begin{cases} n 20 \log_{10}(w) & \text{si cero} \\ -n 20 \log_{10}(w) & \text{si polo} \end{cases}$$

$$\phi_w = \begin{cases} \frac{n\pi}{2} & \text{si cero} \\ -\frac{n\pi}{2} & \text{si polo} \end{cases}$$

Ejemplos:

- Arriba:  $s^2$
- Abajo:  $s^{-2}$



# Forma del diagrama de Bode V-Polo/cero simple 1



Para un polo/cero simple **parte real negativa**:

$$(\tau s + 1) = (\tau j\omega + 1):$$

$$20 \log_{10}(|\tau j\omega + 1|) = 20 \log_{10}(\tau^2 \omega^2 + 1)^{\frac{1}{2}}$$

$$L_w = \begin{cases} 10 \log_{10}(\tau^2 \omega^2 + 1) & \text{si cero} \\ -10 \log_{10}(\tau^2 \omega^2 + 1) & \text{si polo} \end{cases}$$

$$\phi_w = \begin{cases} \text{atan}(\omega\tau) & \text{si cero} \\ -\text{atan}(\omega\tau) & \text{si polo} \end{cases}$$

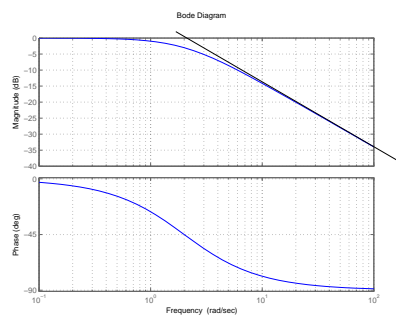
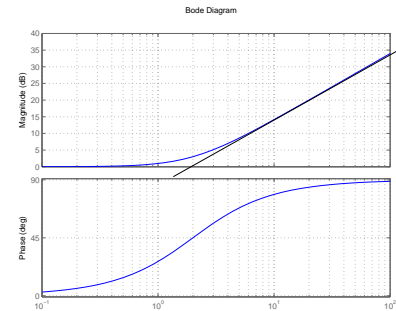
Comportamiento asintótico:

- Si  $\tau\omega \ll 1$ :  $L_w = 0$  y  $\phi_w = 0$

- Si  $\tau\omega \gg 1$ :

$$L_w = \begin{cases} 20 \log_{10}(\tau) + 20 \log_{10}(\omega) & \text{si cero} \\ -20 \log_{10}(\tau) - 20 \log_{10}(\omega) & \text{si polo} \end{cases}$$

$$\phi_w = \begin{cases} \frac{\pi}{2} & \text{si cero} \\ -\frac{\pi}{2} & \text{si polo} \end{cases}$$



Ejemplos:

- Arriba:  $0,5s + 1$

- Abajo:  $(0,5s + 1)^{-1}$

# Forma del diagrama de Bode V -Polo/cero simple 2



Para un polo/cero simple **parte real positiva**:

$$(\tau s - 1) = (\tau j\omega - 1):$$

$$20 \log_{10}(|\tau j\omega - 1|) = 20 \log_{10}(\tau^2 \omega^2 + 1)^{\frac{1}{2}}$$

$$L_w = \begin{cases} 10 \log_{10}(\tau^2 \omega^2 + 1) & \text{si cero} \\ -10 \log_{10}(\tau^2 \omega^2 + 1) & \text{si polo} \end{cases}$$

$$\phi_w = \begin{cases} \text{atan}(-\omega\tau) & \text{si cero} \\ -\text{atan}(-\omega\tau) & \text{si polo} \end{cases}$$

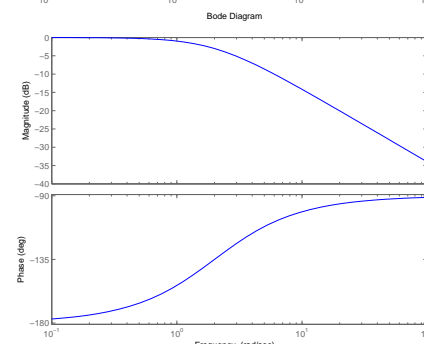
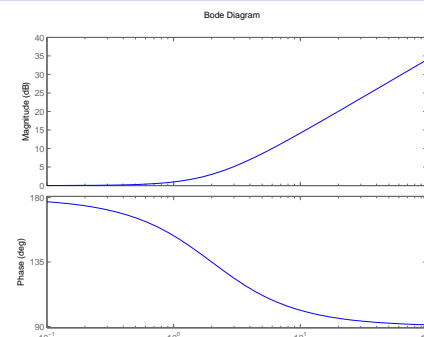
Comportamiento asintótico:

- Si  $\tau\omega \ll 1$ :  $L_w = 0$  y  $\phi_w = \begin{cases} \pi & \text{si cero} \\ -\pi & \text{si polo} \end{cases}$

- Si  $\tau\omega \gg 1$ :

$$L_w = \begin{cases} 20 \log_{10}(\tau) + 20 \log_{10}(\omega) & \text{si cero} \\ -20 \log_{10}(\tau) - 20 \log_{10}(\omega) & \text{si polo} \end{cases}$$

$$\phi_w = \begin{cases} \frac{\pi}{2} & \text{si cero} \\ -\frac{\pi}{2} & \text{si polo} \end{cases}$$



Ejemplos:

- Arriba:  $0,5s - 1$

- Abajo:  $(0,5s - 1)^{-1}$

# Forma del diagrama de Bode VI -Polo/cero doble 1



Para un polo/cero doble **con parte real negativa**:

$$\frac{(j\omega)^2}{\omega_n^2} + \frac{2j\omega\zeta}{\omega_n} + 1$$

$$L_\omega = \begin{cases} 10 \log_{10}\left(\frac{4\zeta^2\omega^2}{\omega_n^2} + \left(1 - \frac{\omega^2}{\omega_n^2}\right)^2\right) & \text{si cero} \\ -10 \log_{10}\left(\frac{4\zeta^2\omega^2}{\omega_n^2} + \left(1 - \frac{\omega^2}{\omega_n^2}\right)^2\right) & \text{si polo} \end{cases}$$

$$\phi_\omega = \begin{cases} \text{atan}\left(\frac{2\omega\zeta/\omega_n}{1-\omega^2/\omega_n^2}\right) & \text{si cero} \\ -\text{atan}\left(\frac{2\omega\zeta/\omega_n}{1-\omega^2/\omega_n^2}\right) & \text{si polo} \end{cases}$$

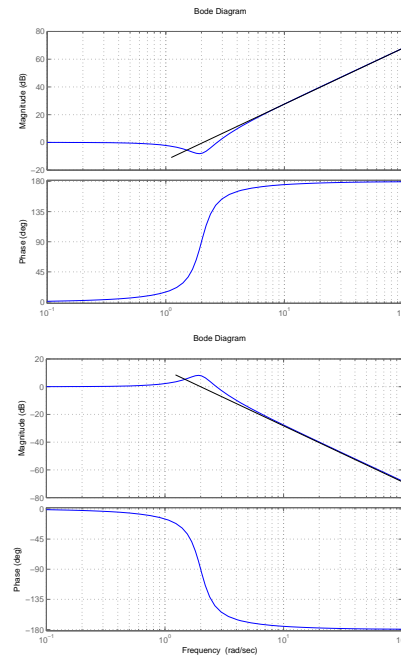
Comportamiento asintótico:

- Si  $\frac{\omega}{\omega_n} \ll 1$ :  $L_\omega = 0$  y  $\phi_\omega = 0$

- Si  $\frac{\omega}{\omega_n} \gg 1$ :  $\phi_\omega = \begin{cases} \pi & \text{si cero} \\ -\pi & \text{si polo} \end{cases}$

$$L_\omega = \begin{cases} 40 \log_{10}(\tau) + 40 \log_{10}(\omega) & \text{si cero} \\ -40 \log_{10}(\tau) - 40 \log_{10}(\omega) & \text{si polo} \end{cases}$$

$$\omega = \omega_n \rightarrow L_\omega = \pm 20 \log(2\zeta)$$



Ejemplos:

- Arriba:  $0,25s^2 + 0,2s + 1$

- Abajo:  $(0,25s^2 + 0,2s + 1)^{-1}$

# Forma del diagrama de Bode VI -Polo/cero doble 2



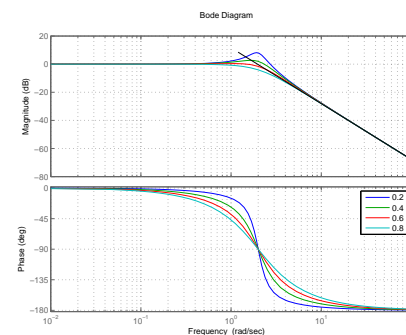
Influencia del valor de  $\zeta$ :

```
K=1
mzetas=[0.2:0.2:0.8];
wn=2;

hold on
for i=1:length(mzetas)
    mzeta=mzetas(i)
    n=[1]
    d=[1/wn^2, 2*mzeta/wn, 1]
    %Cada sistema en un elemento del
    %array de celdas
    sys{i}=tf(n,d);
    lab{i}=sprintf('%2.1f',mzeta);
end
%Le paso todos los sistemas
bode(sys{:})

%Elegir un eje antes de llamar a la
%siguiente orden

legend(lab{:})
```





# Forma del diagrama de Bode VI -Polo/cero doble 3



Para un polo/cero doble con parte real positiva:

$$\frac{(jw)^2}{w_n^2} - \frac{2jw\zeta}{w_n} + 1$$

$$L_w = \begin{cases} 10 \log_{10}\left(\frac{4\zeta^2 w^2}{w_n^2} + \left(1 - \frac{w^2}{w_n^2}\right)^2\right) & \text{si cero} \\ -10 \log_{10}\left(\frac{4\zeta^2 w^2}{w_n^2} + \left(1 - \frac{w^2}{w_n^2}\right)^2\right) & \text{si polo} \end{cases}$$

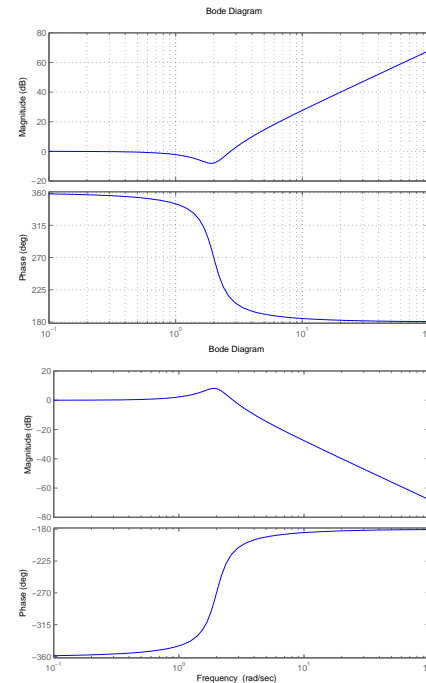
$$\phi_w = \begin{cases} \text{atan}\left(-\frac{-2w\zeta/w_n}{1-w^2/w_n^2}\right) & \text{si cero} \\ -\text{atan}\left(-\frac{-2w\zeta/w_n}{1-w^2/w_n^2}\right) & \text{si polo} \end{cases}$$

Comportamiento asintótico:

- Si  $\frac{w}{w_n} \ll 1$ :  $L_w = 0$  y  $\phi_w = \begin{cases} 2\pi & \text{si cero} \\ -2\pi & \text{si polo} \end{cases}$

- Si  $\frac{w}{w_n} \gg 1$ :  $\phi_w = \begin{cases} \pi & \text{si cero} \\ -\pi & \text{si polo} \end{cases}$

$$L_w = \begin{cases} 40 \log_{10}(\tau) + 40 \log_{10}(w) & \text{si cero} \\ -40 \log_{10}(\tau) - 40 \log_{10}(w) & \text{si polo} \end{cases}$$



Ejemplos:

- Arriba:  $0,25s^2 - 0,2s + 1$
- Abajo:  $(0,25s^2 - 0,2s + 1)^{-1}$

# Forma del diagrama de Bode VII



Resumen:

- Ganancia:

- ▶ Para  $w = 1$  el asintótico que viene de  $w \ll 1$  pasa por  $20 \log(k)$ .
- ▶ Pendiente inicial, n Ceros o Polos en el origen:  $\pm n 20 \text{ dB/dec}$
- ▶ Polo: cae 20 dB/dec. Asintótico en  $1/\tau$  o  $\sigma$
- ▶ Cero: sube 20 dB/dec. Asintótico en  $1/\tau$  o  $\sigma$
- ▶ Cero y Polo complejo conjugado:  $\pm \log_{10}(2\zeta)$

- Desfase

- ▶ Para  $w = 0 \rightarrow \sum \text{arg}_i$  con  $\text{arg}_i = \begin{cases} 0 & \text{si polo o cero negativo} \\ \frac{\pi}{2} & \text{si cero origen} \\ -\frac{\pi}{2} & \text{si polo origen} \\ \pi & \text{si cero positivo} \\ -\pi & \text{si polo positivo} \end{cases}$
- ▶ Polo negativo: cae  $\pi/2$
- ▶ Cero negativo: sube  $\pi/2$
- ▶ Polos y ceros positivos: comportamiento opuesto al negativo

## Diagrama de Bode Continuos VIII



**Ejemplo:** Dibujar el diagrama de Bode de  $G(s) = \frac{s(s+0,3)}{(s+5)(s+20)(s+100)}$

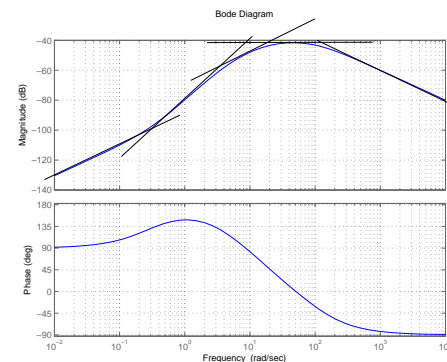
Valores	1 Cero=0	Cero=-0.3	Polo=-5	Polo=-20	Polo=-100
Ganancia	20dB/dec	40dB/dec	20dB/dec	0dB/dec	-20dB/dec
Desfase	$\frac{\pi}{2}$	$\pi$	$\frac{\pi}{2}$	0	$-\frac{\pi}{2}$

Para  $w=1$ , ya hemos pasado algun polo/cero, por lo que el comportamiento asintotico no es valido.

$k = 0,3/5/20/100 : w = 1 \rightarrow 20\log_{10}(k) = -90,4576$ .

Su valor será mayor (subida debido al cero 0.3): -79.80.

```
bode(zpk([0,-0.3],[-5,-20,-100],1))
```



## Diagrama de Bode Continuos IX



**Ejemplo:** Dibujar el diagrama de Bode de

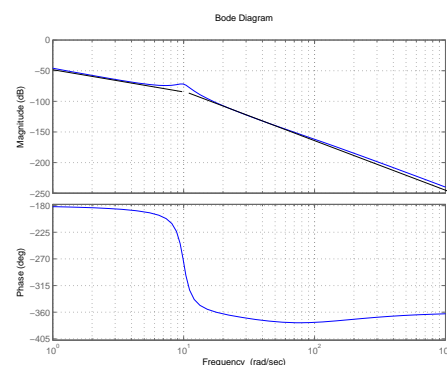
$$G(s) = \frac{s-50}{s^2(s^2+2+100)(s-100)}$$

Valores	2 Polos=0	2 Polos -, $w_n = 10$	Cero=50	Polo=100
Ganancia	-40dB/dec	-80dB/dec	-60dB/dec	-80dB/dec
Desfase	$-\pi$	$-2\pi$	$-\frac{5\pi}{2}$	$-2\pi$

Para  $w=1$ , no hemos pasado algun polo/cero.

$k = 50/10/100 : w = 1 \rightarrow 20\log_{10}(k) = -90,4576$ .

```
s=roots([1,2,100])
bode(zpk([50],[0,0,100,s(1),s(2)],1))
```



# Diagrama de Bode Continuos X



Dado un diagrama de Bode se pueden localizar los polos y los ceros, teniendo en cuenta la forma de la curva.

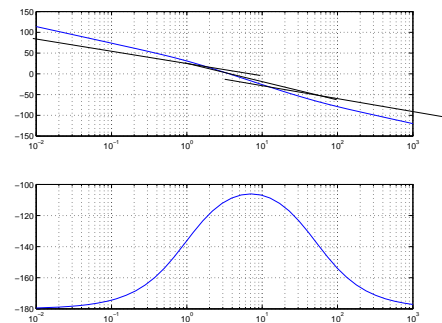
Existe una función de Matlab que hace los calculos, a la que hay que darle la frecuencia, el complejo  $G(w)$  y el numero de ceros y polos que hay:

$[num,den]=invfreqs(G,w,nb,na)$

**Ejemplo:** Obtener el modelo del siguiente Bode

```
%Calculo de los datos con un ejemplo
sys=zpk([50],[0,0,1],1)
[Mw,phigrados,w]=bode(sys);
Mw=squeeze(Mw);
phiw=squeeze(phigrados)*pi/180;
subplot(2,1,1);semilogx(w,20*log10(Mw));
grid on;
subplot(2,1,2);semilogx(w,phiw*180/pi);
grid on;

%Dado Mw y phiw, se calcula Gw
Gw=Mw.*exp(phiw*j);
[num,den]=invfreqs(Gw,w,1,3)
syscal=minreal(tf(num,den))
```



# Diagrama de Bode Continuos XI

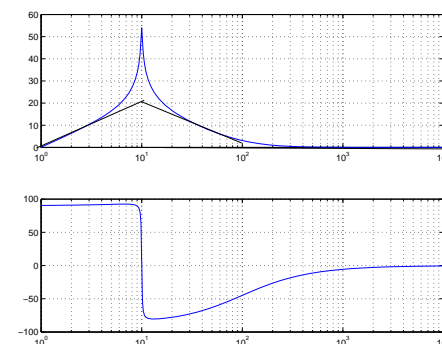


**Ejemplo:** Obtener el modelo a partir de los datos de  $M_w$  y  $\phi_w$  almacenados en un fichero

```
%Cargamos el fichero que almacena los datos en arrays
load DatosBode4
%Al cargar tenemos Mw, phiw y w.

subplot(2,1,1);semilogx(w,20*log10(Mw));
grid on;
subplot(2,1,2);semilogx(w,phiw*180/pi);
grid on;

%Dado Mw y phiw, se calcula Gw
Gw=Mw.*exp(phiw*j);
[num,den]=invfreqs(Gw,w,2,2)
syscal=minreal(tf(num,den))
```



$$G(s) = \frac{s(s+100)}{s^2+0,2s+100}$$



- 1 Objetivos
- 2 Respuesta en frecuencia de SL Continuos
- 3 Respuesta en Frecuencia de SL Discretos

## Respuesta sistema LTI a $A\cos(\omega n)$



- Respuesta genérica:  $y(n) = \mathcal{T}[x(n)] = (x * h)(n)$  con  $h(n) = \mathcal{T}[\delta(n)]$
- Respuesta a  $e^{j\omega n + \phi}$ :
 
$$y(n) = \mathcal{T}[e^{j(\omega n + \phi)}] = \sum_{k=-\infty}^{\infty} h(k)e^{j(\omega(n-k) + \phi)} =$$

$$= \sum_{k=-\infty}^{\infty} h(k)e^{j(\omega n + \phi)}e^{-j\omega k} = e^{j(\omega n + \phi)} \sum_{k=-\infty}^{\infty} h(k)e^{-j\omega k} =$$

$$= H(e^{j\omega})e^{j(\omega n + \phi)} = |H(e^{j\omega})|e^{j(\omega n + \phi + \arg(H(e^{j\omega})))}$$
- Respuesta a  $A\cos(\omega n) = A\frac{e^{j\omega n} + e^{-j\omega n}}{2}$ :
 
$$y(n) = A\frac{H(e^{j\omega})e^{j\omega n} + H(e^{-j\omega})e^{-j\omega n}}{2} = A|H(e^{j\omega})|\frac{e^{j(\omega n + \arg(H(e^{j\omega})) + \arg(H(e^{-j\omega})))} + e^{-j(\omega n + \arg(H(e^{j\omega})) - \arg(H(e^{-j\omega})))}}{2} =$$

$$= A|H(e^{j\omega})|\cos(\omega n + \arg(H(e^{j\omega})))$$
- La respuesta en el permanente a una onda sinusoidal es una onda con la misma frecuencia, con la amplitud multiplicada por  $|H(e^{j\omega})|$  y temporalmente desfasada en  $\arg(H(e^{j\omega}))$ .
- Relación de la respuesta al impulso con las transformadas:
  - ▶ Transformada Fourier:  $H(e^{j\omega}) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} h(k)e^{-j\omega k}$
  - ▶ Transformada Z:  $H(z) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} h(k)z^{-k}$
- $H(e^{j\omega})$  se obtiene sustituyendo en la función de transferencia  $z$  por  $e^{j\omega}$

# Diagrama de Bode I



Para dibujar el diagrama de Bode de un SISO lineal discreto:

- Calculamos la magnitud y la fase a partir de  $G(z = e^{j\omega T})$ .
- En este caso aunque tengamos un sistema real, con coeficientes reales, y por lo tanto con ceros y polos reales o complejos conjugados, al sustituir la  $z = e^{j\omega T}$  no podemos obtener expresiones como en el caso continuo en las que observemos las caidas/subidas asintoticas de  $\pm n20dB/dec$ .

$$G(z) = \frac{1}{z - e^{-0,2T}}$$

$$G(e^{j\omega T}) = \frac{1}{e^{j\omega T} - e^{-0,2T}} = \frac{1}{\cos(\omega T) + j \sin(\omega T) - e^{-0,2T}}$$

$$20 \log_{10} |G(e^{j\omega T})| = -10 \log_{10} \left( \frac{1}{(\cos(\omega T) - e^{-0,2T})^2 + \sin^2(\omega T)} \right)$$

- Sin embargo, en el caso de que el sistema que se este analizando es la discretización de uno continuo, los diagramas de Bode se encuentran relacionados para  $\omega < \frac{\pi}{T}$ , debido a la relación que existe entre los polos de ambos sistemas ( $z = e^{js}$ ).
- Por lo tanto, podemos obtener el sistema continuo del Bode, y discretizarlo posteriormente.

# Diagrama de Bode II



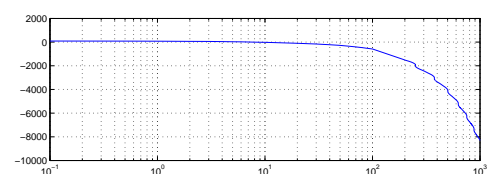
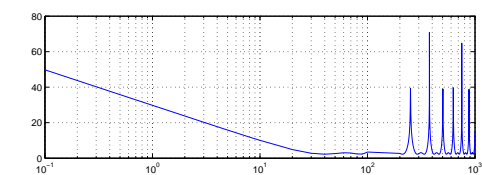
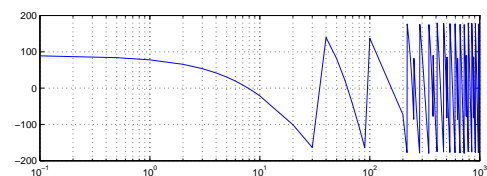
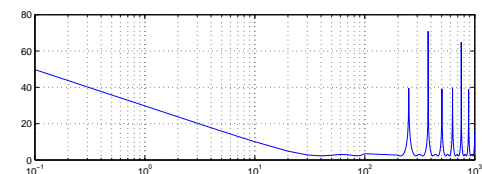
**Ejemplo:** Dibujar el diagrama de Bode de  $G(z) = \frac{z-2}{(z-1)(z-0,5)(z+0,3)}$

```
ws=[0.1 0.5 1:10 20:10:100 200:1000];
T=0.05;
[num,den]=tfdata(zpk(2,[1,.5 -0.3],1,T),'v');
for k=1:length(ws)
    w=ws(k);
    gw=polyval(num,exp(j*w*T))/polyval(den,exp(j*w*T));
    Mg(k)=abs(gw);
    phi(k)=angle(gw);
end
subplot(2,1,1);semilogx(ws,20*log10(Mg));
grid on;
subplot(2,1,2);semilogx(ws,phi*180/pi);
grid on;
```

```
ws=[0.1 0.5 1:10 20:10:100 200:1000];
T=0.05;
sys=zpk(2,[1,.5 -0.3],1,T)
[Mg,phigrado,ws]=bode(sys,ws);
subplot(2,1,1);semilogx(ws,20*log10(squeeze(Mg)));
grid on;
subplot(2,1,2);semilogx(ws,squeeze(phigrado));
grid on;
```

El desfase es diferente, ya que la orden angle solo devuelve valores entre  $[-\pi, \pi]$ .

¿Representar el Bode discreto  $\forall \omega$ ?



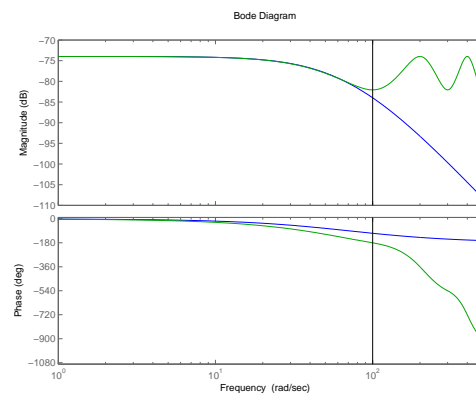
## Diagrama de Bode III



*Ejemplo:* Ver la relacion entre el Bode Continuo y Discreto

$$G(s) = \frac{1}{(s+50)(s+100)}$$

```
gs=zpk([],[-50 -100],1)
Tw=2*pi/100; %El de la frecuencia mayor
Ts=Tw/2; %La mitad al menos
w=pi/Ts
gz=c2d(gs,Ts);
bode(gs,gz,1:1:500)
```



## Diagrama de Bode IV



*Ejemplo:* Ver la relacion entre el Bode Continuo y Discreto

$$G(s) = \frac{(s+3)(s+20)}{(s+50)(s+100)}$$

```
clear all;
gs=zpk([-3 -20],[-50 -100],1)
Tw=2*pi/100; %El de la frecuencia mayor
Ts=Tw/2; %La mitad al menos
w=pi/Ts
gz=c2d(gs,Ts);
bode(gs,gz,1:1:500)
```

