Tema 5: Diagonalización

Definición: Diremos que dos matrices $A, B \in M_{nxn}(\mathbb{K})$ son semejantes si $\exists D \in M_{nxn}(\mathbb{K})$ invertible tal que $A = DBD^{-1}$

Definición: Diremos que una matriz $A \in M_{nxn}(\mathbb{K})$ es diagonalizable si es semejante a una matriz diagonal $D \in M_n(\mathbb{K})$, es decir, si existe una matriz $Q \in M_n(\mathbb{K})$ regular tal que

$$A = QDQ^{-1}$$

Es evidente que una matriz diagonal D es diagonalizable ya que $D = IDI$.

Ejemplo: La matriz

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & \frac{1}{2} \end{pmatrix}$$

es diagonalizable ya que

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & \frac{1}{2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & \frac{1}{2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -2 & 1 \end{pmatrix}$$

Como vamos a ver, la diagonalización de una matriz puede ser aplicada al cálculo de potencias de una matriz.En efecto, supongamos que tenemos una matriz $A \in M_n(\mathbb{K})$ diagonalizable y que queremos calcular su potencia k-ésima A^k. Como A es diagonalizable existe $Q \in M_n(\mathbb{K})$ regular tal que $A = QDQ^{-1}$. Tenemos entonces que:

$$A^k = (QDQ^{-1})^k = (QDQ^{-1})(QDQ^{-1})(QDQ^{-1})...(QDQ^{-1}) =$$

$$QD(Q^{-1}Q)D(Q^{-1}Q)D(Q^{-1}Q)...(Q^{-1}Q)DQ^{-1} = QDDD...DQ^{-1} = QD^kQ^{-1}$$

Calcular la potencia k-ésima D^k de la matriz diagonal D es muy fácil, tan sólo hay que calcular las potencias k-ésimas de los elementos de la diagonal.

Siempre podemos ver una matriz $A \in M_n(\mathbb{K})$ como la matriz de la aplicación lineal $f : \mathbb{K}^n \to \mathbb{K}^n$ que ella misma define respecto de la base canónica. Por otro lado, si A es semejante a una matriz $D \in M_n$ diagonal es porque existe una matriz regular $Q \in M_n$ tal que $A = QDQ^{-1}$, o lo que es lo mismo, $Q^{-1}AQ = D$.

Ahora bien, si consideramos los vectores de $\mathbb{K}^n$ cuyas coordenadas respecto de la base canónica son las columnas de la matriz Q tenemos que $B = \{v_1, ..., v_n\}$ es una base de $\mathbb{K}^n$ y la matriz de paso de B a la base canónica es precisamente Q. En conclusión, si una matriz A es diagonalizable es porque podemos encontrar una base $B = \{v_1, ..., v_n\}$ de $\mathbb{K}^n$ respecto de la cual la matriz de la aplicación f es diagonal.

El problema reside en decidir si existe esta base o no.

Autovalores y autovectores

Definición: Sean $(V, +, \cdot\mathbb{K})$ un espacio vectorial y sea un endomorfismo $f : V \to V$. Decimos que un vector $v \in V$ no nulo es un autovector de f si existe $\lambda \in \mathbb{K}$ tal que

$$f(v) = \lambda v$$

Ejemplo: Sea el endomorfismo $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ dado por $f(x, y) = (y, -x)$. Comprobar que no existe $\lambda \in \mathbb{R}$ tal que haga que $f(u) = \lambda u$ con $u \neq 0$.

Definición: Dado un endomorfismo $f : V \to V$ y un autovalor $\lambda \in \mathbb{K}$ llamamos autoespacio asociado a λ al conjunto:

$$E(\lambda) = \{v \in V : f(v) = \lambda v\}$$

es decir, al conjunto formado por 0 y todos los autovectores asociados a λ.

Proposición: (Propiedades de los autovectores) Sea $(V, +, \cdot)$ un espacio vectorial y sea $f : V \to V$ un endomorfismo. Entonces

- Para todo autovalor λ su autoespacio asociado $E(\lambda) = \{v \in V : f(v) = \lambda v\}$ es un subespacio vectorial de V cuya dimensión es al menos 1
- Todo autovector de f tiene un único autovalor asociado. O dicho de otra forma, si λ_1 y λ_2 son dos autovalores distintos entonces $E(\lambda_1) \cap E(\lambda_2) = \{0\}$
- Un conjunto de autovectores asociados a autovalores distintos son linealmente independientes.

Corolario: Sea $(V, +, \cdot)$ un espacio vectorial y sea $f : V \to V$ un endomorfismo. Sean $\lambda_1, ..., \lambda_k$ autovalores distintos de f y sean $E(\lambda_1), ..., E(\lambda_k)$ sus autoespacios asociados. Entonces un vector se puede escribir como suma de vectores de $E(\lambda_1), ..., E(\lambda_k)$ de forma única. En particular, si $B_1, ..., B_k$ son bases de $E(\lambda_1), ..., E(\lambda_k)$ respectivamente entonces la unión de todas estas bases es un conjunto linealmente independiente. En particular,

$$dim E(\lambda_1) + ... + dim E(\lambda_k) \leq n$$

Así, dado un endomorfismo de un espacio vectorial de dimensión n, el número máximo de autovalores que puede tener dicho endomorfismo es n.

Polinomio característico

Definición: Dada una matriz $A \in M_n$ se llama polinomio característico de A al polinomio de grado n respecto de la variable λ dado por la expresión

$$P(\lambda) = |A - \lambda I| = \begin{vmatrix} a_{11} - \lambda & a_{12} & ... & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} - \lambda & ... & a_{2n} \\ ... & & & \\ a_{n1} & a_{n2} & ... & a_{nn} - \lambda \end{vmatrix}$$

Si f es un endormorfismo de $(V, +, \cdot)$ y A es su matriz respecto de alguna base, el polinomio característico de f es el polinomio característico de A.

Proposición: Si $A \in M_n$ y $C \in M_n$ son dos matrices semejantes, es decir, tales que existe $Q \in M_n$ regular con $C = QAQ^{-1}$, entonces se tiene que sus polinomios característicos son iguales. En particular, el polinomio característico de un endomorfismo f no depende de la base respecto de la cual expresamos su matriz.

Observación: Dos matrices pueden tener el mismo polinomio característico y no ser semejan-

Así pues, lo único que nos estamos preguntando es si el sistema homogéno $(A - \lambda_0 I)X = 0$ tiene una solución no trivial, lo cual ocurrirá si y sólo si el sistema no es de Cramer, es decir, si $|A - \lambda_0 I| = 0$, lo cual sabemos que es cierto ya que λ_0 es precisamente una raíz del polinomio característico $P(\lambda_0) = |A - \lambda_0 I| = 0$.

Ejemplo: Hallar los autovalores y autovectores del endormorfismo f de $\mathbb{R}^3$ dado por la matriz:

$$A = \begin{pmatrix} -1 & 2 & 2 \\ 2 & 2 & 2 \\ -3 & -6 & -6 \end{pmatrix}$$

Teorema de diagonalización

Definición: Decimos que un endomorfismo $f : V \to V$ de un espacio vectorial V es diagonalizable si existe una base de V de forma que la matriz de f respecto de esa base es diagonal.

Proposición: Un endomorfismo f de V es diagonalizable si y solo si existe una base de V formada por autovectores de f.

Corolario: Si el endomorfismo f de V de dimensión n tiene n autovalores distintos en $\mathbb{K}$ entonces es diagonalizable.

Ejemplo: Hallar los autovalores y autovectores del endormorfismo f de $\mathbb{R}^2$ dado por la matriz:

$$A = \begin{pmatrix} 3 & -2 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}$$

Ejemplo: Hallar los autovalores y autovectores del endormorfismo f de $\mathbb{R}^2$ dado por la matriz:

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 2 \\ -2 & 2 \end{pmatrix}$$

Multiplicidad algebraica y multiplicidad geométrica

Definición: Sea V un espacio vectorial y $f : V \to V$ un endomorfismo. Dado un autovalor $\lambda_0 \in \mathbb{K}$ de f, definimos la multiplicidad geométrica de λ_0 como la dimensión de su autoespacio $E(\lambda_0)$, es decir,

$$mult_g(\lambda_0) = dimE(\lambda_0)$$

Proposición: Sea λ_0 un autovalor de un endomorfismo $f : V_n \to V_n$. Si A es la matriz de f en una cierta base, se satisface que

$$mult_g(\lambda_0) = dimE(\lambda_0) = n - rg(A - \lambda_0 I)$$

Definición: Sea V un espacio vectorial y $f : V \to V$ un endomorfismo. Dado un autovalor $\lambda_0 \in \mathbb{K}$ de f, definimos la multiplicidad algebraica de λ_0, y la denotamos $mult_a(\lambda_0)$, como su multiplicidad como raíz del polinomio característico $P(\lambda)$ de f.

Proposición: Sea f un endomorfismo del espacio vectorial V_n y sea $\lambda_0 \in \mathbb{K}$ un autovalor. Entonces se verifica

$$1 \leq mult_g(\lambda_0) \leq mult_a(\lambda_0)$$

Estudio de la diagonalización

Para estudiar la diagonalización de una matriz $A \in M_n$ debemos llevar a cabo los siguientes pasos:

1. Calcular el polinomio característico $P(\lambda) = |A - \lambda I|$
2. Calcular las raíces del polinomio característico de A. Si no todas pertenecen a $\mathbb{R}$ entonces A NO es diagonalizable en $\mathbb{K}$
3. Si todas las raíces del polinomio característico de A pertenecen a $\mathbb{R}$, entonces debemos calcular la multiplicidad geométrica de cada autovalor λ_0 haciendo:

   $$mult_g(\lambda_0) = n - rg(A - \lambda_0 I)$$

   Para los autovalores cuya multiplicidad algebraica es 1 no hace falta hacer esto dado que su multiplicidad geométrica también es 1. Si las multiplicidades algebraica y geométrica coinciden para todos los autovalores entonces la matriz A es diagonalizable. En caso contrario, NO es diagonalizable.
4. Debemos calcular para cada autovalor λ_0 una base del autoespacio $E(\lambda_0)$. Para ello debemos resolver el sistema homogéneo dado en forma matricial por

   $$(A - \lambda_0 I)X = 0$$

5. Uniendo todas las bases de los diferentes autovalores calculadas en el paso anterior obtendremos una base B de $\mathbb{K}^n$. Si ponemos las coordenadas de los vectores en B como columnas de una matriz obtendremos una matriz regular $Q \in M_n$ que es la matriz de cambio de base de B a la canónica. Tendremos entonces que

   $$Q^{-1}AQ = D$$

   donde $D \in M_n$ es una matriz diagonal cuyos elementos en la diagonal son los autovalores a los autovectores de la base B.

Ejemplo: Diagonalizar si es posible la matriz real

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Ejemplo: Diagonalizar si es posible la matriz real

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \end{pmatrix}$$

Teorema de Cayley-Hamilton

Toda matriz cuadrada es raíz de su polinomio característico.
Ejemplo: Sea

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 \end{pmatrix}$$